Trabajo Fin de Máster

Una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones en Matemáticas B en 4º de la ESO.

Autor

Mario Tovar Calonge

Directora

Patricia Florentín Dueñas

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2023

Índice

Resumen

En el presente documento se incluye una propuesta de secuencia didáctica para la enseñanza de una parte del contenido del Bloque de Funciones del Currículo en la asignatura de Matemáticas B, impartida en 4º de la ESO. Este trabajo está separado en diferentes secciones en las que se explora la definición del objeto matemático que se va a enseñar, su demarcación en el contexto del currículo y las leyes educativas, y se analiza el estado de la enseñanza de dicho objeto matemático a partir de una revisión bibliográfica de distintas fuentes, materiales escolares y artículos de investigación.

Empleando dicha información, en el trabajo se propone una secuencia didáctica de 13 sesiones basada en una serie de problemas y ejercicios que tienen como objetivo lograr un aprendizaje significativo del contenido referido a las funciones que se pretende enseñar. Dicha secuencia está acompañada de sendas pruebas de evaluación inicial y final. La metodología que se propone para introducir esta secuencia combina la enseñanza a través de la resolución de problemas con la enseñanza para la resolución de problemas, poniendo el foco y la carga de trabajo en problemas contextualizados y, en la medida de lo posible realistas, pero vinculados directamente con las técnicas que se requieren para logar una comprensión profunda de los contenidos. Finalmente, la prueba de evaluación que se propone sigue la misma filosofía que la secuencia, poniendo el foco en los problemas y en un modelo de calificación basado en el modelo de tercios.

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

En el presente trabajo se estudiará, como eje central del mismo, el objeto matemático de las funciones. Las funciones se estudian en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), y también durante el Bachillerato, pues presentan gran relevancia tanto para la formación académica del alumnado como para la vida cotidiana. Nos centraremos, en lo que sigue, en la asignatura Matemáticas B, impartida al alumnado de 4º de la ESO. Esta asignatura pertenece todavía a la anterior ley educativa, puesto que, durante el año de desarrollo de esta memoria (curso 2022-2023), el alumnado de cursos pares (2º y 4º de la ESO) se encontraban cursando los finales de ciclo según LOMCE.

No obstante, en el Anexo III de este documento incluimos una serie de consideraciones respecto a la nueva ley educativa, concretada en la Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, y la adecuación de esta memoria a la misma, teniendo en cuenta que gran parte del contenido se ha diseñado en un espíritu más cercano a la nueva norma que a la vieja. En este sentido, en anticipación al espíritu de la nueva ley educativa, la propuesta que se presenta en los que sigue está mayormente centrada en el aprendizaje a través de la resolución de problemas y su implementación metodológica favorece el trabajo en el aula, el uso de realimentación positiva al alumnado, poniéndolo en el centro, y el desarrollo de una visión general de las matemáticas mediante el uso de situaciones contextualizadas y próximas al alumnado.

Volviendo a la asignatura que nos ocupa, en 4º de la ESO, Matemáticas B se imparte durante un total de 4 horas semanales, y, según el currículo establecido en la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, que regula el contenido de los cursos pares hasta, y durante el curso 22-23, y por tanto de 4º ESO, el alumnado trabajará los siguientes **contenidos**:

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
- Análisis de resultados.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
- Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

Dichos contenidos serán evaluados según los siguientes **criterios de evaluación,** que se concretan mediante **estándares de aprendizaje**:

- **Crit.MAAC.4.1.** Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.

  - **Est.MAAC.4.1.1.** Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas.
  - **Est.MAAC.4.1.2.** Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso.
  - **Est.MAAC.4.1.3.** Identifica, estima o calcula parámetros característicos de funciones elementales.
  - **Est.MAAC.4.1.4.** Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno a partir del comportamiento de una gráfica o de los valores de una tabla.
  - **Est.MAAC.4.1.5.** Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.
  - **Est.MAAC.4.1.6.** Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, definidas a trozos y exponenciales y logarítmicas.
- **Crit.MAAC.4.2.** Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales
  - **Est.MAAC.4.2.1.** Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.
  - **Est.MAAC.4.2.2.** Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.
  - **Est.MAAC.4.2.3.** Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios tecnológicos.
  - **Est.MAAC.4.2.4.** Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.

Según esta orden, el contenido presente en el bloque de funciones contribuirá, también, a la adquisición de las siguientes **competencias clave**:

- **CMCT**: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- **CCL**: Competencia en comunicación lingüística.
- **CD**: Competencia digital.
- **CAA**: Competencia aprender a aprender.

Esto es debido fundamentalmente a la clara y necesaria relación que tienen las funciones con los campos científicos y técnicos más avanzados (las relaciones funcionales aparecen en aparatos de medida, en la interpretación de los resultados de experimentos, etc), y a que gracias a los avances en materia de TIC's, ahora el análisis funcional es más sencillo gracias al uso de software específico, como puede ser GeoGebra en la ESO, o lenguajes de programación como *Python* o *Mathematica* en etapas más avanzados de la formación. También se relaciona con la competencia lingüística, ya que muchas relaciones funcionales pueden ser expresadas como enunciados, y aparecen de forma natural en el día a día, y constituye un elemento de apoyo en los procesos del propio aprendizaje.

El bloque de funciones del currículo, aunque no tan extenso como el resto de los bloques, se suele encontrar dividido en dos o tres unidades didácticas (UD), estando la primera dedicada al estudio de las funciones de forma global, y de sus propiedades, y el resto dedicándose al estudio de algunas de las funciones elementales más relevantes, como las funciones lineales, exponenciales o logarítmicas.

En lo que sigue, nos centraremos en la primera unidad didáctica, en la que se trabajarán todos los contenidos presentes en el currículo, haciendo especial hincapié en los tres primeros, puesto que los modelos funcionales específicos suelen trabajarse en las restantes. De este modo, para impartir la enseñanza que se propone en este trabajo, se identifican los siguientes **Campos de problemas:**

- **Cp1**. Interpretar relaciones funcionales a partir de la representación gráfica.
- **Cp2**. Sistemas de representación de funciones.
- **Cp3**. Dominio y recorrido.
- **Cp4**. Continuidad.
- **Cp5**. Monotonía de funciones: intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y Tasa de Variación Media (TVM).
- **Cp6**. Identificación de otros comportamientos: Simetría, tendencia y periodicidad.
- **Cp7**. Análisis e interpretación de funciones. (Entendido como la combinación de los procedimientos necesarios en los Cp3, Cp4, Cp5 y Cp6)
- **Cp8**. Funciones definidas a trozos: representación y análisis.

Las **técnicas** que son necesarias para poder resolver ejercicios y problemas vinculados a los anteriores campos de problemas son las siguientes:

- **T1:** Interpretar y representar datos gráficamente.
- **T2:** Cambio entre sistemas de representación de una función.
- **T3:** Calcular el dominio y recorrido de una función.
- **T4:** Calcular puntos de cortes con los ejes.

- **T5:** Estudiar la continuidad de una función.
- **T6:** Computar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.
- **T7:** Computar los extremos absolutos y relativos de una función.
- **T8:** Calcular la TVM de una función.
- **T9:** Calcular el periodo de una función periódica.
- **T10:** Identificar tendencias en funciones.
- **T11:** Identificar simetrías en funciones.
- **T12:** Identificar trozos de una función definida a trozos.

Las **tecnologías** que justifican las técnicas mencionadas se desarrollan en la sección **G.1**. de este documento.

Cabe destacar que el objetivo principal de este TFM es proponer una serie de actividades que faciliten la comprensión del concepto de función a través del estudio de sus propiedades, sus aplicaciones y los razonamientos matemáticos que se requieren. De esta forma, se trata de garantizar la adquisición de los contenidos mediante aprendizaje significativo. Para ello, introduciré el concepto de función de forma razonada, con especial relevancia en su razón de ser histórica y su gran utilidad en todos los campos de las ciencias y del día a día. Además, trataré de evitar reducir el estudio de las funciones a la mera aplicación mecánica de técnicas, tratando de emplear el aprendizaje a través de la resolución de problemas y no para la resolución de problemas. En este sentido, he tratado de diseñar problemas que se relacionen con situaciones cotidianas o que pueden aparecer en las noticias, contextualizados en la medida de lo posible.

Finalmente, a lo largo de la propuesta utilizaré diferentes representaciones matemáticas de las funciones, algo que forma parte del Cp1 y del Cp2, pero que estará presente en todos los problemas. De esta forma, trataré de que el alumnado no asocie la función a una única representación, bien gráfica, bien analítica, sino que lleguen a comprender el significado más profundo como modelo de relación entre variables a través de todas las representaciones.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

En esta sección se trata la forma en la que se estudian las funciones en la enseñanza reciente, particularmente referida a materiales que se empleaban bajo la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), puesto que el año de realización de esta memoria se trata todavía de un año de transición entre esta y la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE), estando los cursos pares todavía bajo el paraguas de la antigua ley.

Para estudiar el estado de la enseñanza-aprendizaje se consideran dos apartados distintos, en los que recojo el tratamiento de las funciones en los libros de texto y las dificultades que encuentran los alumnos al estudiar este objeto matemático.

B.1 Análisis de libros de texto

En este apartado se analizan varios materiales de referencia preparados para utilizarse en la asignatura de Matemáticas B de 4º ESO. Este material se corresponde con tres libros de texto pertenecientes a las editoriales Anaya (Colera, Oliveira, Gaztelu y Martínez, 2012), Marfil (Botella, Millán, Pérez y Cantó, 2008) y Edelvives (Mejía, Ocaña y Romero, 2016), y a los apuntes creados y distribuidos en abierto por Marea Verde, un colectivo de profesores de la escuela pública (Marea Verde, 2023). Para fomentar la claridad en el análisis, en lo que sigue, se citará cada material mediante el nombre de la editorial (Anaya, Marfil o Edelvives) o mediante Marea Verde para el último texto. Cabe destacar que para realizar este análisis me he fijado en varios criterios; la estructura de los textos, tanto a nivel de bloques como dentro de cada bloque, la metodología a la que se aproximan, la razón de ser que motiva la introducción de las funciones y los campos de problemas presentes en cada texto, así como las técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente.

En relación a la **estructura** que siguen los distintos textos para organizar los contenidos, encuentro algunas diferencias fundamentales. Los textos de Anaya y Edelvives siguen una organización muy clásica, organizados en unidades didácticas que, agrupadas, responden fundamentalmente al contenido del currículo y a los bloques de éste (Procesos, números y álgebra, geometría, funciones y estadística y probabilidad). En ambos textos, no obstante, encontramos diferente organización para los contenidos del bloque de funciones. En el texto de Anaya se organiza el contenido en 3 unidades didácticas, una primera UD que versa sobre propiedades de las funciones, la segunda UD sobre funciones lineales y finalmente una tercera UD sobre otras funciones, donde entran las exponenciales, proporcionalidad inversa, etc. En el texto de Edelvives solo encontramos dos unidades didácticas, una generalista sobre propiedades de funciones, y una segunda unidad más centrada en el estudio de las funciones elementales que también incluye las funciones lineales. No obstante, el contenido que se estudia en ambos textos es, fundamentalmente, el mismo.

El texto de Marea Verde también se encuentra separado en tres UDs. La primera está nuevamente dedicada al estudio de las funciones reales y sus propiedades y representaciones. La segunda UD se dedica enteramente al estudio de funciones polinómicas, definidas a trozos y de proporcionalidad inversa, y finalmente, la tercera UD se centra en el estudio de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Por su parte, el texto de Marfil es un tanto diferente, puesto que los bloques temáticos, si bien responden al currículo de secundaria, se organizan de forma diferente a los textos anteriores. Aquí, el estudio de las funciones aparece dentro de un bloque destinado al tratamiento de la información, también separado en dos UDs. La primera se dedica al estudio de propiedades generales y representación de las funciones, y la segunda a funciones específicas, pero la diferencia fundamental está en la organización del contenido con respecto a los textos de Anaya, Edelvives, e inlcuso Marea Verde, es que la forma de introducir los conceptos es mucho más constructiva, trabajando primero problemas o situaciones de los cuales de institucionalizan definiciones, propiedades o aspectos del objeto matemático.

Sobre la **metodología**, encontramos una división muy clara entre el texto de Marfil y los demás aquí analizados. Los textos de Anaya y Edelvives siguen una metodología más tradicional que está enfocada en el aprendizaje para la resolución de problemas. Esto es, se institucionalizan una serie de conceptos o definiciones, seguidos de unas técnicas con poca (o ninguna) justificación, que sirven para resolver algunos problemas concretos. Después, se presentan ejercicios para el dominio de las técnicas, y finalmente, se presentan una serie de problemas que se resuelven aplicando las técnicas y definiciones introducidas. El texto de Marea Verde también sigue esta aproximación, institucionalizando primero y luego aplicando ese conocimiento a ejercicios y problemas. No obstante, cabe destacar que en el texto de Marea Verde y en el texto de Edelvives, se contextualizan más los problemas y se aproximan un poco más a los razonamientos que subyacen las técnicas, incluyendo problemas de interpretación de fenómenos reales.

Por su parte, el texto de Marfil sigue un enfoque completamente diferente, mucho más centrado en el constructivismo y, sobre todo, en el aprendizaje a través de la resolución de problemas. En este texto, se trabaja constantemente con problemas contextualizados sobre los que se cuestionan o preguntan cosas. Cuando se vuelve necesario institucionalizar un concepto, definición o técnica, se introduce, para seguidamente volver a trabajar sobre el problema en cuestión y otros similares. Se trata de un texto mucho menos encasillado en las secciones tradicionales de contenidos, y en el que los problemas son más complejos y apenas hay ejercicios de repetición para la adquisición de técnicas.

Siguiente, en relación a la **razón de ser** que motiva el estudio de las funciones, encontramos poca variación respecto a los cuatro textos analizados: en todos ellos se justifica la necesidad de las funciones como herramienta de modelado de relaciones entre variables. No obstante, donde sí encuentro diferencias es en lo explícitos que son los textos a este respecto. El de Marfil es el que más claro muestra el objetivo del estudio, seguido del texto de Edelvives, y siendo los otros dos mucho más oscuros, o mencionando la razón de ser en un breve párrafo al principio del bloque. Esto es así ya que la propuesta de Marfil tiende al constructivismo, lo que trata de conseguir que el estudiante deduzca y construya el conocimiento buscado, y al institucionalizar al final de este proceso, también es claro respecto a la razón de ser de los objetos matemáticos tratados.

Pasamos ahora a analizar el contenido propiamente dicho, a través de los **campos de problemas** que aparecen en cada uno de los textos. Debo destacar que estos campos de problemas no se corresponden exactamente con los que he presentado en la sección A de este documento en relación a mi propuesta didáctica, sino a los que he identificado en los textos, ya que en la secuencia didáctica he combinado algunos de estos campos, y no se pretende presentar una equivalencia 1:1 entre ella y los libros. Para facilitar la comparación, mediante una tabla muestro qué campos de problemas aparecen en qué texto.

Campo de problemas	**Anaya**	**Edelvives**	**Marfil**	**Marea verde**
Problemas de interpretación gráfica.	✓	✓	✓	✓
Cambios de sistemas de representación.	✓	✓	✓	✓
Problemas de dominios.	✓	✓	✓	✓
Problemas de cortes con los ejes.	✗	✓	✓	✗
Estudio de la continuidad.	✓	✓	✓	✓
Estudio de la monotonía.	✓	✓	✓	✓
Problemas sobre TVM.	✓	✓	✓	✓
Estudio de curvatura y puntos de inflexión.	✗	✓	✗	✓
Identificación de simetrías.	✗	✓	✓	✓
Identificación de tendencias y periodicidad.	✓	✓	✓	✓
Operaciones con funciones.	✗	✓	✗	✗
Traslación de funciones en el plano	✗	✗	✗	✓
Análisis e interpretación de funciones.	✗	✓	✓	✓
Funciones definidas a trozos.	✓	✓	✓	✓
Otros modelos funcionales. (lineales, exponenciales, radicales, etc)	✓	✓	✓	✓

Tabla 1: Campos de problemas presentes en cada uno de los textos analizados.

En la Tabla 1 se incluye la comparativa entre los campos de problemas presentes en cada texto, y, como se puede ver, en cuanto a diversidad de contenido, el texto de

Edelvives es el más completo, tratando incluso operaciones con funciones (composición, suma, etc), a través de lenguaje simbólico y las representaciones algebráicas. El texto de Marea Verde también es muy completo en cuanto a contenido, y como curiosidad, trata explícitamente las traslaciones de gráficas de funciones en el plano, algo que el resto de los textos tratan, si lo hacen, cuando se estudian las funciones lineales u otros modelos funcionales. El texto de Anaya es el que menos contenido adicional al currículo tiene, pero esto es debido, en parte, a que dedica toda una UD al estudio de las funciones lineales, mientras que el resto de textos lo tratan solo como un apartado cuando se estudian modelos funcionales. El texto de Marfil, por su parte, no incluye todo el contenido que Marea Verde o Edelvives, pero por su propia estructura y metodología, presenta un contenido más cerrado, siendo, en cierta medida, mucho más autocontenido que los otros, ya que las técnicas requeridas para la resolución de problemas van apareciendo progresivamente.

Para resolver los distintos problemas planteados los textos de Anaya, Edelvives, o Marea Verde introducen las fórmulas y definiciones necesarias para que se apliquen, en la mayoría de los casos, directamente, ya sea a problemas o a ejercicios. Estas constituyen las **técnicas**: problemas de definición para el dominio, cálculo de la TVM, definición de continuidad, definición de máximos y mínimos, etc. En este nivel, normalmente se introducen las técnicas de forma más verbal que matemática, a través de definiciones en lugar de mediante representación simbólica, dado que se requerirían herramientas y conocimientos más avanzados para hacerlo de otra manera. El texto de Marfil, dada su propuesta y método, se diferencia a este respecto de los anteriores en que no presenta ejercicios puros para adquisición de técnicas, sino que se incorporan en la resolución de problemas contextualizados, pero introduce las técnicas de la misma manera que el resto si bien el momento de institucionalizarlas es diferente.

Las **tecnologías** que justifican estas técnicas suelen ser introducidas brevemente en sus correspondientes apartados, y luego, se aplican en diferentes ejercicios y/o problemas sin mayor razonamiento. Esto último no ocurre en el texto de Marfil, que lo inscribe en problemas más complejos, ni en algunos problemas contextualizados del texto de Marea Verde, pero es lo habitual en los textos de Anaya y Edelvives. El ejemplo más evidente lo encontramos cuando se estudian los dominios de definición de las funciones. En los textos de Marea Verde y Edelvives se definen los problemas de continuidad, y, a continuación, se presentan una plétora de ejercicios donde se debe analizar el dominio de determinadas funciones, tanto en su representación analítica como gráfica. También se trabaja de forma similar en el texto de Anaya, pero con mucho menos contenido ya que incluye menos ejercicios y problemas que el resto. En el texto de Marfil, se institucionalizan los posibles problemas de definición de las funciones, pero se trabajan siempre de la mano de problemas contextualizados, nunca de forma aislada en ejercicios puros para ello. Esto hace que en este último texto se trabaje mejor lo que significa el dominio en su conjunto, ya que se entiende mejor que el dominio puede ser restringido por el problema del ejercicio (p. ej., el tiempo o el volumen no pueden ser negativos por imposición física) y no solo por problemas de definición de la expresión analítica.

También podemos ver la diferencia en el tratamiento de las tecnologías en el cálculo de la TVM. En los textos de Anaya, Edelvives y Marea Verde se introduce la fórmula y se aplica inmediatamente a ejercicios y problemas, sin razonar sobre el significado de la misma como pendiente de la recta secante a la función, o como relación de los incrementos de cada una de las variables para entender por qué es útil para describir el crecimiento. En general, se define que la TVM es positiva si la función crece en promedio en ese intervalo, pero sin razonar por qué ocurre esto. En el texto de Marfil, se construye la fórmula de la TVM a partir de los incrementos, lo que ayuda a entender lo que captura esta fórmula, y por qué se comporta como lo hace.

Por otro lado, vinculado a lo anterior, si analizamos los **tipos de funciones** que aparecen en los libros de texto, también encontramos algunas diferencias. Los textos de Anaya, Edelvives y Marea Verde trabajan muchos modelos funcionales, tanto de forma descontextualizada como mediante problemas, sobre las que se construyen las técnicas y tecnologías vinculadas a sus campos de problemas. El texto de Marfil es más escueto en este sentido, ya que trabaja los mismos modelos funcionales, pero con menor variación entre ellos, fruto de su aproximación mediante problema más realistas, más largos, y más complejos. No obstante, todos los textos trabajan, al menos, las funciones lineales, exponenciales, radicales, a trozos y logarítmicas.

Otro aspecto interesante a analizar son los **sistemas de representación** que emplean los textos. Existe un claro predominio del sistema de representación algebraico y gráfico en los textos de Anaya y Edelvives. En Marfil y Marea Verde encontramos mayor variedad ya que se utilizan el lenguaje verbal y las tablas más frecuentemente, ligando los distintos sistemas, lo cual es importante para evitar que el alumnado asocie las funciones únicamente con un sistema de representación. Según Arce et al. (2019), coordinar informaciones proporcionadas en distintas representaciones facilitaría desarrollar una comprensión más completa, lo que muestra la pertinencia de tratar todos los sistemas de representación del análisis matemático.

Además, he considerado importante repasar brevemente el **rigor del lenguaje** empleado en los textos analizados. En general, los textos son rigurosos a la hora de trabajar con las representaciones de funciones, y cuando estudian la monotonía, definiendo matemáticamente el crecimiento. No obstante, el lenguaje empleado en el texto de Marfil es más próximo al cotidiano, lo que va en línea con su propuesta metodológica, por lo que es el más accesible. Donde sí que encuentro un problema es la forma de tratar la continuidad de funciones. Todos los textos analizados definen la continuidad como la ausencia de discontinuidades, donde se estudian las finitas e infinitas, evitables e inevitables, pero ponen como ejemplos de discontinuidades infinitas funciones como $f(x) = x^{-1}$, la cual es *continua en su dominio*. Este es el problema de rigor que encuentro, puesto que, en ningún momento se explica que para que la función sea continua en un intervalo, debe serlo en todos los puntos del mismo y a su vez, estos deben pertenecer al dominio de la misma. Es cierto que, en este nivel, el alumnado no conoce las derivadas ni los límites, por lo que difícilmente se puede realizar un estudio riguroso de la continuidad de funciones de variable real, pero, esto no es motivo para dar una definición de continuidad que es, como poco, inexacta. Esta falta de rigor en un tema que será revisado nuevamente si prosiguen sus estudios en ciencias me parece un fallo que habría que corregir para evitar confundir al alumnado más adelante.

En resumen, los libros de Anaya y Edelvives son más concisos en sus explicaciones e incluyen una gran cantidad de ejercicios de aplicación de técnicas, donde destaca la utilización del lenguaje algebraico. Considero que los materiales de Marea Verde, o, idealmente, Marfil, son más adecuados para lograr una comprensión más profunda de las funciones, ya que se alejan, Marfil más, del aprendizaje para la resolución de problemas tratando de seguir un proceso de resolución más razonado, y más contextualizado. Esta pequeña muestra aquí analizada nos da una idea general del tipo de contenido y métodos que se trabajan, siendo más frecuente la enseñanza para la resolución de problemas y la adquisición de técnicas mediante repetición de ejercicios que la propuesta constructivista.

Relacionando el análisis de los libros de texto con el **currículo**, se puede observar que en algunos de los textos se da más importancia a la operatividad con funciones que al modelado de situaciones reales, o a la interpretación de las mismas, algo que se menciona de forma explícita (Est.MAAC.4.1.1., Est.MAAC.4.1.6.). En cuanto a la representación de funciones, el currículo no especifica los elementos concretos que se deben analizar, por lo que es curioso que algunos textos definen la curvatura y los puntos de inflexión, pero la mayoría no. No obstante, esto último será más relevante para el análisis funcional en los cursos venideros. De forma general, todos los textos analizados cumplen con el contenido fijado por ley en el currículo de secundaria.

B.2 Efectos de este tipo de enseñanza sobre el conocimiento del alumnado.

La enseñanza de funciones es esencial, tanto para para estudios posteriores (las funciones son un concepto fundamental en las matemáticas y se utilizan en muchas áreas de estudio, como la física, la economía, la ingeniería y la informática) como para poder entender y desarrollar modelos de como funcionan algunos fenómenos presentes en la vida real tan básicos como el coste de un producto a granel, o tan complejos como la variabilidad del pago de la cuota de una hipoteca según el Euribor. Por ello se estudian las funciones a lo largo de toda la ESO, pero el bloque de funciones del currículo en 1º y 2º ESO es mucho menos específico que el del segundo ciclo. Además, la forma en que usualmente se introducen las funciones en 3ºESO es muy similar al contenido estudiado en 4ºESO, pero más sencillo, por lo que es realmente en el bloque del segundo ciclo en el que se adquiere soltura en el manejo de funciones y sus representaciones.

En este sentido, la enseñanza más clásica, como la que podemos ver en los libros de Anaya o Edelvives analizados en el apartado anterior, no favorece la comprensión de la razón de ser de las funciones como herramienta para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional. Esto, además, puede provocar dificultades de aprendizaje vinculadas concepciones erróneas en los estudiantes. En lo que sigue analizaré brevemente algunas de las dificultades y obstáculos epistemológicos que pueden aparecer en el alumnado y limitar la comprensión de las funciones, a través de una serie de artículos que lo analizan.

Primero, según López & Sosa (2008), durante la enseñanza se presentan diversas formas de representar al mismo objeto, con los diferentes sistemas de representación (fórmulas, gráficas, enunciados, conjuntos, etc.), pero estas representaciones se suelen hacer de manera aislada y no siempre ilustran la función como relación de correspondencia entre los elementos de uno a otro conjunto ni como relación entre variables, lo que dificulta el trabajo con los sistemas de representación y también la comprensión misma del objeto. En este mismo trabajo, los autores presentan que el alumnado también puede mostrar dificultades para para distinguir entre variable dependiente e independiente y para identificar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables. Esto suele ocurrir porque los ejercicios planteados suelen ser rutinarios o algorítmicos, excluyendo algunos problemas. Además, en línea con lo que plantean Arce et al. (2019), el alumnado puede tener dificultades en el manejo de distintas representaciones de las funciones y para cambiar entre representaciones de la misma función. Esto lleva a la dificultad de identificar relaciones funcionales de forma independiente a la representación utilizada.

Trujillo et al. (2023) realizan un meta-análisis de más de 30 artículos de la literatura sobre el aprendizaje de funciones e identifican las que son las dificultades, y los errores de concepto más frecuentes relacionadas con este objeto. En concreto, sobre errores de concepto, identifican que, incluso en niveles universitarios, hay estudiantes que asocian las funciones únicamente con representaciones en forma de líneas rectas o parábolas. Esto genera el problema de que se asocia a las funciones con gráficas específicas que además tienen que tener forzosamente una representación gráfica en los ejes cartesianos, algo que solo es cierto para relaciones numéricas, pero no para funciones que asocian objetos no numéricos. También identifican que los estudiantes tienden a interiorizar el concepto de función como relación entre estrictamente dos variables, fruto de trabajar únicamente con este tipo de funciones durante su educación, por lo que no son capaces de generalizar a funciones multivariable. Finalmente, identifican que, dada la forma en la que se presentan las funciones, algunos estudiantes pueden interiorizarlas como transformación en lugar de como relación entre variables, o incluso asociarlas únicamente a su expresión algebraica.

Respecto a las dificultades, identifican que los estudiantes pueden tener 5 grandes tipos de dificultades:

- Dificultades con la definición. Esto viene dado por la ausencia de una definición precisa en lenguaje matemático, siendo a veces vagas las definiciones con las que se introducen las funciones, lo que lleva al alumnado a requerir ayuda de gráficos para poder definir lo que es una función.
- Dificultades con la interpretación. El alumnado de los diversos estudios muestra dificultades para distinguir entre ecuaciones y funciones como consecuencia de su manejo indistinto en algunas ocasiones. Además, aparece también la dificultad de modelar fenómenos del mundo real a través de funciones adecuadas, que puede deberse a la ausencia en ocasiones de problemas realistas contextualizados donde se traten estos fenómenos.
- Dificultades con la notación. El alumnado puede tener dificultades entendiendo lo que realmente representa una función, en parte por no entender intrínsecamente el objeto, o por dificultades con el rol que toman las variables.
- Dificultades con la representación. En línea con lo anterior, también se identifican dificultades a la hora de trabajar con los distintos sistemas de representación y de realizar transformaciones entre ellos. Además, también existen dificultades entendiendo que los puntos de una representación gráfica son equivalentes a los pares de puntos que constituyen la relación entre variables que es la función, y también entendiendo que $f(x)=y$ en la representación gráfica.
- Dificultades en el manejo. Las dificultades en el manejo pueden estar relacionadas con errores de comprensión sobre las propiedades de las funciones y sobre cómo operar con ellas, pero también con dificultades entendiendo cuándo una expresión algebraica es también una función.

Respecto a la representación, Tall y Razali (1993) ponen de manifiesto que, cuantas menos formas de interpretación respecto a un objeto matemático tengan los estudiantes, es más sencillo que lo asocien únicamente a lo que ya conocen, generando dificultad en el manejo de los otros ya que serán procesos diferentes. Por ello es importante hacer notar que un mismo objeto puede expresarse de distintas formas y/o representaciones.

Finalmente, es también interesante lo que se manifiesta Eisenberg (1991) en relación a las dificultades que el alumnado muestra al manejar funciones, producto de una mala comprensión de lo que representan las variables que en ellas aparecen. El alumnado, en ocasiones, es incapaz de entender lo que es un parámetro dentro de un modelo funcional, y lo que es la o las variables. Esto lleva a que, según este trabajo, cuando se presenta a los estudiantes un problema con una función dada, y luego, el mismo problema con la misma función, pero con nombres diferentes para las variables, cerca de un tercio del alumnado es incapaz de aplicar la resolución previa, y lo trata como otro problema. El mal entendimiento de las variables puede suponer un obstáculo didáctico que aparezca nuevamente en el estudio de las funciones, y que dificulte enormemente la comprensión de éstas.

En función de la prevalencia y aparición de estas dificultades se deben modificar parte de las explicaciones para tratar de ayudar al alumnado en la comprensión de los conceptos clave, y para evitar crear obstáculos que luego aparezcan cuando se estudien conceptos más complejos como pueden ser las derivadas.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

C.1 Conocimientos previos del/la estudiante.

Para poder aprender de forma significativa sobre funciones, el alumnado necesitará manejar con cierta soltura los conceptos relacionados con el bloque de funciones de tercero de la ESO, y también ciertos conceptos de la geometría euclídea. Aquellos que son imprescindibles se estudian en cursos previos y se repasan en el mismo curso de 4ª de la ESO, tanto en el bloque de geometría como en el propio bloque de funciones. Estos son: coordenadas cartesianas, intervalos, variables, el concepto de función, sistemas de representación de una función, pendiente de una recta y la expresión analítica asociada a una recta, recta secante, funciones lineales y funciones cuadráticas. También es fundamental que el alumnado maneje con soltura las expresiones algebraicas típicas de las funciones en este nivel, como polinomios, potencias, logaritmos, ya que constituirán la base para la construcción de las funciones del mismo nombre.

Además, resultan útiles para el estudio de este objeto matemático otras competencias matemáticas tales como la modelización de situaciones reales, la interpretación de nociones matemáticas en su contexto o la estrategia de resolución de problemas. Todas ellas se pueden englobar en el bloque 1 del currículo (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas) que se estudia en varios cursos de ESO, y que, aunque no se trabaje directamente, subyace al resto de contenidos del currículo. Todos estos contenidos se trabajan, en mayor o menor grado, en los cursos previos de la ESO, como se desarrolla en la siguiente subsección.

C.2 El currículo.

Para conocer el conocimiento que ha trabajado previamente el alumnado, haya sido o no adquirido, debemos consultar el currículo educativo de los cursos previos. Este TFM se desarrolla bajo las directrices establecidas por la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), las cuales se concretan en las órdenes de las distintas Comunidades Autónomas.

Al analizar el currículo LOMCE de secundaria, según el Real Decreto 1105/2014 a nivel estatal que se concreta en la Orden ECD/489/2016 para la Comunidad Autónoma de Aragón, lo que vemos es que el bloque de funciones no se puede entender como un bloque aislado, sino que se construye desde 1º de la ESO hasta 4º de la ESO, teniendo distintos contenidos que se trabajan a lo largo de varios años, cada vez con mayor profundidad y complejidad, y que al llegar a 4º, el alumnado ha tenido contacto, al menos una vez, con muchos de los contenidos.

En 1º de la ESO el bloque de funciones incluye contenidos relacionados con el concepto de variable, la representación en ejes de coordenadas, el concepto de función y sus representaciones y las funciones de proporcionalidad directa. Todos estos contenidos se materializan en 4 criterios de evaluación (Crit.MA.4.1. - Crit.MA.4.4. de dicho bloque) que concretan que el alumnado debe ser capaz de manejar, estos contenidos con soltura, siendo capaz de analizar e identificar relaciones funcionales de proporcionalidad directa que puedan darse en el mundo real.

En 2º de la ESO el contenido es una ampliación del de 1º, pero con un grado de complejidad añadido. Se suman a los contenidos el uso de calculadoras gráficas como GeoGebra y el análisis de funciones en base a su monotonía (crecimiento y decrecimiento), la continuidad, los cortes con los ejes y el estudio de máximos y mínimos relativos. Además, a las funciones de proporcionalidad directa se les suman las lineales.

En 3º de la ESO, en la asignatura de Matemáticas, hay un salto con respecto al curso previo, ya que se introducen por primera vez las funciones cuadráticas. Esto abre la puerta a una mayor variedad de problemas y a analizar y modelar situaciones reales mucho más complejas. También se trabaja explícitamente la interpretación funciones, tanto descontextualizadas como de fenómenos reales, y la modelización de situaciones reales mediante funciones.

Finalmente, como he mencionado en el apartado previo, en todos los cursos desde 1º ESO hasta 4º ESO se trabaja transversalmente el Bloque 1 del currículo, que versa sobre procesos y actitudes en matemáticas. Muchos de los procesos y razonamientos que se deben aplicar en el estudio de las funciones están directamente relacionados con los contenidos de este bloque. Si ponemos especial atención en el contenido del bloque para la asignatura de Matemáticas de 3º de la ESO, por ser la inmediatamente anterior a la de este TFM, vemos que todos los contenidos son necesarios para lograr una buena comprensión de las matemáticas.

Así, se mencionan específicamente, mediante criterios de evaluación, el desarrollo de buenas actitudes y habilidades del quehacer matemático. De manera específica, el **Crit.MAAC.1.2.** habla sobre el uso de procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas. El **Crit.MAAC.1.3.** versa sobre describir y analizar situaciones de cambio, el criterio **Crit.MAAC.1.6.** menciona la matematización de la realidad, y el **Crit.MAAC.1.7.** habla de modelización matemática de la realidad y para resolver problemas. Finalmente, los **Crit.MAAC.1.11.** y **Crit.MAAC.1.12.** tratan sobre el uso de herramientas adecuadas y de las TICs en relación a las matemáticas. Todos los anteriores, si bien se deben trabajar de forma transversal en todos los bloques, son especialmente relevantes para el estudio de las funciones dada su potencia para modelar fenómenos reales y dada la facilidad que tenemos para su estudio con software como GeoGebra.

Cabe mencionar que el estudio de las funciones no es competencia exclusiva de las asignaturas de matemáticas, y que son la base de la modelización de la mayoría de fenómenos estudiados en las asignaturas de física y química que se trabajan también en la ESO. En ellas, si bien son contenido transversal, el alumnado deberá manejar, representar, e interpretar funciones, lo que contribuye a su comprensión.

Por tanto, para afrontar el aprendizaje de funciones de Matemáticas B de 4º de la ESO, y según el currículo, el alumnado debe haber trabajado (e integrado) nociones básicas sobre: números reales, ecuaciones de primer y segundo grado, geometría elemental en el plano, proporcionalidad directa e inversa, y funciones lineales y cuadráticas. En base al estudio de las funciones en cursos previos, también debería conocer la idea de función, manejar la representación de funciones sencillas en ejes de coordenadas y leer e interpretar relaciones funcionales sencillas en varias de sus formas.

C.3 Prueba de evaluación inicial.

Para comenzar la secuencia didáctica se realizará una sesión consistente en una pequeña prueba inicial junto a su posterior corrección, dentro de la misma sesión. Mediante este instrumento, que puede encontrarse en el Anexo I de este documento, se evalúa el punto de partida del alumnado respecto al conocimiento necesario para poder trabajar la secuencia propuesta.

La prueba inicial está separada en dos partes, una primera que simplemente pregunta al alumnado de forma global sobre las funciones, para ver qué son capaces de recordar que les haya gustado, y que les propone inventarse un problema que se resuelva usando una función. La segunda parte propone 3 ejercicios cortos para que traten de resolver con los conocimientos que deberían haber adquirido en su camino hasta 4º.

La idea de aplicación de esta prueba es, presentar el tema que vamos a trabajar, y proponer este ejercicio con una duración de media hora, para poder utilizar los 20 minutos restantes de sesión para comentar las soluciones brevemente y que el alumnado pueda recordar qué tipo de contenido se va a trabajar.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

La razón de ser para las funciones que voy a tener en cuenta en la secuencia didáctica, y a lo largo de este trabajo es la modelización de relaciones funcionales. Una función es un objeto matemático que surge del propio contexto (Gómez, 2013), y específicamente, es el objeto que representa la relación existente entre dos o más magnitudes variables.

Es en esta línea en la que quiero trabajar, ya que considero que la mayor potencia de las funciones aparece cuando se entienden y se emplean para modelar fenómenos que ocurren en el mundo real. Dichas relaciones funcionales pueden ser muy simples, y aparecer en el día a día, como en el caso del volumen de la música en un reproductor, o muy complejas, y aparecer en contextos del más alto nivel, como la temperatura del agua del océano a lo largo del tiempo. Además, dicha razón de ser se solapa con las razones históricas que dan origen al objeto matemático, puesto que, aunque la noción de función es una idea fundamental en las matemáticas que ha ido evolucionando y perfilándose a lo largo del tiempo, siempre ha tenido relevancia en el contexto de relaciones entre magnitudes. En lo que sigue se dan, de forma breve, unas pinceladas de la evolución histórica de este objeto:

En la antigua Grecia, los matemáticos comenzaron a estudiar la proporción y la relación entre las magnitudes. Euclides escribió sobre proporciones, y Apolonio de Perga escribió sobre las relaciones entre curvas (Boyer & Merzbach, 2011). Aunque el término función es posterior, muchos de sus trabajos involucraban tablas con relaciones funcionales entre cantidades, como los trabajos de Ptolomeo (Katz, 2008).

El término función aparece posteriormente. Durante el siglo XVII, René Descartes, utilizó la palabra "función" en su obra "La Géométrie". Otros matemáticos como Pierre de Fermat, Blaise Pascal y Sir Isaac Newton emplearon relaciones funcionales en sus trabajos, sentando las bases de la matemática moderna, aunque todavía no existía un consenso en la forma de representar estas relaciones (Kleiner, 1989). Por ejemplo, Newton empleaba tanto funciones matemáticas en sus trabajos relacionados con el cálculo diferencial, como en contextos de la física, siendo una de las más conocidas la Ley de Gravitación universal, que no deja de ser una relación funcional entre la fuerza gravitatoria que siente un cuerpo con masa por acción de otro cuerpo con masa, en función de la distancia que los separa.

Aunque ya se habían realizado grandes avances, fue, no obstanteen el siglo XIX, cuando se desarrolló una teoría más rigurosa de las funciones. Durante este período, se estudiaron en profundidad las funciones algebraicas, y se introdujeron las representaciones gráficas. Algunos de los matemáticos notables de este siglo que contribuyeron a generar un corpus de conocimiento robusto a este respecto incluyen a Gauss, Cauchy, Riemann, o Dirichlet (Kleiner, 1989). Finalmente, en el siglo XX, con el imparable auge tecnológico y científico que supusieron las dos guerras mundiales y el periodo de la guerra fría, las funciones se volvieron omnipresentes. El desarrollo de la computación como una herramienta fiable y cada vez más potente se asentó, desde su origen, en la lógica de bits, que no deja de ser una aplicación de funciones lógicas, que proporcionan una salida en función de las variables de entrada. El auge de la tecnología del silicio y el avance de la física y la química ha dado lugar a que las funciones existan como elemento primordial en el siglo XXI en la forma en la que interpretamos la ciencia, y ha sido tan relevante, que hasta en los lenguajes de programación se ha heredado el nombre de funciones para representar objetos, aunque este es un concepto mucho mas amplio.

Es importante destacar que las funciones son una herramienta matemática de gran utilidad, pues describen cómo una cantidad (la variable dependiente) cambia en función de otra cantidad (la variable independiente). Por ejemplo, las funciones pueden utilizarse para modelar la velocidad de un objeto, la temperatura de un horno en función del tiempo, el coste de producción de una empresa en función de la cantidad de producto producida, y un largo etcétera. Como este tipo de relaciones aparecen de forma natural en el mundo real, desde problemas la física y la economía hasta la biología y la psicología, es sencillo entender por qué ha habido tanto interés en los últimos siglos, y particularmente en el siglo XX, en ellas.

De forma resumida, el mayor desarrollo del concepto de función se concentra en 3 siglos, el XVII, XVIII y XIX (Sastre y otros, 2008), seguido de un gran auge tecnológico que ha expandido incluso el concepto. A nivel matemático, no obstante, el mayor interés ha estado siempre enfocado en tener una herramienta capaz de relacionar las variaciones de dos o mas cantidades dependientes, yendo desde la Grecia clásica con relaciones puntuales entre cantidades concretas, a tener una teoría de las funciones donde se pueden relacionar variables de forma abstracta.

Dada esta potencia, y versatilidad, el aprendizaje de las funciones es de gran relevancia en el aprendizaje de las matemáticas, ya que, mediante éstas, se pueden analizar y comprender mejor fenómenos del mundo real, fenómenos causales, y no sólo problemas abstractos. Además, es un conocimiento muy relevante para todos los perfiles de alumnado, pues entender y saber manejar relaciones funcionales puede ser útil en la toma de decisiones en muchos campos, desde la planificación empresarial hasta la gestión de recursos naturales. No obstante, si atendemos al desarrollo histórico del concepto, hicieron falta varios siglos para asentar un corpus de conocimiento robusto respecto a lo que es, y a cómo se trabaja, con una función, por lo que podemos esperar la aparición de dificultades en el proceso de aprendizaje por parte del alumnado.

D.1. Problemas que se constituyen en razones de ser de las funciones

Los dos problemas siguientes se introducirán siempre después de haber trabajado el problema guiado al inicio de sus respectivos campos de problemas (Cp1 y Cp3), de forma que ya se hayan introducido las técnicas necesarias (ver sección E.3). Se han elegido porque, aunque todos los problemas de esta secuencia están relacionados con la razón de ser histórica de las funciones, estos muestran aplicaciones reales que existen y se pueden analizar mediante funciones sencillas, siendo abordables para el alumnado. En lo que sigue se presentan los problemas 2 y 5 de la propuesta.

Problema 2-El pantano. En 1902, el Plan General de Canales de Riego supuso el germen de la construcción de algunos pantanos en España. Fruto de este plan, en 1932, se inauguró el Embalse de Jándula, en la sierra de Andújar. Durante los siguientes años se quería medir el rendimiento del pantano, entendido como el agua que almacenaba en distintos momentos del año. Si fueses el responsable de realizar estas medidas…

a) ¿Cuáles dirías que son las variables de interés? ¿Puedes pensar en una función que capture la evolución que se quiere medir?

b) ¿Qué representación crees que sería mejor emplean?

La siguiente tabla de valores representa el volumen de agua del pantano medido 5 veces al año.

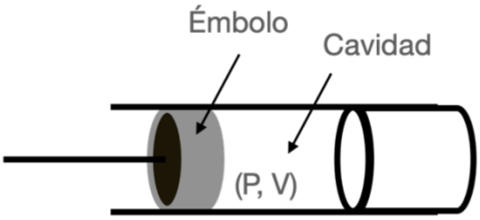
	Enero	Abril	Julio	Septiembre	Diciembre
Volumen de agua (hm^3) 1932	251	318	223	247	261
Volumen de agua (hm^3) 1933	261	345	279	254	256
Volumen de agua (hm^3) 1934	256	305	193	236	241

A la vista de la tabla:

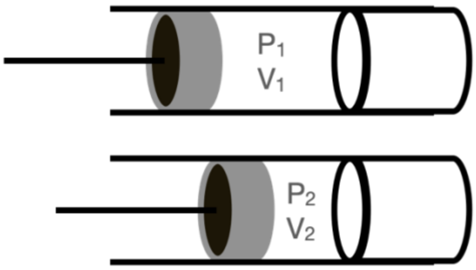
c) Representa aproximadamente la función volumen de agua en el tiempo. ¿Qué puedes decir de su comportamiento anual? ¿reconoces algún patrón?

d) ¿En qué periodo temporal tiene sentido considerar esta función? ¿Y cuáles son los valores más grandes y pequeños que crees que se pueden llegar a medir? ¿Habría algún factor externo que los limite?

Problema 5-Funciones en la ciencia y la tecnología. Un motor de combustión de un coche funciona con un sistema de cilindros y émbolos como el de la figura de la derecha. Lo componen una cavidad cilíndrica en la que hay aire, con una determinada presión y temperatura, ocupando el volumen de la cavidad. Si movemos el émbolo hacia la derecha, el volumen disminuirá, pero la presión aumentará, y viceversa. En la segunda figura de la derecha se puede ver lo que ocurre al mover el émbolo, en la que $V_2 < V_1$, pero la presión del aire en el interior de la cavidad será mayor en el segundo caso.



Este fenómeno es conocido como Ley de Boyle-Mariotte, que se formula como $p \cdot V = constante$, a temperatura constante. Si sabemos la presión y el volumen en un estado, cuando cambie la posición del émbolo, podremos calcular la nueva presión, pues el aumento o disminución de volumen nos lo da la altura de la cavidad cilíndrica.



a) ¿Cuáles dirías que son las variables de interés en este problema? ¿Cuál es independiente, y cuál dependiente? ¿Por qué?

b) Formula la función Presión en función del volumen de aire alojado en el cilindro. Ayuda: en dos situaciones diferentes se tiene que cumplir $P_1V_1 = P_2V_2$.

c) Si sabemos que antes de mover el émbolo, la presión era de 10 pa, y el volumen era el de un cilindro de base circular de radio 8cm, y altura 50cm, calcula la presión para situaciones en las que el émbolo se mueve de 5cm en 5cm, hacia la derecha, es decir, reduciendo el volumen. Represéntalo en unos ejes coordenados con la ayuda de una tabla, y explica el comportamiento de la función presión-volumen.

d) ¿Cuál es el dominio matemático de la función? ¿Hay alguna condición externa que limite el dominio?

Respecto a la metodología, a lo largo de la secuencia se va a combinar la enseñanza a través de la resolución de problemas con la enseñanza para la resolución de problemas, desarrollado en mayor grado en el apartado correspondiente de la sección E.

E. Sobre el campo de problemas

E.1. Problemas para desarrollar en la secuencia.

En esta sección presento los diferentes problemas que se van a trabajar en la secuencia didáctica, a los que habría que añadir los dos problemas incluidos en la sección anterior (D.1). Los diferentes campos de problemas que se han identificado se introducirán a partir de problemas más o menos guiados (1, 3, 6, 9, 12-14), que servirán de primera toma de contacto con los conceptos relevantes para el alumnado, así como una primera aproximación a las técnicas que se requieren.

Además de los guiados, también se han diseñado algunos otros problemas para asimilary afianzar estos conceptos con idea de que el alumnado los trabaje en tiempo de clase. Los problemas son originales en su mayoría, y en aquellos que no lo son completamente, se indica el origen del que están adaptados. Ningún problema ha sido tomado directamente de otra fuente. En lo que sigue se presentan los diferentes problemas.

Problema 1-La campaña de vacunación.

Parte 1-En la ciudad de Huesca se ha decidido promover una campaña de vacunación para una cepa de la gripe particularmente virulenta. La acogida entre la población está siendo bastante buena, y se consigue vacunar a casi toda la población de la ciudad en menos de 3 meses. Al cabo de un tiempo, en el ayuntamiento están interesados en recoger datos para conocer cómo se ha ido vacunando la gente conforme pasaba el tiempo, y si han logrado el objetivo que se propusieron. Te encargan a ti esta tarea.

a) ¿Qué herramienta necesitas para estudiar este comportamiento?

b) ¿Cuál es la información de interés que crees que necesita el ayuntamiento?

c) Dibuja en unos ejes de coordenadas la evolución del número de las personas vacunadas en la ciudad. Para ello, propón una gráfica (inventada) que creas que pueda representar la situación y explícala brevemente.

Parte 2-Recogiendo algunos datos parciales sobre la asistencia a los centros de salud para vacunarse, se recuperan la siguiente tabla:

Tiempo (días)	20	40	80	160
Número de personas vacunadas	17521	28101	38963	43528

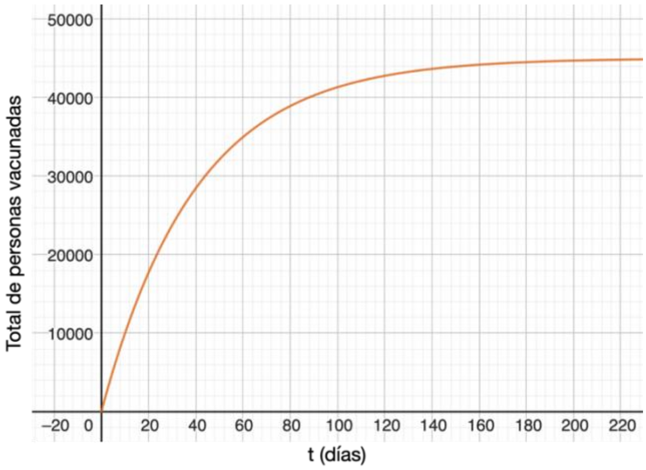
Viendo la tabla:

d) Dibuja de forma aproximada la evolución del número de vacunados en el tiempo.

e) ¿Puedes describir cómo se comporta el aumento al avanzar la campaña?

Parte 3-Después de recoger todos los datos, el ayuntamiento ha podido analizarlos, y los ha representado obteniendo la función de la gráfica:

f) Analiza el comportamiento de la función. ¿Hay algo curioso? ¿Hasta dónde crees que tiene que llegar esta función? ¿Es diferente a la que habías propuesto?



g) ¿Crees que la gente se ha ido vacunando al mismo ritmo durante todo el tiempo? Piensa en una forma de medir aproximadamente si en algún intervalo de tiempo la vacunación era mayor, es decir, crecía más rápido que en otros momentos.

Problema 3-La inmersión del submarino. Un submarino de investigación desciende a una zona profunda del océano conforme se desplaza, y luego emerge tras completar la exploración. La profundidad a la que se encuentra en función de la distancia a la que se aleja del origen de la inmersión viene dado por la función:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x$$

Donde x representa la distancia al origen de la inmersión en kilómetros. Queremos calcular la distancia a la que emerge el submarino del origen.

a) Representa la función empleando GeoGebra, o, en su defecto, en unos ejes de coordenadas. ¿En qué intervalo de x la función $f(x)$ tiene sentido para representar lo que se pide?

b) Viendo la representación ¿a qué distancia emerge el submarino del origen? ¿Puedes calcular este valor exactamente?

c) Con la información anterior ¿qué puedes decir del dominio de la función en este caso?

Problema 4-La escala de Richter. La escala sismológica de Richter es una escala logarítmica que cuantifica la energía que libera un terremoto, denominada así en honor a Charles Francis Richter. Se usa una función logarítmica para asignar a la energía liberada un número en función de la amplitud de la onda sísmica que provoca el seísmo, y se calcula como $R = \log(\frac{A}{A_0})$, siendo A_0 la amplitud de la onda mínima que se puede detectar con nuestra tecnología actual, que es siempre una constante.

a) Identifica las variables que intervienen en la función.

b) Usa una tabla de valores para dibujar en unos ejes de coordenadas la función R, empleando la calculadora. Para ello, A debe tomar valores respecto a A_0, como por ejemplo $A = 50A_0$, es decir, una onda sísmica con amplitud 50 veces mayor que la mínima detectable. ¿Cómo se comporta la escala? Explora en internet para ver cuál ha sido el mayor terremoto de la historia en esta escala.

c) ¿Cuál es el dominio de la función de la escala de Richter? ¿Hay algún factor externo que limite el dominio más que las matemáticas? ¿Puedes decir algo del recorrido?

Problema 6-La discusión en internet. [Propuesto a raíz de la discusión real que ocurrió en Twitter, pero original] En una cierta red social, hace unos meses, una serie de profesores discutieron sobre la continuidad de la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Teniendo la fórmula:

a) Dibuja la función $f(x)$ en unos ejes de coordenadas empleando una tabla de valores, o ayudándote del software GeoGebra.

b) Viendo la gráfica ¿crees que la función es continua?

La mayoría de los profesores de matemáticas decían que la función $f(x)$ sí que era continua. Esto es así porque, para que una función sea discontinua en un punto, dicho punto tiene que pertenecer al dominio.

c) ¿Pertenece el punto $x = 0$ al dominio de la función $f(x)$? ¿Qué ocurre en $f(0)$?

d) Si modificamos la función, y ahora imponemos que $G(x) = \begin{cases} 0 \ si\ x = 0 \\ \frac{1}{x} \ \ si\ x \neq 0 \end{cases}$, es decir, que la función es la misma que antes en toda la recta real, pero justo en $x = 0$ obligamos a que valga 0, tenemos una nueva función parecida a la anterior. ¿Sería ahora $G(x)$ continua? ¿Si fuese discontinua, de qué tipo sería la discontinuidad?

En la web: https://www.gaussianos.com/la-funcion-fx1-x-y-una-discusion-continua/ puedes encontrar mucha información para profundizar sobre continuidad de funciones.

Problema 7-La eficiencia de la nave. En una nave espacial hay un motor que puede producir hasta 12 megavatios de potencia. En condiciones óptimas, se requiere el gasto de 6 de éstos para operar los sistemas principales (propulsores, purificación de aire, etc). Llamemos D a la demanda energética de la nave, de forma que puede haber hasta $D = 12$ de demanda cuando se activan sistemas auxiliares, o hasta $D = 0$ cuando se apagan todos los sistemas principales. La función con la que el ordenador de la nave calcula la eficiencia de funcionamiento es:

$$E(D) = \frac{10}{(D-6)^2} - 1$$

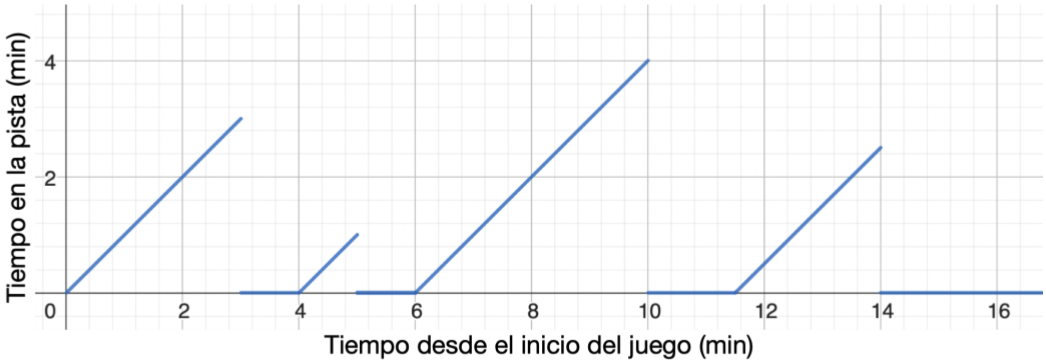
Tanto si hay más o menos demanda, la eficiencia baja, puesto que o se activan sistemas de más, o hay que desconectar sistemas principales, lo que reduce la capacidad general de la nave. Sabiendo lo anterior:

a) Dibuja la función de eficiencia empleando Geogebra, o, en su defecto, en unos ejes de coordenadas empleando una tabla de valores. ¿Qué observas? ¿Puedes decir algo de la continuidad de la función?

b) Para $D = 6$, la eficiencia diverge, y no se puede obtener un valor numérico, pero se ha estimado que vale 30 puntos. Añadiendo esta información ¿Qué puedes decir ahora de la continuidad?

c) En cualquier situación, si la eficiencia baja de valor 0, la nave funcionará muy mal y sería mejor parar en algún planeta amistoso para ver qué ocurre. Investigando la función, ¿cuáles son los valores de D para los que la eficiencia es nula? ¿Cuál es el intervalo de D en el que la nave puede funcionar aceptablemente? ¿Cómo se comporta la función de eficiencia en ese intervalo?

Problema 8-El juego de relevos. En una clase de educación física se juega un pilla-pilla por equipos con relevos. Esto es, cuando alguien está muy cansado puede pedir el relevo a otro jugador o jugadora de su equipo que está en el banquillo, y podrá salir a la pista cuando otra persona de su equipo que esté en el campo pida el relevo. Para una jugadora en particular, la profesora de educación física mide el rendimiento basado en el tiempo que está en el campo hasta que la pillan, midiendo el tiempo que está en la pista en cada salida, y obtiene una gráfica como la siguiente:



Viendo la gráfica, responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) ¿La función que mide el tiempo en pista es una función continua? ¿Tiene sentido que lo sea?

b) Describe el comportamiento de la jugadora sabiendo que en el minuto 14 ha sido eliminada porque le han pillado. Para ello, analiza los intervalos de crecimiento de la función

c) ¿Crees que esta es la mejor forma de presentar esta información? Justifica tu respuesta y plantea una función alternativa que permita recuperar la misma información.

Problema 9-El Saltador de esquí. En una competición de salto de esquí, se mide la altura del esquiador al suelo en todo momento. Analizando los datos, se dan cuenta de que la función que representa esta altura en el tiempo, en un salto en concreto, es la siguiente:

$$A(t) = -\frac{1}{10}t^3 + \frac{8}{5}t^2 - \frac{15}{2}t + 15$$

Siendo t el tiempo en segundos desde que se inicia el salto. Sabiendo lo anterior, responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Dibuja empleando GeoGebra, o en su defecto, una tabla de valores, la función anterior. ¿En qué intervalo de t tiene sentido que la función represente lo que dice el enunciado?

b) A partir de la gráfica anterior, analiza el dominio de la función ¿Hay algún factor externo que lo limite? ¿Por qué?

c) Dentro del dominio, se quiere estudiar cómo ha ido variando la altura durante el salto. Describe el comportamiento que observas con palabras. ¿Tiene sentido que la función sea creciente en algún intervalo?

d) ¿Se te ocurre alguna forma matemática de representar claramente los cambios de comportamiento de la función que has observado? Trata de matematizarlo empleando alguna herramienta de las que hemos visto.

e) ¿Qué puedes decir de la altura máxima y mínima que alcanza el esquiador? Considera todo el dominio. Si ahora solo consideras el intervalo en el que está estrictamente en el aire, se modifica algo la respuesta anterior?

Problema 10-La efectividad del sistema inmune. Al cabo de la vida, la efectividad del sistema inmune del cuerpo humano para controlar una infección por un virus o bacteria cambia, no siendo siempre la misma. En la gráfica adjunta puedes encontrar representada una función que podría modelar la respuesta del sistema inmune según la edad, midiendo la probabilidad de que el sistema inmune controle la infección cuando sufre un ataque bacteriano o viral.

A la vista de la gráfica:

a) Analiza el comportamiento de la función. ¿Hay algo que te resulte sorprendente? Describe con palabras este comportamiento y estudia el dominio y el recorrido.

b) ¿Hay algún extremo en esta función? ¿Dónde se encuentra? ¿Qué ocurre con el comportamiento de la función antes y después de él?

c) Calcula la TVM en la primera década y en el periodo comprendido entre la primera y la novena década. Para ellos utiliza valores aproximados de la gráfica.

Problema 11-La temperatura nocturna. [Problema inspirado de otro de una colección de ejercicios de Anaya] Un termómetro marca la temperatura por la noche, medida en grados centígrados. En una noche de enero, el termómetro registra que la temperatura varió de acuerdo con la función $T(t) = 0.25t^2 - 2t + 3$, donde t indica el tiempo que ha pasado entre las 0:00 y las 10:00 horas. Ahora, responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) Empleando una tabla de valores, dibuja la función $T(t)$ y describe el comportamiento de la función con un enunciado.

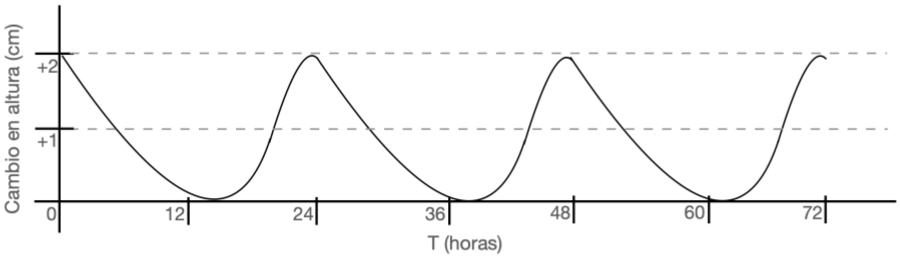
b) Viendo la función, y sabiendo que es una parábola, calcula el mínimo de temperatura que se alcanza durante la noche. (Ayuda: necesitas calcular el vértice de la parábola). ¿Cuál fue la temperatura máxima en ese intervalo horario? ¿En qué horas se han alcanzado los 0ºC?

c) ¿Durante qué horas descendió la temperatura? ¿En qué intervalo aumentó? Justifícalo empleando la TVM.

d) Tiene sentido que la función $T(t)$ modele la variación de temperatura durante la noche, pero, si ampliamos el dominio de la función fuera del rango horario propuesto ¿sigue teniendo sentido usar esta fórmula? Responde razonadamente. Puedes investigar en la web cómo es el ciclo de temperatura diario y compararlo con la función.

Problema 12-Las gráficas de las noticias del periodico.

Parte1-En una sección del periódico destinada a curiosidades encuentras una entrevista que se realizó a un medico especialista en el cuerpo humano sobre curiosidades del día a día. En la entrevista, el médico cuenta que la altura del un humano cambia a lo largo del día. Por la mañana, cuando nos levantamos, como hemos dormido en horizontal, la gravedad no ha estado comprimiendo nuestra columna vertebral, lo que hace que seamos hasta 2 centímetros más altos. Después, a lo largo del día, y ahora estando mayoritariamente en posición vertical, la gravedad va comprimiendo la columna, con lo que se recupera nuestra altura normal. Si capturamos este comportamiento en una gráfica, habiendo empezado a medir nada más levantarnos, obtenemos lo siguiente:

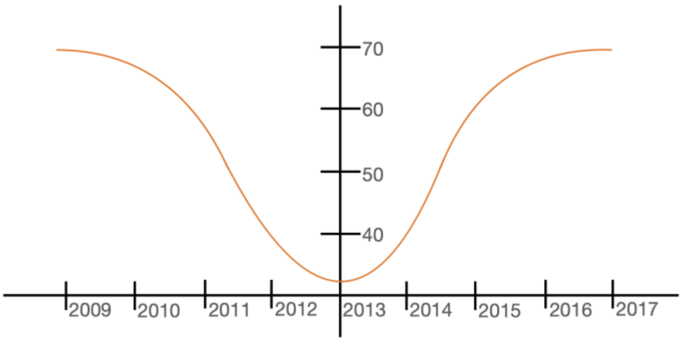


a) ¿Hay algo que te resulte curioso del comportamiento de la función cambio en altura a lo largo del tiempo? Describe cómo se comporta esta función.

b) Busca información sobre funciones que se comporten así. ¿Qué tipo de función has encontrado? ¿Cada cuánto se repite?

c) Estudia ahora el crecimiento y los extremos de la función representado. ¿Puedes relacionarlo con el periodo, es decir, con el valor que dicta cada cuánto se repite?

Parte 2-En la sección de economía del periódico normalmente se incluyen muchas gráficas diferentes, pero mientras leías, una en concreto te llama la atención. Se trata de una gráfica que muestra el precio medio en euros de las acciones de una compañía de telefonía desde el año 2009 al año 2017:

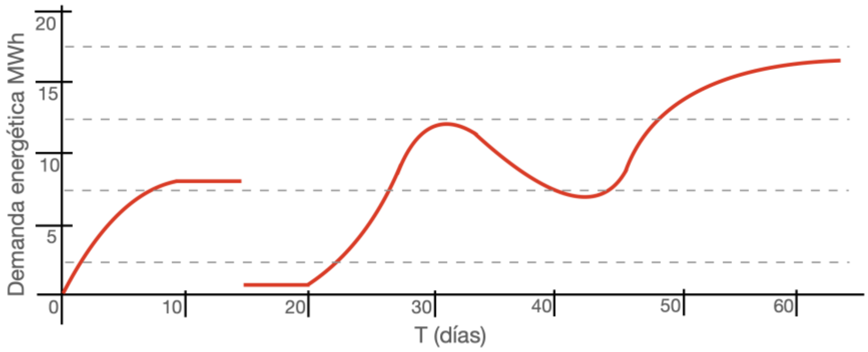


Viendo la gráfica, puedes descubrir información y patrones interesantes.

d) ¿Hay algo que te llame la atención de cómo se comporta el precio medio de las acciones? Describe el, o los comportamientos que más te llamen la atención. ¿Qué ocurre si extrapolamos la gráfica hacia el pasado, o hacia el futuro? ¿Hay años en los que las acciones valían lo mimso?

e) El precio de las acciones alcanza un mínimo. ¿Podemos estimarlo de la gráfica? ¿Qué nos dice esto sobre el comportamiento de la función precio?

Problema 13-La fábrica. En un complejo industrial necesitan analizar los datos sobre consumo energético desde la puesta en marcha de una línea de producción de una fábrica. Te encargan a ti y a tu equipo, que formáis parte del departamento de análisis de datos, realizar esta tarea, para lo cual representáis en forma de gráfica todos los datos de los que se disponen sobre la demanda energética de la fábrica, obteniendo:



También sabes que, alrededor del día 15, hubo un fallo por el que hubo que parar la cadena, y que alrededor del día 50 se fijó la producción total que realizaría dicha parte de la fábrica. Con toda la información anterior, realiza un reporte de todo lo que puedes encontrar en la gráfica, así como de cómo ha ido variando la demanda en función del tiempo desde la puesta en marcha. Para esto último, emplea vocabulario matemático y relaciónalo con todo lo que hemos visto en clase sobre análisis de funciones. Al acabar, cada grupo realizará una breve presentación de sus conclusiones al resto de equipos.

Problema 14-El concierto. La conocida cantante Taylor Swift va a dar un concierto en Madrid en el marco de su nueva gira europea. Sus asesores están barajando varios lugares para dar el concierto según su capacidad, lo que a la vez marcará el precio de las entradas. Las opciones son el WiZink Center, con una capacidad de 17.000 espectadores, y un precio por entrada de 150€, Ifema Madrid, con una capacidad de 35000 espectadores, y un precio por entrada de 100€, o el Estadio Santiago Bernabéu con capacidad de 50000 personas y un precio por entrada de 65€. Para decidir, se lanza una campaña de pre-reserva para saber el número de personas que comprarían entradas, que llamaremos N. Si N es menor que la capacidad del WiZink, se usará este espacio, mientras que, si es mayor, se usará Ifema, y si se superase su capacidad, entonces se usaría el estadio. El equipo quiere construir la función $D(N)$, que nos da el dinero estimado que se recaudara por las entradas según el número de interesados en pre-reserva. Sabiendo lo anterior:

a) ¿Se puede usar una función simple o se necesita algo más general?

b) ¿Qué distintos tramos puedes se pueden identificar según el número N de entradas en la pre-reserva? ¿Forman parte todos de la misma función?

Este tipo de funciones se llaman funciones definidas a trozos, y se representan mediante una llave y la definición de la función simple que se usa en cada trozo según el valor de la variable independiente. Ahora:

c) Construye la función $D(n)$ y escríbela en su notación matemática. ¿Qué tipo de funciones simples aparecen en cada trozo?

d) Analiza la función $D(N)$. ¿Es continua? ¿Cómo es su crecimiento? ¿Cuál es su dominio?

e) Construye ahora la función de beneficio neto (ingresos menos gastos) que se obtendrá del concierto sabiendo que alquilar el WiZink cuesta 12000€, Ifema cuesta 23000€ y el estadio cuesta 45000€. Si se venden todas las entradas ¿en qué situación el beneficio es máximo?

Además de los problemas anteriores, se incluye en el Anexo II de este documento un problema más complejo que se encargará al alumnado como pequeño trabajo de investigación, y que deberá realizar durante el desarrollo de la secuencia didáctica, entregándose al final de esta para su corrección. Este problema tiene como objetivo poner en el foco del debate el aumento de las temperaturas que sufre el planeta como consecuencia del cambio climático antropogénico, y surge a raíz de una representación funcional alternativa para la relación entre temperatura y tiempo, que la NASA publicó en sus redes sociales en el año 2023.

E.2. Técnicas asociadas a la resolución de los problemas

La Tabla 2 se incluye a modo de relación entre los problemas descritos en la sección anterior (E.1.) y los diferentes campos de problemas a los que pertenecen, así como su relación con la/s técnicas que se necesita manejar para resolver los problemas. Las técnicas están introducidas en la sección A, y justificadas en la sección G de este documento, y constituyen parte necesaria del aprendizaje del alumno como consecuencia del trabajo y de la resolución de los problemas propuestos en la secuencia.

Campo de problemas	Problema	Técnicas relacionadas
Cp1, Cp2	1	T1, T2
	2	T1, T2
Cp3	3	T3
	4	T3, T4
	5	T3
Cp4	6	T5
	7	T4, T5, T6
	8	T5
Cp5	9	T3, T4, T6, T7
	10	T6, T7, T8
	11	T4, T6, T7, T8
Cp6	12	T6, T7, T9, T10, T11

Cp7	13	T3, T5, T6, T7, T8, T10
Cp8	14	T5, T7, T12

Tabla 2: Relación entre problemas, campos de problemas y técnicas necesarias para su resolución. En cada campo de problemas se ha tratado de plantear un problema guiado que sirva de iniciación.

Cabe destacar, respecto a la Tabla 2, que los campos de problemas 1 y 2 no se trabajan por separado, sino como uno solo, puesto que de esta manera será más fácil entender los conceptos básicos. Además, aunque solo aparezcan explícitamente en los problemas 1 y 2, las técnicas T1 y T2 son necesarias de forma transversal en toda la secuencia, por lo que se ha decidido mostrar solo las técnicas más relevantes en la tabla. Finalmente, el primer problema de cada campo es un problema guiado que sirve de primera toma de contacto con los conceptos o técnicas necesarias.

E.3. Metodología para la implementación en el aula

Para implementar los problemas presentados en el apartado E.1, justo a los incluidos en la sección D.2, se va a optar por un método que combine la enseñanza a través de la resolución de problemas con la enseñanza para la resolución de problemas. Todos los problemas competen al ámbito de las funciones, y tratan de referirse a su utilidad como herramienta de modelado de situaciones reales, y como relación entre variables, atendiendo a su razón de ser histórica.

Respecto al primer enfoque, se emplea principalmente en los problemas guiados que introducen cada campo de problemas (1, 3, 6, 9, 12-14), puesto que están diseñados desde una óptica que prima que sea el alumnado el que, de forma intuitiva, avance hacia los conceptos y técnicas que se requieren para resolver los problemas. La idea es, entonces, que el proceso de aproximación orientado permita llegar a conclusiones que luego serán relacionadas e institucionalizadas por el profesor tras haber trabajado cada problema guiado.

En este sentido, uno de los objetivos claros de la propuesta didáctica es que los alumnos aprendan a identificar relaciones funcionales en cualquiera de sus representaciones, y, a partir de ellas, sean capaces de analizarlas, y de identificar las características más relevantes de éstas. Para ello, siempre después de haber trabajado los problemas guiados, se emplearán los problemas no guiados y los ejercicios de la propuesta (que se presentan en la próxima sección). Esta segunda parte del proceso de aprendizaje está basado en la enseñanza para la resolución de problemas, puesto que, mediante las técnicas que han sido institucionalizadas se tratará de resolver los problemas propuestos. De esta forma, además, se hace uso de problemas y ejercicios para que el alumnado pueda afianzar su dominio de los aspectos relevantes referidos a las funciones.

Finalmente, para su introducción en el aula, en los problemas guiados se tratará de que el alumnado trabaje de forma conjunta, ya sea en parejas, o en grupos de no más de 4 integrantes. Durante este periodo de trabajo, el profesor irá supervisando y anotando Las ideas interesantes que se vayan proponiendo, así como llevando un seguimiento de las dificultades que pueden aparecer, teniendo todo ello en cuanta para la puesta en común posterior. Es en esta puesta en común, en la que el profesor institucionalizará las técnicas, definiciones y conceptos relevantes.

El resto de problemas y ejercicios se trabajarán por parejas o individualmente en el aula, pudiendo dejarse algunos como tarea para casa. Para la corrección, será el alumnado el que la realice en la pizarra, siendo supervisados por el profesor, quien guiará el proceso y seleccionará al alumnado que haya presentado resoluciones más interesantes para comentar, o para poner de manifiesto aspectos clave de las funciones. En este momento, y siempre que se realimente al alumnado, la forma de hacerlo será positiva, poniendo el foco no en los errores sino en las dificultades que los provocan y tratando de mostrar siempre estas correcciones como una parte del proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, una buena implementación de lo anterior tiene como objetivo minimizar las actitudes negativas que el alumnado puede desarrollar hacia las matemáticas.

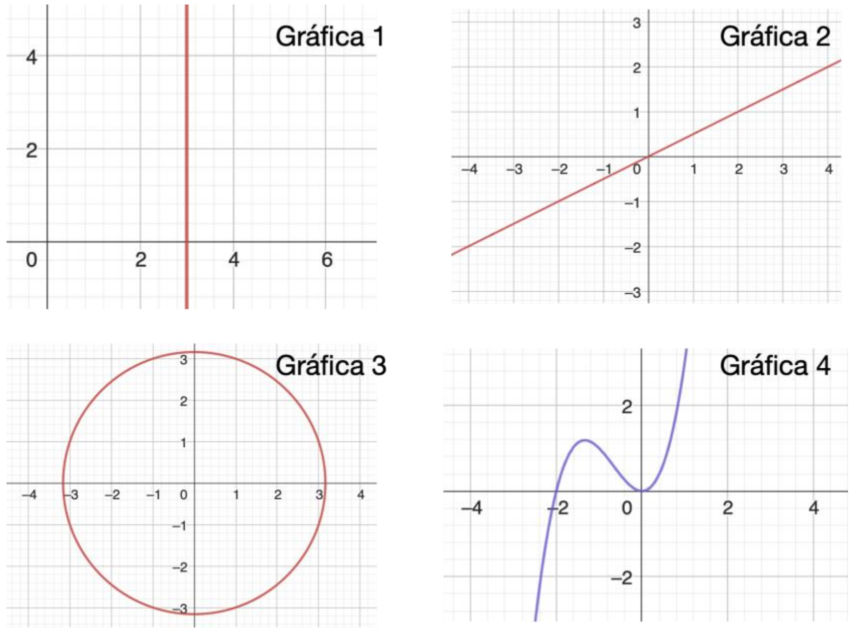
Finalmente, al principio de la secuencia didáctica se propondrá al alumnado la realización de una actividad, incluida en el Anexo II de este documento, que deberá realizar en casa, y cuyas conclusiones serán presentadas al acabar la secuencia, de forma breve, ante el resto de compañeros en una sesión-debate conjunta. Esta actividad está diseñada para servir, no solo como un muy pequeño trabajo de investigación, sino también para fomentar el desarrollo de otras competencias necesarias como la exposición de conocimiento.

F. Sobre las técnicas

F.1. Ejercicios para presentar en el aula

En esta secuencia didáctica se incluyen 10 ejercicios que tienen como objeto ayudar al/la estudiante a trabajar y afianzar diferentes técnicas que se requieren para lograr una comprensión profunda de las funciones, sus representaciones, propiedades y manejo común. En lo que sigue se incluyen los enunciados de los ejercicios propuestos.

Ejercicio 1- Viendo las 4 gráficas siguientes:



a) ¿Cuáles de ellas representan relaciones funcionales? ¿Por qué?

b) De las que sí que son funciones, describe en forma de enunciado su comportamiento.

Ejercicio 2- Calcula el dominio de definición de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = 11x^4 + 6x^3 + x - 2$ $\quad b)\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad c)\ f(x) = \dfrac{-3x+1}{8}$

$d)\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}}$ $\quad e)\ f(x) = \dfrac{3}{x^2+2x}$ $\quad f)\ f(x) = \dfrac{-3x+1}{2x-10}$

$g)\ f(x) = \sqrt[3]{3x-9}$ $\quad h)\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x-9}}$ $\quad i)\ f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

$j)\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2-16}}$ $\quad k)\ f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ $\quad l)\ f(x) = 1 - 7\sqrt{12-4x}$

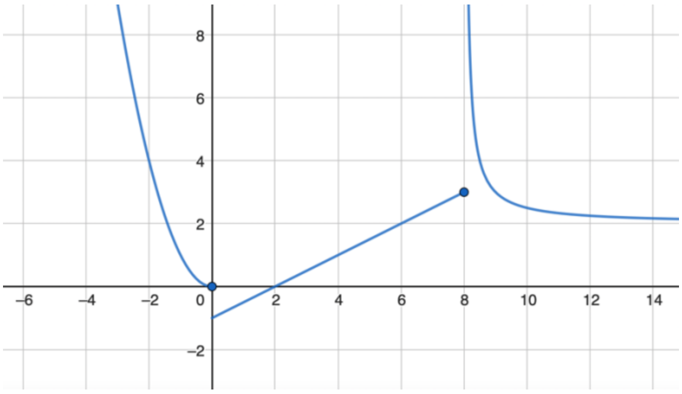
$m)\ f(x) = \dfrac{\ln(x)-2}{\sqrt[3]{3x-9}}$ $\quad n)\ f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+1}{x^2-2x}\right)$ $\quad$ ñ) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$

Ejercicio 3- Un jugador de balonmano realiza un pase largo, cuya trayectoria viene dada por la función $f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + x$. La función mide la altura de la pelota respecto al suelo en función de la distancia al lanzador x. Por desgracia, su compañero no llega a recoger el pase y la pelota cae al suelo. Sabiendo lo anterior:

a) Dibuja la función $f(x)$ y describe el comportamiento de la pelota. ¿A qué distancia del lanzador toca la pelota el suelo?

b) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Tiene sentido calcular $f(-1)$, o $f(12)$ usando esta función?

Ejercicio 4- Dada la siguiente gráfica de una función, responde a las cuestiones.



a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) ¿Qué puedes decir de su continuidad? ¿Qué tipos de discontinuidades aparecen?

Ejercicio 5- En un parking del centro de Tarragona se paga al finalizar el estacionamiento, a razón de 2,5€ por hora estacionada, siendo el precio por bloque horario completo. Es decir, que 2h y media se pagarían al mismo coste que 3h, pues no se pagan fracciones horarias. El máximo tiempo que se puede ocupar una plaza son 2 días. Sabiendo esto:

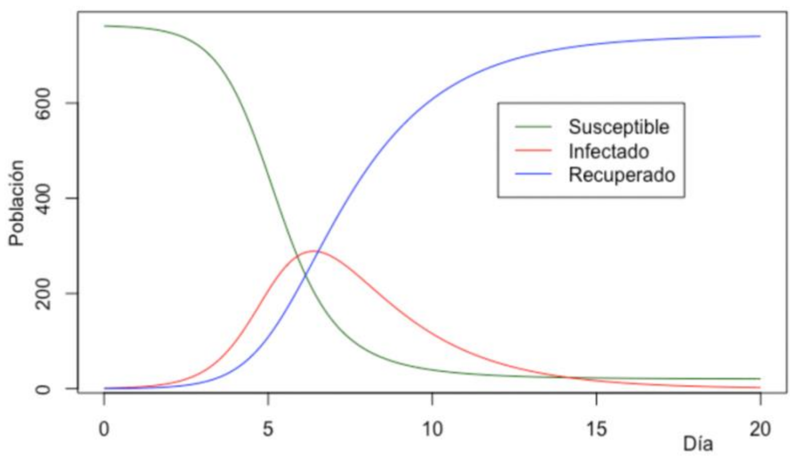
a) Dibuja la función que representa el coste de estacionamiento en el parking.

b) ¿Cuál es el dominio de esta función?

c) Analiza la continuidad de la función coste.

d) ¿Podría ser continua esta función? Diseña una tarifa para la que la función fuese continua.

Ejercicio 6- Tras un brote de gripe en un pueblo se recogen datos sobre la evolución del estado de la gente durante el brote, y se obtiene la gráfica:



Donde la curva verde representa el número de gente sana, la curva roja la gente enferma, y la curva azul la gente que estuvo enferma, pero se ha recuperado, todas en función del día desde el inicio del brote de gripe. A la vista de la gráfica:

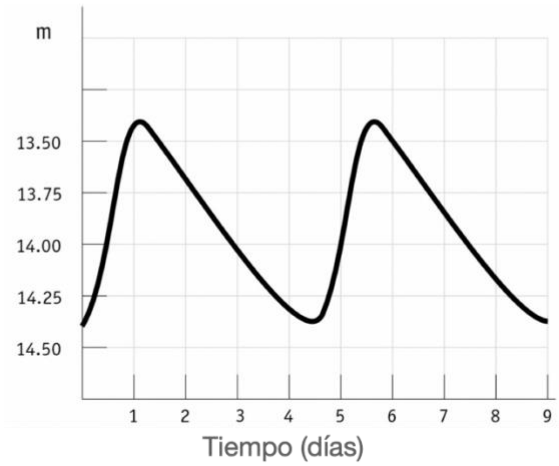
a) Estudia la monotonía de cada una de las curvas que aparecen.

b) Estudia los máximos y mínimos.

c) Aplica la TVM para justificar tu respuesta en los anteriores apartados.

Ejercicio 7- En la naturaleza podemos encontrar comportamientos periódicos en muchas situaciones, aunque pocas veces somos conscientes de ellos. De los siguientes fenómenos ¿cuál no clasificarías como periódico?: i) La emisión diaria del telediario. ii) El movimiento de la luna alrededor de la tierra. iii) El movimiento de un péndulo, como un columpio, o iv) Realizar un viaje por carretera.

Los fenómenos anteriores son casos sencillos, pero la periodicidad también en fenómenos mucho más complejos aparece periodicidad. Por ejemplo, Delta Cephei es la cuarta estrella de magnitud aparente de la constelación Cefeo, siendo esta magnitud una medida que se emplea en astronomía para medir el brillo observamos desde la tierra. Una serie de estas medidas se recogen en la gráfica de la derecha. Viendo la evolución de la magnitud aparente de Delta Cephei:

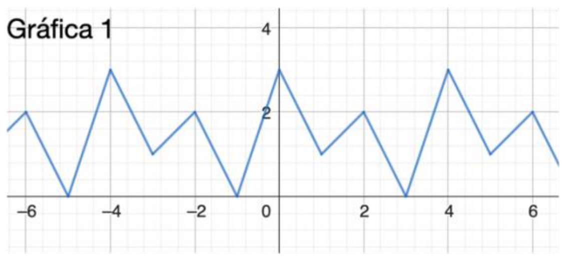


¿Dirías que hay periodicidad? ¿Por qué? ¿Cuál es el periodo (aproximado)? Busca información sobre el periodo real y compáralo con tu estimación.

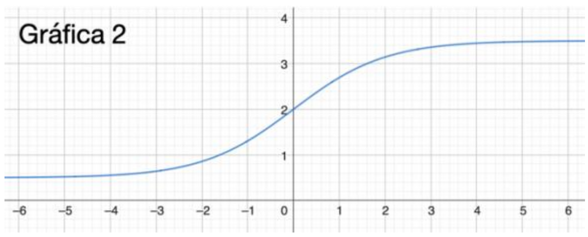
Ejercicio 8- Dadas las gráficas 1 y 2 que representan funciones, responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su imagen?

b) Describe el comportamiento de las dos funciones empleando el vocabulario que hemos estudiado. Estudia su crecimiento y los máximos y mínimos.

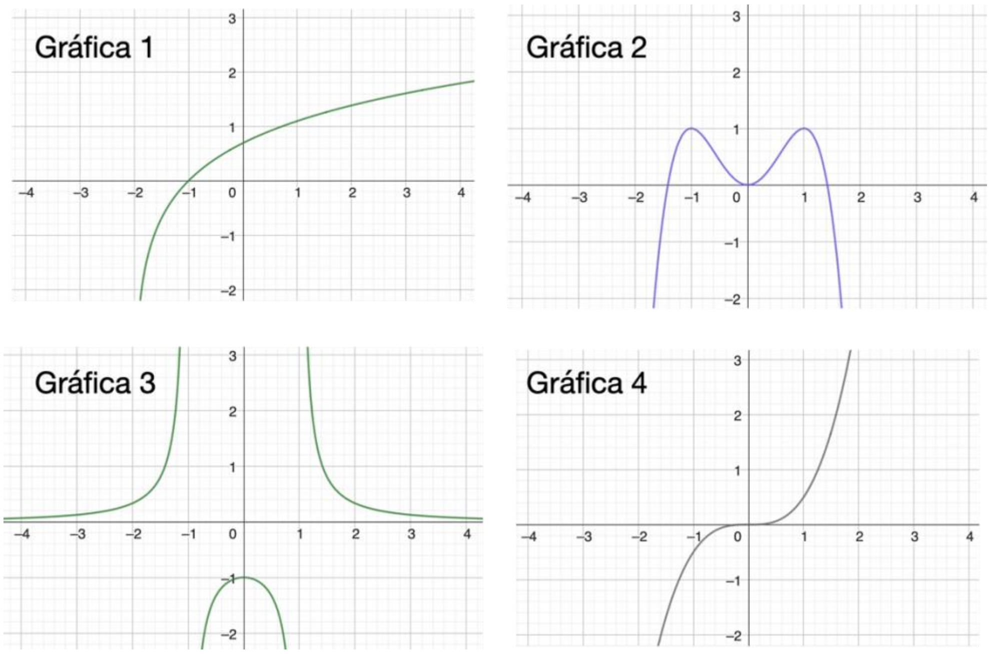


c) Calcula la Tasa de Variación Media en el intervalo [-2, 2] para la primera función. ¿Qué puedes decir de la TVM en el caso de la segunda?



d) Inventa un contexto en el que estas funciones pueden estar representando un fenómeno del mundo real.

Ejercicio 9- Dadas las siguientes gráficas de funciones:



a) Estudia en cada caso la simetría de las funciones.

b) Estudia la monotonía de las funciones y los máximos y mínimos si los hubiera.

Ejercicio 10- Salimos en coche desde Zaragoza hasta Sabiñánigo a una velocidad de 100km/h, recorriendo de esta forma los 120km que los separan, y después vamos hasta Formigal a una velocidad de 50km/h porque la carretera es más pequeña y peligrosa, recorriendo 40km. Sabiendo esto:

a) ¿Qué función representa el espacio, o distancia que recorremos, antes de llegar a Sabiñánigo? ¿Y entre Sabiñanigo y Formigal?

b) Si queremos una función que represente la distancia total recorrida en el viaje, incluyendo la información de los dos trozos ¿podemos usar directamente las funciones del apartado a) ? ¿Qué tipo de función necesitamos? Constrúyela y calcula con ella el tiempo total de viaje.

c) La función que has obtenido ¿es continua? ¿tiene sentido que lo sea?

d) Calcula la TVM en [0,1] y en [1.5, 2]. ¿Con qué información que ya sabíamos se relaciona el valor de la TVM en cada intervalo?

F.2. Técnicas asociadas a los ejercicios

Los ejercicios de esta sección están planteados para trabajar sobre al menos una de las técnicas indicadas en la primera sección de este documento, pero generalmente servirán para ejercitar varias de estas. En este apartado se incluye la Tabla 3, en la que se establece la relación precisa entre los ejercicios y las técnicas ejercitadas con ellos, indicando además el campos de problemas mínimo al que hay que llegar antes de poder introducir dicho ejercicio. Esto es así porque, aunque los ejercicios pueden versar sobre contenidos compartidos en los distintos campos de problemas, hay uno de ellos con el que se relacionan más, con el que se introduce dicho ejercicio, y que es el que se encuentra destacado en la tabla.

Ejercicio	Técnicas	Campo de problemas
1	T1, T2	Cp2
2	T3	Cp3
3	T3, T4	Cp3
4	T3, T5	Cp4
5	T3, T5	Cp4
6	T6, T7, T8	Cp5
7	T9	Cp6
8	T6, T7, T8, T9, T10	Cp7
9	T6, T7, T11	Cp7
10	T5, T8, T12	Cp8

Tabla 3: Relación de Técnicas trabajadas con los distintos ejercicios.

Respecto a la Tabla 3 cabe destacar que, exceptuando el caso del Ejercicio 1, no aparecen explícitamente las técnicas T1 y T2. Esto es así puesto que T1 y T2 son técnicas mucho más básicas y generales que se trabajan constantemente tanto en los problemas como en la mayoría de ejercicios. Además, ningún ejercicio está directamente relacionado con el Cp1 por la misma razón. Finalmente, en los distintos ejercicios, igual que en el caso de los problemas, se emplean diferentes sistemas de representación que permiten entender las funciones desde distintos puntos de vista.

F.3. Metodología a seguir en su implementación en el aula

Para la implementación de los ejercicios enunciados en la sección F.1. de este documento se continuará con una filosofía similar a la que se propone para los problemas, con la diferencia de que, al ser ejercicios en general más sencillos que los problemas, algunos de ellos se podrán dejar como tarea para realizar de deberes, si fuere necesario. En el aula, los que se realicen se trabajarán de forma individual, salvo los ejercicios 2, 6, 8 y 10 que podrán realizarse por parejas.

En cuanto a la jerarquía de los mismos, solo se propondrá la realización de estos ejercicios después de haber introducido en clase cada campo de problemas a través de alguno de los problemas de la sección G. De esta manera, previamente a resolver los ejercicios, se habrán institucionalizado las técnicas necesarias (cuya justificación se incluye en la sección H de este documento.). Cos estos ejercicios, se pretende que el alumnado interiorice las técnicas trabajando casos más sencillos, de forma que resulte más sencillo identificar los errores o dificultades individuales que puedan surgir.

G. Sobre las tecnologías.

G.1. Tecnologías que justifican las técnicas

En esta sección se desarrollan las justificaciones de las técnicas que se requieren en algún momento de esta secuencia didáctica, las cuales comprenden las llamadas tecnologías. En lo que sigue se introduce cada una en relación a la técnica correspondiente.

T1: Interpretar y representar datos gráficamente.

Las tecnologías que justica esta técnica ha sido estudiada en cursos anteriores, y dado que es una técnica de apoyo que se emplea siempre que aparecen representaciones gráficas, ha sido incluida en este TFM, pero no debería ser justificada a lo largo de esta secuencia para no repetir contenido que se supone dominado por el alumnado.

De forma resumida, la justificación se realizaría mediante la definición de un punto en base a sus coordenadas $A(a, b)$ en un espacio (plano) euclídeo, y mediante la definición de los ejes de coordenadas, además del apoyo gráfico correspondiente para representar puntos en los ejes cartesianos.

T2: Cambio entre sistemas de representación de una función.

La tecnología que justifica esta técnica es la propia definición de función en los diferentes sistemas de representación en los que nos la podemos encontrar. Así, una función es una relación entre dos variables, llamadas variable independiente (x) y variable dependiente y, que asocia a cada valor de x un único valor de y.

Esta definición puede cumplirse en cada uno de los cuatro sistemas de representación que se trabajan: gráfico, enunciado, tabla y fórmula. Por tanto, al poder expresarse de cuatro maneras diferentes, todas tienen que ser equivalentes si representan el mismo objeto, por lo que es posible cambiar entre ellos de manera más o menos precisa.

T3: Calcular el dominio y recorrido de una función.

La justificación de esta técnica se hará a través de las definiciones de dominio y recorrido. Denotamos **dominio de una función f (Dom f)** al conjunto de valores de x para los cuales la función f está definida.

Por su parte, denotamos **recorrido de una función f** al conjunto de valores que toma la función en su dominio. Esto es, los valores de y que cumplen que existe una x tal que $f(x) = y$.

T4: Calcular puntos de cortes con los ejes.

La tecnología que justifica esta técnica es la definición algebraica de los cortes. Denotamos **puntos de corte de una función f con el eje OX** a aquellos puntos de la función que son de la forma $C(x,0)$. Esto es, que la función evaluada en su coordenada x vale cero, $f(x)=0$.

Por otro lado, denotamos **puntos de corte de una función con el eje OY** al punto que, si existe, está definido como $C(0,f(0))$. Es decir, que su coordenada y está dada por el valor de la función cuando la variable independiente es cero.

T5: Estudiar la continuidad de una función.

La tecnología que justifique esta técnica no puede estar basada en la definición formal dado que el alumnado no conoce la función derivada. Por esto, la continuidad solo puede justificarse mediante razonamiento gráfico, siendo la justificación preferente en los libros de texto. Esta es, **una función se dice continua en un intervalo (a,b) si no presenta discontinuidades** en dicho intervalo.

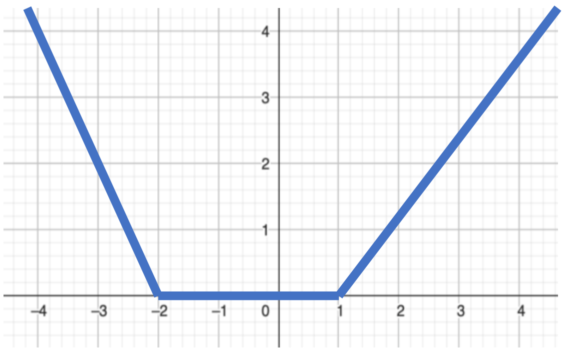
Para ello, es necesario definir previamente las discontinuidades, entendidas como de salto finito o infinito, y evitables o no evitables, pero tomando en cuenta que es condición necesaria que la función esté definida en el punto en el que se da la discontinuidad. Es decir, que la continuidad solo tiene sentido cuando se estudia en el dominio de la función.

De este modo, la primera definición puede y debe extenderse a todo el dominio para evitar crear obstáculos didácticos, como que el alumnado piense que las funciones de la forma $f(x)=(x+a)^{-1}$ son discontinuas en $x=a$. Teniendo esto en cuenta, **una función se dice continua en su dominio si no presenta discontinuidades en su dominio.**

T6: Computar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.

La tecnología que justifica esta técnica es la condición que deben cumplir las funciones para ser crecientes, decrecientes o constantes en un determinado intervalo, y emplean razonamiento algebraico y gráfico.

Así, se de dice que una función f es **creciente** en un intervalo (a,b) si, cuando aumenta el valor de la variable dependiente, también aumenta el valor de la variable independiente. Esto es, si se cumple que $f(x_1)<f(x_2)$ cuando $x_1<x_2$, y esto se cumple para todo $x_1,x_2\in(a,b)$. Por ejemplo, en la gráfica de la derecha, la función es creciente en el intervalo $(1,\infty)$.



Una función es **decreciente** en un intervalo (a,b) cuando, al aumentar el valor de la variable dependiente, disminuye el de la variable dependiente. Esto es, si se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$ con $x_1 < x_2$, y esto se cumple para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$. En la gráfica anterior, la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2)$.

Finalmente, una función es **constante** en un intervalo (a, b) cuando cumple que $f(x_1) = f(x_2)$ para todo $x \in (a, b)$. En la gráfica anterior, la función es constante en el intervalo $(-2, 1)$.

T7: Computar los extremos absolutos y relativos de una función.

Dado que en este nivel el alumnado desconoce las derivadas, nuevamente, no se puede justificar esta técnica de manera formal. Por ello, la tecnología está basada en las definiciones de máximos y mínimos basadas en el crecimiento, por lo que se requiere de la comprensión de la técnica **T6**. Tenemos entonces que:

- Una función tiene un **máximo relativo** en un punto si la coordenada y de dicho punto es mayor que la de los puntos que la rodean y además, la función cambia de ser creciente a decreciente al superar la coordenada x del punto.
- Una función tiene un **máximo absoluto** en un punto si cumple lo anterior y su coordenada y es la mayor de todos los máximos relativos.
- Una función tiene un **mínimo relativo** en un punto si la coordenada y de dicho punto es menor que la de los puntos que la rodean y además, la función cambia de ser decreciente a creciente al superar la coordenada x del punto.
- Una función tiene un **mínimo absoluto** en un punto si cumple lo anterior y su coordenada y es la menor de todos los mínimos relativos.

Cabe mencionar que esta justificación deberá ser abandonada en favor de la definición precisa usando derivadas cuando se dominen éstas, pues realmente puede inducir a errores. Por ejemplo, el alumnado podría considerar que, si solo hay un máximo relativo, ha de ser por fuerza absoluto, para lo cual existen contraejemplos como que esa misma función se haga constante en un valor mayor al de dicho máximo relativo.

T8: Calcular la TVM de una función.

La tecnología que justifica esta técnica es la definición de la TVM, la cual puede interpretarse tanto desde el punto de vista geométrico como desde el de análisis como cociente de incrementos. La TVM de una función en un intervalo se define como:

$$TVM(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

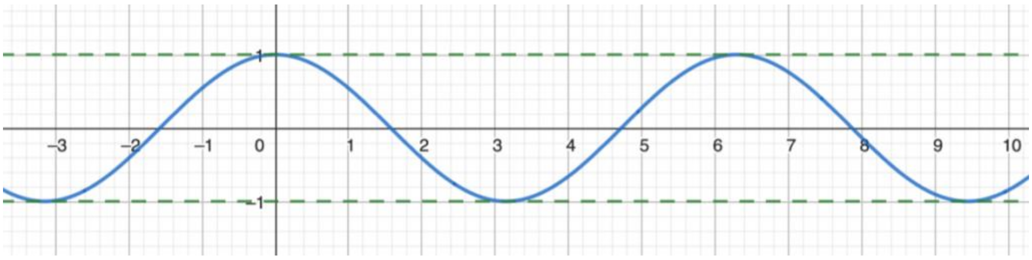
En ella, el numerador indica la variación en el eje de ordenadas del valor que toma la función entre dos puntos, $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$, mientras que el denominador indica la variación en el eje de abscisas.

Desde un punto de vista más geométrico, la TVM no es más que la pendiente de la recta secante a la función por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.

T9: Calcular el periodo de una función periódica.

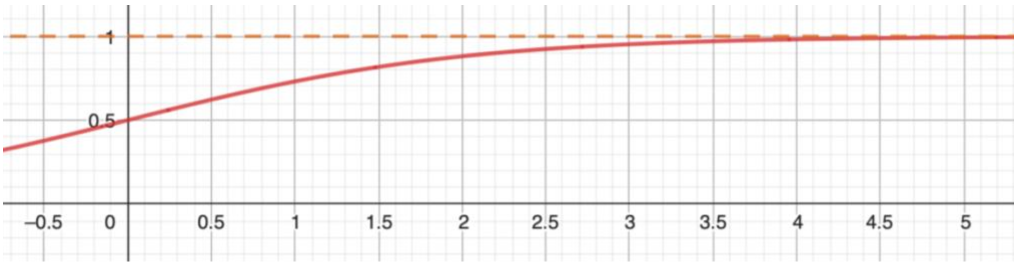
Esta técnica se puede justificar a través de una tecnología basada en una definición algebraica o a través del comportamiento en una gráfica. En el primer caso, una función se dice periódica, con periodo T, si cumple que: $f(x + T) = f(x)$.

En el segundo caso, lo que nos justifica la periodicidad es que, gráficamente, el comportamiento de la función se repita cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo, cuya longitud es el periodo.



Esto puede ilustrarse mediante la función de la gráfica anterior $f(x) = \cos(x)$, o mediante cualquier función periódica creada ad hoc.

T10: Identificar tendencias en funciones. Esta técnica no se puede justificar formalmente en este punto, puesto que en 4º ESO no se estudian los límites, por lo que la tecnología que justifica el comportamiento de tendencia (a un cierto valor de y) es el comportamiento gráfico de la misma. Diremos que una función tiende a un determinado valor de y cuando, al aumentar x, el valor de la función se aproxime a dicho y.

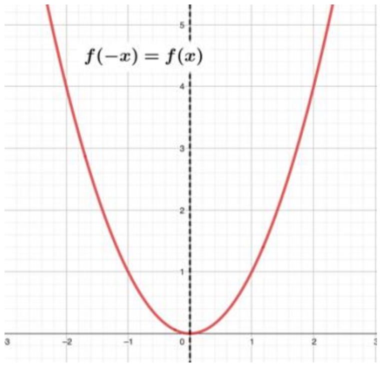


La función de la gráfica anterior, por ejemplo, tiende a y=1 conforme aumentamos el valor de x.

T11: Identificar simetrías en funciones.

Esta técnica se puede justificar de dos maneras, desde una definición gráfica, o desde otra más algebraica. La primera definición justifica la simetría respecto a una asíntota vertical si, gráficamente, el comportamiento a izquierda y derecha de la misma es análogo especularmente, como se puede ver en la gráfica de la derecha.

La segunda justificación tiene que ver con la matematización de la condición de simetría, que podemos expresar como:



$$f(-x) = f(x)$$

Para capturar la simetría de una función con respecto al eje OY, y que puede extenderse a simetrías respecto a cualquier eje de simetría vertical. Dado que solo se estudian funciones inyectivas, no puede haber simetría respecto al eje OX, y las posibles simetrías respecto a ejes oblicuos se introducirán si se estudian hipérbolas.

T12: Identificar trozos de una función definida a trozos.

Para justificar esta técnica se pueden emplear dos razonamientos, uno que emplea la definición algebraica de función definida a trozos, y otro más intuitivo. Para el primero, tenemos que, en un ejemplo mínimo, una función a trozos se define como

$$f(x) = \begin{pmatrix} g(x) \; si \; x < x_1 \\ t(x) \; si \; x \geq x_1 \end{pmatrix}$$

Esto es, la función f toma distinta forma según el intervalo de la recta real en el que estemos, separados en $x = x_1$. De esta forma, tenemos dos trozos, definidos por estos dos intervalos. De forma más intuitiva, los distintos trozos de una función son aquellos en los que el comportamiento funcional es diferente, es decir, tenemos un cambio en el comportamiento global de la función de un trozo a otro.

G.2. Proceso de institucionalización y metodología

En esta propuesta didáctica, la filosofía que se va a llevar para institucionalizar las técnicas, a través de las diferentes tecnologías que las justifican, comprende trabajarlas después de haber desarrollado junto al alumnado los problemas guiados que dan pie a cada campo de problemas (Que son 1, 3, 6, 9, 12-14). De esta forma, siempre se introducirán en un entorno contextualizado para tratar de fomentar su comprensión.

Cabe destacar que, en los problemas guiados, se pretende que el alumnado llegue, directa o indirectamente, a establecer algunas ideas o rrelaciones que se correspondan con la técnica. No obstante, será el profesor quien, después de haber puesto en común el trabajo en grupo con estos problemas, institucionalice las técnicas y tecnologías.

Para institucionalizar las técnicas se introducirá al alumnado los métodos necesarios para resolver algún tipo de operación concreta, cuando aparezcan (p.ej. el cálculo del dominio) o el criterio necesario para identificar las características de las funciones (p.ej. la simetría o periodicidad). El proceso de institucionalización comprende también explicar la fundamentación matemática de cada técnica, de forma que no solo se trabaje la manera mecánica de resolver problemas y ejercicios, sino que se fomente la comprensión del razonamiento detrás de cada una, y se comprendan mejor las funciones.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

H.1. Secuenciación del contenido

En esta sección se introduce la propuesta de ordenación de la secuencia didáctica, atendiendo a la temporalización y distribución de los ejercicios y problemas en las 11 sesiones que abarca la misma. En la Tabla 4 se puede ver esta ordenación, donde se incluye también una estimación de la duración aproximada de las diferentes actividades. En esta tabla, los problemas se mencionan como PX, siendo X el número del problema de la sección E, y los ejercicios como EX, siendo X el número del ejercicio correspondiente de la sección F.

Como se ha mencionado en los apartados sobre metodología, la filosofía a seguir va a ser realizar un problema introductorio para acercar las técnicas de forma más intuitiva al alumnado, siendo estos problemas más guiados que el resto. Dentro de la secuencia, los problemas introductorios se realizarán por grupos (de no más de 4 integrantes), y el tiempo que se les asigna incluye la puesta en común de los mismos por parte del profesor, ya que se irá realizando mientras el alumnado trabaja, actuando así el profesor también de guía.

<table>
<tr><th>Sesión</th><th>Actividades</th><th>Duración</th><th>Campos de Problemas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Prueba Inicial</td><td>30 min</td><td rowspan="2">Ev Inicial</td></tr>
<tr><td>Corrección de la prueba inicial</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>P1 (Grupos)</td><td>25 min</td><td rowspan="3">Cp1 y Cp2</td></tr>
<tr><td>Institucionalización T1, T2</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td>P2 y E1 (Parejas)</td><td>15 min</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td>Corrección P2 y E1</td><td>10 min</td><td rowspan="4">Cp3</td></tr>
<tr><td>P3 (Grupos)</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td>Casos E2</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td>Institucionalización T3</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4</td><td>P4 y E3 (Parejas)</td><td>10 min</td><td rowspan="2">Cp3</td></tr>
<tr><td>Corrección P4 y E3</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td>P6 y E4 (Grupos)</td><td>20 min</td><td rowspan="2">Cp4</td></tr>
<tr><td>Institucionalización T5</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5</td><td>Corrección P5 y E2, Institucionalización T4</td><td>15 min</td><td rowspan="3">Cp4</td></tr>
<tr><td>P7 y E5 (Parejas)</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td>Corrección P7 y E5</td><td>15 min</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6</td><td>Corrección P8</td><td>5 min</td><td>Cp4</td></tr>
<tr><td>Problema 9 (Grupos)</td><td>25 min</td><td rowspan="2">Cp5</td></tr>
<tr><td>Institucionalización T6, T7, T8</td><td>20 min</td></tr>
</table>

7	P10 y E6 (parejas)	20 min	Cp5
	Corrección P10 y E6	15 min	
	Repaso de T1 a T8	10 min	
8	Corrección P11	10 min	Cp5
	P12 (Grupos)	20 min	Cp6
	Institucionalización T9, T10, T11	20 min	
	E7 (Individual)	10 min	
9	E8 y E9 (individual)	15 min	Cp6
	Corrección E7, E8, E9	20 min	
	Dudas T9, T10, T11	5 min	
10	P13 (Grupos)	10 min	Cp7
	Repaso T3 a T11	15 min	
	P14 (grupos)	25 min	Cp8
11	Institucionalización T12	10 min	Cp8
	E10 (parejas)	10 min	
	Repaso final	30 min	Cp1-Cp8
12	Prueba de evaluación	50 min	Cp1-Cp8
13	Corrección Prueba de Evaluación	50 min	Cp1-Cp8

Tabla 4: Temporalización de los contenidos de la secuencia didáctica.

Un aspecto a destacar sobre la temporalización que se incluye en la tabla es que los problemas P5, P8, y P11 no aparecen como tiempo de trabajo en clase, puesto que se dejarán como actividades a realizar en casa por parte del alumnado. No obstante, sí que se corregirán en clase, como puede verse en la Tabla 4. Por su parte, respecto al ejercicio E2, solo aparecen referidos algunos casos. En el breve espacio de tiempo del que se disponga se realizarán los casos más interesantes, mientras que los que no puedan completarse en ese horario se dejarán como ejercicios para que el alumnado realice en casa.

Por último, aunque no aparece referido explícitamente, durante el tiempo en el que se implementa la secuencia se propondrá al alumnado la realización de la actividad del Anexo I de este documento, de forma que profundicen en las representaciones de funciones, a la vez que investigan sobre un tema de actualidad como es el cambio climático. Para la puesta en común de esta actividad se empleará el rato sobrante de la sesión 13.

H.2 Posibles adaptaciones de atención a la diversidad.

La secuencia planteada en el apartado anterior sería aplicable en caso de tener un alumnado normativo, pero, en caso de que en el grupo se integren estudiantes con alguna dificultad derivada de trastornos del desarrollo que pueda afectar a su aprendizaje, o con alguna otra dificultad derivada de factores externos, como los idiomáticos, realizaremos una serie de adaptaciones para fomentar una enseñanza inclusiva y de calidad. Las medidas que introduciremos en distintos momentos del proceso de enseñanza son, con carácter general para todo el alumnado con dificultades:

- **Ubicación del estudiante dentro del aula:** le situaremos próximo al escritorio de sus profesores, alejado de puertas, ventanas o paredes muy cargadas de estímulos y rodeado de compañeros con buenas habilidades de atención y que puedan ayudar.
- **Asignación de tareas:** Las tareas se le proporcionarán fragmentadas, es decir, divididas en partes más pequeñas con instrucciones muy sencillas y apropiadas al nivel escolar. Por ejemplo, en lugar de pedir que se dibuje una función empleando una tabla de valores, primero se pedirá la tabla de forma explícita, y luego, con la tabla, se pedirá el cambio de representación. El volumen de tareas para realizar en casa será siempre razonable e igualmente adaptado. Además, se tratará siempre de anticipar al alumnado el contenido que se va a ir trabajando en clase.
- **Forma de trabajo:** Para estos estudiantes, se fomentará el trabajo individual o en grupos pequeños (2-3 miembros) puesto que grupos mayores contribuyen a la dispersión del estudiante, contribuyendo a sus dificultades. Esto afectará sobre todo a los problemas guiados, en los que el profesor supervisará en mayor grado la resolución de estos problemas para estos estudiantes.
- **Uso frecuente de apoyos visuales:** Si la hubiere, se usará la pizarra digital y/o el proyector para dotar de apoyo visual los problemas y ayude con la institucionalización de las diferentes técnicas.
- **Evaluación:** se presentará siempre la evaluación como parte del proceso de aprendizaje, destinada a aprender de los errores, tratando la evaluación de forma positiva.
- **Tiempo adicional:** una velocidad lenta de procesado de información puede manifestarse, por ejemplo, asociada al TDAH, y también surgir por desconocer algunas palabras del idioma. Por ello, el examen de la secuencia que se ha programado para durar 50 min podría alargarse hasta 75 min tomando tiempo del recreo.

En el caso específico de que en el grupo haya estudiantes con algún grado de desconocimiento del idioma, se proponen una serie de medidas y estrategias metodológicas para la implementación de la secuencia. Estas son:

- **Actividades de Interacción con el resto del alumnado:** se tratará de fomentar que se pueda aprender la lengua de manera natural y significativa sirviéndonos de la interacción espontánea con sus iguales y el docente.
- **Uso de TICS para inmersión idiomática:** se permitirá su uso, de forma supervisada por el docente, de dispositivos móviles u ordenadores que sirvan de traductor.
- **Refuerzos y apoyos:** en el caso en el que el alumno provenga de un país cuya lengua sea impartida en algún programa bilingüe del centro, se buscarán apoyos con dicho departamento. Se tratará de proporcionar el material de problemas y ejercicios con traducciones del castellano. Si no existen dichos departamentos, se tratará de buscar ayuda para realizar adaptaciones con servicios como el Centro Aragonés de Referencia para la Equidad y la Innovación (CAREI).

Finalmente, con carácter general en ambos casos, y referido a la práctica docente, se intentará adaptar el ritmo del discurso al tipo de alumnado, ya que hablar más lentamente favorece la comprensión, pero sin suponer el uso de una entonación neutra que pueda aburrir. En las explicaciones durante los procesos de institucionalización se completará siempre el mensaje con el lenguaje gestual para aumentar las posibilidades de comprensión del interlocutor, repitiendo el mensaje siempre que se considere necesario.

Además, se realizarán pausas frecuentes, puesto que dan más tiempo para procesar la información y, por lo tanto, facilitan la comprensión. Y se acentuarán los elementos suprasegmentales de la frase, ya que la entonación distingue la interrogación, la exclamación, la frase enunciativa, etc. Finalmente, en el caso en que sea necesario, se simplificará el vocabulario y la gramática, pero sin que esto introduzca simplificaciones burdas que sean erróneas a nivel matemático.

I. Sobre la evaluación

I.1 Prueba de evaluación

En esta sección se presenta la prueba escrita que se ha diseñado, y que constituye una de las herramientas de evaluación del progreso del alumnado respecto a la secuencia didáctica de funciones presentada en este documento. La evaluación se llevará a cabo al término de la secuencia, teniendo una duración de una sesión completa. Para complementarla, la sesión siguiente se destinará a revisar y corregir la prueba, así como a discutir con el alumnado las dificultades y errores más destacados que puedan haber surgido.

La prueba propuesta consta de 4 problemas y 1 ejercicio, que suponen un total de 10 puntos. Se ha maximizado el uso de problemas ya que son una herramienta mucho más rica para calificar, permitiendo desarrollos y justificaciones del alumnado que muestren tanto el nivel alcanzado, como las posibles dificultades que hayan surgido y no hayan aparecido durante la realización de la secuencia. En lo que sigue presentamos los problemas de la prueba de evaluación

Pregunta Ev1- (2p) En un partido de Lacrosse el equipo rival bloquea al jugador que lleva la pelota, que se ve obligado a realizar un pase largo a otro compañero. Un espectador se percata de que la trayectoria de la pelota se ajusta a la función:

$$f(x) = -x^2 + 6x$$

Siendo x la distancia en metros desde el lanzador y f(x) la altura de la pelota en función de la distancia x. Sabiendo lo anterior:

a) (0,75p) Dibuja la trayectoria empleando una tabla de valores, teniendo en cuenta que el pase comienza en (0,0) y la pelota no puede caer por debajo del suelo. ¿Qué tipo de función es? Describe el movimiento de la pelota en forma de enunciado.

b) (0,75p) Estudia el crecimiento y decrecimiento. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

c) (0,5p) ¿Cuál es el dominio de la función f(x)? ¿Hay algún factor externo que lo limite?

Pregunta Ev2- (2p) En una bolera se asigna una valoración a los jugadores que se basa en el número de puntos que han obtenido. Para ello, los aciertos a los bolos suman puntos, mientras que los fallos restan, pudiendo obtenerse una puntuación negativa. La valoración la da una función matemática que depende del número de puntos, y para ello se proponen 3 posibilidades:

$$A)\ V(p) = \begin{cases} 0 & si\ p < 0 \\ \sqrt{p} + 1 & si\ p \geq 0 \end{cases}$$

$$B)\ V(p) = \sqrt{p + 50}$$

$$C)\ V(p) = \ln\,(p^2 + p - 6)$$

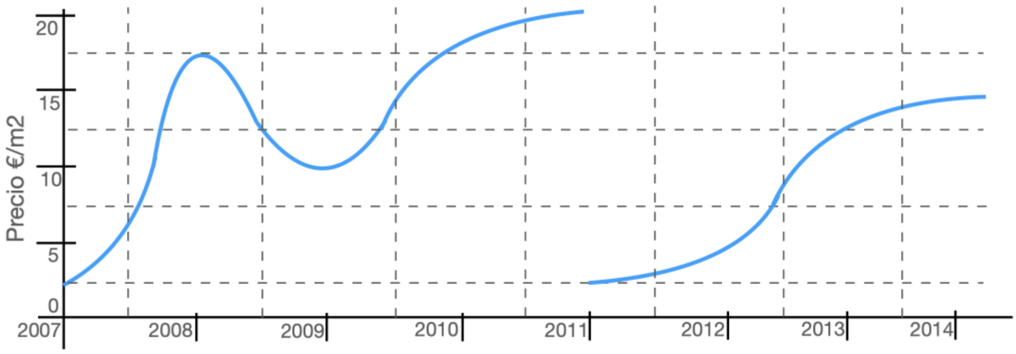
Viendo las funciones anteriores, y sabiendo que p puede ser tanto positivo como negativo, y que tiene $V(p)$ tiene que existir para cualquier número posible de puntos (es decir, para cualquier número de puntos que obtengas, obtendrás una valoración), responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) (1p) ¿Las funciones anteriores sirven para cualquier puntaje o tienen algún problema? ¿Cómo puedes estudiar esto de forma matemática? Justifícalo y selecciona la o las funciones que sí sirvan para valorar a los jugadores.

c) (0,5p) Si sabemos que el mínimo absoluto de puntos que se puede obtener es exactamente $p = -50$, ¿se modifica tu respuesta anterior?

d) (0,5p) Si tomamos la función A para realizar las valoraciones, y además queremos imponer que la función sea continua ¿cómo tendría que modificarse la fórmula para lograr esto? Estudia la continuidad de A dibujándola y propón una solución.

Pregunta Ev3- (2,5p) El ayuntamiento de una ciudad ha recogido la serie histórica de datos sobre el precio del alquiler. Te piden que los analices para estudiar cómo ha sido esta evolución y establecer posibles medidas al respecto. Cuando representas los datos, la gráfica que obtienes es:



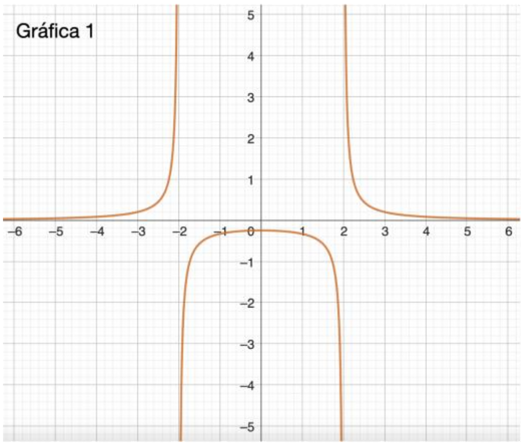
Te piden que realices un análisis completo de la situación. Para ello:

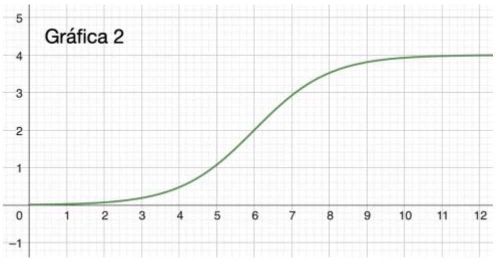
a) (1p) Estudia la evolución de la función precio del alquiler, empleando los conceptos de análisis de monotonía que hemos estudiado. Toma los valores de forma aproximada. ¿Identificas algún otro comportamiento?

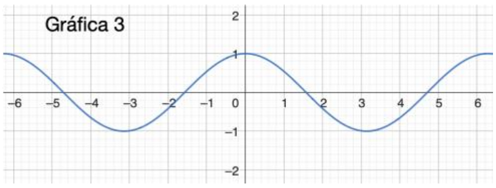
b) (0,75p) ¿En qué intervalos creció más rápidamente el precio? Emplea la TVM para justificarlo, tomando los valores de la gráfica de forma aproximada.

c) (0,75p) Sabes que en el año 2011 se introdujo una ley que limitaba el precio del alquiler ante el coste inasumible que suponían los alquileres caros, y durante unos días, no hubo datos. ¿Afectó eso a la evolución? ¿Cómo? Justifícalo estudiando la continuidad de la función.

Pregunta Ev4- (1,5p) Dadas las siguientes gráficas de funciones:







Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) (0,5p) ¿Cuál es el dominio de cada una?

b) (0,75p) ¿Qué comportamientos característicos que hemos estudiado puedes encontrar?

c) (0,25p) Para el caso de la gráfica 2, invéntate una situación que pueda representar la función, y di lo que representaría cada variable.

Pregunta Ev5- (2p) La temperatura del motor de un coche funciona de la siguiente manera: aumenta de forma lineal desde que arrancamos y mientras circulamos hasta llegar a 90ºC, temperatura en la que actúa el refrigerante, lo que la deja constante. Luego, cuando apagamos el motor, éste se va enfriando también de forma lineal. Si desde que arrancamos hasta que actúa el refrigerante pasan 10 minutos, después circulamos durante 20 minutos más a esa temperatura, y finalmente apagamos el motor, y éste tarda en enfriarse 30 minutos más, responde a las siguientes cuestiones:

a) (0,5p) ¿Qué tipo de función es la temperatura en función del tiempo?

b) (0,5p) Dibuja la temperatura en función del tiempo en unos ejes de coordenadas empleando la información del enunciado.

c) (1p) Traduce la función de forma gráfica a su expresión analítica. Para ello, identifica los distintos trozos de la función en los que el comportamiento es diferente.

I.2. Aspectos evaluables

Para evaluar el conocimiento de los alumnos en la prueba escrita se emplean los estándares de aprendizaje evaluables del currículo de la asignatura, los cuales aparecen detallados en la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo. De ellos, se tomarán aquellos referidos a las funciones que no incluyan las funciones elementales, pues estás pertenecerían a la siguiente secuencia didáctica. Todos ellos se pueden consultar en la sección A de este documento, así como en la orden referida.

Además de los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables específicos al bloque de las funciones, en los cursos de la ESO se trabaja transversalmente el Bloque 1 del currículo, que versa sobre procesos y actitudes en matemáticas, y que también se considerará para la evaluación. De manera específica, los estándares de aprendizaje evaluables de este bloque considerados son:

- **Crit.MAAC.1.2. - Est.MAAC.1.2.1.** Analiza, comprende e interpreta el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema) adecuando la solución a dicha información.
- **Crit.MAAC.1.2. - Est.MAAC.1.2.2.** Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.
- **Crit.MAAC.1.3. - Est.MAAC.1.3.1.** Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
- **Crit.MAAC.1.6. - Est.MAAC.1.6.2.** Establece conexiones entre un problema del mundo real y el matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y utilizando los conocimientos matemáticos necesarios.
- **Crit.MAAC.1.6. - Est.MAAC.1.6.3.** Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas
- **Crit.MAAC.1.6. - Est.MAAC.1.6.4.** Interpreta la solución matemática del problema en el contexto del problema real.

Teniendo esto en cuenta, en la Tabla 5 se incluye la relación entre los estándares de aprendizaje evaluables que concretan los aspectos evaluables de los diferentes criterios de evaluación, y las diferentes preguntas de la prueba de evaluación que se ha presentado en el apartado anterior.

Pregunta	Estándar de aprendizaje evaluable	
	Bloque 1	**Bloque 4**
1	Est.MAAC.1.2.2. Est.MAAC.1.6.4.	Est.MAAC.4.1.1. Est.MAAC.4.1.4. Est.MAAC.4.2.2. Est.MAAC.4.2.4.
2	Est.MAAC.1.2.1. Est.MAAC.1.2.2. Est.MAAC.1.6.2. Est.MAAC.1.6.4.	Est.MAAC.4.1.1. Est.MAAC.4.2.2.
3	Est.MAAC.1.3.1. Est.MAAC.1.6.2. Est.MAAC.1.6.4.	Est.MAAC.4.1.4. Est.MAAC.4.1.5. Est.MAAC.4.2.1. Est.MAAC.4.2.3.
4	Est.MAAC.1.3.1. Est.MAAC.1.6.2.	Est.MAAC.4.2.3.
5	Est.MAAC.1.2.1. Est.MAAC.1.6.2. Est.MAAC.1.6.3.	Est.MAAC.4.1.1. Est.MAAC.4.2.2. Est.MAAC.4.2.4.

Tabla 5: Relación de estándares con las preguntas de la prueba escrita.

I.3. Respuestas correctas esperadas y posibles errores.

En lo que sigue se incluyen una serie de consideraciones sobre las respuestas correctas que debería dar el alumnado, así como algunos de los posibles errores en los que pueden incurrir en cada pregunta de la prueba de evaluación, contextualizados en el marco de las dificultades que hemos introducido en el apartado B.2 de este documento.

Pregunta Ev1: La respuesta correcta esperada implica que el/la estudiante dibuje la gráfica de la parábola partiendo del vértice, empleando una tabla de valores, y transforme esta representación a un enunciado, siempre teniendo en cuenta que la parábola pasa por (0,0) y llega hasta el siguiente corte en el eje OX en (6,0). Deberá identificar que se trata de una parábola, o de un tiro parabólico en su defecto. Luego, estudiará el crecimiento empleando esos puntos y el vértice la parábola para decir que crece hasta el vértice y decrece después, e identificará que el dominio viene limitado por el contexto, siendo solo el intervalo [0,6].

Por su parte, los posibles errores en los que pueden caer los y las estudiantes vendrían dados, principalmente, por no saber aplicar la información del enunciado en la resolución, ya que ésta restringe el dominio. En este sentido, tal como introducen Trujillo et al. (2023), estaríamos ante errores que surgen por dificultades en el manejo de las funciones y en la comprensión de sus propiedades, pero también derivadas de dificultades con la interpretación en caso de que errasen en el cálculo para acotar el dominio, al tener que resolver la ecuación de la misma forma. Además, podría darse el caso en que el alumnado no usara la posición del vértice para dibujar la parábola, dibujando solo una rama y trazando una recta, lo que llevaría a estudiar incorrectamente la monotonía. Este tipo de errores aparece, como indican también Arce et al. (2019), como consecuencia de existir dificultades con la representación, pues se debe realizar un cambio entre representaciones.

Pregunta Ev2: La respuesta correcta esperada esta constituida por el estudio del dominio de las funciones para verificar si pueden cumplir las condiciones del enunciado, así como la rectificación a lo anterior en el apartado b, en el que la función B también podría ser usada. Respecto a la continuidad, se espera que el alumnado modifique cualquiera de los trozos de la función A para que ésta sea continua.

Por su parte, las posibles respuestas incorrectas competen que en el primer apartado elijan una función sin estudiar el dominio, basándose en algún otro criterio, que en el segundo apartado consideren la función B no apta, y que en el último apartado propongan una modificación que siga presentado una discontinuidad. Nuevamente, estaríamos ante errores que surgen, según la clasificación de Trujillo et al. (2023), por dificultades en el manejo, pues se requiere del uso de las propiedades de las funciones para responder correctamente. El alumnado, además, podría errar al dibujar la función en el apartado c), derivado de alguna dificultad con la representación, o incluso con dificultades con la notación en caso de no entender lo que representan las funciones propuestas para asignar valoraciones.

Pregunta Ev3: La respuesta correcta implica que el alumnado sea capaz de identificar claramente los intervalos de crecimiento, así como los máximos y mínimos relativos en los que se producen los cambios. Para ello, podrán usar tanto intervalos abiertos como cerrados, ya que no se especifica y se permite el uso de valores aproximados. También se espera que el alumnado identifique el salto en 2011 que provoca una discontinuidad, así como la tendencia de estabilización conforme pasa el tiempo. Respecto al apartado b, específicamente, se espera que el alumnado estime la TVM en los intervalos [2007, 2008], [2009, 2011] y [2011, 2014] y emplee el de mayor valor para justificar crecimiento más rápido.

Considerando los posibles errores en que puede incurrir el alumnado, principalmente pueden estar vinculados a dos factores. El primero es no saber interpretar correctamente los valores de la gráfica, tomando puntos (aproximados) sobre la curva de forma errónea, lo que llevaría a definir mal la monotonía y calcular mal la TVM. El segundo tiene que ver con el propio calculo de la TVM, ya que podrían invertir el orden de los puntos, lo que resultaría en comparativas erróneas. Estos errores aparecen como consecuencia de dificultades con la representación, la interpretación y con el manejo, como mencionan Trujillo et al. (2023). También es interesante destacar que no interpretar correctamente los valores de la gráfica vendría derivado, como introduce Eisenberg (1991), de una malinterpretación de las variables en juego.

Pregunta Ev4: La respuesta correcta compete identificar el corte de dominio en las gráficas 1 y 2 (esta segunda comienza en 0), e identificar simetría en la gráfica 1, tendencia en la 2 y periodicidad en la 3. Respecto al último apartado, cualquier respuesta que tenga sentido será considerada positiva, pues es una pregunta abierta.

Las posibles dificultades del alumnado que pueden aparecer es que no identifiquen correctamente los fallos de dominio, especialmente en la función de la gráfica 2, y que en la gráfica 1 hablen de tendencia al ver la divergencia en los fallos de dominio. En el último apartado existe la posibilidad de que propongan una situación contraria (es decir, que requiera una función siempre decreciente, o que no entre en el dominio de la función), que sería considerada incorrecta. En este caso, tenemos errores derivados de dificultades de manejo, según el criterio de Trujillo et al. (2023), pues la pregunta está muy centrada en el uso de las propiedades de las funciones a través de representaciones gráficas. Es relevante mencionar que los errores en el último apartado podrían aparecer como consecuencia de dificultades con la interpretación, pues se requiere inventar una situación en el mundo real modelable con la función propuesta. En este caso, un mal uso de las variables, como indica Eisenberg (1991), o la incapacidad de imaginar la función descontextualizada del problema principal, como indican Tall y Razali (1993), harían imposible resolver este apartado.

Pregunta Ev5: La respuesta correcta esperada implicaría la correcta identificación de la función como función definida a trozos, siendo los trozos de la misma, rectas. También se espera que el alumnado sea capaz de dibujar la evolución de la temperatura en unos ejes de coordenadas de escala apropiada, y que, con la información de los puntos de cambio de trozo, sean capaces de derivar la ecuación de las rectas que componen cada trozo para formular la función al completo.

Los posibles errores, por su parte, podrían deberse principalmente a 3 factores, siendo el primero no identificar la función como definida a trozos, ya que esto imposibilitaría completar el último apartado. Este error está derivado de tener dificultades en el manejo, y con la notación, según el criterio de Trujillo et al. (2023), puesto que se debe entender lo que es una función definida a trozos, además de entender qué variables intervienen en ella. El segundo factor sería el caso en que no se elige una escala apropiada para la representación, por lo que ésta no se realiza apropiadamente, y estaríamos en este caso ante un error derivado de una dificultad con la representación al hacer el cambio. Finalmente, el tercer factor compete a la incorrecta formulación de las ecuaciones de la recta, principalmente por olvidar la ordenada en el origen o no saber calcular la pendiente de las mismas. Según la clasificación de Trujillo et al. (2023), este error vendría dado por dificultades en el manejo, pues es necesario alternar entre la ecuación de la recta y su forma de función, y operar con ellas para poder construir la función definida a trozos. Cabe mencionar también que, podrían errar al no formular la función definida a trozos en base a rectas, bien por no interpretar el enunciado correctamente, por dificultades en la interpretación a la hora de modelar los aumentos de temperatura, o bien, como introduce Eisenberg (1991), por una mala comprensión de las variables que aparecen dentro del modelo funcional sencillo que se propone.

I.4. Criterios de calificación

Para calificar las respuestas del alumnado en cada pregunta de la prueba de evaluación se emplea el modelo de tercios para la penalización de errores (Gairín, Muñoz y Oller, 2012). En este modelo, los autores consideran tres tipos de tareas que componen la resolución de una actividad. Estas son: principales, auxiliares específicas y auxiliares generales. Las tareas principales son aquellas vinculadas con los contenidos matemáticos específicos que se preguntan, mientras que las tareas auxiliares se refieren a conceptos intermedios necesarios para resolver el problema, aunque no se pregunten directamente.

Siguiendo el modelo de tercios, la calificación se obtiene a partir de la penalización de los errores en cada tarea de acuerdo a su relevancia. De acuerdo a este criterio, se descontará hasta 1/3 de la puntuación por errores en las tareas auxiliares generales, hasta 2/3 de la puntuación por errores en las tareas auxiliares específicas y hasta la totalidad de la puntuación de la pregunta por errores en las tareas principales. Cabe destacar que en esta propuesta de calificación la penalización del modelo de tercios irá vinculada a cada apartado. Así, un error en una tarea principal en el apartado x) de una pregunta descontará el máximo de puntuación vinculado a ese apartado, pudiendo obtenerse puntuación en el resto de apartados si se hicieran bien. En lo que sigue se incluye la propuesta de calificación de cada actividad de la prueba de evaluación siguiendo este modelo.

Pregunta Ev1: En esta pregunta que supone 2p del total se distribuye la puntuación de la siguiente manera:

Hasta 0,75p por transformar la función entre representaciones, siendo 0,25p el uso de la tabla de valores, 0,25p la representación gráfica y 0,25p la descripción en forma de enunciado.

Hasta 0,75p por estudiar la monotonía, siendo 0,5p los intervalos de crecimiento y 0,25p la identificación del máximo.

Hasta 0,5p por definir correctamente el dominio de la función, limitado por el contexto.

Para la penalización de errores de acuerdo al modelo de tercios encontramos la siguiente clasificación tareas:

- ⇒ Tareas principales: Construir una tabla de valores a partir de la fórmula. Dibujar la función en unos ejes de coordenadas. Transformar esta representación a un enunciado. Identificar la función como una parábola o un tiro parabólico. Identificación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento y el máximo. Identificación del factor limitante del dominio como el punto en el que la pelota cae de nuevo al suelo.
- ⇒ Tareas auxiliares específicas: cálculo del corte de la función con el eje OX, cálculo de la posición del vértice de la parábola.
- ⇒ Tareas auxiliares generales: cálculos aritméticos, identificación de puntos en las representaciones gráficas.

Pregunta Ev2: En esta pregunta, que supone 2p del total, se distribuye la puntuación de la siguiente manera:

Hasta 1p por estudiar el dominio de cada función, siendo 0,2p el de la función A, y 0,4p cada uno para los dominios de las funciones B y C.

Hasta 0,5p por reevaluar el dominio de la función B y valorarla como adecuada a la nueva situación.

Hasta 0,5p por proponer una alternativa viable a la fórmula de la función A para que no presente discontinuidades, siendo 0,25p la representación y 0,25p la fórmula corregida.

Para la penalización de errores de acuerdo al modelo de tercios encontramos la siguiente clasificación tareas:

- ⇒ Tareas principales: cálculo del dominio de las funciones. Estudio de la continuidad.
- ⇒ Tareas auxiliares específicas: manejo de la inecuación del logaritmo, manejo de la inecuación de la raíz, estudio del signo en los intervalos.
- ⇒ Tareas auxiliares generales: solución de la ecuación de segundo grado y cálculos aritméticos.

Pregunta Ev3: En esta pregunta, que supone 2,5p del total, se distribuye la puntuación de la siguiente manera:

Hasta 1p por describir el comportamiento de la función, siendo 0,25p la identificación de la tendencia final, 0,5p el estudio del crecimiento en intervalos y 0,25p el estudio de los extremos.

Hasta 0,75p por el cálculo de la TVM en cada uno de los 3 intervalos de crecimiento, a razón de 0,25p cada uno.

Hasta 0,75p por estudiar gráficamente la continuidad de la función y describir el comportamiento de la función en el entorno de 2011.

Para la penalización de errores de acuerdo al modelo de tercios encontramos la siguiente clasificación tareas:

⇒ Tareas principales: cálculo de intervalos de crecimiento y decrecimiento, cálculo de extremos relativos y absolutos, cálculo de la TVM, identificación de la discontinuidad.

⇒ Tareas auxiliares específicas: identificación de la tendencia de la función, identificación y aproximación de puntos en las representaciones gráficas.

⇒ Tareas auxiliares generales: interpretación de datos en forma gráfica y traducción a enunciado.

Pregunta Ev4: En esta pregunta, que supone 1,5p del total, se distribuye la puntuación de la siguiente manera:

Hasta 0,5p por estudiar gráficamente el dominio de las funciones que se presentan.

Hasta 0,75p por identificar la simetría, periodicidad y tendencia en las diferentes funciones, a razón de 0,25p cada uno.

Hasta 0,25p por inventar un contexto en el que la función de la gráfica 2 pueda modelar la realidad.

Para la penalización de errores de acuerdo al modelo de tercios encontramos la siguiente clasificación tareas:

⇒ Tareas principales: cálculo del dominio, identificación de simetrías, periodicidad y tendencia, modelización matemática de la realidad.

⇒ Tareas auxiliares específicas: identificación de eje de simetría, estimación gráfica del periodo.

⇒ Tareas auxiliares generales: identificación de puntos en las representaciones gráficas.

Pregunta Ev5: En esta pregunta, que supone 2p del total, se distribuye la puntuación de la siguiente manera:

Hasta 0,5p: identificar la función como función definida a trozos.

Hasta 0,5p: dibujar la función empleando los datos del enunciado en unos ejes de coordenadas, de los cuales 0,25p corresponden a la correcta asignación de las variables a los ejes y 0,25p corresponden a la asignación correcta de escala.

Hasta 1p por transformar la función de su representación del enunciado a la forma analítica, de los cuales 0,75p corresponden a identificar correctamente cada recta (0,25p cada una) y 0,25p a componer la función definida a trozos.

Para la penalización de errores de acuerdo al modelo de tercios encontramos la siguiente clasificación tareas:

⇒ Tareas principales: obtención de la expresión analítica y gráfica de la función definida a trozos

⇒ Tareas auxiliares específicas: obtención de las expresiones de las 3 rectas que conforman la función e identificación de los intervalos de cada trozo.

⇒ Tareas auxiliares generales: cálculos aritméticos.

J. Bibliografía

Arce, M., Conejo, L., y Muñoz-Escolano, J.M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Madrid, España: Síntesis.

Botella, L., Millán, L., Pérez, P, & Cantó, J. (2008). *Matemáticas 4º*. Editorial Marfil, S.A. ISBN 978-84-268-1369-5

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Colera, J., Oliveira, M.J., Gaztelu, I., & Martínez, M. (2012). *Matemáticas 4*. Editorial Anaya, S.A. ISBN 978-84-678-0249-8

Eisenberg, T. (1991). *Functions and associated learning difficulties*. In Advanced mathematical thinking (pp. 140-152). Dordrecht: Springer Netherlands.

Gairín, J. M., Muñoz, J. M., y Oller, A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 261-274). Jaén: SEIEM.

Gómez, C. P. (2013). *Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado*. Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 31(3), 121-134.

Kleiner, I. (1989). *Evolution of the function concept: A brief survey*. *The College Mathematics Journal, 20*(4), 282-300.

López, J., & Sosa, L. (2008). *Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato*.

Marea Verde. (2023). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4º ESO, LOMCE*. Recuperado de: https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/4BESO.htm

Mejía, D., Ocaña, J.M., Romero, R. (2016). *Matemáticas académicas*. Editorial Edelvives, S.A. ISBN 978-84-140-0300-8

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Sastre, V., Rey, G., & Boubée, C. (2008). *El concepto de función a través de la historia*. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16, 141-155.

Tall, D., & Razali, M. R. (1993). Diagnosing students' difficulties in learning mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24(2), 209-222.

Trujillo, M., Atarés, L., Canet, M. J., & Pérez-Pascual, M. A. (2023). *Learning Difficulties with the Concept of Function in Maths: A Literature Review*. Education Sciences, 13(5), 495.

Victor, J., & Katz, A. (2008). *History of mathematics: An introduction*.

ANEXO I: Prueba de evaluación inicial para desarrollar en la primera sesión de la secuencia didáctica.

Parte 1.

En los cursos anteriores has estudiado y trabajado de diferentes formas con las funciones en matemáticas y en física y química. Escribe, en un par de párrafos, algo que sepas de las funciones y que te parezca interesante.

[Respuesta]

¿Puedes inventarte un problema en cuya solución sean necesarias las funciones? Escríbelo y trata de resolverlo.

[Respuesta]

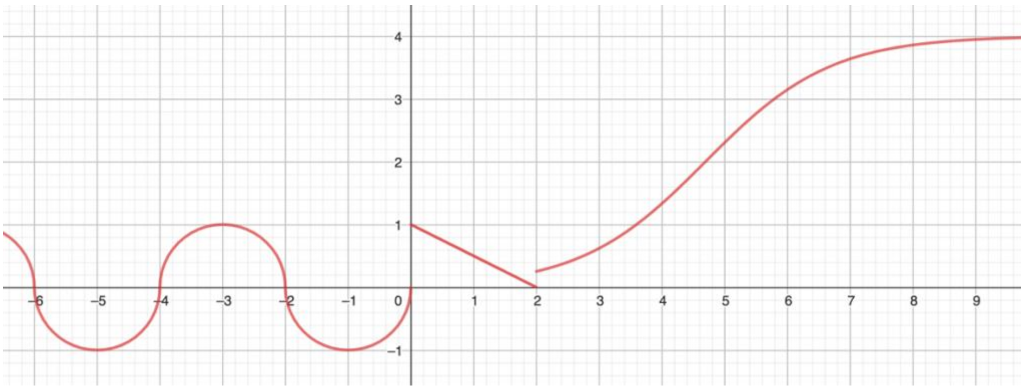
Parte 2.

Te propongo 3 ejercicios para que resuelvas con lo que te acuerdes de otros cursos. No te preocupes si no consigues resolver todo completamente, en este curso vamos a volver a trabajar sobre estos conceptos.

Ejercicio 1- Tenemos los puntos A(0, 1) y B(2, 3) que hemos obtenido midiendo un cierto fenómeno. ¿Puedes unirlos mediante una función lineal? ¿Y mediante una parábola? Dibújalo en unos ejes de coordenadas.

Ejercicio 2- Cuando nos montamos en un coche y arrancamos, la velocidad del vehículo cambia con el tiempo. Normalmente, aumenta la velocidad hasta hacerse constante, y cuando frenamos, disminuye hasta 0 cuando estamos parados. ¿Puedes representar este comportamiento? ¿Cuáles son las variables de interés?

Ejercicio 3- Dada la siguiente función:



¿Qué comportamientos propios de las funciones puedes identificar en ella? ¿Te suena el concepto de continuidad? ¿Cómo lo relacionarías con esta función?

ANEXO II: El Cambio climático y las representaciones alternativas de funciones.

El término cambio climático describe las alteraciones en las condiciones de temperatura y los modelos climáticos en La Tierra. Estas modificaciones pueden ser de origen natural, (variaciones en la actividad solar o eventos volcánicos intensos), o de origen humano. Desde el siglo XIX, la actividad humana ha sido la responsable del cambio climático, principalmente debido a la quema de combustibles fósiles como el carbón, el petróleo y el gas. La combustión de estos recursos genera emisiones de gases de efecto invernadero que funcionan como una capa térmica, atrapando el calor solar y provocando un aumento en las temperaturas.

En 2023, la agencia espacial estadounidense (NASA), publico en sus redes sociales un vídeo en relación con los cambios de temperatura que este efecto había provocado desde el año 1888. Pata visualizarlo, escanea el QR, o accede al enlace:

https://drive.google.com/file/d/1g5pTzLQ6KWywsPxYEWboT15VVQTkm82x/view?usp=sharing

Una vez visto el vídeo, responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Es el cambio de temperatura en el tiempo una función? ¿Por qué?

b) ¿Cuáles son las variables de interés que aparecen en el vídeo? ¿Cómo se han representado?

c) ¿En promedio, la temperatura global ha aumentado o disminuido desde el siglo pasado? ¿Cuánto? Justifica tu respuesta.

d) La representación elegida para la evolución del cambio en temperatura no es ninguna de las representaciones básicas que hemos estudiado. Quédate con el periodo 1950 a 2023 y realiza una representación en ejes de coordenadas, y también en forma de enunciado, de la misma.

e) ¿Crees que un aumento de 1º en la temperatura global es problemático? Busca información al respecto y escribe un pequeño párrafo de las consecuencias. Incluye las fuentes de las que has obtenido la información. (Páginas como la web de Naciones Unidas o el Ministerio de Transición Ecológica tienen información).

ANEXO III: Adecuación de la propuesta a la LOMLOE.

El trabajo desarrollado en este documento se ha preparado de acuerdo al marco legislativo de la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, perteneciente al marco legislativo de la LOMCE, ley que, a fecha de defensa, del mismo, ha sido sustituida por la LOMLOE, cuya concreción curricular en la comunidad autónoma de Aragón se establece en la Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Esta elección ha venido motivada por el intento del autor de integrar parte de la secuencia durante sus prácticas curriculares en 4º ESO del IES Clara Campoamor durante el curso 22-23, curso en el que estaba prevista la defensa del mismo y en el que los cursos pares de la ESO estaban todavía regulados por la ley antigua. Finalmente, por motivos externos, el trabajo no pudo integrarse en el Practicum II y la defensa ha tenido que ser desplazada a la tercera convocatoria ordinaria, en el mes de noviembre, cuando la antigua ley ha sido completamente desplazada por la nueva.

No obstante, teniendo en mente la nueva ley educativa, la propuesta didáctica ha sido desarrollada tratando de adecuarse al marco impuesto por la nueva ley, fomentando el aprendizaje basado en la resolución de problemas y manteniendo el uso de ejercicios repetitivos de adquisición de técnicas a un mínimo. En este sentido, en la Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, se especifica que "Resolver problemas no es solo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino que también es una de las principales formas de aprender matemáticas y debe ser el medio a través del cual se construyen los saberes de cada uno de los sentidos."

En esta dirección, el foco de la secuencia se ha puesto en el aprendizaje mediante problemas adecuados al nivel y, en la medida de lo posible, realistas, o que modelen situaciones cotidianas que puedan ser de interés para el alumnado. Estas consideraciones han influido, en gran medida, la secuencia didáctica pensada para trabajar, bien en parejas o en grupos, problemas guiados, largos y más complejos que tratan de fomentar que el alumnado desarrolle sus propias conclusiones, y construya el conocimiento de forma más completa. También ha influido en la secuenciación del contenido, que trata de minimizar los deberes para casa a favor de tiempo de trabajo en el aula y de corrección e institucionalización de las diversas técnicas, promoviendo un aprendizaje más integral y con el alumnado en el centro.

Volviendo a la citada orden también se especifica que "…en la resolución de problemas destacan procesos como su interpretación, la traducción al lenguaje matemático, la aplicación de estrategias matemáticas, la evaluación del proceso y la comprobación de la validez de las soluciones", lo cual hemos tratado de captar con los problemas originales presentados, en los que se prima la interpretación, seguida de la aplicación de estrategias matemáticas razonadas para la resolución, y se da un lugar central a la contextualización de los problemas, que tratan siempre de modelar situaciones realistas, aludiendo a la razón de ser histórica de las funciones como herramienta de modelado de relaciones entre variables.

Si bien sería necesario adecuar algunos aspectos de la secuencia presentada para estar completamente alineada con el espíritu de la nueva ley, como pueden ser las competencias específicas y los criterios de evaluación de las mismas, algunas de sus grandes novedades metodológicas y de contenido ya se han contemplado en este documento en anticipación al cambio de norma.

Atendiendo a las **competencias específicas** que se establecen en la Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, en la secuencia presentada en este documento se trabajan contenidos que permitirían adquirir, en mayor o menor grado, las competencias específicas **CE.M.1**, **CE.M.4**, **CE.M.5**, **CE.M.6**, **CE.M.7**, **CE.M.8**. Esto es así puesto que la secuencia se basa en gran parte en el aprendizaje a través de la resolución de problemas, con problemas realistas asequibles y/o que modelicen situaciones de la vida cotidiana. En ellos, el alumnado debe representar e interpretar modelos funcionales sencillos, lo que permite trabajar la **CE.M.1** y la **CE.M.4**. Además, la contextualización de los problemas también en otros campos como la física, o problemas basados en deportes que hemos diseñado en esta secuencia se alinean con la especificación de la **CE.M.5** y **CE.M.6** en el sentido de que permiten tener al alumnado una visión más integral de las matemáticas, en la que estas no son objetos puramente ligados a la clase de matemáticas sino a todos los aspectos de la vida.

También debemos considerar la inclusión de problemas a realizar en grupo, o la actividad propuesta en el Anexo II de este documento, incluida en la secuencia, que permiten trabajar las conclusiones a las que ha llegado el alumnado y exponerlas ante los demás en contextos relacionados con la modelización matemática mediante funciones. Esto permite trabajar tangencialmente las **CE.M.7** y **CE.M.8** que concreta la nueva ley.

Por su parte, la metodología que se propone en esta secuencia trata de alinearse con una visión que pone al alumnado en el centro y que permita un mayor desarrollo en el plano social y afectivo, pugnando por una forma de trabajo colectiva, fundamentalmente en el aula, e integrando los errores como parte natural del proceso de aprendizaje, lo cual permite trabajar las **CE.M.9** y **CE.M.10** de la nueva ley educativa.

Atendiendo a los **saberes básicos** y su concreción curricular, la secuencia didáctica presentada en este documento puede contribuir, de forma clara, a la adquisición de 3 de los 6 que establece el currículo, siendo estos **B. Sentido de la medida**, **D. Sentido algebraico y pensamiento computacional**, y F. Sentido socioafectivo. Esto es así porque la secuencia se ha diseñado para trabajar, fundamentalmente, las funciones a través de problemas realistas y como herramienta de modelado de situaciones que pueden darse en el mundo real. No obstante, el saber que principalmente se trabajaría, con la secuencia, es el **D. Sentido algebraico y pensamiento computacional**, puesto que los conocimientos, destrezas y actitudes que en el se deben desarrollar destacan los puntos **D.1 Patrones**, **D.2 Modelo matemático**, **D.3 Variable** y **D.5 Relaciones y funciones**, cuya concreción para la asignatura Matemáticas B de 4º ESO respeta el contenido de esta memoria. En la tabla siguiente incluimos una relación entre algunos de los problemas de la secuencia didáctica y los anteriores elementos.

Conocimientos, destrezas y actitudes (Currículo)	**Secuencia didáctica**	
	Problema	**Adecuación**
D.1 Patrones	P2, P11, P12 y también E7 y E8.	En estos problemas (y ejercicios) se trabaja, bien explícitamente como en P2, bien a través de la periodicidad, como en el resto, la identificación de patrones en los modelos funcionales.
D.2 Modelo matemático	Todos los problemas de la secuencia	La modelización y la resolución de problemas de la vida cotidiana mediante el uso de representaciones matemáticas y del lenguaje algebraico está en el centro de la secuencia, así como el uso de modelos funcionales y del análisis e interpretación de situaciones de la vida cotidiana basados en dichos modelos.
D.3 Variable	P1, P5, P4, P9, P13, y en menor medida en todos los problemas.	En los problemas seleccionados se da un mayor peso a la identificación de variables en la construcción de las representaciones matemáticas de las funciones, y específicamente, a las relaciones entre las mismas y la TVM. Además, en todo el resto de la secuencia se hace uso frecuente de cambios entre representaciones de funciones que modelizan situaciones realistas en diversos contextos, lo que ayuda a integrar el conocimiento respecto a las variables.

D.5 Relaciones y funciones	Todos los problemas de la secuencia.	A lo largo de toda la secuencia, los problemas muestran relaciones cuantitativas entre situaciones de la vida cotidiana, y se introducen las propiedades y las representaciones de funciones, así como la interpretación de datos y de funciones de forma contextualizada, con un espíritu de modelización como establece la ley.

Tabla 6: Relación de problemas con los conocimientos, destrezas y actitudes que establece el currículo de la LOMLOE para la comunidad autónoma de Aragón.

Además, cabe destacar que el punto B.2 Cambio, incluido en el saber **B. Sentido de la medida**, se trabaja también en esta secuencia mediante los problemas destinados a adquirir las técnicas **T6**, **T7** y **T8**, las cuales tratan la monotonía de funciones, sus extremos y la TVM.

Finalmente, al igual que en la antigua ley era necesario trabajar el Bloque 1 del currículo, y fomentar las actitudes positivas del alumnado hacia las matemáticas, la LOMLOE va un paso más allá en la humanización de la escuela y de sus procesos, estableciendo, en el contexto de las matemáticas, el saber **F. Sentido socioafectivo**. En este sentido, este saber no es algo que se trabaje directamente en esta secuencia didáctica mediante la aplicación de una serie de problemas, sino más bien una serie de consideraciones metodológicas y de praxis, pues es labor del profesor lograr llamar a la motivación intrínseca del alumnado, así como servir como guía para que el alumnado desarrolle buenas capacidades de gestión emocional.

Para lograr esto, como se ha establecido en el cuerpo principal del trabajo en las secciones destinadas a la metodología, y en la secuenciación, se realizarán sesiones de trabajo en el aula en parejas, o pequeños grupos, y el profesor hará la labor de guiar al alumnado, seleccionar las resoluciones más relevantes, pero también corregir, de forma positiva, posibles errores. Además, también se institucionalizarán las técnicas en el aula, bien mediante producciones del alumnado, bien mediante exposición del docente, y se dará feedback frecuente al alumnado, en interacción oral, nunca desde la magnificación del error sino poniendo el foco en las dificultades para corregirlas, y para lograr que el alumnado integre de forma positiva la corrección como una parte más del proceso de enseñanza-aprendizaje. Todo ello se considera en los puntos **F.1** y **F.2** de la Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, y ya se anticipaba en la realización de este documento.

Finalmente, el desarrollo de las sesiones mediante resolución de problemas y con el foco del trabajo en el aula, y no en casa, está en sintonía con lo que estipula la nueva ley en sus orientaciones metodológicas, si bien haría falta una revisión más completa para adecuar el 100% del contenido de esta memoria a las mejoras e innovaciones didácticas y metodológicas que introduce la LOMLOE.

Respecto a las diferencias fundamentales que tiene esta secuencia con la ley antigua y como debería modificarse en adecuación al nuevo marco normativo destacamos la eliminación de los **estándares de aprendizaje evaluables**. En el nuevo marco normativo, estos elementos desaparecen, estando vinculados ahora los **criterios de evaluación** a las diferentes **competencias específicas** que se deben desarrollar en las matemáticas. Además, los criterios de evaluación de la nueva ley son amplios, permitiendo, en palabras del texto de la Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, lograr que la evaluación sea formativa, continua e integradora y que tenga en cuenta su progreso en el conjunto de los procesos de aprendizaje, y no solo de forma aislada mediante estándares de aprendizaje específicos que encorsetan los procesos de aprendizaje.

Para finalizar, cabe destacar que, en el espíritu de la nueva ley, el docente no debe tanto diseñar contenidos específicos, que también, sino promover y diseñar **situaciones de aprendizaje** las cuales deben estar contextualizadas y cercanas a las experiencias del alumnado y su forma de comprender la realidad. Estas situaciones deben garantizar debe la transferencia de los aprendizajes adquiridos para su posterior articulación coherente y eficaz en forma de los diferentes conocimientos, destrezas y actitudes propios de cada etapa educativa. En este sentido, la propuesta no solo debería cambiar de nomenclatura normativa, sino también articularse en torno a estas situaciones, más ricas y útiles para los procesos de enseñanza-aprendizaje.