Trabajo Fin de Máster

Enseñanza de funciones en 2º ESO

Teaching functions in second year of Secondary Education

Autora

Carla Sáenz Castán

Directora

María Aurora Domenech Penón

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2022-2023

ÍNDICE

Introducción ... 3

A. Sobre la Definición del Objeto Matemático a Enseñar ... 4

B. Sobre el Estado de la Enseñanza-Aprendizaje del Objeto Matemático ... 10

C. Sobre los Conocimientos Previos del Alumno ... 33

Evaluación Inicial ... 35

D. Sobre las Razones de Ser del Objeto Matemático ... 38

Problemas que Constituyen la Razón de Ser ... 41

Metodología ... 44

E. Sobre el Campo de Problemas ... 46

F. Sobre las Técnicas ... 56

G. Sobre las Tecnologías ... 62

H. Secuencia Didáctica y Cronograma ... 66

I. Sobre la Evaluación ... 68

Prueba Escrita ... 68

Conocimientos a Evaluar ... 74

J. Sobre la Bibliografía y Páginas Web ... 79

ANEXO I. Evaluación inicial ... 83

ANEXO II. Problemas que constituyen la razón de ser ... 86

ANEXO III. Problemas para trabajar los diferentes campos de problemas ... 90

ANEXO IV. Prueba escrita ... 100

Introducción

La función es un concepto fundamental y de gran importancia en Matemáticas. Aparece en otras áreas del conocimiento como Biología, Física y Química o Economía mediante la obtención de modelos matemáticos que ayuden a comprender la relación de ciertas variables y a explicar fenómenos sucedidos a lo largo del tiempo en nuestro entorno. Además, gran cantidad de información relacionada con fenómenos de cambio, proporcionada por los medios de comunicación, se muestra a través de tablas y gráficas expresando una relación funcional.

El documento presente se corresponde con el trabajo fin de Máster de profesorado para la especialidad de Matemáticas. Por un lado, se caracterizan aspectos fundamentales de la enseñanza y aprendizaje de las funciones en la Educación Secundaria Obligatoria mediante un análisis previo del objeto matemático a enseñar y de las condiciones en las que se desarrolla su enseñanza. Por otro lado, se diseña una secuencia didáctica sobre este objeto matemático para la asignatura de Matemáticas 2º ESO, en la que se detallan tanto los campos de problemas, las técnicas y tecnologías, como la evaluación y la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Para su elaboración se tienen en cuenta todas las referencias recogidas en el apartado de bibliografía y páginas web, así como lo establecido en la ORDEN ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

A. Sobre la Definición del Objeto Matemático a Enseñar

Azcárate y Deulofeu (1996) hacen notar la variedad de definiciones existentes acerca del concepto de función, pudiéndose definir de manera intuitiva como una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables, clasificándolas según el aspecto que más se destaque:

- *Correspondencia entre valores de variables:* "Si existe una correspondencia entre los valores de una variable independiente x y otra variable y, dependiente de aquella, de tal modo que a cada valor de x le corresponde un valor de y, se dice que y es función de x." (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 20).

- *Correspondencia entre elementos de dos conjuntos:* "En general diremos que y es función de x y lo escribiremos $y = f(x)$ cuando, para x variable en un determinado conjunto, a cada valor de x le corresponde un solo valor de y; los valores de y constituyen otro conjunto. A y se le da el nombre de variable dependiente, porque depende de los valores que toma la x; en cambio x es la variable independiente." (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 20).

- *Dependencia entre dos variables:* "La característica esencial de una función es la dependencia entre dos variables. Una función está formada por un conjunto de valores que puede tomar la variable independiente; un conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente y una regla que asigna a cada elemento del conjunto de salida uno y solo uno del conjunto de llegada." (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 20).

- *Conjunto de pares ordenados:* "Sea C un subconjunto del producto cartesiano $A\, x\, B$, diremos que C define una función entre los conjuntos A y B si a cada elemento de A se le asigna aquel o aquellos elementos de B que formen un par con él en uno de los elementos de C." (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 20).

Asimismo, muestran los distintos sistemas de representación que admiten las funciones en orden creciente de abstracción:

- *Expresión verbal.* Uso del lenguaje común para proporcionar una visión descriptiva y, generalmente, cualitativa de la relación funcional. Dado un número real arbitrario x, se le asocia otro número real que se obtiene haciendo el triple de x y sumándole 2.

- *Tabla.* Está formada por dos filas: en la primera se escriben los elementos del dominio y en la segunda los correspondientes al conjunto de llegada, denominado codominio o recorrido. En el caso en el que el dominio sea un conjunto infinito, se hace una representación parcial (elegir valores representativos) como puede verse en la Tabla 1.

Tabla 1

Ejemplo de función expresada en registro tabular

x	2	5	8	11
y	8	17	26	35

A pesar de ofrecernos una visión cuantitativa fácilmente interpretable en términos de correspondencia, difícilmente podemos extraer características globales de la función.

- *Expresión algebraica.* Permite determinar valores con precisión de las variables involucradas. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = f(x) = 3x + 2$.

- *Gráfica cartesiana.* Sea $f: A \rightarrow B$ una función donde A y B son conjuntos dados. La gráfica de f, denotada por G_f, es un subconjunto del producto cartesiano $A\ x\ B$ tal que para todo $x \in A$ existe un único $y \in B$ tal que $(x, y) \in G_f$. Esta representación permite observar las características globales de una función.

Estos dos últimos lenguajes son los de mayor abstracción y los que permiten obtener una visión general y completa, tanto cualitativa como cuantitativa, de una función. Además, posibilitan la caracterización de los modelos funcionales.

La Tabla 2, propuesta por Janvier (1978, recogida en Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 63), refleja la variedad de las posibles traducciones entre los diferentes sistemas de representación que admiten las funciones.

Tabla 2

Traducciones entre los diferentes sistemas de representación que admiten las funciones

Desde / Hacia	Descripción verbal	Tabla	Gráfica	Fórmula
Descripción verbal		Medida	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura		Trazado	Ajuste
Gráfica	Interpretación	Lectura		Ajuste
Fórmula	Interpretación	Cómputo	Gráfica	

Por tanto, tal y como explicitan, el aprendizaje de las funciones debe englobar tanto el conocimiento de cada uno de estos lenguajes de representación, como la traducción entre ellos.

Para la elaboración de la secuencia didáctica que presentaremos, tendremos en consideración lo establecido en la LOMLOE, así como las propuestas correspondientes a Alayo (1990) y a Azcárate y Deulofeu (1996). En la segunda de ellas plantean la siguiente estructura: en primer lugar, se encuentra la formación del concepto de función que engloba la introducción del mismo, mediante el estudio de las gráficas cartesianas, el estudio de las diferentes formas de expresar una función y el estudio de modelos elementales. Posteriormente, aparece el estudio de las características generales de las funciones.

Tal y como indican Cid y Muñoz (2022) la actividad matemática, entendida como modelización, puede descomponerse en campos de problemas extra o intramatemáticos a modelizar, en las técnicas involucradas en su resolución (modelos matemáticos y su gestión), en la tecnología que describe y justifica dichas técnicas y en la teoría que da razón de la tecnología. A continuación, mostramos lo que pretendemos enseñar con la propuesta en relación a lo citado.

- **Campos de problemas (CP):**

CP.1: Identificación y representación de puntos en el plano cartesiano.

CP.2: Familiarización con los conceptos.

CP.2.1: Identificación de variable independiente y variable dependiente. En este caso, aparece una nueva interpretación de la letra: la letra como variable (argumento).

CP.2.2: Identificación de gráficas y relaciones que representan una función.

CP.3: Análisis e interpretación de gráficas. Con este campo de problemas pueden trabajarse características generales de las funciones.

CP.3.1: Identificación del dominio y recorrido.

CP.3.2: Identificación de tramos de crecimiento y decrecimiento.

CP.3.3: Identificación de máximos y mínimos.

CP.3.4: Distinción entre funciones continuas y discontinuas.

CP.3.5: Identificación de puntos de corte con los ejes de coordenadas.

CP.4: Traducción entre los diferentes sistemas de representación que admiten las funciones.

CP.4.1: Partiendo de la representación verbal.

CP.4.2: Partiendo de la representación tabular.

CP.4.3: Partiendo de la representación gráfica.

CP.4.4: Partiendo de la representación algebraica.

CP.5: Estudio de modelos funcionales.

CP.5.1: Modelo lineal.

CP.5.2: Modelo afín.

CP.5.3: Modelo cuadrático.

Comentar que para el estudio de los diferentes modelos se utilizará GeoGebra con el objetivo de explorar la relación entre la gráfica y los parámetros involucrados.

- **Técnicas (TC):**

TC.1: Técnicas asociadas a la identificación y representación de puntos en el plano cartesiano.

TC.1.1: Para identificar un punto en el plano cartesiano debemos indicar su posición con respecto al eje de abscisas (X) y al eje de ordenadas (Y). Para ello, se trazan dos rectas, cada una de ellas perpendicular a uno de los ejes de coordenadas, que pasen por el punto, dando lugar a dos puntos de la forma $(x, 0)$ y $(0, y)$. Estas x e y son las coordenadas buscadas.

TC.1.2: Para representar un punto $P(a, b)$ en el plano cartesiano debemos trazar las rectas $x = a$ e $y = b$, siendo P el punto de intersección de dichas rectas.

TC.2: Técnicas asociadas a la identificación de funciones.

TC.2.1: Identificar las variables correspondientes: la variable dependiente (y) que depende de la variable independiente (x).

TC.2.2: Criterio de la línea vertical: cualquier recta $x = a$ debe cortar en un punto, como máximo, a la gráfica.

TC.3: Técnicas asociadas al análisis e interpretación de gráficas: observación directa de la gráfica y lectura de izquierda a derecha de la misma. También puede utilizarse la técnica **TC.1.1** anteriormente expuesta para el cálculo del punto buscado.

TC.3.1: Indicar el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente y la variable dependiente, respectivamente.

TC.3.2: Observar, dado un intervalo, la variación de la variable dependiente al recorrer, en sentido creciente, los valores de la variable independiente.

TC.3.3: Identificar los puntos en los que la función cambia de creciente a decreciente o viceversa.

TC.3.4: Observar si la gráfica de la función presenta saltos para algún valor de la variable independiente correspondiente al dominio.

TC.3.5: Indicar los puntos de la forma $(x, 0)$ y $(0, y)$.

TC.4: Técnicas asociadas a la traducción entre los diferentes sistemas de representación.

TC.4.1: Partiendo de la representación verbal.

TC.4.1.1: Identificación de la variable independiente, la variable dependiente y la relación entre ellas. Dicha relación puede mostrarse en una tabla de valores, analíticamente o mediante un esbozo en unos ejes de coordenadas.

TC.4.2: Partiendo de la representación tabular.

TC.4.2.1: Establecer verbalmente la relación funcional existente entre las variables independiente y dependiente una vez identificadas.

TC.4.2.2: Representación de puntos a partir de la tabla de valores y elección de su unión (variables discretas o continuas).

TC.4.2.3: Búsqueda de patrón.

TC.4.3: Partiendo de la representación gráfica.

TC.4.3.1: Identificación de las variables correspondientes, interpretación de la relación entre ellas y asociación de un enunciado verbal que pueda representarse con dicha gráfica.

TC.4.3.2: Identificación de puntos en la gráfica.

TC.4.3.3: Identificación de elementos notables en modelos funcionales sencillos.

TC.4.4: Partiendo de la representación algebraica.

TC.4.4.1: Elaborar un enunciado verbal que pueda expresarse algebraicamente con la expresión dada.

TC.4.4.2: Dar valores a la variable x y calcular el valor de la variable y correspondiente.

TC.4.4.3.1: A partir de la expresión algebraica se construye la tabla de valores correspondiente y se representan esos puntos en el plano.

TC.4.4.3.2: A partir de la expresión algebraica se identifican elementos notables, en modelos funcionales sencillos, para representarlos gráficamente.

TC.5: Técnicas asociadas al estudio de modelos funcionales.

TC.5.1: Identificación de la pendiente en el modelo afín.

TC.5.1.1: Cálculo de la constante de proporcionalidad.

TC.5.1.2: Observar el desplazamiento vertical frente al horizontal.

TC.5.1.3: Aplicación de su expresión simbólica.

TC.5.1.4: Dada la expresión algebraica (ecuación explícita de la recta), asociarla con el coeficiente que multiplica a la variable x.

TC.5.2: Identificación de la ordenada en el origen en el modelo afín.

TC.5.2.1: Determinar la coordenada y del punto de corte de la función con el eje Y.

TC.5.2.2: Dada la expresión algebraica (ecuación explícita de la recta), asociarla con el término independiente.

TC.5.3: Identificación del vértice en el modelo cuadrático.

TC.5.3.1: Identificación del eje de simetría.

TC.5.3.2: Identificación del extremo absoluto.

TC.5.3.3: Aplicación de su expresión simbólica.

TC.5.4: Cálculo de los puntos de corte con los ejes de coordenadas. Para el cálculo de los puntos de la forma $(x, 0)$ y $(0, y)$ dada la expresión algebraica, tenemos que calcular las coordenadas correspondientes sustituyendo en la ecuación los valores $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente.

- **Tecnologías (TG):**

TG.1: Definición de las coordenadas cartesianas de un punto P en el plano cartesiano.

TG.2: Definición de función como dependencia entre dos variables y correspondencia entre valores de variables.

TG.3: Definiciones de los conceptos correspondientes.

TG.3.1: Definición de dominio y recorrido.

TG.3.2: Definición de función creciente y decreciente.

TG.3.3: Definición de extremos relativos y absolutos.

TG.3.4: Definición de función continua.

TG.3.5: Definición de puntos de corte con los ejes de coordenadas.

TG.5: Caracterización de los modelos funcionales.

TG.5.1: Caracterización del modelo lineal.

TG.5.2: Caracterización del modelo afín.

TG.5.3: Caracterización del modelo cuadrático.

B. Sobre el Estado de la Enseñanza-Aprendizaje del Objeto Matemático

Deulofeu y Vall de Pérez (2000) afirman que el concepto de función resulta complejo para los estudiantes debido a la cantidad de nociones que engloba (continuidad, variables, dominio…) y a la diversidad de lenguajes de representación que admite (tabla, gráfico, ecuación y descripción verbal).

Previo al estudio del tratamiento realizado en cinco libros de texto en torno al concepto de función, exponemos los conocimientos que, según la LOMLOE, deberían trabajarse en 2º ESO:

En el sentido algebraico y pensamiento computacional se deben consolidar las ideas del curso anterior y profundizar en la relación entre la expresión simbólica de una función y su gráfica. Como saberes dentro de este sentido aparecen la descripción de patrones (patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la regla de formación en casos sencillos) y la modelización matemática de situaciones utilizando distintos tipos de representaciones (modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico; estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático). En este último caso aparecen como novedades en el estudio de modelos lineales y afines, con respecto al curso anterior, el **uso de expresiones algebraicas** para su descripción y la **exploración del modelo cuadrático** en mayor profundidad. Asimismo, se debe llevar a cabo un **estudio cualitativo** de las funciones.

Finalmente, aparece el estudio de modelos fundamentales para el aprendizaje de las funciones, donde se propone **consolidar el trabajo con funciones lineales y afines** y **comenzar** el **estudio** de las **funciones cuadráticas** (relaciones lineales y cuadráticas: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas; estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas). En particular, se plantea trabajar la **relación directa** entre la **gráfica** y la **ecuación** de una función afín a partir de la pendiente y la ordenada en el origen, así como el estudio de las gráficas de las funciones cuadráticas, la relación entre la factorización de una expresión cuadrática, la solución de la ecuación correspondiente y los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas, y algunas características básicas de dichas funciones como la simetría o el efecto de transformaciones sencillas. Además, para el estudio de la representación gráfica de una función y la exploración de modelos funcionales, aconsejan el **uso** de **herramientas tecnológicas**.

Señalar que, tal y como se aprecia en las fechas de edición de los libros de texto más recientes a analizar, los contenidos expuestos en cada una de las propuestas, a excepción de la última, se corresponden a la LOMCE. Por ello, indicamos lo referente a las funciones expuesto en dicha ley.

En el anexo II de la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, las funciones se sitúan en el Bloque 4 denominado Funciones cuyos contenidos asociados son los siguientes: Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. El concepto de función: variable dependiente e independiente, formas de representación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula), crecimiento y decrecimiento, continuidad y discontinuidad, cortes con los ejes, máximos y mínimos relativos, análisis y comparación de gráficas. Funciones lineales, cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de una recta, representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta. Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

Podemos percibir ciertas diferencias con lo correspondiente a 2º ESO, acerca de este objeto, establecido en la LOMLOE. Por ejemplo, en la LOMLOE aparece el comienzo del estudio de funciones cuadráticas mientras que con la LOMCE solo aparecen funciones lineales. No obstante, con la LOMCE se comienza el estudio de continuidad y crecimiento y decrecimiento de funciones, mientras que en la LOMLOE aparece en cuarto curso de manera explícita, aunque cabe señalar que el trabajar con funciones afines puede aprovecharse para comenzar con ejemplos de funciones crecientes y decrecientes (según el valor que tome la pendiente correspondiente), y que el modelo cuadrático presenta zonas de crecimiento y decrecimiento que deberían ser identificadas durante su estudio.

Ahora, pasamos a estudiar el tratamiento que se realiza en cinco libros de texto, cuatro de ellos de editoriales que se trabajan habitualmente en 2º ESO y otro que puede utilizarse a lo largo de toda la Secundaria, en torno al concepto de función. En particular, los libros que analizamos son:

- Matemáticas ESO 2, vol. 3 (Colera et al., 2016) de la editorial Anaya.
- Matemáticas 2 ESO (Nieto et al., 2016) de la editorial S.M.
- Matemáticas ESO 2 serie resuelve (Almodóvar et al., 2016) editorial Santillana.
- Matemáticas 2º de ESO (Fidalgo y Brihuega, 2014) apuntes Marea Verde.
- El lenguaje de funciones y gráficas (Alayo, 1990), traducción de *The Language of Functions and Graphs*, material elaborado por Shell Centre for Mathematical Education.

Comenzamos el análisis situando el tema de funciones dentro de cada libro. Seguidamente, comentamos tanto la estructura de cada página, como la secuencia de contenidos relacionados con el concepto de función que son explicados en cada una de las propuestas. Finalmente, indicamos los campos de problemas (destacar que, dado que son similares en los cuatro primeros libros, añadimos las novedades presentes con respecto al análisis de los anteriores), las técnicas que los resuelven y las tecnologías que describen y justifican dichas técnicas. Asimismo, señalamos si aparece referencia alguna al uso de software específico a lo largo de la unidad.

Matemáticas ESO 2 (Colera et al., 2016)

La unidad dedicada a las funciones ocupa el lugar 13 de un total de 15 temas. Se presenta antes de la introducción a la Estadística y la Probabilidad y después de haber trabajado los cuerpos geométricos.

En la primera página de la unidad se hace referencia a que las funciones nacen de la necesidad de describir cuantitativamente algunos fenómenos físicos con el fin de darles explicación; se presenta el concepto situándolo, brevemente, dentro de la historia y se proponen unas actividades iniciales donde se muestran relaciones funcionales para responder a unas cuestiones o para asociarlas con las correspondientes situaciones representadas.

Cada página se estructura como sigue: en primer lugar, aparecen párrafos en los que se incluyen ejemplos, los cuales ofrecen explicaciones relativas a conceptos asociados a la función que se pretende que el alumno aprenda. Seguidamente se encuentran los ejemplos y ejercicios resueltos. Por último, en el apartado de piensa y practica al final de cada hoja, se plantean ejercicios similares a los resueltos previamente.

Se comienza el tema definiendo la función del siguiente modo: "Una función relaciona dos variables. En general se designan por x (variable independiente) e y (variable dependiente cuyo valor depende del valor de x). La función asocia a cada valor de x un único valor de y." (Colera et al., 2016, p. 258) (se corresponde con dependencia entre dos variables y correspondencia entre valores de variables según la clasificación mencionada anteriormente). Seguidamente se dedica una hoja para estudiar crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos (se da a entender que estos valores son únicos).

En relación a las diferentes formas de representación que admiten las funciones, en este libro se explicitan todas (tabla, gráfico, ecuación y descripción verbal) aunque no con la misma incidencia, dedicándose una hoja para las funciones dadas por tablas de valores, donde se hace referencia a funciones discontinuas, y otra para las dadas por su ecuación en la que se hace referencia a la tabla de valores como paso intermedio entre la ecuación de la función y su representación gráfica. En el primer caso, también aparecen gráficas y descripciones verbales asociadas a las tablas. Se nota un claro predominio de la expresión algebraica frente a las otras representaciones.

Después se introducen las funciones de proporcionalidad mediante un ejemplo en el que se relaciona proporcionalmente la altura alcanzada por artefactos voladores y el tiempo que estos ascienden. Además, se hace referencia a que la pendiente de la recta es la constante de proporcionalidad. Sin embargo, los ejercicios propuestos para los estudiantes no involucran problemas de proporcionalidad, son meramente mecánicos en los que tienen que representar las funciones a partir de su ecuación.

A continuación, se introducen las funciones lineales (refiriéndose en realidad a las afines, hecho que hacen notar) y los conceptos asociados a ellas (pendiente y ordenada en el origen). Finalmente, aparecen las funciones constantes.

Destacamos dos hechos: en primer lugar, a lo largo de la unidad se hace referencia a ejercicios para practicar en la web con GeoGebra, que involucran la representación de funciones a partir de su expresión analítica o de una tabla de valores, así como el estudio de la pendiente de una recta, como puede verse en la Figura 1.

Figura 1

Ejemplo de uso de GeoGebra para el estudio de la pendiente

Nota. Tomado de *Matemáticas ESO 2* (Colera et al., 2016, p. 265).

En segundo lugar, destacar que en la práctica docente no aparece mención alguna a las parábolas, mientras que dentro de los ejercicios del final del tema aparecen tres que involucran su representación gráfica.

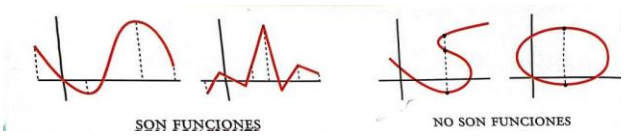
Ahora, pasamos a comentar los *campos de problemas* (CP), el conjunto de *técnicas* (TC) que los resuelven y, en caso de aparecer, la *tecnología* (TG) que describe y justifica dichas técnicas. A la hora de exponer todo ello, empleamos las etiquetas utilizadas en la sección anterior. En caso de no aparecer, lo denotamos con el número que le corresponda seguido de *****.

- **CP.2: Identificación de gráficas o enunciados que representan una función**

Las *técnicas* asociadas son el criterio de la línea vertical (**TC.2.2**) en el caso de gráficas (ver Figura 2), y la **TC.2.1** si la relación funcional aparece expresada verbalmente. La *tecnología* se corresponde con la definición dada de función (**TG.2**).

Figura 2

Identificación de funciones mediante el criterio de la línea vertical



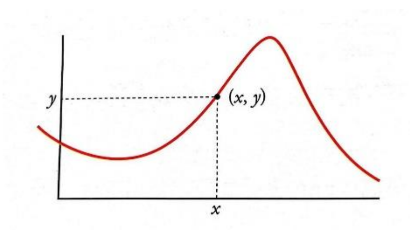
Nota. Tomado de *Matemáticas ESO 2* (Colera et al., 2016, p. 258).

- **CP.3: Análisis e interpretación de gráficas** (**CP.3.2** y **CP.3.3**)

Las *técnicas* asociadas son la observación directa de la gráfica, el método de lectura de izquierda a derecha de la misma para el estudio del crecimiento (**TC.3.2**) y la identificación de máximos y mínimos (**TC.3.3**), y el de las perpendiculares (**TC.1.1**) para el cálculo del punto buscado (ver Figura 3). La *tecnología* está compuesta por las definiciones correspondientes: **TG.3.2** y **TG.3.3**.

Figura 3

Cálculo del punto buscado mediante el trazado de perpendiculares



Nota. Tomado de *Matemáticas ESO 2* (Colera et al., 2016, p. 258).

- **CP.4.1: Graficar una situación explicada verbalmente**

La *técnica* asociada es la identificación tanto de las variables involucradas, como de la relación existente entre ellas (**TC.4.1.1**), la cual se muestra mediante un esbozo en unos ejes de coordenadas.

- **CP.4.3: Descripción de una situación dada por una gráfica**

La *técnica* asociada es la identificación de las variables correspondientes, la interpretación de la relación entre ellas y, finalmente, la asociación de un enunciado verbal que pueda representarse con dicha gráfica (**TC.4.3.1**).

- **CP.4.2: Representación gráfica de funciones a partir de tabla de valores**

La *técnica* asociada es la representación de pares de puntos en el plano cartesiano (**TC.4.2.2**) (la representación e interpretación de puntos aparece como actividad al final del tema). La *tecnología* empleada es la definición de coordenadas cartesianas (**TG.1**).

- **CP.4.4: Representación gráfica de funciones a partir de su expresión algebraica**

La *técnica* asociada es el uso de la tabla de valores como paso intermedio (**TC.4.4.3.1**) y la *tecnología* es que el problema anterior se solucionaba de esta manera.

- **CP.4.2: Cambio entre la representación tabular y la expresión algebraica**

La *técnica* asociada es la búsqueda de patrón (**TC.4.2.3**). Véase la Figura 4.

Figura 4

Cambio entre representación tabular y expresión algebraica

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	5	…	x
ALTURA (m)	3	5	7	9	11	13	…	$3 + 2x$

La altura se obtiene en función del tiempo mediante la ecuación:

$$y = 3 + 2x$$

Nota. Tomado de *Matemáticas ESO 2* (Colera et al., 2016, p. 266).

- **CP.4.1: Obtención de la expresión algebraica correspondiente a un enunciado**

La *técnica* asociada es la identificación de la variable independiente y la dependiente, así como de la relación existente entre ellas (**TC.4.1.1**) y se justifica puesto que, por definición (**TG.2**), la expresión algebraica de una función se escribe como $y = f(x)$. También aparece como técnica el trabajar con la tabla de valores como paso intermedio (**TC.4.2.3**).

- **CP.4.3: Relacionar cada función afín**, dada por su gráfica, **con la expresión algebraica correspondiente**

La *técnica* asociada es la identificación de la pendiente y ordenada en el origen (**TC.4.3.3**, **TC.5.1.2** y **TC.5.2.1**). También aparece como técnica el comprobar si dos puntos de la recta verifican la ecuación correspondiente (**TC.4.3.2**). La *tecnología* está formada por la caracterización del modelo afín, incluyéndose el modelo lineal (**TG.5.1** y **TG.5.2**).

Matemáticas 2 ESO (Nieto et al., 2016)

El tema dedicado a las funciones aparece en el bloque titulado "Funciones", ocupando el lugar 8 de un total de 13 unidades. Este tema se presenta después de haber trabajado el lenguaje algebraico y antes de comenzar el bloque de Geometría.

En este libro la estructura de cada página varía con respecto al anterior. En primer lugar, aparecen las definiciones y propiedades de conceptos relacionados con las funciones para después, mostrar su aplicación en ejemplos resueltos. Por último, en el apartado de actividades se plantean ejercicios que involucran lo explicado previamente.

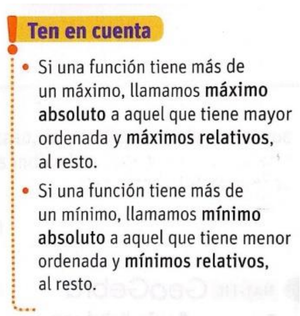
Se comienza el tema, a diferencia del libro anterior, dedicando un apartado a las coordenadas cartesianas. Seguidamente se definen los conceptos de correspondencia y función, apareciendo este último del siguiente modo: "Una función es una correspondencia entre dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial (sus elementos forman la variable independiente) le corresponde un único valor del conjunto final (sus elementos forman la variable dependiente o imagen)." (Nieto et al., 2016, p. 161). Esta definición se corresponde, según la clasificación mencionada anteriormente, con correspondencia entre elementos de dos conjuntos.

En relación a las diferentes formas de representación que admiten las funciones, en este libro aparecen la ecuación, la tabla y la gráfica dedicándose una hoja para todo ello, indicándose que "para expresar la relación entre dos magnitudes, se utilizan fórmulas, tablas y gráficas" (Nieto et al., 2016, p. 162). Por tanto, no se menciona de forma explícita la expresión verbal como una de ellas.

Los apartados siguientes se corresponden al estudio de propiedades y elementos asociados a las gráficas de funciones: dominio y recorrido, continuidad, puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos (diferenciando entre extremos absolutos y relativos). En este caso, dan a entender que los extremos absolutos son únicos, lo que puede generar dificultades en el alumnado (ver Figura 5).

Figura 5

Unicidad de los extremos absolutos



Ten en cuenta

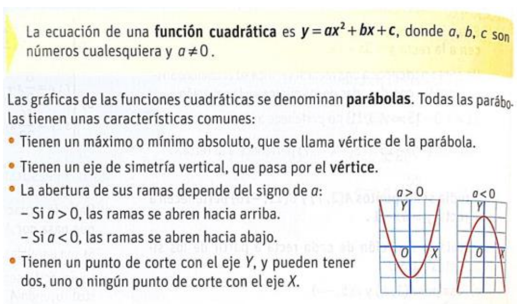
- Si una función tiene más de un máximo, llamamos **máximo absoluto** a aquel que tiene mayor ordenada y **máximos relativos**, al resto.
- Si una función tiene más de un mínimo, llamamos **mínimo absoluto** a aquel que tiene menor ordenada y **mínimos relativos**, al resto.

Nota. Tomado de *Matemáticas 2 ESO* (Nieto et al., 2016, p. 165).

En este libro se presentan los mismos modelos que en el anterior (lineal y afín) profundizándose más en la posición relativa de rectas, e incluye como novedad las funciones de proporcionalidad inversa y las funciones cuadráticas (ver Figura 6). Ambas se introducen de manera teórica, explicitándose sus características sin hacer referencia a problemas de proporcionalidad inversa y geométricos (contextos que podrían utilizarse para su introducción).

Figura 6

Introducción de la función cuadrática



La ecuación de una **función cuadrática** es $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números cualesquiera y $a \neq 0$.

Las gráficas de las funciones cuadráticas se denominan **parábolas**. Todas las parábolas tienen unas características comunes:

- Tienen un máximo o mínimo absoluto, que se llama vértice de la parábola.
- Tienen un eje de simetría vertical, que pasa por el **vértice**.
- La abertura de sus ramas depende del signo de a:
  - Si $a > 0$, las ramas se abren hacia arriba.
  - Si $a < 0$, las ramas se abren hacia abajo.
- Tienen un punto de corte con el eje Y, y pueden tener dos, uno o ningún punto de corte con el eje X.

Nota. Tomado de *Matemáticas 2 ESO* (Nieto et al., 2016, p. 170).

Finalmente, el último apartado del tema está dedicado a la aplicación de funciones a situaciones reales, trabajándose la comparación de gráficas. En uno de los ejemplos presentados se muestra que no siempre es fácil determinar la ecuación de la función dada su gráfica y se enfatiza en que, aun así, puede obtenerse información relevante.

En lo referente a las TIC, destacamos que a lo largo de la unidad aparecen referencias a la página web de la editorial (smSaviadigital.com) para la realización de actividades interactivas, así como a GeoGebra.

A continuación, señalamos las principales novedades, con respecto al libro anterior, relativas a los campos de problemas:

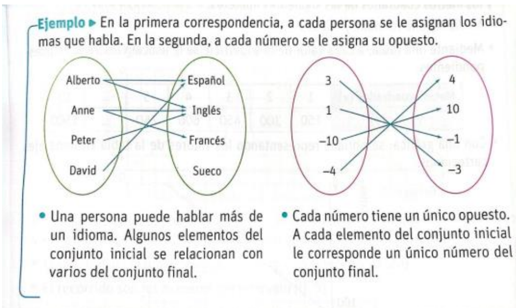
- **CP.1: Representación e identificación de puntos en el plano cartesiano**

La *técnica* asociada a la identificación de puntos es indicar su posición con respecto a los ejes de coordenadas (**TC.1.1**), mientras que la asociada a la representación de un punto $P(a,b)$ es localizar el punto de intersección de las rectas $x=a$ e $y=b$ (**TC.1.2**). La *tecnología* empleada es la definición de coordenadas cartesianas (**TG.1**).

- **CP.6*: Actividades que involucran diagramas** para tratar la correspondencia formal entre conjuntos. Véase la Figura 7.

Figura 7

Tratamiento de la correspondencia entre conjuntos mediante diagramas



Nota. Tomado de *Matemáticas 2 ESO* (Nieto et al., 2016, p. 161).

La *técnica* asociada es establecer la relación existente entre los elementos de los conjuntos dados (**TC.6***).

- **CP.3: Análisis e interpretación de gráficas**

En este campo de problemas aparecen como novedad, el dominio (**CP.3.1**) (cuya técnica asociada es observar los valores de x para los que existe valor de y (**TC.3.1**)), recorrido (**CP.3.1**) (cuya técnica asociada es observar los valores que puede tomar la variable dependiente (**TC.3.1**)), continuidad (**CP.3.4**) (cuya técnica asociada es observar si la gráfica presenta saltos (**TC.3.4**)) y los puntos de corte con los ejes (**CP.3.5**) (cuya técnica asociada es localizar los puntos de la forma $(x, 0)$ y $(0, y)$ (**TC.3.5**)). La *tecnología* está formada por las definiciones correspondientes a los conceptos mencionados (**TG.3.1**, **TG.3.4** y **TG.3.5**).

- **CP.5.1 y CP.5.2: Cálculo de la pendiente** de una recta a través de su **expresión simbólica**

La *técnica* asociada es la aplicación de la fórmula correspondiente (**TC.5.1.3**): $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ con $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ puntos pertenecientes a la recta.

- **CP.7*: Cálculo de la ecuación de una recta** conocidos algunos datos (pendiente y un punto, ordenada en el origen y punto o 2 puntos)

La *técnica* asociada es sustituir los datos conocidos en la expresión $y = mx + n$ para obtener los datos pedidos (**TC.7***) (la pendiente se corresponde con m, la ordenada en el origen con n y el punto dado ha de verificar la ecuación por pertenecer a la recta). También puede utilizarse la **TC.5.1.3**.

- **CP.8*: Determinar la posición relativa de dos rectas**

La *técnica* asociada es fijarse en la pendiente, en la ordenada en el origen y en su representación (**TC.8***). La *tecnología* está formada por las definiciones correspondientes: dos rectas son <u>paralelas</u> si tienen la misma pendiente; <u>coincidentes</u> si tienen misma pendiente y ordenada en el origen y <u>secantes</u> si tienen distinta pendiente (**TG.8***).

Por otro lado, aparecen **actividades relacionadas con el modelo de proporcionalidad inversa** (**CP.5.4***) **y el cuadrático**, donde los contextos son puramente matemáticos.

- **CP.5.3: Estudio del modelo cuadrático**

Aparecen ejercicios en los que hay que identificar elementos notables (vértice y puntos de corte con los ejes) (**CP.3.3** y **CP.3.5**) en cada una de las gráficas mediante observación directa (**TC.3.3** y **TC.3.5**); ejercicios de representar gráficamente la función dada su expresión algebraica (**CP.4.4**), a través de una tabla de valores (**TC.4.4.3.1**), y ejercicios de cálculo de puntos de corte con los ejes de coordenadas dada la expresión algebraica, cuya *técnica* asociada es **TC.5.4**.

Matemáticas ESO 2 serie resuelve (Almodóvar et al., 2016)

La unidad dedicada a las funciones ocupa el lugar 13 de un total de 14 temas. Se presenta antes de la introducción a la Estadística y la Probabilidad y después de haber trabajado los cuerpos geométricos.

En este libro la estructura de cada página es similar a la del libro anterior: se exponen los conceptos y las propiedades acerca de las funciones y a continuación se realizan ejemplos. Por último, en el apartado de actividades se plantean ejercicios que involucran lo explicado previamente.

Se comienza el tema dedicando un apartado a las coordenadas cartesianas. Seguidamente se define el concepto de función de la siguiente manera: "Una función es una relación entre dos variables numéricas, x (variable independiente) e y (variable dependiente cuyo valor depende del valor de x), de forma que a cada valor de x le corresponde un único valor de y." (Almodóvar et al., 2016, p. 255). Esta definición se corresponde, según la clasificación mencionada anteriormente, con correspondencia entre valores de variables y dependencia entre dos variables.

En relación a las diferentes formas de representación que admiten las funciones, en este libro aparecen todas ejemplificadas y se señala que no todas las funciones pueden expresarse mediante una expresión algebraica.

Los apartados siguientes se corresponden al estudio de propiedades y elementos asociados a las gráficas de funciones: continuidad, puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. Además, dentro de los ejercicios del final del tema se explica la periodicidad de una función.

En este libro se presentan el modelo lineal y el afín. En este caso, aparece textualmente: "para representar gráficamente una recta basta con conocer dos de los puntos por los que pasa" (Almodóvar et al., 2016, p. 265). Dentro de las actividades aparece algún ejercicio de proporcionalidad directa para trabajar la función correspondiente.

Los campos de problemas son similares a los presentes en los libros anteriores, apareciendo como novedad:

- **CP.4.4: Plantear un enunciado a partir de una expresión algebraica**

En la Figura 8 mostramos un ejemplo de ello.

Figura 8

Ejercicio de problem posing

18 **REFLEXIONA.** Escribe un enunciado cuya ecuación sea $y = 3x$.

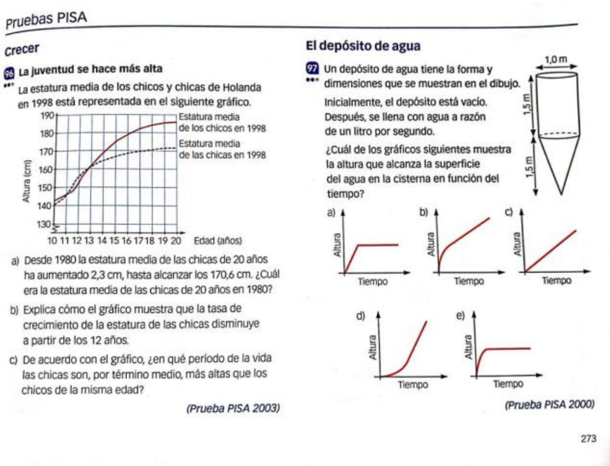
Nota. Tomado de *Matemáticas ESO 2 serie resuelve* (Almodóvar et al., 2016, p. 258).

La *técnica* asociada es definir dos variables y la relación de dependencia entre ellas, de manera que se verifique la ecuación dada (**TC.4.4.1**).

Además, al final de la unidad se encuentran dos **problemas de las pruebas PISA** (ver Figura 9) con la finalidad de llevar a cabo un aprendizaje competencial. Sin embargo, no se hace mención alguna a recursos tecnológicos a lo largo de la unidad.

Figura 9

Problemas de las pruebas PISA



Pruebas PISA

Crecer

96 **La juventud se hace más alta**

La estatura media de los chicos y chicas de Holanda en 1998 está representada en el siguiente gráfico.

a) Desde 1980 la estatura media de las chicas de 20 años ha aumentado 2,3 cm, hasta alcanzar los 170,6 cm. ¿Cuál era la estatura media de las chicas de 20 años en 1980?

b) Explica cómo el gráfico muestra que la tasa de crecimiento de la estatura de las chicas disminuye a partir de los 12 años.

c) De acuerdo con el gráfico, ¿en qué período de la vida las chicas son, por término medio, más altas que los chicos de la misma edad?

(Prueba PISA 2003)

El depósito de agua

97 Un depósito de agua tiene la forma y dimensiones que se muestran en el dibujo.

Inicialmente, el depósito está vacío. Después, se llena con agua a razón de un litro por segundo.

¿Cuál de los gráficos siguientes muestra la altura que alcanza la superficie del agua en la cisterna en función del tiempo?

(Prueba PISA 2000)

273

Nota. Tomado de *Matemáticas ESO 2 serie resuelve* (Almodóvar et al., 2016, p. 273).

Matemáticas 2º de ESO (Fidalgo y Brihuega, 2014)

El tema dedicado a las funciones ocupa el lugar 11 de un total de 12 unidades. Este tema se presenta después de haber trabajado el lenguaje algebraico y antes de comenzar con Estadística y Probabilidad.

En la primera página de la unidad se hace referencia a que las funciones están ligadas a la idea de dependencia entre dos cantidades variables y se presenta un resumen histórico acerca de dicho concepto y del sistema de referencia cartesiano.

Cada página se estructura como sigue: en primer lugar, aparecen párrafos en los que se incluyen ejemplos, los cuales ofrecen explicaciones relativas a conceptos asociados a la función, se presentan actividades resueltas y, posteriormente, se proponen otras similares a las solucionadas. Gran parte del tema se dedica a definir el sistema de referencia cartesiano y a trabajar con tablas y gráficas aplicadas a situaciones de la vida cotidiana.

El estudio de la continuidad, puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos se hace a la vez que se representa gráficamente una situación expresada verbalmente. Cabe destacar que, de los libros analizados hasta ahora, es el que más ejemplos contextualizados y situaciones verbales graficadas presenta.

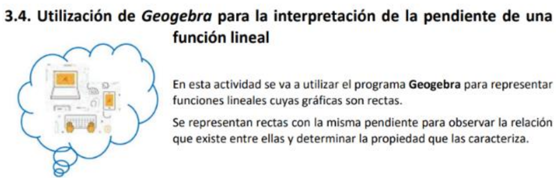
A continuación, se define el concepto de función, mediante un ejemplo en el que se relacionan las magnitudes tiempo y distancia, de la siguiente manera: “Una función es una relación entre dos magnitudes numéricas x e y, de tal forma que a cada valor de la primera magnitud x, le hace corresponder un único valor de la segunda magnitud y.” (Fidalgo y Brihuega, 2014, p. 298). Esta definición se corresponde, según la clasificación mencionada anteriormente, con correspondencia entre valores de variables y dependencia entre dos variables.

Por un lado, en este libro aparecen todos los sistemas de representación y se muestran a partir de la misma situación inicial (el precio de la gasolina en un día concreto al llenar el depósito de un coche en función de la cantidad de gasolina echada). Por otro lado, se presenta solamente el modelo lineal relacionándolo con actividades de proporcionalidad directa.

En lo referente a las TIC, a lo largo de la unidad aparecen enlaces a Youtube que incluyen ejemplos de análisis y representación de funciones. Asimismo, se dedica una página a la utilización de GeoGebra para la interpretación de la pendiente de una función lineal, como puede verse en la Figura 10.

Figura 10

Uso de GeoGebra para el estudio de funciones lineales


3.4. Utilización de *Geogebra* para la interpretación de la pendiente de una función lineal

En esta actividad se va a utilizar el programa **Geogebra** para representar funciones lineales cuyas gráficas son rectas.

Se representan rectas con la misma pendiente para observar la relación que existe entre ellas y determinar la propiedad que las caracteriza.

Nota. Tomado de *Matemáticas 2º de ESO* (Fidalgo y Brihuega, 2014, p. 303).

Al finalizar el tema aparecen comentarios dirigidos para el profesorado donde se explica la evolución del concepto de función a lo largo de la historia y se explicitan sugerencias didácticas.

En relación a los campos de problemas, destacamos como novedad:

- **CP.4.2: Representación verbal a partir de una tabla de valores**

En la Figura 11 mostramos un ejemplo de ello. La *técnica* asociada es la identificación de las variables correspondientes y la expresión verbal de la relación existente entre ellas (**TC.4.2.1**).

Figura 11

Traducción de la forma tabular a la verbal

18. Expresa de forma gráfica y verbal la función definida por la siguiente tabla de valores:

Edad (años)	0	1	5	10	15	20
Altura (cm)	0	42	96	123	151	177

Nota. Tomado de *Matemáticas 2º de ESO* (Fidalgo y Brihuega, 2014, p. 301).

El lenguaje de funciones y gráficas (Alayo, 1990)

Este libro se aleja de la idea que tenemos hoy en día acerca de los libros de texto de Matemáticas escolares y permite trabajar las características globales de las funciones desde un punto de vista tanto cualitativo como cuantitativo. Está compuesto por dos unidades: en la unidad A se realiza un tratamiento cualitativo de gráficas asociadas a situaciones presentadas verbalmente o a través de imágenes, mientras que en la unidad B se reconocen y tratan modelos que surgen de situaciones reales, identificándose y representándose las relaciones funcionales.

En este caso, hay un cambio en la secuencia tradicional relacionada con las formas de representación que admiten las funciones. Se parte de la situación presentada verbalmente, se pide a los alumnos un esbozo representativo de la relación implicada para luego comprobarlo construyendo la tabla de valores correspondiente y, finalmente, se trabajan las funciones mediante el uso de fórmulas. Además, se incluyen tanto soluciones como notas para el profesor, modelos de preguntas de examen y una colección de problemas.

Destacamos que aparece un ejercicio contextualizado de proporcionalidad inversa a diferencia del resto de libros, en el que se relaciona el número de personas recolectando fresas y el tiempo que se emplea en terminar el trabajo.

En relación a los campos de problemas, observamos un claro predominio de representaciones verbales y pictóricas para graficar. Aparecen **problemas abiertos** como inventar historias asociadas a gráficas o dibujar gráficas para ilustrar situaciones dadas, en las que el alumno debe decidir tanto las variables como la relación entre ellas para, finalmente, compartirlas con los compañeros. Además, los ejercicios contienen cuestiones para reflexionar. Por otro lado, se exploran las **funciones exponenciales** en un contexto de fármacos como puede verse en la Figura 12.

Figura 12

Introducción al modelo exponencial

Mira la siguiente tabla:

Nombre del fármaco (marca)	Fórmula aproximada
Triazolam (Halcion®)	$y = A \times (0{,}84)^x$
Nitrazepam (Mogadon®)	$y = A \times (0{,}97)^x$
Pentobombitone (Sonitan®)	$y = A \times (1{,}15)^x$
Methohexitone (Brietal®)	$y = A \times (0{,}5)^x$
CLAVE A = tamaño de la dosis inicial y = cantidad de fármaco en la sangre x = tiempo en horas desde que el fármaco llega a la sangre	

Nota. Tomado de *El lenguaje de funciones y gráficas* (Alayo, 1990, p. 105).

Conclusiones

Varios autores indican la importancia de la traducción entre las diferentes formas de representación de las funciones en la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Esto puede relacionarse con la CE.M.7. del currículo, competencia específica centrada en el proceso de representación. Concretamente, uno de los criterios de evaluación asociados a esta competencia específica, involucra la representación de conceptos de modos distintos.

A continuación, en la Tabla 3, presentamos un cuadro resumen en el que se recogen las traducciones entre los distintos sistemas de representación utilizados en los cuatro primeros libros de texto analizados.

Tabla 3

Traducciones entre los diferentes sistemas de representación tratadas en los libros

De / A	Descripción verbal	Tabular	Gráfica	Expresión algebraica
Descripción verbal		S.M. Santillana Marea Verde	Anaya Santillana Marea verde	Anaya S.M. Santillana Marea verde
Tabular	Marea Verde		Anaya S.M. Santillana Marea verde	Anaya Santillana
Gráfica	Anaya S.M. Marea verde	S.M. Santillana Marea verde		Anaya Marea verde
Expresión algebraica	Marea verde	Anaya S.M. Santillana Marea verde	Anaya S.M. Marea verde	

Tras haber analizado los libros de las diferentes editoriales, destacamos el predominio de un modelo de enseñanza para la resolución de problemas con el que se pretende un desarrollo de técnicas para la aplicación algorítmica de las mismas, a excepción de la propuesta del Shell que se trata de una propuesta metodológica basada en la enseñanza a través de la resolución de problemas y que se ajusta en mayor medida a lo pretendido con el currículo actual. El tipo de actividades presentes en este último libro fomenta la autonomía del estudiante y la construcción del concepto de función a partir de un correcto entendimiento de la relación funcional entre variables.

Por otro lado, en relación a las diferentes formas de representación de las funciones, en los primeros tres libros se da un mayor protagonismo a la expresión simbólica (dentro de las actividades propuestas en las hojas correspondientes a las explicaciones, destacan las de representar funciones a partir de su expresión algebraica por medio de una tabla de valores), mientras que en los otros dos restantes se le da a la gráfica y a la descripción verbal. Además, los ejercicios que involucran el análisis de las características de las funciones, podrían contextualizarse en situaciones de interés para el alumnado ya que, por lo general, aparecen como actividades de calcular, indicar o determinar, mientras que para la presentación de los diferentes modelos se podrían establecer conexiones tanto con otros conceptos de las matemáticas previamente estudiados, como con otras materias tal y como recomienda Deulofeu (2001).

A continuación, exponemos los **efectos** que dicha enseñanza, acerca del concepto de función, produce **sobre el aprendizaje del alumno** y que han sido estudiados por diversos autores:

Deulofeu (2001) hace referencia a un problema de interpretación restrictiva de las gráficas debido a la automatización de ejercicios que involucran el paso de ecuación al gráfico correspondiente a través de una tabla. Con el objetivo de superarlo, Janvier, en su tesis doctoral (1978, como se indica en Deulofeu, 2001), plantea el papel principal del lenguaje gráfico en la introducción al concepto de función, así como la importancia tanto de usar situaciones contextualizadas para la enseñanza de las funciones, como de introducir un tratamiento cualitativo, paralelo al cuantitativo.

Azcárate y Deulofeu (1996) también advierten la excesiva presencia de ejercicios que involucran la traducción de ecuación a gráfica, lo que promueve un aprendizaje mecánico y poco interpretativo generándose una visión reducida de los procesos de traducción entre los distintos lenguajes de representación, así como concepciones erróneas acerca del significado de la gráfica, e indican ciertos errores observados, en alumnos de primeros niveles de la ESO, en torno a la lectura e interpretación de gráficas: errores en la graduación de los ejes (cambios de unidad e inversión de positivos y negativos); inversión en el orden de las coordenadas; errores en la lectura y representación de puntos de coordenadas racionales, agravándose cuando las coordenadas son negativas; concepción discreta de los puntos de una recta o de un segmento, lo que supone un obstáculo a la hora de interpretar la gráfica; interpretación de la gráfica como un dibujo alterando el significado de las variables (lo que Janvier (1979, como se indica en Azcárate y Deulofeu, 1996) llama “lectura icónica de la gráfica”) y obstáculos a la hora de pasar de una interpretación punto a punto a una interpretación global de la gráfica.

Además, Duval (2006) informa de la importancia de una coordinación interna en la actividad matemática construida a partir de los distintos sistemas de representación, para evitar que dos representaciones diferentes del mismo objeto se entiendan como elementos aislados y hace referencia al salto cognitivo que implica el cambio de representación de objetos. En particular, muestra la dificultad presente en los alumnos a la hora de enfrentarse a tareas que impliquen el reconocimiento cualitativo para la conversión entre la representación gráfica y la notación algebraica correspondiente a una función y reflexiona acerca de la necesidad de reconocer las características visuales de las curvas notables más allá de la lectura de pares ordenados de números e identificación de puntos.

Arce et al. (2019) advierten de las dificultades, que pueden generarse en el alumnado, debido a un uso excesivo del registro gráfico: asociar la idea de función a la de punto recorriendo un grafo, causando dificultades relacionadas con las funciones discontinuas; reducir el estudio de algunas propiedades a la ubicación de puntos relevantes y focalizar la atención en el grafo en lugar de en las coordenadas de cada punto, lo que disimula la correspondencia entre valores y la variación simultánea de ambas variables.

A continuación, mostramos los obstáculos, dificultades y errores, que han sido investigados por varios autores, en relación al aprendizaje de los modelos funcionales:

Alpízar et al. (2018) realizan una investigación en la que se describen las dificultades y errores que presentan los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria en el aprendizaje de la función lineal. Por un lado, presentan y categorizan los errores detectados entre los que se encuentran los debidos a cálculos incorrectos o accidentales como, por ejemplo, errores al efectuar operaciones básicas o al aplicar algoritmos relacionados con la resolución de ecuaciones lineales; errores debidos a asociaciones incorrectas como, por ejemplo, dada una función lineal $f(x) = \frac{mx+b}{a}$, asociar el valor numérico de la pendiente a m en lugar de a $\frac{m}{a}$ y los errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática como, por ejemplo, representar de forma incorrecta pares ordenados en el plano cartesiano, no distinguir entre los términos abscisas y ordenadas, aplicar incorrectamente la fórmula de la pendiente, no relacionar el signo de m con la monotonía de la función y errores al representar gráficamente una situación al no tener en cuenta si el dominio de la gráfica es discreto o continuo.

Por otro lado, recogen las dificultades que presentan los estudiantes al resolver tareas relacionadas con la función lineal, indicadas por los docentes, entre las que aparecen identificar la pendiente, realizar adecuadamente operaciones algebraicas y aritméticas al resolver ecuaciones lineales, obtener el valor numérico de la pendiente a partir de la representación gráfica, trazar la representación gráfica a partir de puntos dados, obtener a partir de la representación gráfica la ecuación de la recta, comprender el concepto de pendiente, poder representar gráficamente una situación dada, extraer conclusiones a partir de un modelo lineal asociado a un problema contextualizado y redactar problemas que involucren funciones lineales.

Asimismo, en el artículo aparecen menciones a otros estudios acerca de la enseñanza y aprendizaje del concepto de función que indican la falta de capacidad, por parte del alumno, para definir correctamente el concepto de función, para interpretar el lenguaje matemático, para diferenciar entre variable e incógnita, para enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables, para utilizar diferentes representaciones de funciones y para analizar e interpretar el comportamiento de la gráfica de una función.

Los mismos autores llevan a cabo una investigación acerca de los errores y dificultades que presentan estudiantes de Educación Secundaria en el aprendizaje de la función cuadrática (Alpízar et al. (2019)), entre los que se encuentran errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales; errores debidos a asociaciones incorrectas (confusión entre $-a^2$ y $(-a)^2$) y errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática como, por ejemplo, aplicar incorrectamente métodos de factorización, la confusión entre intervalos de crecimiento y decrecimiento y no distinguir lo que determina cada variable en su representación gráfica.

Díaz et al. (2015) realizan una investigación acerca de las dificultades, presentes en estudiantes de nuevo ingreso en carreras de ingeniería, en la articulación de registros gráficos y algebraicos en las funciones lineales y cuadráticas. En concreto, buscan conocer si los alumnos pueden establecer una relación directa entre ambas representaciones evitando el paso por el registro tabular. Como dificultades observadas en torno a la función lineal, destacan la no asociación de $y = ax + b$ como la expresión algebraica de una recta y la correspondencia errónea de las variables visuales con las condiciones dadas de los parámetros ($a > 0$ y $b < 0$), mientras que para la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ destacan la no vinculación del cálculo de las coordenadas del vértice con su correspondiente ubicación y con las condiciones de $b = 0$ o $b \neq 0$. En lo referente a las conversiones en un sentido u otro, indican una mayor dificultad en el pasaje del registro gráfico al algebraico.

En la misma línea, Soto et al. (2019) llevan a cabo una investigación de carácter descriptivo en la que, teniendo en cuenta la teoría de Duval, analizan el nivel de coordinación entre los diferentes sistemas de representación que admite una función lineal a través de un cuestionario aplicado a estudiantes de 3º ESO. Indican, como en el estudio anterior, que los alumnos muestran dificultades a la hora de realizar la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico, así como dificultades de interpretación cuando la situación es presentada en registro verbal.

Por último, Ortega y Pecharromán (2014) realizan un estudio, aplicado a estudiantes de 4º ESO, en el que muestran los errores y consecuentes dificultades en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas, entre los que aparecen errores relacionados con la interpretación de los símbolos y convenios del sistema de referencia cartesiano, y la representación de puntos en el plano (se cambia la orientación positiva-negativa de los ejes cartesianos y el orden en que se presentan las coordenadas en los pares de puntos); errores en el uso de la notación de intervalos numéricos, la notación gráfica punto vacío- punto relleno y la correspondencia que hay entre ambas (desconocimiento del significado del lenguaje gráfico punto relleno- punto vacío y de la correspondencia entre intervalo abierto y punto vacío e intervalo cerrado y punto relleno); dificultades para expresarse utilizando términos y símbolos del lenguaje matemático; dificultades para distinguir entre variable independiente y dependiente y para saber en qué eje se representa cada una y errores por interpretar los extremos como puntos más altos o más bajos respecto al eje de abscisas (máximo por encima del eje y mínimo por debajo).

Observamos que varios autores mencionan las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de realizar la conversión del registro gráfico al algebraico, mientras que para la conversión en el otro sentido no presentan tantos problemas. Esto puede deberse a la enseñanza planteada en los libros de texto en los que, como hemos analizado anteriormente, predomina la expresión algebraica frente a los otros sistemas de representación, así como los ejercicios meramente mecánicos en los que se tienen que representar las funciones a partir de su ecuación.

Conclusiones e Implicaciones para la Enseñanza

Todo lo estudiado y analizado anteriormente nos hace reflexionar acerca de la tipología de actividades que pueden llevarse a cabo con el objetivo de superar las dificultades y errores presentes en los estudiantes, y conseguir un mejor aprendizaje del concepto de función.

En primer lugar, la introducción al concepto de función puede realizarse mediante actividades en las que el lenguaje gráfico sea el protagonista, tal y como recomiendan Azcárate y Deulofeu (1996) y Deulofeu (2001) para los primeros años de la etapa, comenzando con la definición más intuitiva de función como dependencia entre dos variables. Para ello, pueden utilizarse situaciones contextualizadas como las presentes en el libro *El lenguaje de funciones y gráficas*, que permiten realizar un tratamiento cualitativo de las gráficas asociadas a situaciones presentadas a través de imágenes o verbalmente, evitándose de esta manera, las dificultades relacionadas con la interpretación cuando la situación es presentada en registro verbal y con el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. De la misma manera, Ortega y Pecharromán (2014) también recomiendan partir del sistema de representación gráfico por ser el más intuitivo y cercano al alumnado.

La introducción a los diferentes modelos funcionales conviene realizarse, tal y como aparece en el currículo, a través de problemas contextualizados en los que aparezcan conceptos trabajados anteriormente. La función lineal puede introducirse junto a la resolución de problemas de proporcionalidad (recomendado por Deulofeu (2001)), mientras que el modelo cuadrático puede relacionarse con problemas geométricos que involucren el área y el perímetro, estableciéndose conexiones con el sentido numérico y el de la medida. En ambos modelos puede hacerse referencia a la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado, respectivamente.

Asimismo, tal y como establece la teoría de Duval, se deben realizar actividades que involucren la conversión entre los diferentes registros de representación en ambos sentidos, con el objetivo de generar una correcta construcción del concepto de función.

Por otro lado, existen varias investigaciones referentes a la mejora del aprendizaje matemático significativo mediante el uso de GeoGebra. En particular, Romero et al. (2022) realizan un estudio, aplicado a estudiantes de ingeniería, en el que se obtiene como resultado que el uso de GeoGebra favorece el aprendizaje significativo relativo al estudio de las gráficas y transformaciones de funciones, mejorándose el análisis y la compresión de los conceptos y propiedades asociadas a las funciones. En él, justifican la importancia del autoaprendizaje como medio para lograr un aprendizaje significativo. Además, mencionan otras investigaciones que evidencian los beneficios del uso de este software en el estudio de coherencia entre los registros gráfico y algebraico.

En la misma línea, Pantoja (2022) lleva a cabo una investigación donde muestra una correlación directa entre el aprendizaje matemático significativo y el uso de GeoGebra, no siendo esta la única investigación concluyendo dicha relación. En ella, se hace referencia a diversos trabajos centrados en el análisis de la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje ligado al uso de las TIC, en los que se indica el aumento de los niveles de comprensión y reflexión, así como de la participación del alumnado y de la estimulación del pensamiento crítico y creativo, y se acentúa la mejora del rendimiento académico en temas matemáticos de nivel avanzado.

Por último, Sánchez-Balarezo y Borja-Andrade (2022) presentan los resultados de numerosas investigaciones en las que se analiza el uso de GeoGebra como herramienta de apoyo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y concluyen tanto la mejora de la capacidad, actitud, motivación e interés de los estudiantes, como la compresión de los conceptos matemáticos, en particular, la representación gráfica de funciones reales. Además, afirman que este software facilita los procesos de abstracción y que su uso mejora significativamente la comprensión y resolución de problemas matemáticos.

Por todo ello, consideramos de gran interés las actividades de exploración, con ayuda de GeoGebra, de las características de los diferentes modelos mediante la modificación de los parámetros involucrados y el análisis de los efectos correspondientes en las gráficas. De esta manera eliminamos la desconexión existente entre la expresión analítica de la función y la representación gráfica de la misma, mencionada por Burgos y Flores (2017), pudiéndose evitar, por ejemplo, la no relación del signo de la pendiente de una recta con la monotonía de la misma, así como las dificultades asociadas a la comprensión de la pendiente y al conocimiento de lo que determina cada variable en su representación gráfica.

C. Sobre los Conocimientos Previos del Alumno

Los conocimientos previos que debe poseer el alumnado para afrontar adecuadamente el aprendizaje de las funciones son los siguientes:

- **C1.** Manejar adecuadamente tanto el lenguaje algebraico (para expresar algebraicamente relaciones entre variables), como las operaciones con expresiones algebraicas.
- **C2.** Identificar las soluciones en ecuaciones lineales y cuadráticas.
- **C3.** Saberes básicos del sentido numérico (proporcionalidad directa) y del sentido de la medida (perímetros y áreas de figuras planas).
- **C4.** Saber identificar y representar puntos en el plano cartesiano.
- **C5.** Conocer los distintos sistemas de representación que admiten las funciones (tablas, gráficos, descripción verbal y ecuación).
- **C6.** Identificar variables y reconocer las relaciones entre ellas.

Para poder afirmar que la enseñanza anterior ha propiciado que el alumno adquiera dichos conocimientos previos, realizamos un análisis curricular en el que se tiene presente la normativa de enseñanzas de régimen general en los niveles de Primaria (anexo II de la ORDEN ECD/1112/2022, de 18 de julio) y Secundaria (anexo II de la ORDEN ECD/1172/2022, de 2 de agosto) referente a la ordenación curricular. Concretamente, observamos las novedades introducidas cada año y las orientaciones de enseñanza correspondientes relacionadas con el concepto de función.

En el currículo de Primaria aparecen las funciones dentro del sentido algebraico y pensamiento computacional, el cual tiene como características fundamentales el **reconocimiento de relaciones entre variables** y la **modelización de situaciones** con expresiones verbales y simbólicas. En particular, se sitúan en el saber básico correspondiente a patrones, relaciones, clasificaciones y funciones, donde se recomienda desde segundo ciclo la incorporación de situaciones de aprendizaje que involucren la observación, el análisis de secuencias y la generalización, puesto que sirven de base para abordar la idea de función en cursos posteriores.

En el tercer ciclo de Educación Primaria, en el sentido algebraico y pensamiento computacional se promueve el **trabajo con patrones** y relaciones. Concretamente, aparecen como saberes la **representación** en forma verbal, tabular, gráfica y de notaciones inventadas; la **predicción** razonada de términos a partir de regularidades, la creación de patrones recurrentes y la **apreciación del cambio** en distintos tipos de situaciones. Por otro lado, la **proporcionalidad directa** se encuentra como saber correspondiente al razonamiento proporcional dentro del sentido numérico. Asimismo, en el sentido espacial aparecen la **localización** y los **sistemas de representación**.

Tal y como establece la LOMLOE, en Secundaria, las funciones aparecen, principalmente, como saber básico dentro del sentido algebraico y pensamiento computacional, el cual es desarrollado de forma transversal, conectándose con el sentido de la medida y el espacial (al finalizar la etapa). Las situaciones funcionales y la modelización de fenómenos físicos y matemáticos son dos de los aspectos en torno a los que se articula una enseñanza significativa del álgebra.

En el primer curso de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria vuelven a aparecer como saberes dentro del sentido numérico tanto los patrones y las regularidades numéricas, cuyo trabajo debe realizarse de manera conjunta con el sentido algebraico y computacional, como el **razonamiento proporcional** donde se trabajan **magnitudes directamente proporcionales** y la **constante de proporcionalidad**, por lo que podemos afirmar que los alumnos trabajan situaciones que se ajustan al modelo lineal. Por otro lado, en el sentido de la medida se trabajan las mediciones directas de perímetros y áreas de figuras bidimensionales y de áreas y volúmenes de objetos tridimensionales (Medición: longitud de la circunferencia, **áreas en figuras planas**: deducción, interpretación y aplicación de fórmulas).

En este curso el alumnado se encuentra por primera vez con el lenguaje simbólico y abstracto que es el álgebra, donde se promueve un aprendizaje significativo del mismo a través de la resolución de problemas, la generalización de patrones y las situaciones funcionales. Como saber dentro del sentido algebraico y pensamiento computacional vuelve a aparecer la descripción de patrones. Además, aparecen como novedad la **modelización** de situaciones de la vida cotidiana **usando representaciones matemáticas** (gráficas, tablas y ecuaciones) y el **lenguaje algebraico**, así como las estrategias de **deducción de conclusiones** razonables **a partir de un modelo matemático**, donde se recomienda prestar mayor atención al trabajo con gráficas y tablas con el objetivo de desarrollar una compresión inicial de los diferentes usos de las variables, y la **resolución de ecuaciones lineales**. Asimismo, se recomienda que los alumnos comiencen a **relacionar** las **distintas representaciones de una función** (tablas, gráficos, descripción verbal y ecuación). En particular, trabajan las conexiones entre ecuación, tabla de valores y gráfica para funciones lineales y afines.

Por último, aparece el **estudio de modelos elementales**, donde se recomienda alternar el **estudio cualitativo y cuantitativo**, para el aprendizaje del concepto de función, como es el **lineal** (relaciones lineales: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas; estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas). Por otro lado, se propone la introducción de otros modelos, como es el cuadrático, aunque no se haga un estudio sistemático de ellos.

En 2º ESO aparecen nuevamente como saberes dentro del sentido numérico tanto los patrones y las regularidades numéricas, cuyo trabajo debe realizarse de manera conjunta con el sentido algebraico y computacional, como el razonamiento proporcional donde se trabaja la **proporcionalidad directa**. Por otro lado, se introduce tanto la **resolución de sistemas de ecuaciones lineales**, donde debe trabajarse la **resolución gráfica de los sistemas**, como el **trabajo con expresiones de segundo grado y las identidades notables** (estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones y sistemas lineales y ecuaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana).

Evaluación Inicial

Previo al desarrollo de la secuencia didáctica, se realizará una evaluación inicial de carácter diagnóstico para valorar los conocimientos previos del alumnado mencionados anteriormente e identificar, a partir de los errores observados, posibles dificultades que puedan surgir durante el proceso de enseñanza, con el objetivo de adaptar el proceso de enseñanza y aprendizaje al grupo clase. Se dejará tiempo suficiente para la realización de los ejercicios en grupos de tres alumnos.

A continuación, mostramos las actividades que componen la prueba, indicando los conocimientos previos que pretenden observarse. Comentarios referentes a las soluciones se encuentran en el Anexo I junto a explicaciones detalladas acerca de lo esperado con cada una de las actividades.

1 (**C1** y **C2**). **a)** Una familia formada por cuatro miembros cumple las siguientes condiciones: el padre es 6 años mayor que la madre, la edad de la madre es el triple de la edad de la hermana mayor y el hermano pequeño tiene 6 años menos que la hermana mayor. Completa la Tabla 4 expresando las edades de cada uno mediante lenguaje algebraico.

Tabla 4

Tabla a completar para la resolución del problema

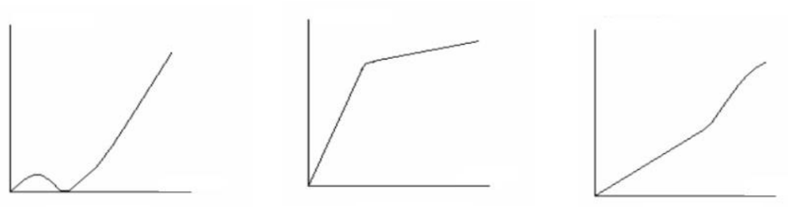
Madre	Padre	Hermana mayor	Hermano menor
		x	
y			
			z
	w		

b) Sabiendo que la suma de las edades de los cuatro miembros es 80, averigua la edad de cada uno.

2 (**C4**, **C5** y **C6**). **a)** Decide qué gráfica de la Figura 13 (alguna puede corresponderse a más de una situación) se ajusta mejor a cada una de las siguientes situaciones. Pon nombre a los ejes y explica tu decisión.

Figura 13

Gráficas a asociar con su correspondiente enunciado



A B C

Nota. Imágenes extraídas de *DocPlayer* (https://lc.cx/j3dr8Y).

a.1) Has quedado con tus amigos y ves que, como siempre, vas a llegar tarde. Decides ir en bicicleta para evitar llegar el último. A mitad de camino se te pincha una rueda y tienes que continuar caminando lo que te queda de trayecto.

a.2) Es la fiesta de cumpleaños de Ángela y no puedes volver a llegar tarde. Sales tranquilo y con tiempo cuando te das cuenta de que te has olvidado los regalos en casa. Vuelves a por ellos, coges la bicicleta y vas corriendo al cumpleaños para evitar enfados.

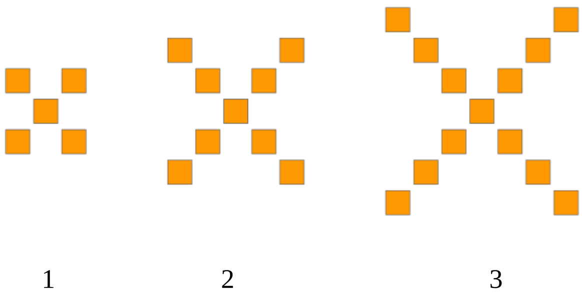
a.3) Estás jugando con tus amigos al Mario Kart. Al poco de comenzar, un contrincante te lanza un obstáculo que hace que te retrases. Una vez se pasa el efecto, continúas un poco más rápido que al principio y tienes la suerte de que te toca como objeto el champiñón turbo que te permite dar un acelerón.

b) Si hay alguna gráfica a la que no has asociado una situación, invéntate una para ella.

3 (**C1**, **C2**, **C4**, **C5** y **C6**). Dada la Figura 14:

Figura 14

Búsqueda del patrón correspondiente



Nota. Imagen extraída de *Visual Patterns* (https://lc.cx/HYhaua).

a) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar la siguiente figura?, ¿y para la figura 8?, ¿y para la 10?, ¿y para la 44? Puedes ayudarte de una tabla.

b) Determina la expresión que permita calcular el número de cuadrados que componen una figura sabiendo el número de orden de la misma.

c) ¿Qué número de orden corresponde a la figura formada por 121 cuadrados?, ¿y a la formada por 200?

d) Representa la información obtenida en una gráfica.

4 (**C2**, **C3**, **C4**, **C5** y **C6**). **a)** Para cada una de las siguientes situaciones, identifica las variables involucradas y la relación entre ellas.

a.1) En el supermercado he comprado 2 kg de naranjas y he pagado 4€, ¿cuánto tendré que pagar según la cantidad que compre?

a.2) Dado un número real x, se le asocia otro número real que se obtiene haciendo el triple de x y sumándole 2.

a.3) Imagina que te piden que recojas y representes información de la temperatura alcanzada en Zaragoza durante un día.

a.4) El lado y el área de un cuadrado.

b) Representa gráficamente lo anterior. Puedes ayudarte de una tabla de valores.

D. Sobre las Razones de Ser del Objeto Matemático

Tal y como aparece en *Funciones y Gráficas* “la idea de función nace a partir del estudio de los fenómenos de cambio.” (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 58). Además, afirman que “la finalidad de llegar a determinar con precisión cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras, es lo que da sentido al estudio de las funciones, así como al conocimiento de determinados modelos.”. En particular, los problemas que involucran el estudio del movimiento forman parte del motor inicial del desarrollo de las funciones. Por otro lado, indican que “la lectura y la construcción de tablas y la lectura e interpretación de gráficas permiten una interesante introducción al concepto de función a partir de situaciones reales.” (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 63). En concreto, mencionan las gráficas cartesianas como excelente instrumento para expresar la dependencia entre dos variables.

Por tanto, siguiendo las ideas presentes tanto en los libros de *Funciones y Gráficas* (Azcárate y Deulofeu, 1996) y *El lenguaje de funciones y gráficas* (Alayo, 1990), como en artículos mencionados a lo largo del trabajo, tomaremos el lenguaje de las gráficas como introducción al concepto de función, y partiremos de la idea de función como expresión de una dependencia entre dos variables que permite modelizar situaciones planteadas para un posterior análisis y extracción de la información. De esta manera, las razones de ser a tener en cuenta en la introducción escolar del concepto de función coinciden con las que dieron origen al mismo, como veremos a continuación.

Cabe destacar que dicha relación de dependencia ha de enseñarse mediante los diferentes sistemas de representación que admite una función, estableciendo una coordinación entre ellos, con el objetivo de conseguir una correcta construcción del concepto.

Azcárate y Deulofeu (1996) señalan que conocer la evolución de un concepto matemático es fundamental para su enseñanza. A continuación, exponemos lo correspondiente al concepto de función.

Castro et al. (2011) realizan una revisión teórica respecto al recorrido histórico y epistemológico del concepto de función haciendo referencia tanto a situaciones que motivaron la aparición del concepto (situaciones de fenómenos de cambio), como a las dificultades y obstáculos que se generaron en su desarrollo. En la misma línea, Azcárate y Deulofeu (1996) exponen las principales contribuciones en el desarrollo de dicho concepto y detallan los obstáculos, presentes en las diferentes épocas, que impidieron su desarrollo.

En el Mundo Antiguo los babilonios observaron y registraron en tablas fenómenos que se repetían periódicamente, relacionados con la astronomía, con la finalidad de predecir acontecimientos mediante la búsqueda de regularidades apareciendo, generalmente, relaciones funcionales lineales. Como obstáculos epistemológicos aparecieron el uso de proporciones, puesto que ocultaban la dependencia existente entre magnitudes diferentes, la disociación entre número y magnitud, la concepción de variabilidad como característica exclusiva de magnitudes físicas y la falta de un simbolismo matemático adecuado.

En la Edad Media se produjo una mejora en el tratamiento y estudio de las funciones en la que el estudio de fenómenos sujetos al cambio y al movimiento tuvo una gran importancia. Asimismo, aparecieron conceptos ligados a la idea de función tales como cantidad variable, velocidad instantánea y aceleración; se desarrollaron dos métodos para la expresión de relaciones funcionales: el álgebra de palabras (uso de letras en lugar de números y del lenguaje verbal para la expresión de situaciones y operaciones) y el método geométrico por medio de gráficas (descripciones cinemáticas de movimiento) y se propuso la representación gráfica como formas continuas a partir de segmentos rectilíneos. Como obstáculos aparecieron la desproporción entre el nivel de abstracción de las teorías abordadas y la falta de un simbolismo matemático adecuado para su desarrollo.

En la Edad Moderna Galileo avanzó en el estudio del movimiento dando lugar a leyes sobre las magnitudes que eran relaciones funcionales. Descartes, en *La Géométrie* (1637), mostró por primera vez el hecho de que una ecuación en x e y es una forma de expresar la dependencia entre dos cantidades variables, de forma que sea posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra, idea que permitirá considerar las funciones como relaciones entre conjuntos de números y representar las funciones mediante fórmulas. Asimismo, estableció una correspondencia inequívoca entre curvas planas y ecuaciones de dos variables x e y y consideró la diferencia entre variables y constantes arbitrarias, mientras que Fermat expuso los principios fundamentales de las coordenadas.

Por otro lado, Newton examinó las variables dependientes como cantidades continuas que tienen una velocidad de cambio y, junto a otros, trabajó en el desarrollo en series de potencias de una función, haciendo posible la representación analítica de la mayoría de las funciones estudiadas en ese momento. Leibnitz determinó la dependencia entre la tangente de una curva y la razón entre las diferencias de las ordenadas y las abscisas tendiendo ambas a cero y utilizó la palabra función, término que aparece por primera vez en un manuscrito suyo en 1673, para designar toda cantidad que varía de un punto a otro de una curva. Bernoulli definió la función como una cantidad compuesta de cualquier manera a partir de una variable y constantes arbitrarias y a él se debe la primera definición explícita de función como expresión analítica (1718).

Por último, Euler introdujo la notación "$f(x)$" en 1740 y, en *Introductio in analysis infinitorum* (1748), realizó un estudio detallado del concepto de función siguiendo la idea de Bernoulli: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes." (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 50). Además, definió otros términos ligados a las funciones como constante ("cantidad definida que toma siempre un mismo valor determinado") y variable ("cantidad indeterminada que comprende en sí misma todos los valores determinados"). La polémica con D'Alembert acerca del problema de las vibraciones de una cuerda fijada en sus dos extremos, dio lugar a una nueva definición, presente en *Institutiones calculi differentialis* (Euler, 1755), en la que aparece la noción general de correspondencia entre pares de elementos, cada uno perteneciente al conjunto en el que toman valores las variables correspondientes: "Si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquel se llama una función de dicha variable.” (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 51).

El principal obstáculo presente en esta época fue la fuerte dependencia entre expresión analítica y función puesto que se pensaba que las relaciones que podían describirse como expresiones algebraicas eran las únicas dignas de estudio.

En el siglo XIX Lagrange asoció el concepto de función con aquellas que están definidas por series de potencias, las funciones analíticas. Fourier desarrolló funciones arbitrarias a partir de las series trigonométricas que llevan su nombre y Dirichlet trabajó con los desarrollos en serie de funciones arbitrarias.

Finalmente, la introducción de la teoría de conjuntos conllevó una generalización del concepto de función: “Dados dos conjuntos arbitrarios A y B, una función de A en B es una ley que a cada elemento x de A le hace corresponder un solo elemento y de B.” (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 53), lo que supuso la pérdida de atributos característicos de los problemas que generaron la necesidad de dicho concepto, tales como la idea de variación, la variable como parámetro temporal y la dependencia.

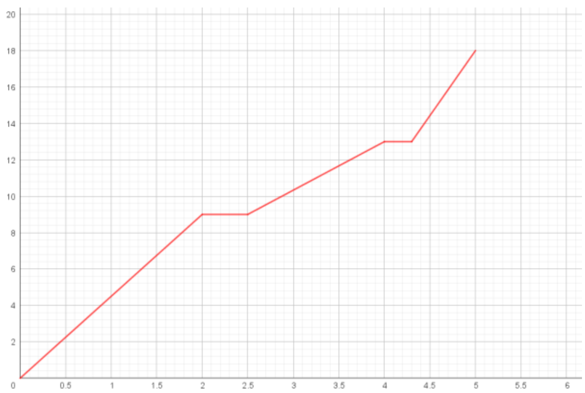
Problemas que Constituyen la Razón de Ser

En este apartado presentamos varios problemas que han sido elaborados teniendo en cuenta las razones de ser expuestas anteriormente. Además, para cada uno de ellos se comentan, brevemente, los objetivos y conceptos matemáticos que pretenden trabajarse. Comentarios referentes a las soluciones se encuentran en el Anexo II.

Problema 1. a) ¿Qué crees que puede representar la Figura 15? Describe una situación.

Figura 15

Gráfica para asociarle una descripción verbal



Una vez se haya reflexionado y comentado posibles situaciones representadas, se continuará con las siguientes cuestiones:

b) Imagina que la gráfica representa la siguiente situación: una mañana de verano, un grupo de amigos comienza a las 10:00 una excursión con la intención de subir una montaña para luego volver por el mismo camino hasta llegar al punto de partida. Asocia a cada tramo de la gráfica los siguientes enunciados sabiendo que tardan más en comer que en hacerse fotos:

b.1) Paran a hacerse fotos.

b.2) Continúan el regreso al punto de partida más rápido.

b.3) Paran a comerse los bocadillos.

b.4) Los amigos suben hasta la cima.

b.5) Los amigos comienzan la bajada.

c) ¿Cuántos km recorren en total?, ¿a qué distancia se encuentra la cima?, ¿a qué hora llegan a ella?, ¿cuánto tiempo dura la caminata?, ¿a qué hora acaban?, ¿cuánto tiempo se encuentran parados?

Para continuar con el trabajo de interpretación de gráficas y del concepto de función como una relación entre dos magnitudes que varían, llevaremos a cabo actividades del estilo a las presentes en los materiales del Shell Centre:

Problema 2. a) Grafica las siguientes situaciones identificando, previamente, dos variables relacionadas.

a.1) Tras tu fiesta de cumpleaños pides ayuda a tus amigos para recoger. Representa gráficamente cuánto puedes tardar en tenerlo todo recogido según la empatía y generosidad de tus amigos.

a.2) Te has dormido, no has escuchado el despertador y piensas que vas a llegar tarde a clase. Sales corriendo de casa y a mitad de camino te das cuenta de que te has dejado el trabajo que tienes que entregar ese mismo día. Vuelves a casa a por él, lo que hace que te canses y a mitad de camino de vuelta a clase te sientes en un banco. Finalmente, te encuentras a tus amigos y continúas, tranquilamente, el camino hasta llegar a clase.

a.3) En una compañía telefónica te cobran 20 céntimos por comenzar la llamada y con estos puedes hablar 2 minutos. A partir de ese momento, cada minuto hablado de más cuesta 10 céntimos.

b) Pasadle a otro grupo vuestras gráficas. Utilizadlas para crear otra situación para la que también puedan valer. Podéis cambiar las magnitudes.

Durante el desarrollo de este apartado se realizarán preguntas que enriquezcan la actividad como, por ejemplo, ¿se parecen a vuestras gráficas?, ¿en qué se diferencian?, ¿cómo podríais mejorarlas?

Problema 3. Tú y tus amigos queréis iros de viaje a Galicia. Tus amigos se fían de ti a la hora de buscar alojamiento ya que eres muy bueno encontrando ofertas. En tu búsqueda te fijas en dos apartamentos: el apartamento A cuesta 80,5€ la noche y te cobran un plus de 90€ por ser el de las mejores vistas de todo el edificio, y el apartamento B cuesta 110,5€ la noche. ¿Qué apartamento reservarías?

Problema 4. a) Imagina que has sido invitado a una fiesta de cumpleaños junto con otras seis personas. Si cada asistente hace un saludo (apretón de manos, beso o abrazo) a cada invitado, ¿cuántos saludos se hacen?, ¿cómo lo has calculado?

b) ¿Cuántos saludos se hacen si el número de invitados es 20?, ¿y si asisten 150 personas? Describe cómo llegas a ello.

c) ¿Eres capaz de encontrar una fórmula general para saber cuántos saludos se han hecho si a la fiesta asisten n personas?

d) Si el número de saludos es 78, ¿a cuántas personas se invita?

Con los **problemas 1** y **2** se pretende trabajar la interpretación de gráficas con el objetivo de superar, en caso de aparecer, la "lectura icónica de la gráfica" (interpretar la gráfica como el dibujo de la trayectoria), así como los siguientes conceptos: el plano cartesiano (cuadrantes, ejes de coordenadas, coordenadas cartesianas), la definición del concepto de función como dependencia entre dos variables y correspondencia entre valores de variables (siguiendo la clasificación de Azcárate y Deulofeu (1996)), lo que permite distinguir gráficas que son funciones de las que no, la idea de pendiente como tasa de cambio (velocidad) y aspectos relevantes en el estudio de funciones reales de variable real (dominio, recorrido, crecimiento y decrecimiento, continuidad y puntos de corte con los ejes de coordenadas). Para este último caso, pueden hacerse preguntas como:

¿la gráfica podría ser decreciente?, ¿es continua?, ¿podría representarse esta situación a través de una función discontinua?. Asimismo, se trabaja la traducción entre los sistemas de representación gráfico y verbal en ambos sentidos.

Por otro lado, con los otros problemas se promueve la modelización de situaciones extramatemáticas con la finalidad de analizarlas y extraer información de ellas. En ambos aparecen todas las representaciones admitidas por las funciones dado que, a partir del enunciado, se espera que los alumnos construyan una tabla de valores asociada que les permita graficar la situación y determinar la expresión algebraica correspondiente. En particular, con el **problema 3** se pretende introducir y trabajar las funciones lineales (relacionándolo con magnitudes directamente proporcionales) y afines, comparándolas gráficamente para explorar sus características, mientras que el **problema 4** es un problema de generalización que se corresponde con la introducción al modelo cuadrático. Se pretende que los alumnos se enfrenten a una situación que no pueda ser modelada mediante una función afín y en la que la función cuadrática sea necesaria para su resolución. Tras resolverse, puede representarse gráficamente la relación correspondiente entre las variables involucradas, pudiéndose trabajar tramos de crecimiento y cortes de la gráfica con el eje X, relacionándolos con las soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente y dotándoles de significado: no hay saludos cuando a la fiesta asisten 0 o 1 invitado.

Cabe destacar que con problemas de generalización se promueve y desarrolla el razonamiento inductivo y el pensamiento algebraico. Existen investigaciones acerca del desarrollo del sentido algebraico, desde edades muy tempranas, a través de tareas con patrones. En concreto, Castro et al. (2010) muestran la importancia de trabajar el razonamiento inductivo en la educación matemática puesto que permite el descubrimiento de conocimiento nuevo al formular y comprobar conjeturas sencillas. Por otro lado, Torres et al. (2022) hacen referencia a estudios que demuestran que el trabajo con tareas de generalización que involucran funciones, genera una comprensión de la variabilidad conjunta, desarrollándose así el pensamiento funcional.

Metodología

En relación a la metodología que llevaremos a cabo durante el desarrollo de la secuencia didáctica, comentar que se tienen en cuenta las características asociadas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas

(Bingolbali y Bingolbali, 2019), en la que el contenido matemático surge de las situaciones y problemas propuestos al alumnado, que pueden encontrarse en el trabajo de Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste (2021).

Para la realización de los problemas, se divide al alumnado en grupos heterogéneos (3-4 personas) con el objetivo de fomentar la participación de todo estudiante y el aprendizaje colaborativo. De esta manera se trabaja el sentido socioafectivo.

Los estudiantes realizan las actividades, sin recibir instrucción previa acerca de los contenidos a trabajar, de la siguiente forma: en primer lugar, se dedican unos minutos a la lectura individual y a la anotación de ideas relacionadas con la resolución del problema. Seguidamente, se comparten las opiniones con los miembros del grupo correspondiente, dando lugar a un debate. De esta forma se promueve la comprensión y la indagación en la búsqueda de estrategias para su resolución, favoreciendo la autonomía del alumnado.

Durante el proceso de resolución, el profesor se pasa por los diferentes grupos observando las estrategias y razonamientos empleados e interviniendo, siempre y cuando el alumnado lo requiera, a través de dudas o preguntas para reflexionar. Asimismo, se realizan puestas en común, dirigidas por el docente, en las que el alumnado comunica, tanto de manera oral como escrita, sus indagaciones y se comparten las estrategias diseñadas. En ellas, siguiendo las ideas presentes en los materiales de apoyo del Shell, el profesor puede recoger sugerencias del alumnado para comentarlas o pedir a un representante de cada grupo que exponga las conclusiones obtenidas. Así, por un lado, se fomenta la participación del alumnado en la construcción del conocimiento, dejando de ser solamente un mero receptor de la información y, por otro lado, se sitúa el foco en el proceso y no en el resultado final. Finalmente, el docente, institucionaliza, resume o sintetiza el contenido matemático presente en las situaciones propuestas. Cabe destacar que también aparecerán, intercaladas con los problemas, actividades de consolidación cuya finalidad es reforzar las técnicas aparecidas en las actividades de desarrollo y que, generalmente, serán llevadas a cabo de manera individual.

E. Sobre el Campo de Problemas

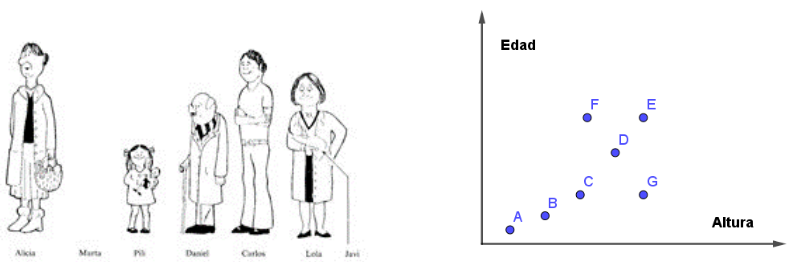
En este apartado exponemos los problemas diseñados que forman parte de la secuencia didáctica, indicando tanto los campos de problemas que se trabajan, como las técnicas utilizadas en su resolución expuestas en el apartado A. La metodología a seguir en su implementación en el aula se corresponde con la explicada en el apartado anterior. Comentarios referentes a las soluciones se encuentran en el Anexo III.

Para la elaboración de los problemas se tienen en cuenta las competencias específicas presentes en el currículo. Estas se agrupan en torno a cinco bloques competenciales según su naturaleza: resolución de problemas (1 y 2), razonamiento y prueba (3 y 4), conexiones (5 y 6), comunicación y representación (7 y 8) y destrezas socioafectivas (9 y 10). Con los problemas mostrados en este apartado se movilizan, principalmente, las siguientes: CE.M.1. (interpretar, modelizar y resolver problemas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento), CE.M.2. (comprobación de la validez de las soluciones), CE.M.3. (formular y comprobar conjeturas), CE.M.4. (reconocimiento de patrones y modelización de situaciones), CE.M.5. (conexión intramatemática), CE.M.6. (conexión extramatemática), CE.M.7. (representación), CE.M.8. y CE.M.10. (comunicación e intercambio de ideas en pequeño y gran grupo).

Problema 1. Una tarde decides ir de compras al centro comercial. Vas a la parada del autobús y ves que tienes delante de ti las personas mostradas en la Figura 16. Asocia a cada uno con su correspondiente representación, dibuja/ describe a Marta y sitúate, de manera aproximada, en el diagrama. ¿Qué criterio has utilizado?

Figura 16

Asociar a cada persona con el punto que representa en el diagrama

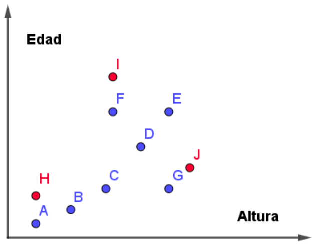


Nota. La imagen de la izquierda está adaptada de *La cola de la parada del autobús* (Alayo, 1990, p. 17).

a) Llegan tres personas más a la parada, representadas por los puntos rojos en la Figura 17. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones y responde a las preguntas:

Figura 17

Gráfica para razonar la veracidad o falsedad de las afirmaciones y responder a las preguntas



a.1) A y H son gemelas.

a.2) I es más alto que F y E.

a.3) J es más mayor y más alto que A, B, C, G y H.

a.4) ¿Quién es el más alto?, ¿y el más mayor?, ¿y el más bajo?, ¿y el menor de edad?

b) Dibuja el diagrama correspondiente al intercambiar la edad y la altura de ejes en la primera gráfica.

Problema 2. Dado un cuadrado cuyos vértices son $A(2,0)$, $B(-2,0)$, $C(0,2)$ y $D(0,-2)$, dibuja, sin tener en cuenta la perspectiva, un cubo que verifique las siguientes condiciones e indica los vértices correspondientes.

a) Los lados que dibujes queden en el 2º y 3º cuadrante.

b) Los lados que dibujes queden en el 1º y 4º cuadrante.

Con los **problemas 1** y **2** se trabajan **CP.1** y **TC.1** (**TC.1.1**, **TC.1.2**). En particular, con el primero, se pretende que los alumnos razonen, previo al trabajo cuantitativo, acerca del significado cualitativo de puntos situados en el plano cartesiano mediante la comparación de posiciones.

El **problema 3** se corresponde con el problema 2 del apartado **D.**

Problema 4. a) Identifica las variables presentes en las siguientes situaciones y determina si existe una relación entre ellas. En caso de existir una relación, exprésala de diferentes formas.

a.1) Olivia tiene 15€ para gastarse en un desayuno, ¿con cuánto dinero vuelve a casa?

a.2) El día 5 de febrero vas a comer a tu restaurante favorito y te gastas 40€, ¿cuánto te gastarás si vuelves el día 10?

a.3) Una familia decide realizar una excursión en el Valle de Bujaruelo cuya distancia es 10 km, ¿cuánto tiempo les llevará terminarla?

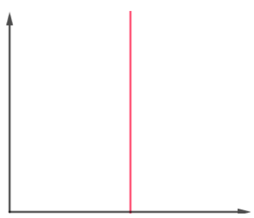
a.4) Luis pesaba 50,2 kg cuando tenía 14 años, ¿cuánto pesa a día de hoy sabiendo que tiene 22 años?

b) Ahora invéntate otras cuatro situaciones y repite lo hecho en **a)**.

c) Describe una situación a partir de la Figura 18.

Figura 18

Gráfica a la que asociar una descripción verbal

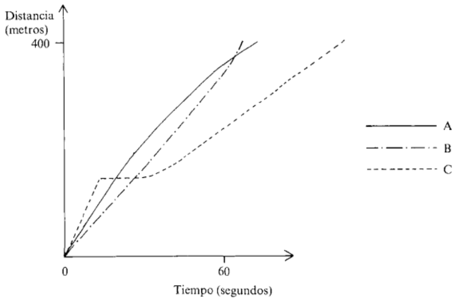


Con los **problemas 3** y **4** se trabaja, principalmente, la identificación de variables y situaciones que representan una función, y la traducción entre los distintos sistemas de representación, predominando el registro verbal y el gráfico. En particular, **CP.2** (**CP.2.1**, **CP.2.2**), **CP.3** (**CP.3.1**, **CP.3.4**, **CP.3.5**), **CP.4** (**CP.4.1**, **CP.4.3**), **TC.2** (**TC.2.1**, **TC.2.2**), **TC.3** (**TC.3.1**, **TC.3.4**, **TC.3.5**) y **TC.4** (**TC.4.1.1**, **TC.4.3.1**).

Problema 5. La Figura 19 representa aproximadamente lo que ocurre cuando tres atletas A, B y C participan en una carrera de vallas de 400 metros. Imagina que un amigo ciego te pregunta por lo sucedido. Describe, de la manera más precisa posible, lo que ocurre. En particular, responde a las siguientes preguntas: ¿en qué posición quedó cada atleta?, ¿quién va más rápido?, ¿y más lento?, ¿los atletas se cruzan a lo largo de la carrera?, ¿llevan velocidad constante?

Figura 19

Gráfica para describir la situación verbalmente



Nota. La imagen está tomada de *La carrera de vallas* (Alayo, 1990, p. 172).

El **problema 6** se corresponde con el problema 1 del apartado **D.**

Con los **problemas 5** y **6** se trabaja el análisis e interpretación de gráficas tanto de manera cualitativa, como cuantitativa. En particular, los siguientes campos de problemas y técnicas: **CP.1**, **CP.2** (**CP.2.1**), **CP.3** (**CP.3.1**, **CP.3.2**), **CP.4** (**CP.4.3**), **TC.1** (**TC.1.1**), **TC.2** (**TC.2.1**), **TC.3** (**TC.3.1**, **TC.3.2**) y **TC.4** (**TC.4.3.1**). Además, comenzamos un estudio cualitativo de la idea de pendiente como tasa de cambio (velocidad).

Problema 7. Observa la Figura 20 que se corresponde con una noticia publicada en un periódico nacional, ¿qué se está representando?, ¿qué destacas de la gráfica a simple vista?

Figura 20

Gráfica para analizar

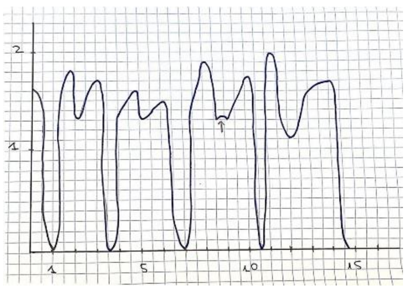
Nota. Imagen extraída de *La Razón* (https://lc.cx/ImgyMF).

Tal y como indican Azcárate y Deulofeu (1996), uno de los objetivos de las matemáticas es capacitar a los alumnos para la lectura e interpretación de la información proporcionada por los medios de comunicación. Por ello, seleccionamos este problema en el que se muestra un ejemplo de información (fenómeno de cambio) que involucra una gráfica y errores asociados a ella. Con él se trabaja el correcto tratamiento de la información y errores asociados a la graduación de los ejes y, en concreto, **CP.3** y **TC.3**.

Problema 8. Tras un partido de pádel en el que te declaras vencedor, el contrincante, que está molesto por haber perdido, te reta a jugar al lanzamiento de pelota contra la pared. Gana quien consiga alcanzar una mayor altura. La Figura 21 muestra la altura, en metros, alcanzada por la pelota en cada segundo.

Figura 21

Gráfica que representa el lanzamiento de la pelota



Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué representa cada eje?

b) ¿Qué representa el comienzo de la gráfica (cuando toca al eje Y)?, ¿qué significado tiene que la gráfica toque al eje X?, ¿qué representa la curva señalada?

c) ¿Cuál es la máxima altura alcanzada?, ¿y la mínima?, ¿cuándo se alcanzan?

d) ¿Cuántos lanzamientos haces?

e) ¿Cómo varía la altura alcanzada por la pelota?

f) Dibuja una gráfica que simule el juego de tu contrincante en la que seas el ganador.

Con este problema se trabajan las siguientes técnicas y campos de problemas: **CP.1**, **CP.2** (**CP.2.1**), **CP.3** (**CP.3.1**, **CP.3.2**, **CP.3.3**, **CP.3.5**), **TC.1** (**TC.1.1**), **TC.2** (**TC.2.1**), y **TC.3** (**TC.3.1**, **TC.3.2**, **TC.3.3**, **TC.3.5**).

Espinoza (2017) analiza el papel que tiene el planteamiento de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, definiéndolo como un proceso matemático complejo en el que interviene la interpretación personal de una situación concreta y que puede ocurrir antes (se persigue plantear un problema a partir de una situación), durante o después de la resolución de problemas. Hace mención a investigaciones llevadas a cabo en las que se explicitan los beneficios del proceso de invención de problemas, tales como promover la participación e indagar en las capacidades matemáticas de los alumnos, adquirir aprendizajes significativos, mejorar habilidades de resolución de problemas, así como desarrollar y aumentar el conocimiento matemático y la creatividad. Por ello, hemos seleccionado los siguientes problemas:

Problema 9. Escribe un enunciado para la Tabla 5.

Tabla 5

Tabla a la que asociar un enunciado verbal

Objeto	5	3	6	2
Precio (€)	62,5€	37,5€	75€	25€

En este problema se trabaja la traducción entre el registro tabular y el verbal (**CP.2.1**, **CP.4.2** y **TC.4.2.1**), cuyo trabajo (en el sentido tabular-verbal) es escaso como hemos podido observar en el análisis de los libros de texto. El trabajo puede continuarse, una vez comentadas posibles soluciones, pidiendo la ampliación de la tabla, su representación gráfica (**TC.4.2.2**) y, finalmente, la expresión algebraica correspondiente (**TC.4.2.3**).

Problema 10. Escribe un enunciado en cuya resolución aparezca el siguiente sistema de ecuaciones lineal:

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ \frac{1}{5}x + (y - 1) = 11 \end{cases}$$

En este problema se trabaja la traducción entre el registro algebraico y el verbal (**CP.4.4** y **TC.4.4.1**). El trabajo puede continuarse, una vez comentadas posibles soluciones, pidiendo una tabla de valores para cada recta (**TC.4.4.2**) y su representación gráfica (**TC.4.4.3.1**). Notar que con la representación gráfica puede trabajarse la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales.

El **problema 11** se corresponde con el problema 3 del apartado **D.**

Problema 12. a) En una carrera están participando Patricia y Mario que empiezan a correr a la vez. Patricia le da ventaja a Mario dejándole empezar a correr desde los 5 metros. En el primer segundo, Patricia alcanza los 5 metros y Mario los 8 metros. ¿Hay algún momento a lo largo de la carrera donde se cruzan? Si ambos continúan corriendo tras el cruce, ¿quién crees que ganará la carrera?

b) Imaginemos que hay una tercera participante en la carrera, Laura, que en cada segundo recorre lo mismo que Mario y empieza donde Patricia, ¿se cruza en algún momento con alguno de ellos?

Con los **problemas 11** y **12** se introducen y trabajan las funciones lineales y afines, comparándolas gráficamente para explorar sus características. En concreto, se trabajan **CP.2** (**CP.2.1**), **CP.4** (**CP.4.1**), **CP.5** (**CP.5.1**, **CP.5.2**), **TC.2** (**TC.2.1**), **TC.4** (**TC.4.1.1**, **TC.4.2.3**, **TC.4.4.2**, **TC.4.4.3.1**), **TC.5** (**TC.5.1** (**TC.5.1.1**, **TC.5.1.2**, **TC.5.1.4**) y **TC.5.2** (**TC.5.2.1**, **TC.5.2.2**)). Además, pueden trabajarse todos los sistemas de representación.

Problema 13. Actividad de exploración del modelo afín y el modelo lineal (archivo GeoGebra).

a) Modifica los parámetros m y n e indica qué varía en cada caso o qué determina cada valor. Por ejemplo, puedes comenzar dando los valores mostrados en la Tabla 6.

Tabla 6

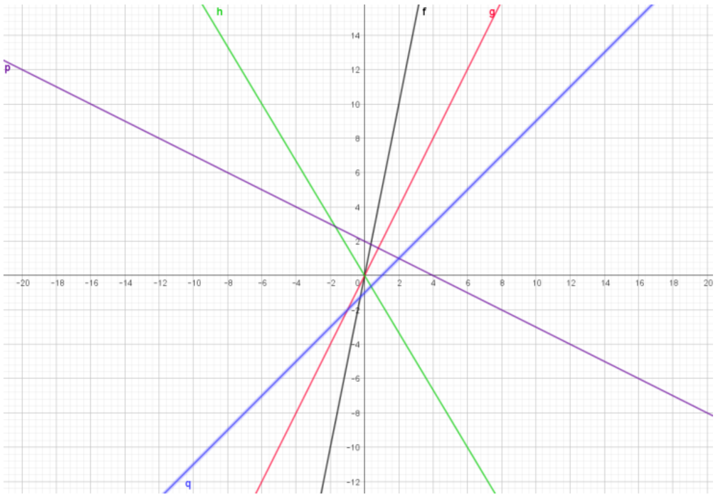
Posibles valores que pueden tomar los parámetros correspondientes

$\boldsymbol{m}$	1.8	-5	8
$\boldsymbol{n}$	-2	2	3.5

b) Empareja las funciones presentes en la Figura 22 con su expresión algebraica sin hacer uso de una tabla de valores.

Figura 22

Funciones a las que asociar su expresión algebraica



$y = x - 1;$ $\quad y = 2x;$ $\quad y = 5x;$ $\quad y = -\frac{5}{3}x;$ $\quad y = -\frac{1}{2}x + 2.$

c) Representa gráficamente las siguientes funciones sin hacer uso de una tabla de valores.

$y = 8x;$ $\quad y = -\frac{3}{2}x + 3;$ $\quad y = -x;$ $\quad y = 3x - 5.$

Durante el desarrollo de la actividad se harán preguntas tales como: ¿qué cambia si modificamos el parámetro m?, ¿y si modificamos el n?, ¿qué sucede si $n = 0$?, ¿y si $m = 0$?, ¿una función lineal es una función afín?, con la finalidad de guiar la exploración y concluir aspectos relevantes acerca de la inclinación de la recta y sus cortes con los ejes.

Esta actividad está pensada para trabajarla por parejas y con ordenadores. A los alumnos se les comparte un archivo de GeoGebra en el que aparece una recta con ecuación $y = mx + n$ y los parámetros m y n. Tiene como finalidad explorar las características del modelo lineal (considerando $n = 0$ en el modelo afín) y del modelo afín (incluyendo también las funciones constantes), mediante la modificación de dichos parámetros y el análisis de los efectos correspondientes en las gráficas asociadas, y trabajar la relación directa entre la gráfica y la ecuación. En particular, los campos de problemas y las técnicas involucradas son **CP.3** (**CP.3.2**, **CP.3.5**), **CP.4** (**CP.4.3**, **CP.4.4**), **CP.5** (**CP.5.1**, **CP.5.2**), **TC.3** (**TC.3.2**, **TC.3.5**), **TC.4** (**TC.4.3.2**, **TC.4.3.3**, **TC.4.4.3.2**), **TC.5** (**TC.5.1** (**TC.5.1.2**, **TC.5.1.3**, **TC.5.1.4**) y **TC.5.2** (**TC.5.2.1**, **TC.5.2.2**)) y **TC.5.4**.

Problema 14. Si de una recta conocemos la pendiente y sabemos que pasa por el punto (x_0, y_0), ¿cómo queda la ecuación de dicha recta?, ¿cuál es el número mínimo de puntos que son necesarios para poder determinar una recta?

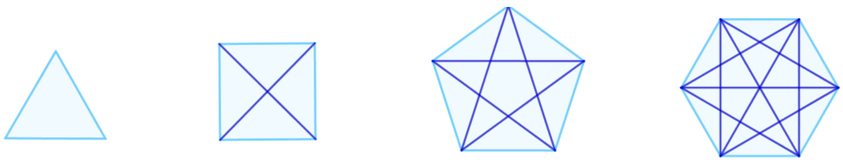
Con este problema los alumnos, a partir de la ecuación explícita de la recta, llegan a la ecuación punto-pendiente de la misma. Además, sirve para justificar que dados 2 puntos, una recta queda completamente determinada.

El **problema 15** se corresponde con el problema 4 del apartado **D.**

Problema 16. Imagina que la estrategia que has utilizado para resolver el problema anterior es la mostrada en la Figura 23.

Figura 23

Posible estrategia a utilizar en la resolución del problema 15 del apartado E. y búsqueda del patrón correspondiente



¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de 7 lados?, ¿y de 12?, ¿y de n lados?

Problema 17. Imagina que te dan $24\,cm$ de cuerda, ¿serías capaz de construir el rectángulo de área máxima?, ¿cuáles son sus dimensiones?

Para la elección de este problema se tiene en consideración lo presente en las orientaciones de enseñanza del currículo. Se pretende que los alumnos representen gráficamente la relación correspondiente entre las variables involucradas a través de la expresión algebraica asociada. En particular, se busca encontrar el vértice de la parábola, lo que puede relacionarse con el método de completar cuadrados y con el máximo absoluto de la función. Además, con esta actividad puede trabajarse el crecimiento y decrecimiento de la función. Por otra parte, puede superarse el obstáculo didáctico presente en los estudiantes, y comentado en las asignaturas *Diseño curricular e instruccional de matemáticas* y *Diseño de actividades de aprendizaje de matemáticas*, en relación a la clasificación del cuadrado como un caso particular del rectángulo.

Con estos tres problemas (**15**, **16** y **17**) se introduce y trabaja el modelo cuadrático, en concreto, las siguientes técnicas y campos de problemas: **CP.1**, **CP.2** (**CP.2.1**), **CP.3** (**CP.3.1**, **CP.3.2**, **CP.3.3**, **CP.3.5**), **CP.4** (**CP.4.1**), **CP.5** (**CP.5.3**), **TC.1** (**TC.1.2**), **TC.2** (**TC.2.1**), **TC.3** (**TC.3.1**, **TC.3.2**, **TC.3.3**, **TC.3.5**), **TC.4** (**TC.4.1.1**) y **TC.5** (**TC.5.3.2**).

Problema 18. Actividad de exploración del modelo cuadrático (archivo GeoGebra).

a) Modifica los parámetros a, b, c, d y q e indica qué varía en cada caso o qué determina cada valor. Por ejemplo, puedes comenzar dando los valores mostrados en la Tabla 7.

Tabla 7

Posibles valores que pueden tomar los parámetros correspondientes

a	14	-1.5	-3
b	-4	-6	0
c	2	-1	5

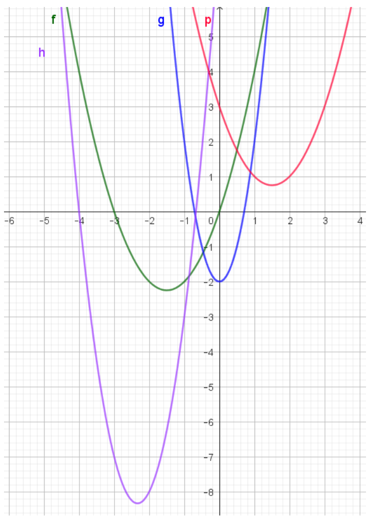
d	3	-2	4
q	-3	1	4

b) ¿Cuál es el número mínimo de puntos que son necesarios para poder graficar de manera aproximada una parábola? Aplícalo al caso $(x-2)^2+6x+3$.

c) Empareja las funciones presentes en la Figura 24 con su expresión algebraica sin hacer uso de una tabla de valores. Indica el vértice y el eje de simetría correspondiente.

Figura 24

Funciones a las que asociar su expresión algebraica



$y=4x^2-2;\qquad y=x^2-3x+3;\qquad y=x^2+3x;\qquad y=3x^2+14x+8.$

d) Representa gráficamente las siguientes funciones sin hacer uso de una tabla de valores. Indica el vértice y el eje de simetría correspondiente.

$y=2x^2+2x;\qquad y=x^2-3x+5;\qquad y=x^2+1;\quad y=(x+4)^2-3.$

La actividad está pensada para trabajarla de la misma manera que el **problema 13**. A los alumnos se les comparte un archivo de GeoGebra en el que aparecen parábolas con las siguientes ecuaciones: $y = ax^2 + bx + c$, y $y = (x - d)^2 + q$ y los parámetros correspondientes. El objetivo de esta actividad es explorar las características del modelo cuadrático (crecimiento, extremo relativo y absoluto, simetría, traslaciones), mediante la modificación de dichos parámetros y el análisis de los efectos correspondientes en las gráficas asociadas, así como trabajar la relación directa entre la gráfica y la ecuación. Con respecto a esto último, aparece la relación entre la factorización de una expresión cuadrática, las soluciones reales de la ecuación correspondiente y los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas, y la relación entre el método de completar cuadrados y la identificación del vértice. Además, se reflexiona acerca del número mínimo de puntos que son necesarios para poder determinar, de manera aproximada, la gráfica de una parábola. En relación a las técnicas y a los campos de problemas, se trabajan los citados en los problemas **15**, **16** y **17** junto a **CP.4** (**CP.4.3**, **CP.4.4**), **TC.1** (**TC.1.1**), **TC.4** (**TC.4.3.3**, **TC.4.4.2**, **TC.4.4.3.2**), **TC.5** (**TC.5.3.1**, **TC.5.3.3**) y **TC.5.4**.

F. Sobre las Técnicas

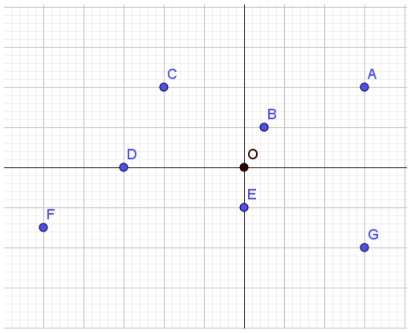
En este apartado presentamos los distintos tipos de ejercicios que forman parte de la secuencia didáctica, cuya finalidad es poner en práctica las técnicas que aparecen en la resolución de los problemas expuestos en el apartado anterior. Para cada uno de ellos indicamos las técnicas que se ejercitan. Cabe destacar que, tal y como se recoge en el apartado A., las técnicas y los campos de problemas están fuertemente relacionados.

Como se ha comentado en apartados anteriores, los ejercicios se trabajarán de manera conjunta con los problemas y, generalmente, serán llevados a cabo de manera individual. Se pretende que tanto los conceptos como las técnicas surjan de los problemas presentados al alumno para, posteriormente, institucionalizarlos y, finalmente, consolidar el trabajo de las técnicas empleadas mediante estos tipos de ejercicios.

Ejercicio 1 (**TC.1.1**). Escribe las coordenadas cartesianas de los puntos representados en la Figura 25 e indica en qué cuadrante se encuentra cada uno.

Figura 25

Puntos para determinar sus coordenadas cartesianas



Ejercicio 2 (**TC.1.2**). Dibuja en un sistema de ejes coordenados, puntos que cumplan las siguientes condiciones e indica, en cada caso, sus coordenadas.

a) A cuyas coordenadas cartesianas sean números naturales.

b) B cuya abscisa es $-\frac{1}{2}$ y la ordenada un número positivo.

c) C situado en el segundo cuadrante.

d) $D(-4,-2)$. **e)** $E(\frac{3}{2},-\frac{5}{2})$.

Ejercicio 3 (**TC.2.1**, **TC.2.2**). Determina si las siguientes situaciones son funciones justificando tu respuesta. En caso afirmativo, indica cuáles son las variables independientes y dependientes.

a) A cada número entero le asociamos su anterior.

b) A cada número natural le asociamos sus múltiplos.

c) Las situaciones mostradas en la Tabla 8.

Tabla 8

Tablas para determinar si representan o no una función

x	−5	−2	−2	8	10
y	0	2	4	−1	3

1)

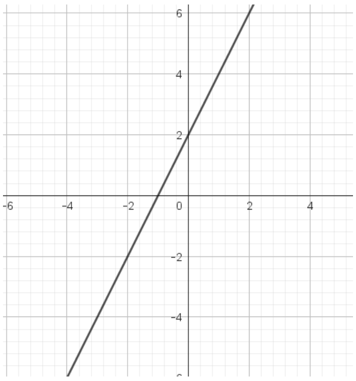
Edad	10	12	14	15
Peso (kg)	34,8	40	46,5	50

2)

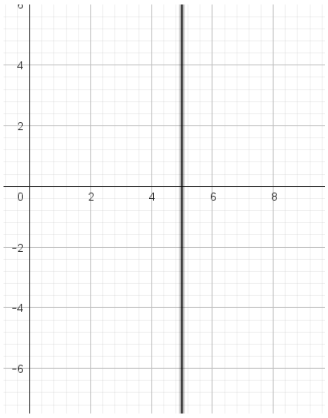
d) Las gráficas representadas en la Figura 26.

Figura 26

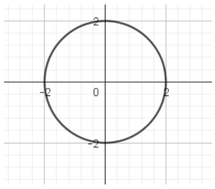
Gráficas para determinar si representan o no una función



1)



2)



3)

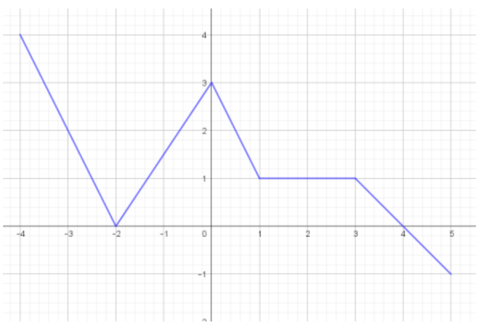
e) $y = 2x - 1;$ $\quad x = y^2;$ $\quad x = 1;$ $\quad y = 2.$

Ejercicio 4 (**TC.2.1**, **TC.2.2**). Inventa cuatro situaciones y razona si son funciones o no. En caso de serlo, indica cuáles son las variables independientes y dependientes.

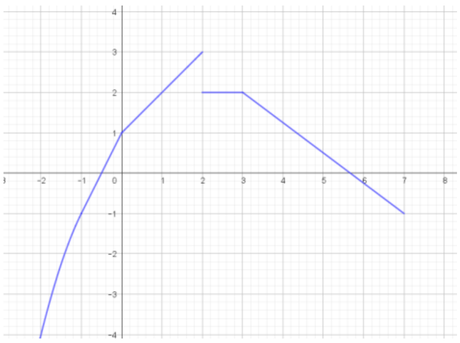
Ejercicio 5 (**TC.3.1**, **TC.3.2**, **TC.3.3**, **TC.3.4**, **TC.3.5**). Determina si las funciones presentes en la Figura 27 son continuas e indica, para cada una, el dominio, el recorrido, tramos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

Figura 27

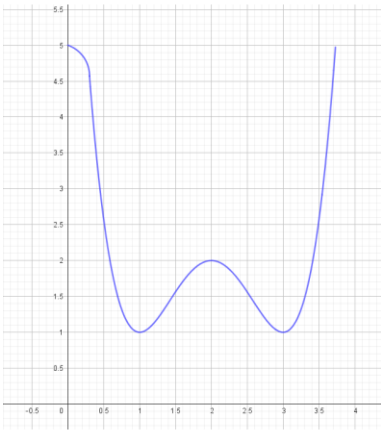
Funciones para determinar sus características generales



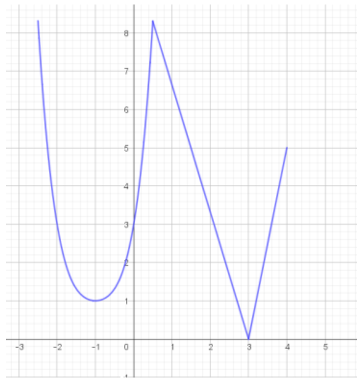
1)



2)



3)



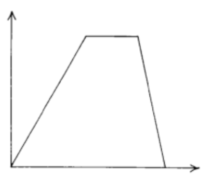
4)

Ejercicio 6 (**TC.3.1**, **TC.3.2**, **TC.3.3**, **TC.3.4**, **TC.3.5**, **TC.4.1.1**). Piensa en el grado de felicidad que tuviste el día de tu cumpleaños. Dibuja una gráfica que represente esta situación e indica sus características (dominio, recorrido, crecimiento, máximos, mínimos, continuidad y puntos de corte con los ejes).

Ejercicio 7 (**TC.4.3.1**). Pon nombres a los ejes e inventa una situación que pueda ser representada mediante la Figura 28.

Figura 28

Gráfica a la que asociar un enunciado verbal



Nota. La imagen está tomada de *El lenguaje de funciones y gráficas* (Alayo, 1990, p. 246).

Ejercicio 8 (**TC.4.1.1**, **TC.4.2.2**, **TC.4.2.3**). Por 5 caramelos he pagado 25 céntimos.

a) Completa la Tabla 9.

Tabla 9

Tabla a completar

Caramelos	1	2	5	7	n
Precio					

b) Expresa con lenguaje algebraico la relación que existe entre el número de caramelos comprados y el precio a pagar.

c) Representa gráficamente la situación.

Ejercicio 9 (**TC.4.2.1, TC.4.2.3**). Asocia un enunciado a la Tabla 10.

Tabla 10

Tabla a la que asociar un enunciado verbal

x	-2	-1	0	3	4
y	-1	1	3	9	11

Ejercicio 10 (**TC.4.4.1, TC.4.4.2**, **TC.4.4.3.1**). Dada la función $y = 3x + 4$.

a) Asocia un enunciado.

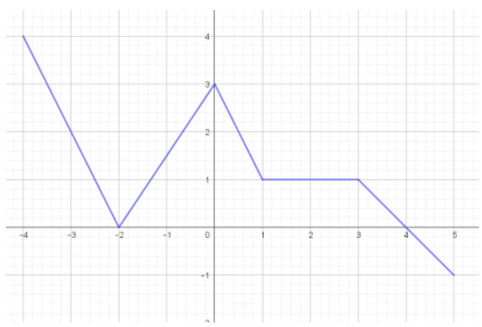
b) Escribe la tabla de valores correspondiente.

c) Representa la función gráficamente.

Ejercicio 11 (**TC.4.3.2**). Escribe una tabla de valores para la función presentada en la Figura 29.

Figura 29

Gráfica a la que asociar una tabla de valores



Ejercicio 12 (**TC.5.1.1**, **TC.5.1.2**, **TC.5.1.4, TC.5.2.1, TC.5.2.2**). Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones.

a) La función representada en la Tabla 11.

Tabla 11

Tabla que representa una función lineal

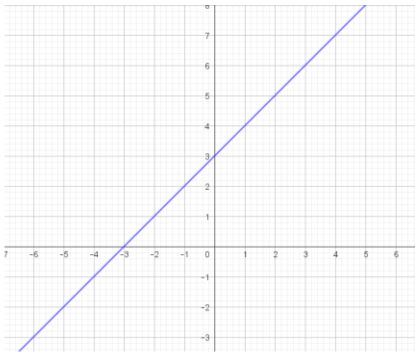
x	-4	-2	3	5
y	-24	-12	18	30

b) $y = \frac{2x+1}{3}$; $y = 4x + 3$; $y = -\frac{x+2}{4}$; $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

c) La función representada en la Figura 30.

Figura 30

Recta a la que asociar sus elementos notables

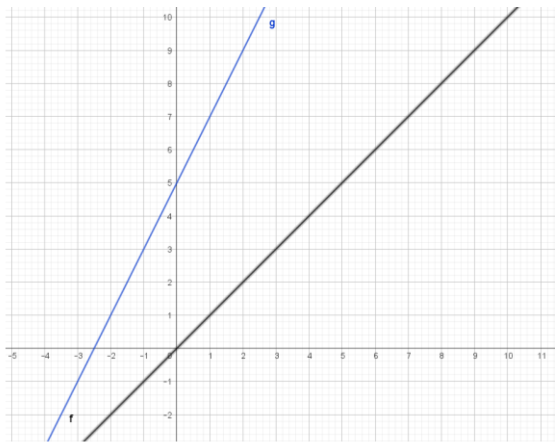


Ejercicio 13 (**TC.5.1.3**). Escribe la ecuación de la recta que pasa por $D(-4,-2)$ y $F(4,2)$.

Ejercicio 14 (**TC.4.3.2**, **TC.4.3.3, TC.4.4.3.2**). Relaciona cada una de las siguientes rectas, representadas en la Figura 31, con la tabla (ver Tabla 12) y expresión algebraica correspondiente. Si lo consideras necesario, añade más valores a las tablas.

Figura 31

Rectas a las que asociar sus expresiones algebraicas y tablas correspondientes



Expresiones algebraicas: $y = x$; $y = 2x + 5$.

Tabla 12

Tablas a asociar con las rectas correspondientes

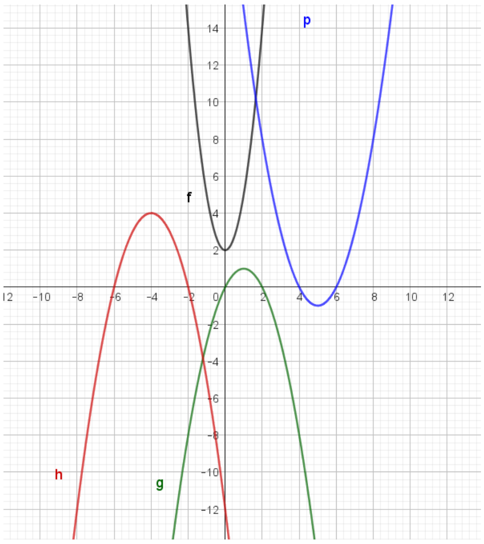
x	3	−4
y	11	−3

x	5	−8
y	5	−8

Ejercicio 15 (**TC.4.3.3**, **TC.4.4.3.2**, **TC.5.3.1, TC.5.3.2, TC.5.3.3, TC.5.4**). Empareja las funciones presentes en la Figura 32 con su expresión algebraica sin hacer uso de una tabla de valores. Indica el vértice y el eje de simetría correspondiente.

Figura 32

Funciones a las que asociar su expresión algebraica



$y = (x-5)^2 - 1;$ $y = 3x^2 + 2;$ $y = -(x+4)^2 + 4;$ $y = -x^2 + 2x.$

G. Sobre las Tecnologías

En este apartado presentamos los razonamientos que justifican las técnicas que resuelven los diferentes campos de problemas y que pretenden enseñarse con esta secuencia didáctica. Estos se apoyan en definiciones y propiedades en torno al concepto de función.

TG.1: Definición de coordenadas cartesianas de un punto P en el plano cartesiano

Sea P un punto en el plano cartesiano. Llamamos *coordenadas cartesianas del punto P* a un par ordenado de números (x, y) que indica su posición respecto de los ejes de coordenadas. La coordenada x se denomina *abscisa* del punto y representa la posición sobre el eje X. La coordenada y se denomina *ordenada* del punto y representa la posición sobre el eje Y.

TG.2: Definición de función como dependencia entre dos variables y correspondencia entre valores de variables

Una *función* es una relación entre dos variables x e y, de manera que a cada valor de x le corresponde, como mucho, un único valor de y. A la variable x se le denomina *variable independiente* y a la variable y se le denomina *variable dependiente*, cuyo valor depende del valor de x. Esta relación puede expresarse de diferentes maneras: descripción verbal, tabla, expresión algebraica ($y = f(x)$) y gráfica.

TG.3: Definiciones de conceptos relacionados con las funciones

<u>TG.3.1: Definición de dominio y recorrido.</u>

Sea f una función. Llamamos *dominio* al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente y *recorrido* al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente.

<u>TG.3.2: Definición de función creciente y decreciente.</u>

Sea f una función. Diremos que la *función* es *creciente* en un intervalo si dados x_1 y x_2 dos puntos del dominio, pertenecientes a dicho intervalo, con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$, es decir, si el valor de la variable dependiente aumenta al recorrer, en sentido creciente, los valores de la variable independiente.

Diremos que la *función* es *decreciente* en un intervalo si dados x_1 y x_2 dos puntos del dominio, pertenecientes a dicho intervalo, con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$, es decir, si el valor de la variable dependiente disminuye al recorrer, en sentido creciente, los valores de la variable independiente.

Finalmente, diremos que la *función* es *constante* en un intervalo si el valor de la variable dependiente no cambia al recorrer, en sentido creciente, los valores de la variable independiente pertenecientes a dicho intervalo.

Cabe destacar que la monotonía de una función es una propiedad global, es decir, hablaremos de crecimiento y decrecimiento en intervalos y no en un punto concreto.

TG.3.3: Definición de extremos relativos y absolutos.

Sea f una función y x_1 un punto del dominio. Diremos que f tiene un *máximo relativo* en x_1 si $f(x_1)$ es el mayor valor que toma la función para todos los valores próximos a x_1 que pueda tomar la variable independiente, es decir, si la función pasa de ser creciente a decreciente.

Diremos que f tiene un *mínimo relativo* en x_1 si $f(x_1)$ es el menor valor que toma la función para todos los valores próximos a x_1 que pueda tomar la variable independiente, es decir, si la función pasa de ser decreciente a creciente.

Diremos que f tiene un *máximo absoluto* en x_1 si $f(x_1)$ es el mayor valor que toma la función.

Por último, diremos que f tiene un *mínimo absoluto* en x_1 si $f(x_1)$ es el menor valor que toma la función.

TG.3.4: Definición de función continua.

Diremos que una *función* es *continua* si la gráfica de la función no presenta saltos para ningún valor de la variable independiente correspondiente al dominio.

TG.3.5: Definición de puntos de corte con los ejes de coordenadas.

Los *puntos de corte de una función con los ejes de coordenadas* son los puntos de intersección de su gráfica con los ejes. En particular, los *puntos de corte con el eje* X son aquellos cuya ordenada es 0, es decir, los de la forma $(x, 0)$, y los *puntos de corte con el eje* Y son aquellos cuya abscisa es 0, es decir, los de la forma $(0, y)$.

TG.5: Caracterización de los modelos funcionales

TG.5.1: Caracterización del modelo lineal.

Una *función lineal*, también conocida como función de proporcionalidad directa, es de la forma $y = mx$ con m un número real denominado *pendiente*. Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas, en la que la pendiente se corresponde con su inclinación respecto al eje X. Relaciona dos magnitudes directamente proporcionales.

TG.5.2: Caracterización del modelo afín.

Una *función afín* es de la forma $y = mx + n$ con m y n números reales denominados *pendiente* y *ordenada en el origen*, respectivamente. Su gráfica es una recta que corta al eje Y en el punto $(0, n)$. Notar que tomando $n = 0$, tenemos una función lineal.

TG.5.3: Caracterización del modelo cuadrático.

Una *función cuadrática* es de la forma $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, b y c números reales. Su gráfica es una parábola. Esta es simétrica (tiene un eje de simetría vertical) y tiene un máximo o mínimo absoluto denominado *vértice* de la parábola. En relación a los puntos de corte con los ejes de coordenadas, una parábola corta al eje X a lo sumo en dos puntos y al eje Y en el punto $(0, c)$.

Comentar que el cálculo de la pendiente y del vértice mediante sus correspondientes expresiones simbólicas, se justifica a través de ejemplos concretos en la resolución de los problemas puesto que la comprensión de una demostración matemática requiere de un cierto grado de abstracción y conocimientos matemáticos que exceden lo correspondiente a 2º ESO. Estos ejemplos aparecen indicados en los comentarios asociados a los problemas **12**, **13** y **18**.

Estas tecnologías irán apareciendo, junto a las técnicas, durante la resolución de problemas. Como se ha comentado en la metodología a llevar a cabo, tras realizar las puestas en común en las que los estudiantes exponen sus estrategias y conclusiones, el docente institucionaliza el contenido matemático presente. Por tanto, tanto los alumnos como el profesor participan en la justificación de las técnicas. Por ejemplo, en el cálculo de la pendiente y del vértice se les guía para llegar a las expresiones simbólicas correspondientes en lugar de proporcionarles las fórmulas directamente, así como en el trabajo con los distintos modelos funcionales en el que ellos mismos exploran sus características. En otras ocasiones, los alumnos pueden llegar a desarrollar la técnica, una vez conozcan la definición del concepto en cuestión. Por ejemplo, pueden reflexionar acerca del criterio de la línea vertical como técnica de comprobación de una función dada por su gráfica, una vez conozcan el concepto de función como correspondencia unívoca entre valores de variables. Además, a la hora de representar gráficamente una recta o una parábola, pueden reflexionar acerca del número mínimo de puntos necesarios para poder graficarlas de manera aproximada.

Como se ha mencionado anteriormente, los distintos aspectos del objeto matemático de estudio se institucionalizan a medida que aparecen en la resolución de los problemas. Con los **problemas 1** y **2** se introducen las *coordenadas cartesianas* de un punto mediante su trabajo tanto de manera cualitativa como cuantitativa, con los **problemas 3** y **4** comienza a trabajarse el concepto de *función* como dependencia entre dos *variables* (independiente y dependiente) y correspondencia entre valores de variables, así como características generales de las funciones (*continuidad*, *puntos de corte con los ejes*). También se trabaja la traducción entre distintos *sistemas de representación*. Los **problemas 5**, **6**, **7** y **8** están dedicados al análisis e interpretación de gráficas y se trabajan características generales de las funciones (*dominio*, *recorrido*, *crecimiento*, *máximos* y *mínimos*). Con los **problemas 9** y **10** se trabaja la traducción entre distintos *sistemas de representación*. Los **problemas 11**, **12**, **13** y **14** están dedicados a la introducción y al trabajo con el modelo lineal y el modelo afín, incluyendo la exploración de sus características (*pendiente*, *ordenada en el origen*) con ayuda de GeoGebra. Por último, los **problemas 15**, **16**, **17** y **18** están dedicados a la introducción y al trabajo con el modelo cuadrático, incluyendo la exploración de sus características (*vértice*, *simetría*) con ayuda de GeoGebra.

H. Secuencia Didáctica y Cronograma

En este apartado indicamos el orden en el que pretenden desarrollarse las actividades presentadas en los puntos anteriores y que componen la secuencia didáctica. Para ello, se ha establecido un número de sesiones aproximado, teniendo en cuenta, tal y como aparece en el anexo III de la ORDEN ECD/1172/2022, de 2 de agosto, el número de horas correspondientes a la asignatura de Matemáticas para 2º ESO (4 horas semanales). Cabe destacar que la duración temporal propuesta es aproximada y puede modificarse en función de las necesidades del grupo clase.

La Tabla 13 recoge, por sesiones, tanto los problemas como los ejercicios presentados en los apartados E. y F. respectivamente. Comentar que, por un lado, aquello que no dé tiempo a desarrollar en la sesión planificada, será el comienzo de la sesión posterior y, por otro lado, algunas actividades, como el problema 7, pueden utilizarse como tarea para casa (en la tabla se señalan con *) y serán comentadas en sesiones posteriores (en la de repaso o en sesiones anteriores en las que sobre tiempo tras realizarse lo planificado para dicha sesión).

Tabla 13

Temporalización secuencia didáctica

Sesión	Problemas	Ejercicios
1	Evaluación inicial (apartado C.)	
2	1, 2	1 y 2 (ambos después de los problemas 1 y 2)
3	3, 4 y 5	Después del problema 4: 3 y 4* Después del problema 5: 7*
4	6, 7*, 8	5 y 6* (ambos después de los problemas 6 y 8)
5 y **6**	9 y 10	Después del problema 9: 8, 9 y 11 Después del problema 10: 10
7	11 y 12	
8 y **9**	13 y 14	Después del problema 13: 12 y 14 Antes del problema 14: 13
10 y **11**	15, 16 y 17	
12	18	
13	Comentar problema 7	15
14	Repaso + comentar ejercicios tarea para casa	
15	Evaluación	
16	Corrección prueba escrita	

La sesión 1 está dedicada a la evaluación inicial para conocer el punto de partida a la hora de abordar el objeto matemático introducido. En la sesión 2 se lleva a cabo el estudio cualitativo y cuantitativo de los puntos en el plano cartesiano (**TG.1**). En las sesiones 3 y 4 se estudian las funciones (**TG.2**) y sus características generales (**TG.3**) de manera cualitativa y cuantitativa. Asimismo, se muestran los diferentes sistemas de representación que admiten, predominando al comienzo el registro verbal y el gráfico. Las sesiones 5 y 6 están dedicadas a la traducción entre los distintos sistemas de representación. En las sesiones siguientes se introduce y trabaja el modelo lineal, el modelo afín (sesiones 7, 8 y 9) y el modelo cuadrático (sesiones 10, 11, 12 y 13), respectivamente. En estos casos, los alumnos exploran las características asociadas a cada modelo (**TG.5**) antes de su institucionalización. Por otro lado, parte de la sesión 13 es utilizada para comentar el problema 7 (tarea para casa). Finalmente, las últimas sesiones están dedicadas a repasar todo lo desarrollado a lo largo de las sesiones anteriores (incluyendo el comentario de los ejercicios 4, 6 y 7 (tarea para casa)) (sesión 14) y a realizar y comentar la prueba de evaluación correspondiente (sesiones 15 y 16).

I. Sobre la Evaluación

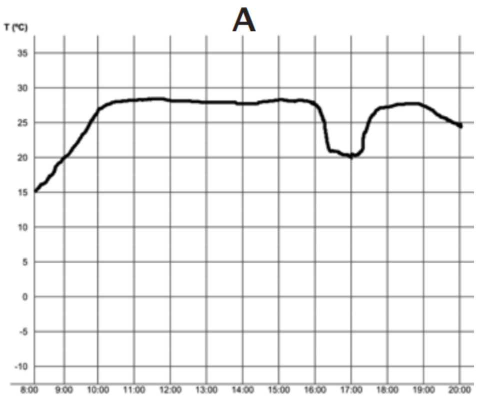
En este apartado presentamos la prueba de evaluación que se llevará a cabo una vez desarrollada la secuencia didáctica y cuya finalidad es valorar el aprendizaje realizado por el alumnado. Para cada una de las preguntas que componen la prueba, indicamos posibles respuestas, estrategias y errores que podemos encontrarnos, así como los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías que pueden evaluarse. Además, dado que utilizamos el modelo de tercios para su corrección, asignamos a cada pregunta las tareas principales y las tareas auxiliares generales y específicas correspondientes. Comentarios referentes a las soluciones se encuentran en el Anexo IV.

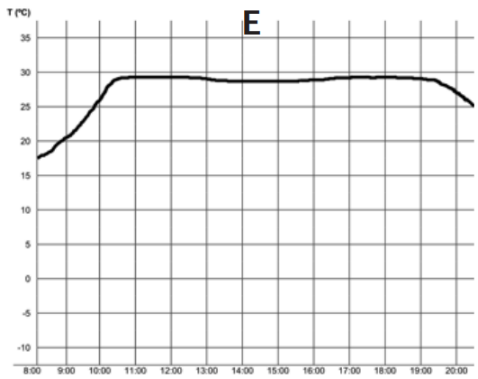
Prueba Escrita

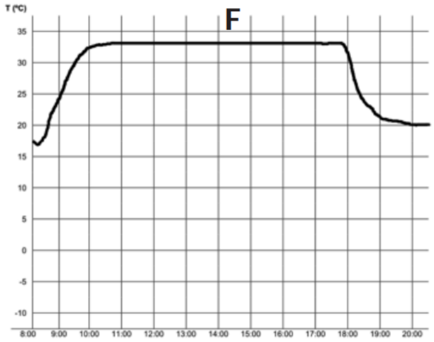
Pregunta 1 (Adaptación del Problema 20.5. de los Problemas de preparación de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2º ESO). Cada una de las gráficas presentes en la Figura 33 representa la temperatura a lo largo de un día de verano.

Figura 33

Gráficas a las que asociar un enunciado verbal







Nota. Las imágenes están tomadas del *Problema 20.5. de los Problemas de preparación de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2º ESO*.

Dadas las siguientes descripciones:

- *Día 1*: Hoy ha hecho un día espectacular, típico día de verano. Hemos ido de excursión y no nos ha llovido.

- *Día 2*: Ha sido el día más caluroso de todos. Ha hecho tanto calor que hemos ido a pasar el día al río. Menos mal que volvimos a eso de las 17:30 porque al rato hubo tormenta.

- *Día 3*: Desde la tormenta de ayer, la temperatura no ha mejorado, todo lo contrario. Ha llovido y refrescado todo el día. La temperatura mínima ha sido de 10ºC y no hemos superado los 20ºC.

a) Decide qué gráfica (alguna puede no tener día asociado) se ajusta mejor a cada día (a algún día puede faltarle la gráfica correspondiente). Explica cómo lo has averiguado.

b) Si te sobra alguna gráfica, escribe un enunciado para ella.

c) Si te sobra alguna descripción, dibuja una gráfica asociada a ella, con los mismos ejes que las gráficas dadas.

d) Para la gráfica F, indica si es una función (en caso afirmativo, determina la variable independiente y la dependiente), el dominio, el recorrido, los tramos de crecimiento y decrecimiento (incluyendo, en caso de haberlos, los constantes), y la máxima y la mínima temperatura alcanzada. ¿A qué hora se alcanzan dichas temperaturas?

En el apartado **a)** los alumnos pueden asociar erróneamente el *día 2* con la gráfica A, interpretando el tramo comprendido entre las 16 y 18 horas como el momento de la tormenta. Sin embargo, esta gráfica tiene temperaturas máximas (próximas a 30ºC) menores que las máximas alcanzadas en la gráfica F, por lo que no puede representar al día más caluroso de todos. La gráfica asociada al apartado **c)** no es única, para su representación hay que tener en cuenta que la temperatura mínima alcanzada es de 10ºC y que no se superan los 20ºC. Para responder al apartado **d)** pueden utilizar notación de intervalo o una descripción verbal. En este caso los alumnos pueden intercambiar el dominio con el recorrido y los tramos crecientes con los decrecientes al confundir los conceptos correspondientes. Por otro lado, dado que la temperatura máxima es alcanzada en varios momentos, se considera válido indicar cualquiera de ellos, mientras que para la temperatura mínima pueden considerar, erróneamente, el primer punto de la gráfica $(8{,}17)$ aproximadamente.

Pregunta 2. Dadas las siguientes situaciones:

1. Lucía mide $1{,}60\ m$ a sus 18 años.
2. El otro día fueron cuatro amigos al cine y pagaron 20€ por las entradas.
3. A cada número real le asociamos su cuadrado.
4. En una compañía de taxis, te cobran 2€ por comenzar el trayecto. A partir del primer minuto, cada minuto de más te cuesta 50 céntimos.

a) Identifica, para cada una de las situaciones, las variables que aparecen y responde, justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas:

- Para la situación 1, ¿cuánto medía Lucía cuando tenía 9 años?
- ¿La situación 4 representa una función continua?
- ¿Alguna representa una relación de proporcionalidad directa?
- ¿Alguna representa una relación cuadrática?

b) Escribe una tabla de valores para las situaciones 2 y 3.

c) Representa gráficamente las situaciones 2 y 3.

d) Expresa con lenguaje algebraico las situaciones 2 y 3.

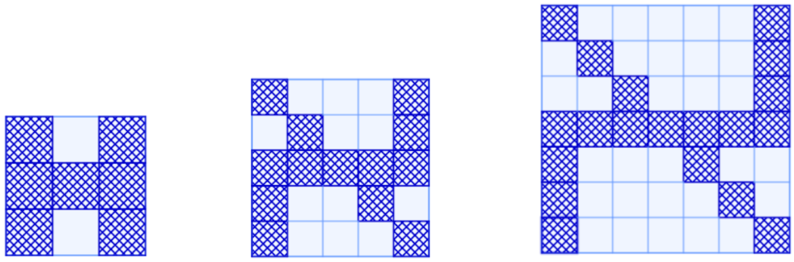
En primer lugar, pueden intercambiar las variables independientes con las dependientes al confundir los conceptos correspondientes. En la pregunta correspondiente a la primera situación (apartado **a)**) puede observarse, en caso de aparecer, la ilusión de linealidad: un alumno considera que esta situación representa una relación directamente proporcional (respuesta errónea que puede aparecer) y contesta que a los 9 años Lucía medía $\frac{1.6}{2} = 0.8\, m$, lo cual no tiene sentido. Los alumnos que no hayan asimilado el concepto de función continua no podrán responder adecuadamente a la pregunta acerca de la situación 4. Además, pueden modelizar esta situación (erróneamente) como $y = 2 + \frac{1}{2}x$, siendo x los minutos e y el coste, y graficarla como la recta asociada, en cuyo caso pueden razonar que sí es continua.

Comentar que pueden llegar a las tablas de valores del apartado **b)** a partir de la descripción verbal (se espera que predomine este caso) o mediante la expresión algebraica correspondiente (expresando previamente la relación, descrita verbalmente, de manera analítica). Por otro lado, a la hora de representar las situaciones gráficamente (apartado **c)**), pueden partir de la tabla de valores (se espera que predomine este caso) o de la expresión algebraica correspondiente (identificación de elementos notables). Además, puede ser que, para la situación 2, algún alumno considere el número de amigos que van al cine (variable x) como variable continua y una los puntos, o que prolongue la recta al 3º cuadrante considerando que el número de amigos puede ser negativo. Asimismo, la expresión algebraica (apartado **d)**) puede obtenerse a partir de la descripción verbal o a partir de la tabla de valores mediante la búsqueda de patrón.

Pregunta 3 (Adaptación del Problema 1 de la XXVII Olimpiada Nacional, Santander 2016). Imagina que te vas de ruta matemática con tu clase en la que os enseñan historia y cultura. En particular, te llama la atención un mosaico de azulejos cuadrados. En casa, una tarde, te pones a diseñar tus propios mosaicos cuadrados, cada vez más grandes, para los que sigues el mismo patrón, mostrado en la Figura 34.

Figura 34

Búsqueda del patrón correspondiente



Mosaico 1 Mosaico 2 Mosaico 3

Nota. Imagen adaptada de la *XXVII Olimpiada Nacional* (https://lc.cx/vpS5ZB).

a) ¿Cuántas baldosas azules oscuras se necesitan para construir el mosaico número 4? Describe cómo llegas a ello.

b) ¿Cuántas baldosas azules oscuras se necesitan para construir el mosaico número 8? Describe cómo llegas a ello.

c) ¿Eres capaz de encontrar una fórmula general para saber el número de baldosas azules oscuras que se necesitan para construir el mosaico número n?

d) ¿Qué número de orden corresponde al mosaico formado por 91 baldosas azules oscuras?

e) ¿Qué número de orden corresponde al mosaico formado por 114 baldosas azules oscuras?

f) Representa la información obtenida en una gráfica.

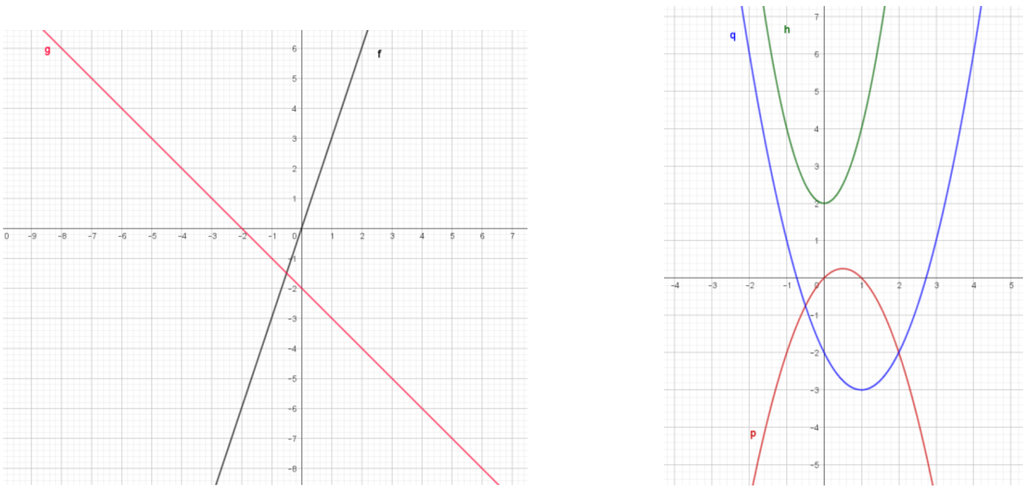
Para responder a los primeros apartados pueden presentar la información en una tabla de valores y ampliarla hasta dar con el número del mosaico pedido o pueden, en el caso del apartado **a)**, dibujar la figura correspondiente. Asimismo, a partir de la tabla pueden establecer verbalmente la relación funcional existente, encontrando el patrón involucrado. En el apartado **c)** se espera que, una vez encuentren el patrón, lo expresen con lenguaje algebraico. Para los apartados **d)** y **e)** pueden hacer uso de la expresión a la que llegan en el apartado anterior, resolverlos por tanteo (dando valores al número de orden del mosaico hasta encontrar aquel que cumpla la condición) o ampliando la tabla de valores hasta llegar al número de baldosas azules oscuras dado (en el apartado **e)** observarán que ese número de baldosas no se corresponde con ningún mosaico). En el último apartado pueden encontrarse gráficas en las que se unan los puntos, o en las que se prolongue la recta al 2º y 3º cuadrante.

En general, en los apartados en los que haya que representar gráficamente una información, pueden observarse errores relativos a la graduación de los ejes e inversión en el orden de las coordenadas de un punto, así como errores al no tener en cuenta si el dominio de la gráfica es discreto o continuo. Asimismo, pueden presentar dificultades a la hora de diferenciar entre variable independiente y dependiente y saber en qué eje se representa cada una.

Pregunta 4. a) Empareja las funciones presentes en la Figura 35 con su expresión algebraica sin hacer uso de una tabla de valores. Justifica tus elecciones. Indica, para cada función, los elementos notables correspondientes.

Figura 35

Funciones a las que asociar su expresión algebraica



$y = -x - 2$; $y = (x-1)^2 - 3$; $y = 3x$; $y = -x^2 + x$; $y = 2x^2 + 2$.

b) Representa gráficamente las siguientes funciones sin hacer uso de una tabla de valores. Indica, para cada función, los elementos notables correspondientes.

i: $y = -(x+3)^2 + 1$; j: $y = (x-4)^2 - 1$.

Los elementos notables del modelo lineal y del modelo afín (pendiente y ordenada en el origen) se pueden dar recurriendo a las caracterizaciones de dichos modelos (asociar la pendiente con el coeficiente que multiplica a la variable x y la ordenada en el origen con el término independiente de la expresión algebraica o con la coordenada y del punto de corte con el eje Y). En el caso de la pendiente, también puede determinarse, fijados dos puntos, observando el desplazamiento vertical frente al horizontal o tomando dos puntos y aplicando su expresión simbólica.

Los elementos notables del modelo cuadrático (vértice y eje de simetría) se pueden dar observando la gráfica o aplicando la expresión simbólica para la coordenada x del vértice una vez se tenga la ecuación de la parábola. Además, para relacionar las parábolas con su correspondiente expresión, pueden asociar la coordenada y del punto de corte con el eje Y con el término independiente de la expresión cuadrática, determinar si el vértice es un máximo o un mínimo, así como hacer referencia a las transformaciones aplicadas o relacionar las coordenadas x de los puntos de corte con el eje X con las soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente.

Por otro lado, los alumnos pueden asociar las gráficas con sus expresiones algebraicas mediante la identificación de puntos en la gráfica y posterior comprobación en las ecuaciones, lo que se considera válido.

En este problema pueden observarse errores relativos a la inversión en el orden de las coordenadas a la hora de identificar puntos, a la representación de pares ordenados en el plano cartesiano, a la aplicación de las expresiones simbólicas asociadas a la pendiente y al vértice, así como a distinguir lo que determina cada variable en la representación gráfica (por ejemplo, la relación del signo de la pendiente de una recta con la monotonía de la misma).

En general, también pueden observarse respuestas sin justificación, en cuyo caso serán penalizadas si en los enunciados correspondientes se pide explícitamente por el razonamiento.

Conocimientos a Evaluar

En la Tabla 14 indicamos los conocimientos (conceptos y procesos) a evaluar, con cada una de las preguntas, en torno al concepto de función. Para ello, mostramos los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías que pueden trabajarse con ellas. Notar que lo que se evalúa depende de la estrategia de resolución utilizada.

Tabla 14

Conocimientos a evaluar

Pregunta	Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
1	CP.1, CP.2.1, CP.2.2, CP.3.1, CP.3.2, CP.3.3, CP.4.1 y CP.4.3	TC.1.1, TC.1.2, TC.2.1, TC.2.2, TC.3.1, TC.3.2, TC.3.3, TC.4.1.1 y TC.4.3.1	TG.1, TG.2, TG.3.1, TG.3.2 y TG.3.3
2	CP.1, CP.2.1, CP.3.4, CP.4.1, CP.4.2, CP.4.4, CP.5.1 y CP.5.3	TC.1.2, TC.2.1, TC.3.4, TC.4.1.1, TC.4.2.2, TC.4.2.3, TC.4.4.2, TC.4.4.3.1, TC.4.4.3.2 y TC.5.1.1	TG.1, TG.2, TG.3.4, TG.5.1 y TG.5.3
3	CP.1, CP.2.1, CP.4.2, CP.4.4 y CP.5.2	TC.1.2, TC.2.1, TC.4.2.1, TC.4.2.2, TC.4.2.3, TC.4.4.3.1 y TC.4.4.3.2	TG.1, TG.2 y TG.5.2
4	CP.1, CP.3.2, CP.3.3, CP.3.5, CP.4.3, CP.4.4, CP.5.1, CP.5.2 y CP.5.3	TC.1.1, TC.1.2, TC.3.2, TC.3.3, TC.3.5, TC.4.3.2, TC.4.3.3, TC.4.4.3.2, TC.5.1.2, TC.5.1.3, TC.5.1.4, TC.5.2.1, TC.5.2.2, TC.5.3.1, TC.5.3.2, TC.5.3.3 y TC.5.4	TG.1, TG.3.2, TG.3.3, TG.3.5, TG.5.1, TG.5.2 y TG.5.3

Cabe destacar que también se tendrán presentes para la evaluación, los criterios de evaluación asociados a las competencias específicas expuestos en el currículo. En concreto, se tendrá en cuenta la interpretación, comprensión y resolución de los problemas planteados (1.1, 1.2, 1.3), el análisis y comprobación de soluciones (2.2), el planteamiento de variantes de un problema (3.2), el reconocimiento de patrones (4.1, 4.2) y de las conexiones intra y extra-matemáticas (5.1, 6.1, 6.2) y la representación de conceptos, procedimientos e información junto con su comunicación utilizando el lenguaje matemático apropiado (7.2, 8.1). Por otro lado, se valorará la actitud positiva y perseverante del alumno, así como su participación en las tareas grupales (10.1, 10.2). Todo ello puede contemplarse, durante el desarrollo de la secuencia didáctica, mediante observaciones relacionadas con las actuaciones del estudiante durante el proceso de resolución de problemas y las puestas en común, así como el análisis de sus producciones.

Como hemos comentado, para la calificación de la prueba escrita se tendrá en cuenta el **modelo de tercios**, un modelo de penalización de errores (Gairín et al., 2012). En él aparecen tres tipos de tareas según su naturaleza:

- Tareas principales: aquellas que constituyen el objetivo principal de la calificación. En este caso valoraremos la comprensión de conocimientos (conceptos y procedimientos) referidos al concepto de función.
- Tareas auxiliares específicas: aquellas que juegan un papel instrumental para alcanzar la solución del problema.
- Tareas auxiliares generales: aquellas que pertenecen a una formación matemática anterior.

A continuación, definimos dichas tareas para cada una de las preguntas que componen la prueba.

Pregunta 1

Tareas principales:

- Traducción entre los sistemas de representación gráfico y verbal.
- Identificación de gráficas que representan una función y de las variables involucradas.

- Identificación de las características generales de la función a partir de su gráfica (dominio, recorrido, tramos de crecimiento y decrecimiento y extremos absolutos).

Pregunta 2

Tareas principales:

- Identificación de las variables y de la relación entre ellas dada una descripción verbal.
- Distinción entre función continua y discontinua.
- Identificación de relaciones cuadráticas y de proporcionalidad directa.
- Traducción entre los diferentes sistemas de representación.

Tareas auxiliares generales:

- Cálculos aritméticos.

Pregunta 3

Tareas principales:

- Identificación del patrón.
- Traducción entre los diferentes sistemas de representación utilizados.

Tareas auxiliares específicas:

- Resolución de ecuaciones lineales.

Tareas auxiliares generales:

- Cálculos aritméticos y algebraicos.

Pregunta 4

Tareas principales:

- Identificación de la pendiente y la ordenada en el origen en el modelo afín.
- Identificación del vértice y del eje de simetría en el modelo cuadrático.
- Relación entre la expresión analítica de una función y su gráfica (crecimiento de una recta y signo de la pendiente, soluciones de la ecuación y puntos de corte con el eje X, transformaciones de parábolas en función del valor de sus parámetros).

Tareas auxiliares específicas:

- Resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas.

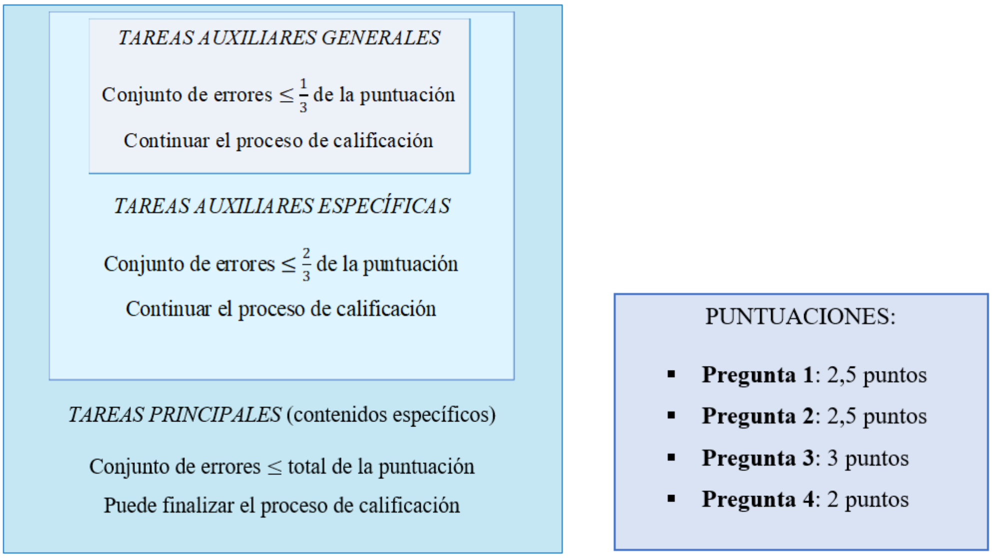
Tareas auxiliares generales:

- Cálculos aritméticos y algebraicos.

En la Figura 36 mostramos las penalizaciones asociadas a cada tipo de tarea y la puntuación vinculada a cada pregunta (el valor de cada apartado, dentro de cada pregunta, es el mismo para las preguntas 1, 2 y 3; el apartado **4 a)** 1,5 puntos y el **4 b)** 0,5 puntos).

Figura 36

Penalizaciones asociadas a cada tipo de tarea y puntuación vinculada a cada pregunta



Nota. La imagen de la izquierda está adaptada de “Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas” (Gairín et al., 2012, p. 271).

Por último, comentar que, tal y como aparece en el apartado de secuenciación, la sesión posterior a la realización de la prueba escrita está dedicada a su corrección. Durante su desarrollo, no solo se resolverán cada una de las actividades que componen la prueba, sino que se comentarán tanto las dificultades encontradas como los errores cometidos, utilizando estos últimos como fuente de aprendizaje. Para ello, será fundamental la participación de los alumnos.

J. Sobre la Bibliografía y Páginas Web

Abizanda, A. (07 de junio de 2022). *La covid no toca fin: 3076 muertos desde Semana Santa*. La Razón. https://www.larazon.es/sociedad/20220607/y5fzrwtsxbho5ptvdkfhagdkru.html.

Alayo, F. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Ministerio de Educación y Ciencia. Universidad del País Vasco.

Almodóvar, J.A., Cuadrado, A., Díaz, L., Dorce, C., Gámez, J.C., Marín, S., Pérez, C., Redón, M. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas 2 ESO. Serie Resuelve*. Madrid: Santillana.

Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J. y Quesada S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de Educación Secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *RIDEME*, *9*, 6-19.

Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J. y Quesada S. (2019). Limitaciones de aprendizaje que evidencian estudiantes de Educación Secundaria en el estudio de la función cuadrática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32(1)*, 121-130.

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz, J.M. (2019). Aprendizaje y enseñanza del análisis matemático. En Arce, M., Conejo, L. y Muñoz, J.M. (Eds.), *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas* (pp. 301-325). Madrid: Síntesis.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas*. Madrid: Síntesis.

Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*, *98*, 11-21.

Bingolbali, F. y Bingolbali, E. (2019). One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, *31*, 237-257.

Burgos, M. y Flores, P. (2017). Reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas en la enseñanza de las funciones. *Épsilon*, *97*, 65-74.

Castro, C.C., Díaz, L.M. y Céspedes, Y. (2011). Análisis del concepto función, para la construcción de una propuesta de enseñanza. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Recife, Brasil: CIAEM.

Castro, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, *54*, 55-67.

Cid, E. y Muñoz, J.M. (2022). Apuntes de diseño instruccional de matemáticas. En *Diseño curricular e instruccional en matemáticas*. Universidad de Zaragoza.

Colera, J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2016). *Matemáticas ESO 2*. Madrid: Anaya.

Deulofeu, J. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación. *X Jornadas para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 367-377). Zaragoza: JAEM.

Deulofeu, J. y Vall de Pérez, C. (2000). Las ideas de los alumnos respecto de la dependencia funcional entre variables. *Suma*, *33*, 73-81.

Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Unión*, *41*, 20-38.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9(1)*, 143-168.

Espinoza, J. (2017). La resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de matemática. *Atenas*, *3(39)*, 64-79.

Fidalgo, C. y Brihuega, J. (2014). *Matemáticas 2º de ESO*. Recuperable en https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/LOMLOE/2ESO/2ESO.pdf.

Fidalgo, T. (2018). *Interpretación de gráficas. 3º ESO. Alumno/a: Curso:*. DocPlayer. https://docplayer.es/77894913-Interpretacion-de-graficas-3o-eso-alumno-a-curso.html.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261-274). Jaén: SEIEM.

Mancera, E. (2022). La recta, sin fórmulas. *Unión*, 64, 1-23.

Mezo, J. (2022). *Cuando un gráfico dice lo contrario de lo que debería*. Malaprensa. http://www.malaprensa.com/2022/06/cuando-un-grafico-dice-lo-contrario-de.html.

Nguyen, F. (2023). *Patterns 1-50*. Visual Patterns. https://www.visualpatterns.org/patterns/1-through-50.

Nieto, M., Pérez, A. y Alcaide, F. (2016). *Matemáticas 2 ESO*. UE: S.M.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón*, *105*, de 2 de junio de 2016.

Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón*, *145,* de 27 de julio de 2022.

Orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón*, *156,* de 11 de agosto de 2022.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación*, *12(2)*, 209-221.

Pantoja, O. (2022). El software Geogebra como elemento directriz del aprendizaje significativo de contenidos matemáticos en escolares de noveno grado de Ecuador. *Revista de Ciencias Sociales*, *3(3)*, 18-29.

Romero, J.L., Romero, J., Reyes, R., Barboza, L. y Romero, R. (2022). Uso del GeoGebra como estrategia de aprendizaje significativo en el estudio de las gráficas y transformaciones de funciones. *EDMETIC, Revista de Educación Mediática y TIC*, *11(1)*, 1-19.

Sánchez-Balarezo, R. y Borja-Andrade, A. (2022). Geogebra en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas. *Dominio De Las Ciencias*, *8(2)*, 33-52.

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria. (2020). *XXVII Olimpiada Nacional. Santander, 2016*. Federación Española de Sociedades de Profesores de

Matemáticas. https://fespm.es/wp-content/uploads/2020/04/27_XXVII-Olimpiada-Nacional.pdf.

Soto, M., Herrera C. y Pereyra, N. (2019). Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal. *Unión*, *55*, 71-84.

Torres, M., Cañadas, M. y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA*, *16(3)*, 215-236.

ANEXO I. Evaluación inicial

1. a) En la Tabla 15 se muestra la solución correspondiente.

Tabla 15

Solución del apartado a) de la actividad 1 de la Evaluación Inicial

Madre	Padre	Hermana mayor	Hermano menor
$3x$	$3x+6$	x	$x-6$
y	$y+6$	$\frac{y}{3}$	$\frac{y}{3}-6$
$3(z+6)$	$3(z+6)+6$	$z+6$	z
$w-6$	w	$\frac{w-6}{3}$	$\frac{w-6}{3}-6$

Con este apartado se observa la capacidad de traducir un enunciado verbal a lenguaje algebraico. Además, tal y como está planteada la Tabla 15, se pueden reconocer y generar expresiones equivalentes. Por otro lado, al poder comenzar la traducción fijando cualquiera de los protagonistas, también se observa la forma de razonar más utilizada, la que resulta más fácil y la de mayor complejidad.

b) Como la suma de sus edades es 80, $3x+3x+6+x+x-6=80$, de donde se sigue que la hermana tiene 10 años, el hermano 4, la madre 30 y el padre 36 años.

En este apartado se trabajan las operaciones con expresiones algebraicas y la identificación de la solución de la ecuación lineal correspondiente.

2. a) La situación 1 se asocia con la gráfica B considerando en el eje X el tiempo y en el eje Y la distancia total recorrida. En este caso pueden compararse las rectas correspondientes mediante la inclinación de las mismas con respecto al eje X, haciendo referencia a la distancia recorrida en función del tiempo (se alcanza mayor distancia cuando se va en bicicleta), y relacionarlo con la velocidad.

La situación 2 se asocia con la gráfica A considerando en el eje X el tiempo y en el eje Y la distancia hasta casa. En este caso puede interpretarse el punto de corte de la gráfica con el eje X como el momento en el que llegas a casa a por los regalos, y puede preguntarse si el tiempo podría representarse en el eje Y.

La situación 3 se asocia con la gráfica A considerando en el eje X el tiempo y en el eje Y la velocidad. En este caso puede interpretarse el punto de corte de la gráfica con el eje X como el momento en el que paras debido al obstáculo que te lanzan.

b) Deben inventarse una situación que pueda representarse con la gráfica C.

Con este problema se trabaja la identificación de puntos en el plano cartesiano (primer cuadrante) y la identificación de variables y el reconocimiento de la relación entre ellas, expresada mediante una gráfica y una descripción verbal. Con situaciones de movimiento como la 2, puede hablarse del modelo lineal.

3. a) Los alumnos pueden optar por representar la información en una tabla de valores, como puede verse en la Tabla 16.

Tabla 16

Tabla como estrategia de resolución para determinar el patrón correspondiente

Nº figura	1	2	3
Nº cuadrados	5	9	13

Notar que en cada figura añadimos 4 nuevos cuadrados (cada uno en una esquina) con respecto a la figura que ocupa la posición anterior. Para saber cuántos cuadrados se necesitan para formar la siguiente figura (17 cuadrados), la 8 (33 cuadrados) y la 10 (41 cuadrados) puede ampliarse la Tabla 16. Sin embargo, para la 44 (177 cuadrados) esto se hace más incómodo, y es necesario encontrar la regla de formación de las figuras: la figura 44 estará formada por los 5 cuadrados iniciales más $4 \cdot 43 = 172$ cuadrados ya que habremos añadido 4 cuadrados en cada una de las figuras anteriores.

b) $y = 5 + 4(x - 1) = 4x + 1$ siendo $y =$ "número de cuadrados que componen la figura" y $x =$ "número de orden de la figura" (empezamos en 1).

c) A partir de la expresión anterior tenemos que $x = \frac{y-1}{4}$. Luego, la figura formada por 121 cuadrados se corresponde con la figura 30. Una figura formada por 200 cuadrados no es solución ya que no puede expresarse como la suma de 5 y un múltiplo de 4 o ya que 4 no es divisor de 199.

d) En el eje X se representa el número de orden de la figura y en el eje Y el número de cuadrados que componen la figura. La gráfica está formada por puntos aislados pertenecientes a la recta $y = 4x + 1$ (función afín) para valores de x naturales mayores o iguales que 1.

Con este problema puede observarse la capacidad de identificar y expresar algebraicamente relaciones entre variables, de identificar soluciones en ecuaciones lineales y de representar puntos en el plano cartesiano (primer cuadrante). Además, aparece el trabajo con los diferentes sistemas de representación que admiten las funciones (verbal, simbólico, tabular, algebraico y gráfico). Por otro lado, puede reflexionarse acerca de si tendría sentido unir los puntos representados.

4. a.1) Las variables que se relacionan son $x =$ "kg de naranjas comprados" e $y =$ "cantidad de € pagados", cuya relación puede expresarse en una tabla de valores como puede verse en la Tabla 17.

Tabla 17

Tabla como medio de expresión de la relación correspondiente

kg	2	3	1	4
€	4	6	2	8

Notar que estas magnitudes son directamente proporcionales. Cada kg de naranjas cuesta 2€. La relación entre las variables es lineal y puede expresarse como $y = 2x$ (función lineal). La gráfica correspondiente es una recta que pasa por el origen de coordenadas, quedándonos con su representación en el primer cuadrante.

a.2) Las variables que se relacionan son un número real y el triple de ese número más 2 y la relación puede expresarse en una tabla de valores como puede verse en la Tabla 18.

Tabla 18

Tabla como medio de expresión de la relación correspondiente

x	-2	-1	0	2
y	-4	-1	2	8

La relación entre las variables también puede expresarse como $y = 3x + 2$ (función afín). La gráfica correspondiente es una recta que pasa por el 1º, 2º y 3º cuadrante. Puede preguntarse por las diferencias observadas entre esta situación y la anterior (para comparar modelos). Asimismo, puede preguntarse por el punto de corte de la gráfica con el eje X (se corresponde con la solución de la ecuación lineal $3x + 2 = 0$).

a.3) Las variables que se relacionan son la temperatura y el tiempo. La gráfica asociada no es única, depende de las suposiciones hechas (puede tener tramos de crecimiento y decrecimiento).

a.4) Las variables que se relacionan son el área de un cuadrado (cm^2) y lo que mide su lado (cm). La relación entre las variables es cuadrática y puede expresarse como $y = x^2$ siendo $y =$ "área del cuadrado" y $x =$ "la longitud del lado". La gráfica correspondiente es una parábola, quedándonos con su representación en el primer cuadrante, es decir, con la rama de la derecha.

Con este problema se trabaja la identificación de variables y el reconocimiento de la relación entre ellas, la identificación de soluciones en ecuaciones lineales y cuadráticas (relación con los puntos de corte con el eje X) y de puntos en común de dos gráficas (soluciones de la ecuación correspondiente en la que se igualan ambas expresiones algebraicas) a partir de la representación gráfica (volviéndose a trabajar la representación de puntos en el plano cartesiano). Para esto último pueden utilizarse las situaciones 1 y 4 (gráficas asociadas a $y = 2x$ y $y = x^2$). Además, puede preguntarse acerca de las diferencias que observan entre ellas, esperando respuestas como: una es recta y otra es curva; en el caso de las naranjas, el precio aumenta según cantidades constantes… También pueden observarse conocimientos previos acerca de la proporcionalidad directa y de áreas de figuras planas. Además, vuelven a aparecer diferentes sistemas de representación. Asimismo, puede reflexionarse acerca de si tendría sentido prolongar las gráficas correspondientes al 3º cuadrante en la situación 1 y al 2º en la situación 4, así como de si tiene sentido la representación de puntos en el resto de cuadrantes para la situación 3 (en el 4º cuadrante sí, en caso de considerar temperaturas bajo 0).

ANEXO II. Problemas que constituyen la razón de ser

Problema 1. a) Con la primera pregunta se busca que el alumno identifique una situación (deben dar una descripción verbal) en la que se relacionen dos variables, de manera que pueda representarse con la gráfica proporcionada.

b) En este apartado se busca lo contrario, dada una situación descrita verbalmente, deben identificar las dos magnitudes que se están representando (distancia recorrida en km (eje

Y) y el tiempo en horas (eje X)), así como la relación entre ellas. Además, puede reflexionarse acerca de si el tiempo podría representarse en el eje Y.

El apartado 1 se corresponde con el cuarto tramo; el 2 con el quinto; el 3 con el segundo; el 4 con el primero y el 5 con el tercero. En caso de interpretar la gráfica como el trayecto, pueden hacer referencia a que faltarían tramos decrecientes correspondientes a la bajada.

c) La distancia total recorrida es 18 km. Notar que la distancia de ida será la mitad de la distancia total, es decir, 9 km. Por tanto, se tarda en llegar a la cima 2 horas, es decir, llegan a las 12:00h. La caminata dura 5 horas y la terminan a las 15:00h. Por último, se encuentran parados $30 + 18 = 48$ minutos (cada cuadrado es $\frac{0,5}{5} = 0,1$ horas = 6 min).

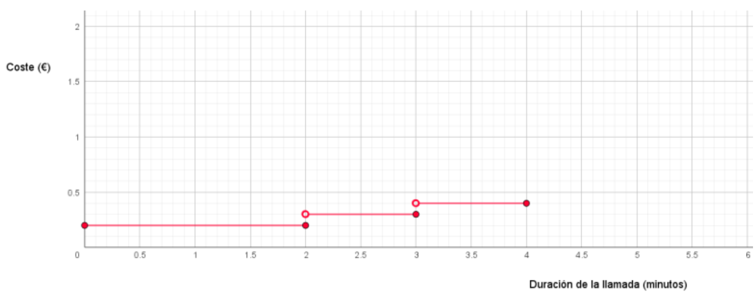
Problema 2. a) a.1) En esta situación pueden identificarse como variables el número de amigos y el tiempo que se tarda en recoger. La gráfica consiste en puntos discretos siguiendo la forma de la curva asociada a una función de proporcionalidad inversa (si asumimos que todos recogen al mismo ritmo). Con esta cuestión puede reflexionarse sobre la existencia de puntos de corte con los ejes de coordenadas.

a.2) Las variables en este caso pueden ser, por ejemplo, la distancia total recorrida frente al tiempo o la distancia a casa frente al tiempo.

a.3) La gráfica asociada a esta situación se muestra en la Figura 37.

Figura 37

Gráfica asociada a la situación a.3) del Problema 2 que constituye la razón de ser



Esta situación está representada por una función discontinua, lo que permite observar las diferencias entre funciones continuas y discontinuas y aplicar la definición de función para mostrar la notación gráfica punto vacío-punto relleno.

b) Este apartado es un problema abierto que admite diferentes soluciones en función de la elección de las variables en los ejes y las suposiciones hechas.

Problema 3. En la Tabla 19 recogemos el precio que pagaríamos en cada apartamento según el número de noches que nos alojemos.

Tabla 19

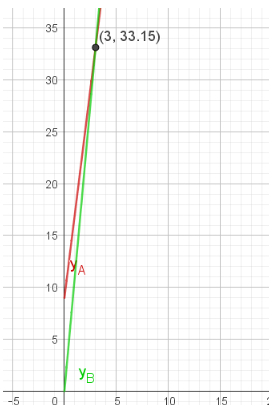
Tabla como estrategia de resolución del Problema 3 que constituye la razón de ser

Nº de noches	1	2	3	4	5
€ Apto A	170,5	251	331,5	412	492,5
€ Apto B	110,5	221	331,5	442	552,5

Se espera que elijan como apartamento el más económico. Los precios de cada apartamento en función del número de noches alquilado, se pueden expresar como $y_A = 80{,}5x + 90$ y $y_B = 110{,}5x$, respectivamente siendo $y =$ "precio" y $x =$ "número de noches". Notar, por un lado, que la variable x solo puede tomar valores naturales, por lo que la gráfica asociada consiste en puntos discretos pertenecientes a la recta correspondiente y, por otro lado, que el apartamento más económico depende del número de noches que nos alojemos. Si nos queremos ir un fin de semana (2 noches) sale mejor el apartamento B, si nos vamos 3 noches ambos salen por el mismo precio (punto de intersección de ambas rectas). Por último, si queremos irnos más de 3 noches, lo mejor es reservar en el apartamento A (menor pendiente). Así pues, ser más económico (a largo plazo) está relacionado con una menor pendiente. Hasta el punto de intersección, es más económico el B ya que y_A está desplazada verticalmente hacia arriba (ver Figura 38).

Figura 38

Rectas asociadas a las situaciones correspondientes



Problema 4. Es un problema de generalización. En primer lugar, los alumnos deben obtener información de casos particulares para, posteriormente, determinar una expresión que permita generalizar lo conseguido.

a) El número de saludos que se hacen con 7 invitados es 21. Para su resolución se espera que comiencen explorando casos concretos en los que el número de invitados sea menor, como puede verse en la Tabla 20.

Tabla 20

Tabla como estrategia de resolución del Problema 4 que constituye la razón de ser

Nº invitados	2	3	4	5	6	7
Nº saludos	1	3	6	10	15	21

Las estrategias de resolución son variadas, pudiendo aparecer representaciones gráficas (triángulo para 3 personas; cuadrado para 4; pentágono para 5…; puntos que representen personas y segmentos uniéndolos asociados a los saludos) o el siguiente razonamiento: si hay 4 personas, fijada una persona se producen 3 saludos, y como hay 4 personas tenemos un total de $4 \cdot 3 = 12$ saludos. Notar que hay saludos que se cuentan 2 veces, luego, el número real de saludos que se producen son $\frac{12}{2} = 6$ saludos. También puede aparecer el siguiente: con 3 personas tenemos un total de 3 saludos, si llega otro más (4 personas) este tendrá que saludar a las 3 personas restantes (3 saludos), por lo que el número total de saludos con 4 personas es $3 + 3 = 6$, y así sucesivamente.

b) Utilizando uno de los razonamientos anteriores se tiene que el número de saludos que se hacen con 20 invitados es $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ y con 150 invitados es $\frac{150 \cdot 149}{2} = 11175$.

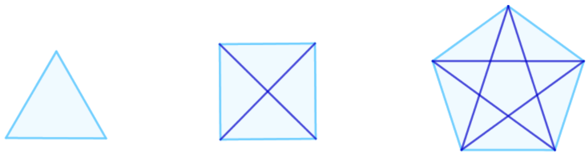
c) Se pretende llegar a una expresión general que relacione el número de personas invitadas a la fiesta y el número de saludos que se producen: $s = \frac{n(n-1)}{2}$ siendo s el número de saludos y n el número de personas invitadas.

d) Igualando la expresión general a 78, se tiene que el número de personas invitadas es 13.

En la puesta en común en la que se compartan las distintas estrategias empleadas para su resolución, en caso de no aparecer, se mostrará la presentada en la Figura 39.

Figura 39

Posible estrategia a utilizar en la resolución del Problema 4 que constituye la razón de ser



De esta manera, puede enlazarse con el cálculo del número de diagonales de un polígono regular, ofreciéndoles otra figura (**problema 16** del apartado **E.**).

En relación a la representación gráfica, notar que las variables solo pueden tomar valores naturales (para 0 personas y para 1 persona consideramos 0 saludos). Luego, la gráfica asociada está formada por puntos pertenecientes a la parábola correspondiente, cuyas coordenadas son números naturales.

ANEXO III. Problemas para trabajar los diferentes campos de problemas

Problema 1. En relación al criterio utilizado se espera que asocien mayor altura con mayor desplazamiento horizontal hacia la derecha, y mayor edad con mayor desplazamiento vertical hacia arriba.

Alicia (E), Marta (C), Pili (B), Daniel (F), Carlos (G), Lola (D) y Javi (A). Para dibujar a Marta hay que tener en cuenta que tiene la misma altura que F y la misma edad que G.

a) a.1) Es falso puesto que no tienen la misma edad.

a.2) Es falso ya que I es igual de alto que F y menos que E.

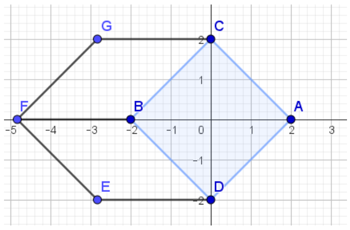
a.3) Es verdadero.

a.4) El más alto es J; el más mayor I; los más bajos A y H y el menor de edad es A.

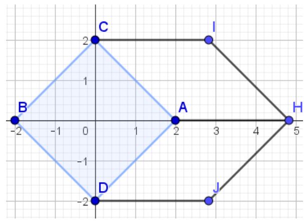
Problema 2. En la Figura 40 mostramos la solución correspondiente.

Figura 40

Solución al Problema 2 del apartado E.



a)



b)

Problema 4. a) a.1) Denotamos por x a la cantidad de dinero que gasta Olivia en el desayuno y por y a la cantidad de dinero con la que regresa a casa. La relación existente entre dichas variables puede expresarse como $y = 15 - x$. Dicha relación también puede expresarse mediante una tabla, una gráfica o a través de una descripción verbal: el dinero con el que Olivia regresa a casa depende de la cantidad gastada en el desayuno.

a.2) Con esta pregunta se pretende observar, en caso de aparecer, la ilusión de linealidad. Deben darse cuenta de que el dinero que te gastas depende de lo que te pidas, independientemente del día en el que vas.

a.3) En este caso las variables que se relacionan son tiempo y velocidad. El tiempo empleado en hacer la excursión dependerá de la velocidad que lleven: $t = \frac{10}{v}$.

a.4) La finalidad perseguida es la misma que la de la situación 2.

b) Al comienzo se les puede guiar proporcionándoles los números a usar como, por ejemplo, los mostrados en la Tabla 21.

Tabla 21

Tabla a la que asociar un enunciado verbal

x	1	2	3	4
y	3	6	9	12

También se les pueden dar las magnitudes a involucrar como, por ejemplo, el volumen de agua en el recipiente y la altura que alcanza el agua en el recipiente.

c) Con este apartado se pretende mostrar una gráfica que no representa una situación funcional y que los alumnos vean, por ellos mismos, la diferencia frente a aquellas que sí son funciones (correspondencia de un único valor para la variable independiente).

Problema 5. Posible descripción: al principio de la carrera va en primer lugar C, seguido de A y finalmente de B. A los 145 metros aproximadamente, C tropieza con una valla y se cae (tramo constante), mientras que A y B continúan corriendo, siendo A el primero. A los 15 segundos aproximadamente, C retoma la carrera sin perder la esperanza. A pocos metros de la meta, en el minuto 1, B adelanta a A logrando ser el campeón. Seguidamente llega A y, por último, C.

Problema 7. Se da un tiempo para la reflexión y debate acerca de lo que se observa. Se espera que los alumnos se centren en el "gran crecimiento" (es una impresión visual) en los fallecimientos registrados en las últimas fechas. En realidad, dicho crecimiento no es tan exagerado ya que la escala del eje horizontal es errónea (donde pone 2020 debería poner 2021, donde pone 2021 debería poner 2022 y, además, las fechas representadas no están separadas entre sí por una distancia proporcional a los días transcurridos entre ellas). Si corregimos el primero de los errores, la distancia entre el 15 de octubre de 2021 y el 15 de febrero de 2022 es más o menos proporcional a los días transcurridos entre esas fechas. Sin embargo, no ocurre lo mismo con los últimos 3 meses y medio (15 de febrero-31 de mayo) que aparecen representados (el espacio asociado es menos de la mitad de lo que le corresponden a 15 días). Además, en los 3 meses y medio (aproximadamente) transcurridos del 5 de noviembre al 15 de febrero se registran $95995 - 87423 = 8572$ fallecimientos, y $106797 - 95995 = 10802$ en los últimos tres meses y medio representados, es decir, hay un aumento que no se corresponde al cambio radical mostrado en la gráfica.

Finalmente, tras haber trabajado todo ello se les mostrará la Figura 41.

Figura 41

Gráfica correcta correspondiente al Problema 7

Nota. Imagen extraída de *Malaprensa* (https://lc.cx/Vc51DV).

Tal y como puede observarse, se aprecia un mayor cambio de tendencia entre enero y febrero. A partir de ahí el ritmo de fallecimientos es un poco menor.

Problema 8. a) El eje X representa el tiempo (segundos) y el eje Y la altura (metros). Notar que, en este caso, el eje Y no puede representar el tiempo.

b) El comienzo de la gráfica se corresponde a la situación de partida: el jugador se encuentra con la pelota en la mano, próxima a su altura, a punto de lanzarla. El corte con el eje X representa que la pelota rebota en el suelo antes de tocar la pared. La curva señalada representa que la pelota casi (la coge a tiempo) se le cae de las manos.

c) La máxima altura alcanzada es 2 metros y se alcanza antes del segundo 12 y la mínima es 0 (cuando la pelota toca suelo) y es alcanzada en varios instantes, por ejemplo, en los segundos 1 y 7.

d) Haces 4 lanzamientos. Esto se observa viendo los puntos de corte con el eje X teniendo en cuenta que el último se corresponde a la pelota en el suelo sin llegar a cogerla nuevamente.

e) Con este apartado pretende trabajarse los tramos de crecimiento y decrecimiento.

f) En este apartado deben hacer una gráfica cuya coordenada y del máximo absoluto sea menor que 2.

Problema 9. Una posible solución: un grupo de amigos quedan una vez al mes para ir a comer a su restaurante favorito. Coinciden en gustos y suelen pedirse la misma hamburguesa. En la siguiente tabla se recogen las cantidades pedidas en los últimos meses en los que han ido. ¿Cuánto cuesta cada hamburguesa?

Problema 10. Una posible solución: en una heladería, el vendedor te reta a lo siguiente. Si eres capaz de averiguar dos números de manera que verifiquen que el triple de uno más el otro da 8, y la quinta parte de uno más el anterior al otro da 11, te regalo un cucurucho de tu sabor favorito. ¿Eres capaz de ganarlo?

Problema 12. a) Suponemos que la velocidad de cada uno se mantiene constante a lo largo de la carrera. Las variables que se relacionan son tiempo (segundos) y distancia recorrida (metros).

La relación entre el tiempo y la distancia recorrida por Patricia puede expresarse mediante la Tabla 22.

Tabla 22

Tabla como estrategia de resolución del Problema 12 del apartado E.

m	0	5	10	15	20
sg	0	1	2	3	4

Debe hacerse referencia a que las magnitudes son directamente proporcionales (ya que verifican $\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \cdots 5$) cuya constante de proporcionalidad es 5 y se corresponde con los metros recorridos en cada segundo por Patricia (esto se asegura por lo asumido al principio). Dicha relación también puede expresarse como $y_p = 5x$.

La relación entre el tiempo y la distancia recorrida por Mario puede expresarse mediante la Tabla 23.

Tabla 23

Tabla como estrategia de resolución del Problema 12 del apartado E.

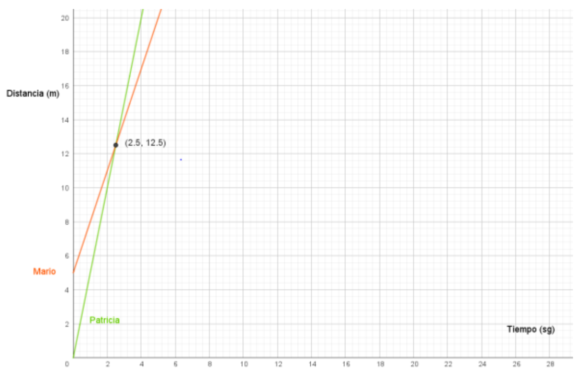
m	5	8	11	14	17
sg	0	1	2	3	4

En cada segundo Mario recorre 3 m (esto se asegura por lo asumido al principio). Dicha relación también puede expresarse como $y_m = 3x + 5$.

La gráfica que representa la situación correspondiente se muestra en la Figura 42.

Figura 42

Gráfica como estrategia de resolución del Problema 12 del apartado E.



Como puede observarse en la gráfica, se cruzan en el segundo 2,5 que se corresponde con 12,5 metros. Esto también puede calcularse analíticamente como punto de corte entre ambas funciones.

Si ambos continúan corriendo ganará Patricia dado que, después del cruce, recorre mayor distancia en menos tiempo. Esto está relacionado con la pendiente de la recta (velocidad).

b) La relación entre el tiempo y la distancia recorrida por Laura puede expresarse mediante la Tabla 24.

Tabla 24

Tabla como estrategia de resolución del Problema 12 del apartado E.

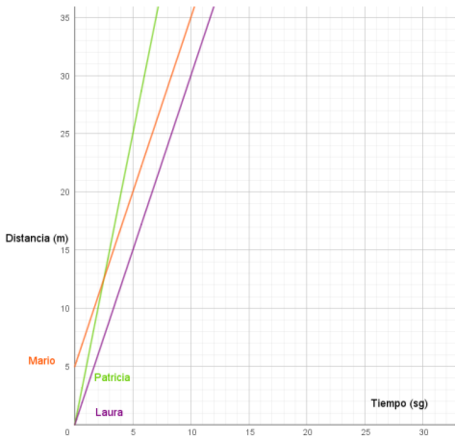
m	0	3	6	9	12
sg	0	1	2	3	4

También puede expresarse como $y_l = 3x$.

La gráfica que representa la situación correspondiente se muestra en la Figura 43.

Figura 43

Gráfica como estrategia de resolución del Problema 12 del apartado E.

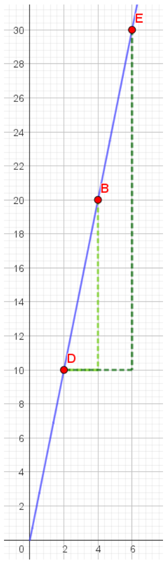


Como puede observarse en la gráfica, Laura solo coincide con Patricia a la salida de la carrera. El hecho de que no coincida nunca con Mario se debe a que son rectas paralelas.

Tras realizar este problema se muestra un GeoGebra con el que trabajar la pendiente (ver Figura 44).

Figura 44

Gráfica para trabajar la pendiente de una recta

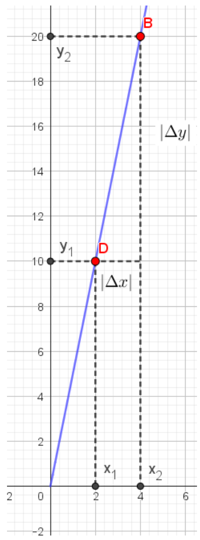


Se busca que los alumnos relacionen el valor de la pendiente con el cociente entre la longitud de los lados de los catetos. Se muestran 3 puntos para que observen que, por semejanza de triángulos (siguiendo la idea de Mancera (2022)), el valor de la pendiente es el mismo independientemente de los dos puntos tomados.

Problema 13. Al trabajar la relación directa entre la gráfica y la ecuación aparece, por un lado, la relación de la ordenada en el origen con el punto de corte de la recta con el eje Y y con la traslación de una función lineal (conexión con el sentido espacial) y, por otro lado, la relación del signo de la pendiente con el crecimiento de la recta, pudiéndose enseñar la siguiente expresión para la pendiente: $m = sgn\frac{|\Delta y|}{|\Delta x|}$ donde $sgn = \begin{cases} +, si\ la\ recta\ es\ creciente \\ -, si\ la\ recta\ es\ decreciente \end{cases}$ y el numerador y denominador de la fracción se corresponden con la longitud de los catetos (ver Figura 45).

Figura 45

Gráfica para trabajar la pendiente de una recta

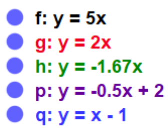


En particular, se tiene $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ con $D(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos de la recta.

b) En este apartado hay que identificar, para cada una de las rectas, la pendiente y la ordenada en el origen correspondiente. La solución puede verse en la Figura 46.

Figura 46

Solución del apartado b) del Problema 13 del apartado E.



Deben identificar las lineales (f, g y h) como aquellas que pasan por el origen y decidir la expresión correspondiente en función de la pendiente (crecimiento e inclinación con respecto al eje X). Para las otras 2, basta con fijarse en la ordenada en el origen (punto de corte con el eje Y). Por otro lado, podrían asociar la expresión algebraica tras haber identificado puntos pertenecientes a cada recta a partir de la gráfica.

Problema 14. Partimos de la ecuación explícita de la recta: $y = mx + n$. Como la recta pasa por el punto (x_0, y_0), se verifica $y_0 = mx_0 + n$. Ahora, despejamos n (el resto de datos son conocidos) $n = y_0 - mx_0$ y lo llevamos a la ecuación inicial $y = mx + y_0 - mx_0$. Finalmente, se sigue que $y - y_0 = m(x - x_0)$. Se espera que, inicialmente, los alumnos lo intenten resolver dando valores concretos tanto a la pendiente como al punto.

Problema 16. Una manera de resolverlo es, partiendo de la expresión del problema anterior ($s = \frac{n(n-1)}{2}$), darse cuenta de que a dicha expresión, para quedarse únicamente con el número de diagonales, hay que restarle el número de aristas de la figura correspondiente, es decir, $d = \frac{n(n-1)}{2} - n$ siendo d el número de diagonales y n el número de aristas.

Problema 17. Denotamos por a a la altura del rectángulo y por b a la base. Tenemos que $2(a+b) = P(a,b) = 24$, es decir, $a + b = 12$, de donde $b = 12 - a$. La función que queremos maximizar es $A(a,b) = a \cdot b$, y sustituyendo el valor de b en función de a, nos queda $y = A(a) = 12a - a^2 = 36 - (a-6)^2$ (a la última igualdad se llega mediante el método de completar cuadrados). Notar que debe cumplirse $y > 0$ y $a > 0$. La función alcanza su máximo valor cuando $a = 6$. Luego, las dimensiones del rectángulo pedido se corresponden con las de un cuadrado de lado 6 cm, cuyo área es $36\ cm^2$. También puede llegarse al resultado mediante la gráfica correspondiente.

Comentar que este problema fue desarrollado durante el Prácticum y una manera de resolverlo fue por tanteo: se prueba con pares de puntos que verifican la condición del perímetro hasta dar con el pedido.

Problema 18. Durante la exploración, se harán preguntas que guíen al alumnado como, por ejemplo, ¿qué sucede si $b = 0$?

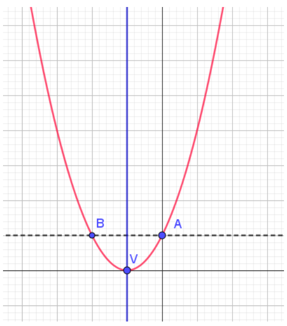
a) El valor de a determina la forma de la parábola (si el vértice es un máximo o un mínimo absoluto). Cuanto mayor es el valor absoluto de a, más cerrada está la parábola. El valor de b cambia de cuadrante al vértice. El valor de c determina el corte de la parábola con el eje Y. El valor de d se corresponde con traslaciones horizontales (en la dirección del eje X) y el de q con traslaciones verticales (en la dirección del eje Y).

Para la identificación del vértice y del eje de simetría, relacionándolo con el método de completar cuadrados, se utilizará un ejemplo concreto: consideramos la parábola $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Como $a = 1 > 0$, buscamos el mínimo valor que puede tomar la función, que se obtiene con $x = -1$, siendo esta la coordenada x del vértice. Para el cálculo de la coordenada y basta sustituir el valor de x en la ecuación de la parábola. Otra forma de calcular el vértice y el eje de simetría es relacionarlo con las transformaciones aplicadas: $y = (x+1)^2$ es la gráfica de x^2 desplazada 1 unidad hacia la izquierda, por lo que el vértice es $(-1,0)$. De aquí puede deducirse que el vértice de la parábola $y = (x-d)^2 + q$ es (d,q) y el eje de simetría es $x = d$.

b) Se necesitan 3 puntos: el vértice y otros 2 puntos que pueden ser, en caso de haberlos, los puntos de corte de la parábola con el eje X (relación con las soluciones reales de la ecuación cuadrática) o 2 puntos simétricos con respecto al eje de simetría (damos un valor para la x y calculamos la coordenada y correspondiente, supongamos que este es el punto $P(x_1, y_1)$ perteneciente a la parábola. El otro punto tiene la misma coordenada y, luego para calcular la coordenada x correspondiente basta calcular el punto de intersección de la parábola con la recta $y = y_1$, es decir, obtenemos el punto $Q(x_2, y_1)$ donde x_2 es una de las soluciones (la otra es x_1) de la ecuación $y_1 = ax^2 + bx + c$). Esto servirá como justificación de la ecuación del eje de simetría de la parábola, $x = -\frac{b}{2a}$. Para ello puede mostrarse (con un caso particular), tras dejar un tiempo de reflexión, el siguiente GeoGebra (ver Figura 47).

Figura 47

Gráfica para justificar la ecuación del eje de simetría y la coordenada x del vértice de una parábola



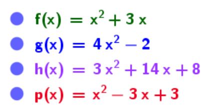
Tenemos el vértice V, y los puntos $A(x_A, c)$ y $B(x_B, c)$, siendo c el parámetro de la parábola. Calculamos x_A y x_B, como puntos de intersección de la parábola y la recta $y = c$, de donde se obtienen 0 (porque la párabola corta al eje Y) y $-\frac{b}{a}$. Finalmente, por simetría de la parábola, la coordenada x de V es $x_v = \frac{x_A+x_B}{2} = -\frac{b}{2a}$ (está a la misma distancia de x_A y x_B) y el eje de simetría es $x = -\frac{b}{2a}$. Haremos notar que, en este caso particular, la coordenada y coincide con el parámetro c de la parábola, pero que puede tomar cualquier otro valor.

Para el caso particular que se pide, calculamos el vértice de la parábola correspondiente aplicando lo anterior: $V(-1,6)$ $(x_v = \frac{-2}{2} = -1$, $y_v = (-1)^2 - 2 + 7 = 6)$. La parábola no corta al eje X ya que $x^2 + 2x + 7 = 0$ no tiene soluciones reales. Luego, tomamos otro punto de la parábola, por ejemplo, el $(-2,7)$. Ahora, falta calcular la coordenada x del otro punto a considerar cuya coordenada y es la misma. Para ello, calculamos los puntos de intersección de la parábola con la recta $y = 7$, siendo estos 0 y -2. Luego, el otro punto es $(0,7)$. Una vez tenemos estos 3 puntos, por simetría, podemos esbozar la parábola de manera aproximada.

c) Para su resolución aplicamos lo de los apartados anteriores: la f corta al eje X en $(-3,0)$ y en $(0,0)$, siendo las coordenadas x las soluciones de la ecuación correspondiente, es decir, $f = x^2 + 3x$; la p corta al eje Y en $(0,3)$, luego el término independiente de la expresión cuadrática correspondiente es 3, es decir, $p = x^2 - 3x + 3$; el vértice de g es $V(0,-2)$ de donde se sigue que $b = 0$, luego $g = 4x^2 - 2$. Finalmente, $h = 3x^2 + 14x + 8$ (puede factorizarse como $(x+4) \cdot (3x+2)$, de donde se obtienen los puntos de corte con el eje X). La solución puede verse en la Figura 48.

Figura 48

Solución del apartado c) del Problema 18 del apartado E.



d) Para este apartado basta con identificar elementos notables (3 puntos como se ha explicado en apartados anteriores).

ANEXO IV. Prueba escrita

Pregunta 1. a) El *día 1* se corresponde con la gráfica E (típico día de verano y sin lluvia) y el *día 2* se corresponde con la gráfica F ya que es el día en el que se alcanzan mayores temperaturas (próximas a 35ºC) y, además, el tramo decreciente a partir de las 18:00 horas en adelante, se identifica con la tormenta que hubo ese día.

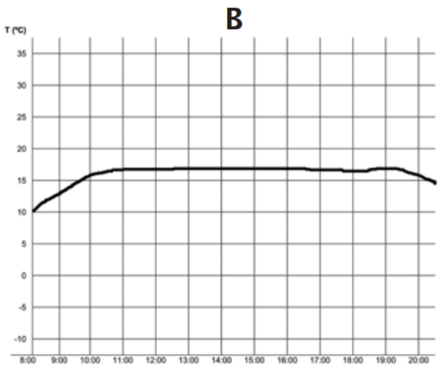
Notar que el *día 3* no se corresponde con ninguna de las gráficas dadas ya que ninguna de ellas tiene como temperatura mínima 10ºC y todas ellas superan los 20ºC desde primeras horas de la mañana (a partir de horas próximas a las 9 de la mañana).

b) La gráfica A es la que no tiene día asociado. Una posible solución es: hizo buen día. Sol y calor durante toda la mañana. Al principio de la tarde aparecieron algunas nubes y llovió un poco, consiguiendo que disminuyera la temperatura. Finalmente, al irse las nubes, volvió el buen tiempo.

c) La descripción del *día 3* es la que no tiene gráfica asociada. Una posible solución es la presentada en la Figura 49.

Figura 49

Posible solución del apartado c) de la Pregunta 1 de la prueba escrita



Nota. Imagen tomada del *Problema 20.5. de los Problemas de preparación de la XXIX Olimpiada Matemática Aragonesa de 2º ESO*.

d) La gráfica F es una función puesto que a cada valor de la variable independiente (tiempo en horas) le corresponde un único valor de la variable dependiente (temperatura en ºC). El dominio está formado por el conjunto de horas desde las 8:00 de la mañana hasta las 20:00 de la tarde aproximadamente. El recorrido se corresponde con las temperaturas alcanzadas en cada instante (en horas pertenecientes al dominio), en cuyo caso varían entre los 16 y 33 grados aproximadamente. Los tramos constantes, de crecimiento y decrecimiento, al igual que el dominio y el recorrido, pueden darse con notación de intervalo o describirse verbalmente: en la gráfica F la temperatura disminuye ligeramente entre las 8 y 8:15 de la mañana aproximadamente. Entre las 8:15 y las 10:30 de la mañana, la temperatura aumenta (tramo creciente) y se mantiene constante hasta las 18 horas aproximadamente (tramo constante). Finalmente, entre las 18 y las 20 horas, la temperatura disminuye (tramo decreciente) debido a las tormentas.

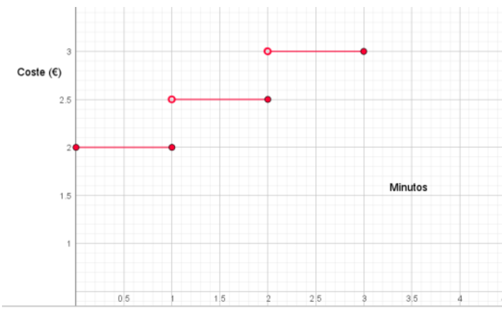
En este día, la mínima temperatura se encuentra entre los 16 y 17 grados y es alcanzada a las 8:15 de la mañana aproximadamente, mientras que la máxima temperatura es 33 grados (próxima a los 35ºC pero menor), se alcanza a las 10:45 de la mañana (entre las 10 y las 11 de la mañana) y se mantiene hasta las 18 horas aproximadamente.

Pregunta 2. a) En la situación 1 se relaciona la edad (variable independiente) y la estatura (variable dependiente) de Lucía. En la situación 2 se relacionan el número de amigos que van al cine (variable independiente) y la cantidad de dinero pagada por todas las entradas (variable dependiente). En la situación 3 se relaciona cada número real (variable independiente) con su cuadrado (variable dependiente) y en la situación 4 se relacionan el tiempo (minutos) (variable independiente) y el coste (€) (variable dependiente) del trayecto en taxi.

La respuesta a la primera pregunta no puede saberse a partir de la información dada. La situación 4 no representa una función continua porque la gráfica asociada (ver Figura 50) presenta saltos para valores de la variable independiente correspondientes al dominio.

Figura 50

Gráfica asociada a la situación 4 de la Pregunta 2 de la prueba escrita



La situación 2 representa una relación de proporcionalidad directa, si asumimos que cada amigo paga lo mismo por una entrada. En este caso, cada amigo paga $\frac{20}{4} = 5$€ por entrada, y la situación 3 representa una relación cuadrática ya que dicha relación puede expresarse como $y = x^2$ siendo x un número real, o dado que la gráfica asociada es una parábola.

b) La situación 2 puede expresarse en una tabla como se muestra en la Tabla 25.

Tabla 25

Tabla asociada a la situación 2 de la Pregunta 2 de la prueba escrita

Nº amigos	4	1	0	3
€	20	5	0	15

La situación 3 puede expresarse en una tabla como se muestra en la Tabla 26.

Tabla 26

Tabla asociada a la situación 3 de la Pregunta 2 de la prueba escrita

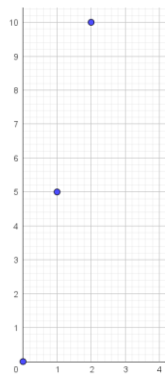
Nº real	-2	-1	0	1
Su cuadrado	4	1	0	1

Notar que para ambos casos mostramos posibles soluciones, pudiendo variar los números considerados siempre y cuando tengan sentido dentro de los contextos correspondientes.

c) La gráfica de la situación 2 está formada por puntos aislados pertenecientes a la recta $y = 5x$ para valores de x naturales, como puede verse en la Figura 51.

Figura 51

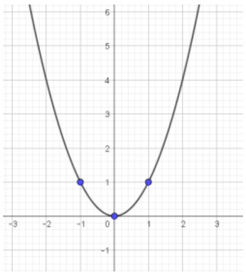
Gráfica asociada a la situación 2 de la Pregunta 2 de la prueba escrita



La gráfica de la situación 3 se corresponde con la parábola $y = x^2$, que puede verse en la Figura 52.

Figura 52

Gráfica asociada a la situación 3 de la Pregunta 2 de la prueba escrita



d) La situación 2 puede expresarse como $y = 5x$ donde $y =$ "cantidad total de dinero a pagar" y $x =$ "número de amigos que van al cine".

La situación 3 puede expresarse como $y = x^2$ siendo x un número real.

Pregunta 3. a) Los alumnos pueden optar por representar la información en una tabla de valores, como puede verse en la Tabla 27.

Tabla 27

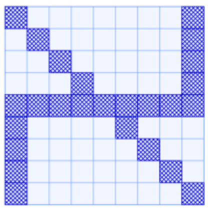
Tabla como estrategia de resolución para determinar el patrón correspondiente

Nº figura	1	2	3	4
Nº baldosas azul oscuro	7	13	19	25

Notar que en cada mosaico añadimos 6 nuevas baldosas azules oscuras con respecto al mosaico que ocupa la posición anterior (a partir de la tabla de valores se establece verbalmente la relación funcional existente). Para saber cuántas baldosas azules oscuras se necesitan para construir el siguiente mosaico (25 baldosas$= 19 + 6$) puede ampliarse la Tabla 27, así como dibujarse la figura correspondiente (ver Figura 53).

Figura 53

Posible estrategia de resolución del apartado a) de la Pregunta 3 de la prueba escrita



b) Para su resolución puede ampliarse la tabla de valores hasta el mosaico número 8 o encontrarse el patrón correspondiente: el mosaico 8 tendrá las 7 baldosas azules oscuras del mosaico 1 más $6 \cdot 7 = 42$ baldosas azules oscuras (las 6 baldosas azules oscuras añadidas desde el mosaico 2 al 8 incluido) ya que habremos añadido 6 baldosas azules oscuras en cada uno de los mosaicos anteriores. Es decir, se necesitan 49 baldosas azules oscuras.

En este caso dibujar la figura correspondiente se hace más incómodo.

c) $y = 7 + 6(n-1) = 6n + 1$ siendo $y =$ "número de baldosas azules oscuras que tiene el mosaico" y $n =$ "número de orden del mosaico" (empezamos en 1).

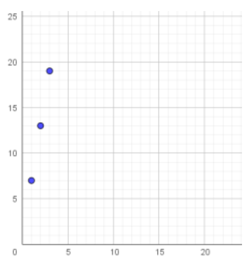
d) A partir de la expresión anterior tenemos que $n = \frac{y-1}{6}$. Luego, el mosaico formado por 91 baldosas azules oscuras se corresponde con el mosaico número $\frac{91-1}{6} = 15$.

e) Una figura formada por 114 baldosas azules oscuras no es solución ya que no puede expresarse como la suma de 7 y un múltiplo de 6 o ya que 6 no es divisor de 113 (es un número primo).

f) En el eje X se representa el número de orden del mosaico y en el eje Y el número de baldosas azules oscuras que tiene el mosaico correspondiente. La gráfica está formada por puntos aislados pertenecientes a la recta $y = 6x + 1$ (función afín) para valores de x naturales mayores o iguales que 1, como puede verse en la Figura 54.

Figura 54

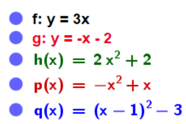
Solución del apartado f) de la Pregunta 3 de la prueba escrita



Pregunta 4. a) La solución puede verse en la Figura 55.

Figura 55

Solución del apartado a) de la Pregunta 4 de la prueba escrita



La f es una función lineal ya que su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Luego, $f = 3x$. La pendiente es 3. Notar que también es válido decir que es una función afín cuya pendiente es 3 y la ordenada en el origen es 0.

Una vez averiguada la ecuación de una de las rectas, pueden asociar la otra función afín ($y = -x - 2$) con la recta restante (g). También pueden comenzar asociando la g con la recta $y = -x - 2$ puesto que su gráfica es una recta que corta al eje Y en el punto $(0, -2)$ (lo que implica que la ordenada en el origen es -2) y, como es decreciente, su pendiente es un número negativo: -1.

El vértice de la parábola h es $V_h(0,2)$ de donde se sigue, utilizando su expresión simbólica, que $b = 0$. Luego h se corresponde con $y = 2x^2 + 2$. El eje de simetría es $x = 0$.

El vértice de q es un mínimo absoluto por lo que $a > 0$, de donde se sigue que q se corresponde con $y = (x-1)^2 - 3$. También puede razonarse de la siguiente manera: la gráfica de $y = (x-1)^2 - 3$ es como la de $y = x^2$ desplazada verticalmente 3 unidades hacia abajo ($q = -3$) y horizontalmente 1 unidad hacia la derecha ($d = 1$). El vértice es $(d, q) = (1, -3)$ y el eje de simetría es $x = 1$.

Finalmente, p se corresponde con $y = -x^2 + x$. El vértice es un máximo absoluto por lo que $a < 0$. Además, los puntos de corte con el eje X son $P_1(0,0)$ y $P_2(1,0)$ cuyas coordenadas x se corresponden con las soluciones de la ecuación cuadrática $-x^2 + x = 0$. También, como corta al eje Y en el origen de coordenadas, el término independiente de la expresión cuadrática correspondiente es 0. La coordenada x del vértice es $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$, luego el vértice es $V_p(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ y el eje de simetría es $x = \frac{1}{2}$.

b) Para este apartado tenemos que identificar elementos notables: El vértice de i, cuyas coordenadas son $(d, q) = (-3, 1)$, es un máximo absoluto ya que $a < 0$ y el eje de simetría es $x = -3$. Su gráfica es como la de $y = -x^2$ desplazada verticalmente 1 unidad hacia arriba ($q = 1$) y horizontalmente 3 unidades hacia la izquierda ($d = -3$). Calculamos los puntos de corte con el eje X, cuyas coordenadas x son las soluciones de la ecuación cuadrática $-(x+3)^2 + 1 = 0$, es decir, estos puntos son $I_1(-2, 0)$ y $I_2(-4, 0)$.

El vértice de j, cuyas coordenadas son $(d, q) = (4, -1)$, es un mínimo absoluto ya que $a > 0$ y el eje de simetría es $x = 4$. Su gráfica es como la de $y = x^2$ desplazada verticalmente 1 unidad hacia abajo ($q = -1$) y horizontalmente 4 unidades hacia la derecha ($d = 4$). Ahora, calculamos los puntos de corte con el eje X, cuyas coordenadas x son las soluciones de la ecuación cuadrática $(x - 4)^2 - 1 = 0$, es decir, estos puntos son $J_1(3, 0)$ y $J_2(5, 0)$.

Notar que, por simetría, podemos graficar las parábolas de manera aproximada conociendo el vértice y los puntos de corte con el eje X (ver Figura 56).

Figura 56

Solución del apartado b) de la Pregunta 4 de la prueba escrita