Trabajo Fin de Máster

Una secuencia didáctica para la introducción del logaritmo en cuarto de la ESO

A didactic sequence proposal for the introduction of the Logarithm in the fourth year of ESO

Autor:

Lorenzo José Escané Amat

Director:

Pablo Beltrán Pellicer

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2022/2023

Índice de contenidos

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar

El objeto a enseñar se trata del logaritmo, desde un punto de vista introductorio, tanto en su vertiente aritmética(numérica y operatoria) como funcional. De manera tangente, se verán también las escalas logarítmicas y las reglas de cálculo.

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático

De acuerdo al currículo de la ESO LOMLOE, recogido en la ORDEN ECD/1172/2022, de 2 de agosto, los logaritmos se introducen por primera vez en la asignatura de 4º de la ESO de matemáticas B, recogidos como saberes bajo el sentido numérico, en *A.2 Sentido de las operaciones*, y el algebraico y pensamiento computacional, en *D.2 Modelo matemático*.
Cada uno de estos sentidos hace referencia al aspecto aritmético operatorio y funcional del objeto respectivamente.

3 ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Los problemas a enseñar son los que corresponden a la siguiente clasificación:

- Problemas según el contexto:

Encontramos tres tipos de contextos para los problemas cuando no son intramatemáticos, estos son los que se sustentan en los modelos de crecimiento exponencial, aquellos que involucran a las escalas logarítmicas y los que se basan en las reglas de cálculo:

- ♦ (ME) Problemas que provienen de un modelo de crecimiento exponencial, se puede subdividir en los siguientes tipos de contextos del modelo:
  - ❖ (MEB) Crecimiento exponencial biológico: como puede ser el ejemplo de un tipo de bacteria que se duplica cada cierto tiempo o de desertización.
  - ❖ (MEF) Crecimiento exponencial físico: problemas como la datación a través del carbono catorce.
  - ❖ (MEE) Crecimiento exponencial económico: problemas de interés compuesto.

♦ (EL) Problemas de escala logarítmica: se presentan magnitudes que son demasiado dispares en su orden y se quiere realizar alguna agrupación de los datos_

- ❖ (ELE) Elaboración de escalas logarítmicas: incluye tanto la justificación del uso deuna escala logarítmica como su tabulación y representación.
- ❖ (ELI) Interpretación de escalas logarítmicas: tratan de la interpretación de escalas logarítmicas una vez elaboradas.

♦ (RC) Problemas relacionados con las reglas de cálculo: se trata del uso de las reglas de cálculo, cabe destacar que el objetivo no es saber usar una regla de cálculo sino que sirvan de apoyo para la comprensión y estudio de las propiedades de los logaritmos:

- ❖ (RCC) Creación de reglas de cálculo: está a caballo entre los problemas de escala logarítmica y los de reglas de cálculo por sustentarse la creación de estas últimas en las primeras.
- ❖ (RCA) Problemas de multiplicación usando reglas de cálculo: se basan en la adición.
- ❖ (RCS) Problemas de división usando reglas de cálculo: se basan en la sustracción.

- Problemas con foco en el registro:

Según el tipo de registro en el que se presenta el logaritmo, (simbólico, tabular o gráfico) encontramos diferentes tipos de problemas siendo alguno propios del registro y otros asociados al cambio entre registros.

♦ (G) Propios del registro gráfico tenemos problemas del tipo:

- ❖ (GId) Identificación de tipo de función (nos centramos en exponencial y logarítmica).
- ❖ (GOBI) Obtención de la gráfica asociada a la función inversa dada otra.
- ❖ (GInfP) Inferencia de propiedades a través de la expresión gráfica.

♦ (S) Propios del registro simbólico encontramos los que corresponden al manejo de las propiedades del logaritmo a través de su definición como inversa aritmética de la exponencial fijada la base, tenemos:

- ❖ (SCVS) Cálculo del valor numérico de un logaritmo a través de propiedades simples.
- ❖ (SEL) Ecuaciones logarítmicas sencillas a través de propiedades.

- ♦ (T) Propios del registro tabular:
    - ❖ (TInfP) Inferencia de propiedades a través de la expresión tabular.

- ♦ (CR) Los cambios entre registro son en sí mismos una familia de problemas que podemos clasificar en:
    - ❖ (CR SG) Cambio de registro simbólico a gráfico.
    - ❖ (CR GS) Cambio de registro gráfico a simbólico. Apareciendo estas dos de manera combinada como:
        - ▪ (CR S-G) Asociación entre gráficas y fórmulas. Lo consideraremos un subtipo perteneciente a los dos previos.

- Problemas centrados en el valor numérico del logaritmo:

Tratan sobre el logaritmo en su vertiente más puramente numérica, aunque se sirven ampliamente del aspecto funcional y de las diversas representaciones que de este surgen para su resolución:

♦ (CV) Comparación de logaritmos de cantidades: según si se trata de la misma base o no tendremos:

- ❖ (CV MB) Comparación de logaritmos de cantidades de la misma base.
- ❖ (CV DB) Comparación de logaritmos de cantidades de distinta base.

- ♦ (AV) Acotación del valor del logaritmo (restringido a enteros).

Siendo las **técnicas** asociadas:

- ♦ (T ME) Técnicas asociadas a los modelos de crecimiento exponencial.

- ♦ (T EL) Técnicas asociadas a las escalas logarítmicas.

- ♦ (T RC) Técnicas asociadas a las reglas de cálculo.

- ♦ (T G) Técnicas asociadas al registro gráfico:
    - ❖ (T GId) de identificación gráfica.
    - ❖ (T GOBI) De simetría.
    - ❖ (T GInfP) De inferencia de propiedades gráficas.

- ♦ (T S) Técnicas del registro simbólico:

- ❖ (T SCVS) De comparación de valor con el foco en lo simbólico.
- ❖ (T SEL) De resolución de ecuaciones logarítmicas simples.

♦ (T T) Técnicas del registro tabular:

- ❖ (T TInfP) De inferencia de propiedades gráficas.

♦ (T CR SG) Técnicas de cambio de registro de simbólico a gráfico:

♦ (T CR GS) Técnicas de cambio de registro de gráfico a simbólico:

- (T CR S-G) Técnicas de asociación entre gráficas y fórmulas.

♦ (T CV) Técnicas de comparación de logaritmos de cantidades.

♦ (T AV) Técnica de acotación del valor del logaritmo (restringido a enteros).

Por último, las **tecnologías** que se mostrarán están:

♦ Basadas en el modelo exponencial.
♦ Basadas en la experimentación.
♦ Basadas en demostraciones en pizarra tras exploración numérica.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático? Y 2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

De cara a responder a las preguntas que dan nombre a este subapartado, se ha realizado el análisis de tres libros de cuarto de la ESO, sobre lo referido al logaritmo, pertenecientes a distintas casas, siendo estas SM, el grupo Azarquiel y Marea Verde . Pero es necesario señalar que, tras la reforma de la ley, es natural y lógico que se observen en estos un espíritu distinto al que encontraremos en el currículo para el logaritmo.

Los libros de cuarto de la ESO analizados han sido en concreto:

♦ Proyecto Azarquiel Matemáticas: Orientaciones didácticas Segundo ciclo 4º B de E.S.O. (2001) de ediciones de la Torre.

♦ Ábaco, matemáticas, 4 ESO, 2º ciclo, opción B. Recursos didácticos (2008) de la editorial SM.

♦ Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 4ºB de ESO (2014) de Textos Marea Verde.

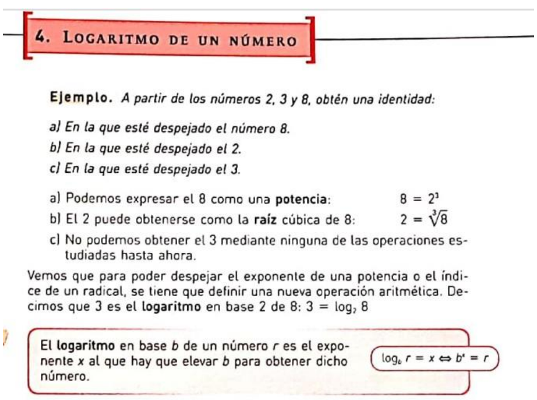
Indicaremos primero la estructura y presentación teórica de los contenidos y después trataremos sobre los problemas. Al final de la sección, realizaremos una recopilación de los campos de problemas, técnicas y tecnologías que habremos encontrado teniendo en cuenta los criterios para esta clasificación de los apuntes de diseño instruccional de matemáticas de Cid y Muñoz (2022).

Análisis del libro de la editorial SM:
Análisis del libro del profesor de matemáticas opción b de Álvarez et al. (2008)

Se presenta por separado en dos unidades distintas: una titulada "potencias, raíces y logaritmos", que es la última unidad del bloque de números, y en otra llamada "funciones exponenciales y logarítmicas", siendo la última del bloque de funciones.

Potencias, raíces y logaritmos:

En la primera de estas, aparece en la introducción un recordatorio de las propiedades de las potencias donde se recuerda el significado de elevar un número a un natural n como producto de n veces ese número. La propia unidad se divide de manera secuencial en: "notación científica", "potencias de exponente fraccionario: Radicales", "operaciones con radicales" y "Logaritmo". Se presenta de esta forma a los radicales mediante los exponentes fraccionarios a través de extensiones de las propiedades que deberían cumplir estas si se comportasen al igual que los exponentes naturales. Puesto que en el apartado teórico del tema no se hace referencia a ningún modelo de crecimiento exponencial, el logaritmo queda presentado como inversa aritmética de la exponencial fijada la base. La presentación que hacen del mismo es bastante artificiosa (ver Figura 1) y no especifica que la base deba ser positiva en ningún momento. Esto, puede generar problemas al tratar de definir sus características como función puesto que el alumno puede interpretar que, al poder ejecutar el cálculo por la definición de valores no contemplados, como $\log_{-2}(-8)=3$, a veces el logaritmo tenga sentido en valores negativos.


4. LOGARITMO DE UN NÚMERO

Ejemplo. *A partir de los números 2, 3 y 8, obtén una identidad:*

a) En la que esté despejado el número 8.
b) En la que esté despejado el 2.
c) En la que esté despejado el 3.

a) Podemos expresar el 8 como una **potencia**: $8 = 2^3$
b) El 2 puede obtenerse como la **raíz** cúbica de 8: $2 = \sqrt[3]{8}$
c) No podemos obtener el 3 mediante ninguna de las operaciones estudiadas hasta ahora.

Vemos que para poder despejar el exponente de una potencia o el índice de un radical, se tiene que definir una nueva operación aritmética. Decimos que 3 es el **logaritmo** en base 2 de 8: $3 = \log_2 8$

El **logaritmo** en base *b* de un número *r* es el exponente *x* al que hay que elevar *b* para obtener dicho número. $\log_b r = x \Leftrightarrow b^x = r$

Figura 1 SM

Sobre las propiedades y definiciones asociadas al logaritmo, salvo el cambio de base (que no aparece en el resumen final del tema), todas se dan con un ejemplo y se deja indicado que se pueden demostrar a través de propiedades de la exponencial, aunque no se da demostración explícita. Y sobre el logaritmo decimal y neperiano se indica su definición y tecla asociada en la calculadora. Es curioso que, aun estando situados en el mismo tema, no se explore la relación entre la parte entera del logaritmo decimal y la notación científica salvo de manera tangencial en el ejercicio 56 (Figura 2) en forma de patrón, aunque no se hace explícita. Tampoco se trata de dar ningún sentido al logaritmo neperiano.

56 Si $\log 2 = 0{,}301$, ¿cuánto valdrá $\log 20$? ¿Y $\log 200$? ¿Y $\log 2000$? ¿Qué número tendrá por logaritmo 8,301?

Figura 2: Ejercicio 56 del libro de la editorial SM

<u>Sobre los problemas de esta unidad:</u>

En torno a los contextos de los problemas y ejercicios en este tema, en lo referido al logaritmo, casi todos los problemas y ejercicios carecen de contexto extramatemático salvo cuatro de ellos. De estos, uno trata sobre dobles de papel, otro de modelos de crecimiento biológico y dos de escala logarítmica asociado a un contexto físico (intensidad del sonido).

Respecto a las técnicas de resolución, es interesante observar la algebrización que recibe el cálculo del logaritmo conocido una serie de valores:

Se plantean primero problemas de cálculo de logaritmo para potencias de la base, estos se justifican con ejemplo numéricos y referencias a las propiedades. Se añade luego el conocimiento de un valor numérico sobre el que se trabaja de manera similar a la anterior y por último se da una total algebrización del problema:

EJERCICIO RESUELTO

47 Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 0{,}25$ c) $\log_4 2$

b) $\log 0{,}001$ d) $\log_9 27$

a) $\log_2 0{,}25 = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2$

b) $\log 0{,}001 = \log \frac{1}{1000} = \log \frac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3$

c) $4 = 2^2 \rightarrow 2 = \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} \rightarrow \log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

d) $9 = 3^2 \rightarrow 3 = \sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$; $27 = 3^3 = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 9^{\frac{3}{2}}$

$\log_9 27 = \log_9 9^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

EJERCICIO RESUELTO

49 Conociendo los valores aproximados de $\log 2 = 0{,}301$ y $\log 3 = 0{,}477$, calcula los siguientes usando las propiedades de los logaritmos.

a) $\log 24$ b) $\log 5$

a) $\log 24 = \log(2^3 \cdot 3) = \log 2^3 + \log 3 =$
$= 3\log 2 + \log 3 = 3 \cdot 0{,}301 + 0{,}477 = 1{,}38$

b) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$

EJERCICIO RESUELTO

53 Sabiendo los valores de $\log a = 0{,}5$ y $\log b = 0{,}3$, calcula $\log \sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot b}{10}}$.

Usando las propiedades de los logaritmos,

$$\log \sqrt{\frac{a^2 \cdot b}{10}} = \frac{1}{3}\log \frac{a^2 \cdot b}{10} = \frac{1}{3}(\log(a^2 \cdot b) - \log 10) =$$
$$= \frac{1}{3}(\log a^2 + \log b - 1) = \frac{1}{3}(2\log a + \log b - 1)$$

Se sustituyen los valores dados.

$$\log \sqrt{\frac{a^2 \cdot b}{10}} = \frac{1}{3}(2 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 - 1) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}3 = 0{,}1$$

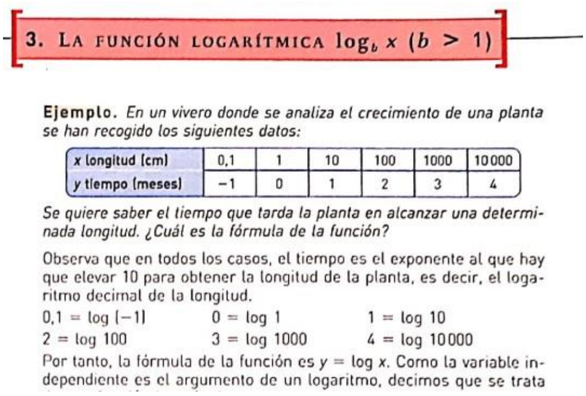
Figura 3: Este formato es muestra de una clara intencionalidad de enseñanza para la resolución de problemas,el logaritmo carece de sentido más allá de sus propiedades.

Aparece también un único problema de agrupamiento de expresiones logarítmicas de la misma base con literales y otro problema de ecuación logarítmica. El resto son de cálculo de valor numérico del logaritmo mediante propiedades.

Funciones exponenciales y logarítmicas:

La presentación del segundo tema “Funciones exponenciales y logarítmicas” es la misma que el anterior, añadiendo las propiedades del logaritmo incluido el cambio de base. Cabe destacar que tampoco se señala aquí que la base del logaritmo deba ser positiva. El tema se compone de cinco apartados: “Función exponencial con base mayor que 1”, “Función exponencial con base entre 0 y 1”, “Función logarítmica con base mayor que 1”, “Función logarítmica con base entre 0 y 1” “Relación entre funciones exponenciales y logarítmicas”. De esta ordenación, se desprende una preferencia por la exposición de la función exponencial antes que la logarítmica.

La función exponencial se introduce con un modelo de crecimiento poblacional por bipartición bacteriano (ver Figura 4), el cuál es discreto, y que no tiene sentido extender a valores negativos de tiempo por comenzar con una única bacteria. Esto podría generar un obstáculo didáctico ya que la tabla se extiende a valores intermedios y negativos sin justificación. El ejemplo que se da para introducir la exponencial con base entre 0 y 1 es más acertado al tratarse de la desertización de un terreno y admitir por tanto un tratamiento continuo. Los modelos asociados a la presentación del logaritmo siguen un recorrido similar, para presentar el de base mayor que 1 dan una tabla de valores de la longitud de una planta en un vivero durante 6 meses y, tras observar que los valores responden a la fórmula *longitud (en cm)*=$10^{(número\ de\ meses)}$ en la tabla, imponen que tiene crecimiento exponencial, es decir, que le mes sexto medirá 10 kilómetros y el séptimo 100 kilómetros.



3. La función logarítmica $\log_b x$ $(b > 1)$

Ejemplo. *En un vivero donde se analiza el crecimiento de una planta se han recogido los siguientes datos:*

x longitud (cm)	0,1	1	10	100	1000	10000
y tiempo (meses)	−1	0	1	2	3	4

Se quiere saber el tiempo que tarda la planta en alcanzar una determinada longitud. ¿Cuál es la fórmula de la función?

Observa que en todos los casos, el tiempo es el exponente al que hay que elevar 10 para obtener la longitud de la planta, es decir, el logaritmo decimal de la longitud.

$0{,}1 = \log(-1)$ $\quad 0 = \log 1$ $\quad 1 = \log 10$

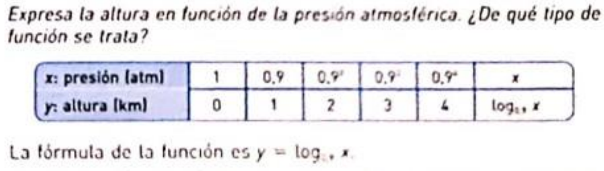
$2 = \log 100$ $\quad 3 = \log 1000$ $\quad 4 = \log 10000$

Por tanto, la fórmula de la función es $y = \log x$. Como la variable independiente es el argumento de un logaritmo, decimos que se trata

Figura 4: Presentación logaritmo con base mayor a 1

Sus características como función, tales como el dominio, recorrido y crecimiento; se extraen realizando una tabla con los valores que devuelve la calculadora con la tecla Log, se entiende entonces la elección de los valores de este ejemplo: trata de aprovechar para explicar al mismo tiempo el uso de esta tecla en la calculadora.

En lo que respecta a la introducción del logaritmo de base entre 0 y 1, su introducción se basa en la determinación de la altura sobre el mar a través de un barómetro (ver Figura 5), ejemplo más natural aunque se le podría señalar que no da pie a valores negativos de la imagen de la función o que la tabla que realizan la generan dando los valores de la presión según la altura, es decir, generan la tabla a través de los valores de la función inversa a la que se quiere encontrar (aunque es natural porla naturaleza del logaritmo), por lo que no queda expresada de la manera habitual, con saltos constantes en la variable dependiente.



Expresa la altura en función de la presión atmosférica. ¿De qué tipo de función se trata?

x: presión (atm)	1	0,9	$0{,}9^2$	$0{,}9^3$	$0{,}9^4$	x
y: altura (km)	0	1	2	3	4	$\log_{0,9} x$

La fórmula de la función es $y = \log_{0,9} x$.

Figura 5: Problema del barómetro

El último apartado de este tema introduce el concepto de función inversa a través de un ejemplo no biyectivo: elevar al cuadrado y tomar raíces. Trata de usar este ejemplo para justificar la simetría entre gráficas de funciones inversas respecto a la recta Y=X, pero al no darse el caso para valores negativos del eje de abscisas optan por representar la función solo donde se cumple la relación (primer cuadrante) pudiendo generar un obstáculo didáctico (Figura 6). Posteriormente se verifica esta propiedad con las funciones exponenciales y logarítmicas de la misma base.

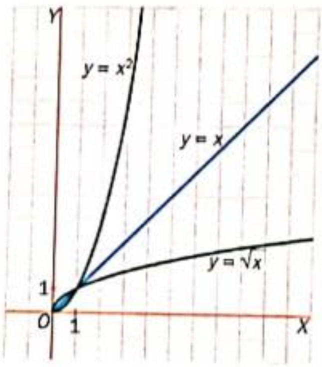


Figura 6

Es interesante observar que se fracciona el estudio de ambas funciones según el valor de la base en vez de relacionar las gráficas con las propiedades, pudiendo aplicarse el cambio de base para ello: $\log_{\frac{1}{b}}(x) = \log_{\frac{1}{b}}(b)\log_b(x) = -\log_b(x)$. Así, encontramos por un lado la presentación de la función logarítmica de base mayor a 1 y, posteriormente, la de base entre 0 y 1. Sería interesante preguntar a los alumnos que experimentan esta enseñanza por la “forma” general de la función logarítmica, ya que encontramos en Leinhardt et al (1990) la importancia de los primeros ejemplos como los principales focos de los conceptos.

<u>Sobre los problemas y ejercicios de esta unidad:</u>

En lo que respecta a los contextos, en este tema aparecen modelos de crecimiento exponencial de tres tipos: biológicos, como el crecimiento bacteriano del ejemplo introductorio, físicos, como el ejemplo de variación de altura y presión, y económicos, de interés compuesto (Ver Figura 7). Sin embargo, encontramos que muchos de los problemas no tienen contextos que no sean intramatemáticos, siendo los problemas relacionados con gráficas y el cálculo de valores los más habituales.

71 La población de España crece a un ritmo del 3% anual. En el año 2006, en España vivíamos 45 millones de personas.
a) ¿Cuántas personas vivirán en España a mediados de 2015?
b) Expresa algebraicamente el número de habitantes de España en función de los años transcurridos desde 2006.
c) Expresa algebraicamente los años transcurridos desde 2006 en función del número de habitantes de España.

72 El radio Ra^{226} tiene un período de semidesintegración de 1600 años.
a) ¿Cuánto tardarán 4 gramos de Ra^{226} en reducirse a la mitad?
b) Escribe la función que da la masa resultante de la desintegración de m gramos de Ra^{226} en función de los años transcurridos.
c) ¿Cuántos años tardarán esos 4 gramos de Ra^{226} en transformarse en 3 gramos?

78 Al cabo de 11 años, un capital colocado al 4% de interés compuesto anual se ha convertido en 10006,45 euros.
a) ¿Qué capital se ingresó hace 11 años?
b) ¿Qué función proporciona el tiempo transcurrido desde el ingreso en función del capital generado?

Figura 7: Contexto biológico — Contexto físico — Contexto económico

Tenemos en realidad una batería de ejercicios contextualizados que se reducen a sustituir en la fórmula del crecimiento exponencial $S(t)=S_{t_0}\left(1\pm\frac{i}{100}\right)^{a(t-t_0)}$ que no se demuestra ni justifica y clasifican según si se trata de situaciones de crecimiento o de decrecimiento (Ver Figura 8).

PROBLEMA RESUELTO

30 La superficie de un bosque aumenta un 3,5% al año. ¿Cuánto tardará en duplicarse?

Como la superficie aumenta exponencialmente:

$S_f = S_i\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$

Si se duplica la superficie $S_f = 2S_i$:

$2S_i = S_i\left(1+\frac{3,5}{100}\right)^t;\ 2 = 1,035^t$

$t = \log_2 1,035 = \frac{\log 2}{\log 1,035} = 20,15$ años

Tardará, aproximadamente, 20 años y 55 días.

PROBLEMA RESUELTO

41 La superficie de bosque del planeta está decreciendo a razón de un 2% anual.
¿Cuántos años pasarán hasta que dicha superficie represente el 65% de la actual?

Como la superficie de bosque decrece exponencialmente:

$S_f = S_i\left(1-\frac{i}{100}\right)^t$

La superficie final va a representar el 65% de la actual, es decir, $S_f = 0,65\ S_i$:

$0,65\,S_i = S_i\left(1-\frac{2}{100}\right)^t;\ 0,65 = 0,98^t.$

$t = \log_{0,98} 0,65 = \frac{\log 0,65}{\log 0,98} = 21,3$ años

Pasarán 21 años y 4 meses, aproximadamente.

Figura 8: Con crecimiento — Con decrecimiento

Vuelven a aparecer los ejercicios de cálculo de logaritmos mediante el uso de propiedades simples, aunque no se añade ninguna técnica nueva a través de las funciones (como podría ser la aproximación numérica) y aparece como problema habitual el paso de registro simbólico al gráfico. Este problema pasa por dos técnicas sucesivas (Ver Figura 9). La primera consiste en pasar al registro tabular como paso intermedio para después pasar al gráfico y la segunda aprovecha el conocimiento de la forma de la función sin desplazamientos para ver la forma tras aplicar una traslación.

EJERCICIO RESUELTO

25 Representa la función del logaritmo neperiano $y = \ln x$.

Formamos una tabla de valores utilizando la tecla ln de la calculadora.

x	y
0,1	−2,30
0,5	−0,69
1	0
5	1,61
10	2,30
50	3,91
100	4,61

Con estos puntos trazamos la gráfica.

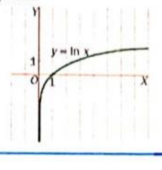


Figura 9: Las dos técnicas

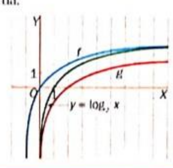
EJERCICIO RESUELTO

27 A partir de la gráfica de la función $y = \log_2 x$, representa las gráficas de las funciones siguientes.

$f(x) = \log_2 (x+1)$ $\qquad g(x) = \log_2 x - 1$

La gráfica de la función f se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = \log_2 x$ una unidad a la izquierda.

La gráfica de la función g se obtiene trasladando la gráfica de la función $y = \log_2 x$ una unidad hacia abajo.



Relacionados con gráficas encontramos también ejercicios de comparación de crecimiento de manera visual entre funciones de distinto tipo y uno de graficar la inversa de una función mediante la propiedad de simetría respecto a la bisectriz.

Encontramos dos problemas especialmente interesantes que tratan sobre las propiedades del logaritmo: el 59 a), puesto que enfrenta la falsa linealidad del logaritmo que pueden suponer los alumnos al plantearles si es cierto que $\log(3)+\log(2)=\log(5)$, y el 38i) puesto que pide por primera vez graficar $\mathrm{Log}_{0.5}(x^7)$ siendo necesario aplicar propiedades del logaritmo, aunque no se da técnica ni observación para esto.

A modo de conclusión:

SM presenta mediante una metodología basada en la resolución de problemas de manera bastante inconexa ambos aspectos del logaritmo. Es cierto que aprovecha la calculadora a modo de herramienta auxiliar, pero carece de otros recursos digitales que permitan visualizar de manera más sencilla efectos de traslaciones en gráficas o del cambio de la base en las funciones. En general, el logaritmo queda bastante injustificado en su enseñanza y la mayor parte de su utilidad parece darse solo de manera razonable como herramienta de cálculo en los problemas de interés compuesto. Su interés como función tal y como se muestra es poco y presentar la propiedad de simetría respecto a la exponencial de la misma base fuerza a acelerar la adquisición de los contenidos asociados a la función inversa, no siendo claro que se pueda intuir el significado de la inversa funcional con este enfoque. La metodología asociada a la adquisición de las técnicas está bastante lograda y presenta ciertos problemas interesantes.

Análisis del libro del grupo Azarquiel:

Análisis del libro de orientaciones didácticas de 4º B de E.S.O. de Alonso et al. (2001).

En este libro el logaritmo aparece únicamente en el séptimo tema “Función exponencial y logarítmica”, aparece con anterioridad la notación exponencial fraccionaria, pero al igual que en el libro anterior se usa solo con vistas a los radicales y no para abordar el concepto de logaritmo.

Función exponencial y logarítmica:

En este séptimo tema, indica en la introducción las razones de su elección de realizar el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas de manera separada al resto y es que clasifican desde el inicio al logaritmo como una “función inversa, por definición, y se trata siempre como tal,…” El planteamiento que se le da de partida al logaritmo es de herramienta de cálculo para modelos exponenciales y el estudio de sus propiedades se realiza con el objetivo de realizar mejor estos cálculos, por ello manifiestan que no pretenden indagar en temas tales como ecuaciones exponenciales o logarítmicas ni las propiedades de los logaritmos, no apareciendo en todo el tema el cambio de base. Sin embargo, sí que queda dentro de sus objetivos el mostrar el crecimiento de ambas funciones de manera comparativa a otras para formar una base de cara al estudio en cursos posteriores de límites (objetivo que el actual currículo no señala, pero es coherente al ver el desarrollo en los años siguientes de los contenidos). Añaden como últimos objetivos la comprensión geométrica y numérica del concepto de función inversa, aunque no buscan profundizar en ella.

El tema se presenta a través de actividades y en la guía se explica la intención de cada una, por ello en el análisis aquí realizado ha resultado difícil separar el tema en un apartado teórico y otro de problemas y se ha decidido entrelazar ambos aspectos por respeto a la naturaleza del formato. Este tema comienza presentando dos modelos de crecimiento exponencial, un árbol genealógico y otro basado en geometría recursiva, se tratan ambos de modelos discretos y en los que no tiene sentido pensar en valores de negativos ni fraccionarios de la variable independiente. Para presentar un modelo en el que esta clase de valores que los modelos anteriores no incluían sean razonables, continua con un problema basado en la datación a través del carbono catorce donde introducen una técnica basada en el tanteo como forma de solucionar esta clase de problemas. Esto, aunque útil e interesante en general para solucionar problemas de cálculo de preimágenes de funciones continuas, resulta problemático para la razón de ser del logaritmo ya que puede quedar desvirtuado ante los alumnos, quedando como un método más rápido para solucionar un problema que ya tiene solución.

Las siguientes actividades buscan realizar un estudio experimental a través de la calculadora del logaritmo decimal como inversa operatoria de 10^x, para ello, comienzan proponiendo buscar patrones en números de la forma $k \cdot 10^x$ con k un número del 1 al 9 y posteriormente proponen trabajar a través de tablas que los procesos $x \rightarrow 10^x \rightarrow \log(Ans) = x$ y $x \rightarrow \log(x) \rightarrow 10^{(Ans)} = x$ funcionan donde esté el logaritmo definido, dando una primera idea de paso intermedio del logaritmo como inversa operatoria y funcional a través del registro tabular. Estas tablas se aprovechan para elaborar el gráfico de ambas funciones y se realiza el estudio de las propiedades de ambas sobre estas. Finalmente, se da la simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante de la gráfica de una función respecto a su inversa, no como una propiedad sin uso, puesto que se requiere usar este método para realizar gráficas de funciones logarítmicas distintas a la decimal al no haberse dado el cambio de base.

Para terminar el estudio funcional de la exponencial y el logaritmo, se presentan actividades de comparación de crecimiento donde la exponencial aparece contextualizada, no así la función logarítmica, frente a funciones de otras clases como las afines y de su misma clase pero distinta base. En el segundo caso, se tabulan primero las exponenciales y se grafican para después obtener las logarítmicas asociadas a cada base mediante la propiedad de simetría estudiada previamente.

La sección final del tema propuesto (sin incluir el repositorio de otras actividades que se da al final del tema, que funcionan a modo de ejercicios) trata de modelos de crecimiento exponencial y un estudio como problema mediante tablas de las propiedades de los logaritmos (no recomendándose en general su demostración). No aparece por tanto el logaritmo neperiano en todo el desarrollo.

Sobre los problemas de esta unidad:

Sobre los contextos de los problemas, se observan modelos de crecimiento biológicos y físicos, no apareciendo económicos, además de intramatemáticos. En relación a las técnicas, aunque se haya mencionado con anterioridad por el formato del texto, aparecen técnicas nuevas como el tanteo pare encontrar solución de un problema que involucre exponenciales, siendo su justificación la continuidad; y el uso de la tabla de una función inversa conocida (en este caso la exponencial) para deducir la función (el logaritmo), sirviendo como justificación el estudio de la inversa operatoria realizado previamente. Por otro lado, no aparecen ni problemas de ecuaciones logarítmicas ni de representación de funciones logarítmicas trasladadas ni actividades de trabajo de técnica mecánicos en el texto salvo en el repositorio final.

Como conclusión:

La propuesta es muy coherente con sus objetivos realizándolos mediante una enseñanza a través de la resolución de problemas. Es muy interesante la articulación que logra entre ambos sentidos del logaritmo, como inversa operatoria y funcional, teniendo como paso intermedio el registro en tabla. También da un uso lógico a presentar la propiedad de simetría en gráficas de funciones inversas debido a que no da el método para calcular el cambio de base. Si se le puede señalar algo negativo es la completa subordinación del logaritmo ante la exponencial que, si se le añade la presentación de la técnica del tanteo que puede resolver satisfactoriamente todos los problemas planteados, deja sin muchas razones de ser al logaritmo.

Análisis del libro de Marea Verde:

Análisis del libro de Marea Verde de matemática opción B cuarto de la ESO de Moya (2014).

El logaritmo se presenta separado en dos unidades al igual que en SM, al final del capítulo 2 “Potencias y raíces” y nuevamente en el 12 de “Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas”.

Potencias y raíces:

La unidad 2 se divide en 6 secciones que avanzan con la notación exponencial a modo de hilo conductor del discurso introduciendo los radicales como el resultado de la inclusión de los racionales a la notación exponencial. Tras ello, se detiene a presentar la notación científica y, en última instancia, se presenta al logaritmo sin relación con el discurso anterior a través de la definición. En este caso se ponen condiciones de más en la descripción verbal puesto que se indica que el argumento del logaritmo debe ser también positivo (no razonándose a través de su significado como inversa de la exponencial, si la base es positiva, sus potencias deben serlo también). El discurso prioriza la traducción a la expresión equivalente en forma exponencial para justificar las afirmaciones tales como que el logaritmo de uno es cero en cualquier base, que justifican indicando que como un número elevado a cero es uno, se cumple la propiedad. Las afirmaciones derivadas directamente de la definición se recogen en cuadros laterales y su redacción en el texto puede resultar confusa como por ejemplo: “Solo tienen logaritmos los números positivos, pero puede haber logaritmos negativos”, para referirse a los posibles argumentos del logaritmo y los valores que este puede tomar. Posteriormente hay un subapartado de esta sección dedicado a las propiedades algebraicas del logaritmo clasificándolas con bastante exhaustividad: suma de logaritmos, diferencia, logaritmo de una potencia (diferenciando el caso radical) y el cambio de base. Esta última, aparece sin demostración aquí y no aparece en el resumen final del tema.

Sobre los problemas y ejercicios de esta unidad:

Es destacable que en la autoevaluación que aparece al final del tema, el único tipo de problema que no tiene representación en la autoevaluación son los que involucran logaritmos. No existe ningún contexto asociado al logaritmo más que el calcular. Aparecen aquí ejercicios de cálculo simple a través de propiedades, cuya técnica consiste en pasar a la expresión exponencial asociada y calcular ahí, y ejercicios de expansión y agrupación de expresiones logarítmicas.

Los problemas de extensión consisten en desarrollar en suma o diferencia de logaritmos el logaritmo de una expresión con literales, la técnica asociada consiste en aprovechar las propiedades de los logaritmos para separar las expresiones que contengan dos o más variables distintas y, una vez atomizado, agregar las que contengan a la misma variable también a través de las propiedades. Esta clase de problemas tienen un enfoque muy parecido al que se da en SM en su primer tema para el cálculo del valor de los logaritmos conocido una serie de valores, aunque no realiza el proceso de abstracción y salta directamente al último paso de proceso que desarrollan en esa editorial. Por otra parte, los problemas de agrupamiento son el inverso del anterior y consisten en pasar de una combinación lineal de logaritmos a un único logaritmo. La lógica de la realización de este tipo de problemas es la preparación para la resolución de ecuaciones logarítmicas, aunque en este tema no se dan. Ambas técnicas quedan justificadas por la certeza de las propiedades de los logaritmos.

Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas:

El logaritmo durante el capítulo 12 recibe una reintroducción completa que no experimenta la función exponencial. Esta última se presenta aquí nuevamente a través de un modelo de crecimiento bacteriano (Ver Figura 10), aunque esta vez de razón no natural. Cada bacteria se divide en uno con cuatro bacterias, admitiendo cantidades fraccionarias de bacterias en tiempos positivos, aunque indica que en el ejemplo no se dan valores para tiempos negativos por no tener sentido un número de horas negativas, poniendo un límite injustificado a su modelo de crecimiento cuando ya ha admitido valores no discretos de partida. Es razonable que los alumnos puedan dudar de que deben tener en cuenta a la hora de aceptar un modelo como válido si los ejemplos a desarrollar no son coherentes en sus restricciones.

Número de bacterias en cada hora
(**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (*x*)	**Núm. bacterias (*y*)**
0	1
1	1.4
2	1.96
3	2.74
4	3.84
5	5.38
6	7.53
...	...

Figura 10: El modelo se acompaña de una tabla donde se observa que las fracciones de bacteria se aceptan en el modelo.

En la presentación de las características de la función exponencial es interesante observar que presenta las gráficas de la exponencial de base 2 y ½ al mismo tiempo, facilitando que se observe desde un primero momento la propiedad de simetría que se da entre ellas. Durante sucesivos ejemplos se repite esta presentación por pares de funciones que tengan sus bases inversas. Sería interesante que señalasen explícitamente la relación que se da entre las tablas para comprender el porqué se da esa relación sin necesidad de abordar explícitamente el registro simbólico.

La reintroducción del logaritmo vuelve a pasar a través de la definición que lo vincula de manera operatoria a la exponencial. Se rememora que el logaritmo de uno es cero y el de la base es uno con vistas a realizar cambios de registro del simbólico al gráfico. También, con el mismo objetivo, añaden una sección de uso de calculadora junto a una de cambio de base para realizar tablas de valores del logaritmo de manera directa. Se da asimismo una breve recopilación de propiedades del logaritmo sin demostración, cuyo uso se da en la resolución de ecuaciones logarítmicas, las cuales surgen del modelo del interés compuesto que se presenta después (aunque nunca se llega a relacionar con el aspecto de función, solo con el cálculo).

Tras esta parada en el aspecto operatorio, se aborda el logaritmo en el plano de las funciones. Para ello, se presentan de igual forma que en la exponencial dos logaritmos enfrentados de base dos y un medio observándose claramente la simetría que poseen. A continuación, se derivan de la pareja de logaritmos de bases tres y un tercio las características de las funciones logarítmicas tales como el dominio, recorrido, crecimiento y asíntotas. En esta presentación no se comparan las gráficas con otras de su mismo tipo (las funciones citadas anteriormente aparecen por parejas separadas, no se pueden comparar de manera sencilla las gráficas ni se hacen observaciones sobre las tablas que las acompañan que guíen a compararlas) ni de otro como podría ser una radical. El apartado teórico del tema lo cierra la introducción de la función inversa y la propiedad de simetría respecto a la bisectriz. A diferencia de SM, aquí se representan logaritmos frente a exponenciales de bases tanto mayores de uno como entre cero y uno.

Es destacable señalar que el tratamiento del logaritmo como función tiene la duración mínima para introducir las características de este tipo de función ahondando el grueso de la teoría en las propiedades de la expresión algebraica. La relación de biyectividad tampoco se representa mediante tablas aquí o con cuestiones de un modelo, sino mediante una relación algebraica y una afirmación sobre las gráficas, la simetría.

<u>Sobre los problemas y ejercicios de esta unidad:</u>

Sobre los contextos de los problemas, en lo que ataña al logaritmo, solo encontramos cinco contextualizados siendo cuatro de ellos de modelo de crecimiento exponencial (dos biológicos y dos económicos) y uno de escala logarítmica. Todos los de crecimiento se resuelven mediante la misma técnica que en SM, es decir, reduciendo a la fórmula del crecimiento exponencial, y el de escala logarítmica es en realidad una ecuación logarítmica velada siendo la interpretación comparativa de dos datos la única relación con la escala.

Sobre los problemas según la técnica que los resuelve, todos los que aparecen en la unidad anterior se repiten aquí. Además, se introducen las ecuaciones logarítmicas, que requieren agrupar a cada lado de la ecuación en un único logaritmo e igualar los argumentos de cada expresión. En torno al registro gráfico, encontramos problemas de identificación de funciones, observando la forma, de cambio de registro simbólico a gráfico (tanto con paso intermedio de tabla como a gráfico directamente) y de obtención de la gráfica de una función de cierta base a través de la gráfica de la función de base inversa, mediante simetrías respecto a los ejes (las exponenciales sobre el Y y las logarítmicas sobre el X) (Ver Figura 11).

28. Representa en tu cuaderno la función $y = 3^x$ usando una tabla de valores. A continuación, a partir de ella y sin calcular valores, representa las funciones siguientes: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_{1/3} x$.

Figura 11: Ejemplo de problema que contiene los dos últimos tipos explicados anteriormente.

Como conclusión:

En Marea Verde, el primer tema parece dejar bastante desatendido al logaritmo siendo necesario retomarlo en el segundo tema, el cual, al incluir también las funciones trigonométricas sin dar razones para esta agrupación, parece interpretar que la razón habitual de trabajar las funciones logarítmicas y exponenciales en un tema separado es la costumbre y que usar esta unidad a modo de cajón de sastre de funciones nuevas de este curso es apropiado. A cambio de esto, se trabaja poco la expresión gráfica del logaritmo y nada las relaciones entre las tablas de valores de las funciones del logaritmo y la exponencial, tampoco se trabaja la relación entre los aspectos del logaritmo como operación y como función. En lo que a los problemas respecta, la mayoría carecen de contexto extramatemático y dejan sin razón de ser al logaritmo, se trata de una propuesta muy centrada en la enseñanza para la resolución de problemas y estos no requieren de contexto, solo de una estructura que el alumno sepa cómo actuar ante ella. Por otra parte, es interesante el trabajo que se realiza en el aspecto de las simetrías de las funciones exponenciales y logarítmicas y la presentación de estas, tal vez sería interesante que los alumnos tratasen de justificar aquellas que corresponden a los ejes coordenadas.

Resumen de campos de los problemas, técnicas y tecnologías encontrados:

A lo largo de los tres libros hemos encontrado una serie de problema que podemos clasificar según si el foco se encuentra en el contexto, en los registros y sus cambios o en el análisis de los errores. Presentamos ahora una recopilación que mantiene el etiquetado dado al comienzo del trabajo en caso de coincidir:

- Problemas según el contexto:

Encontramos dos tipos de contextos para los problemas cuando no son intramatemáticos, estos son los que se sustentan en los modelos de crecimiento exponencial y aquellos que involucran a las escalas logarítmicas.

♦ (ME) Problemas que provienen de un modelo de crecimiento exponencial, se puede subdividir en los siguientes tipos de contextos del modelo:

- (MEB) Crecimiento exponencial biológico: como puede ser el ejemplo de un tipo de bacteria que se duplica cada cierto tiempo o de desertización que encontramos en el desarrollo teórico de SM.

- (MEF) Crecimiento exponencial físico: problemas como la datación a través del carbono catorce que aparece en los tres libros.

- (MEE) Crecimiento exponencial económico: problemas de interés compuesto.

La técnica consiste en sustituir en la fórmula $C = C_0 (1 \pm \frac{i}{100})^{a(t-t_0)}$ por los valores extraídos del enunciado y trabajar sobre ella. Aparece sin justificación en los libros.

- (EL) Problemas de escala logarítmica: se presentan magnitudes que son demasiado disparesen su orden y se quiere realizar alguna agrupación de los datos.

En esta clase de problemas no se ha observado que los alumnos deban razonar sobre la elección de la escala, reduciéndose en todos los casos a cálculos asociados a la misma de manera ya indicada, por lo que la técnica consiste en aplicar la fórmula indicada en cada caso y aplicar los pasos que se explicitan. No aparece justificación.

Problemas con foco en el registro:

Según el tipo de registro en el que se presenta el logaritmo, (simbólico, tabular o gráfico) encontramos diferentes tipos de problemas siendo alguno propios del registro y otros asociados al cambio entre estos:

- (G) Propios del registro gráfico tenemos problemas del tipo:
    - (GCC) Comparación de crecimiento de dos funciones de manera gráfica.

La técnica consiste en observar que la función queda acotada de manera gráfica por otra en el intervalo representado y extrapolar que se dará esa cualidad para valores suficientemente altos y/o bajos, es decir, que no se cruzarán ambas funciones más. No aparece justificación más que la intuición visual.

❖ (GId) Identificación de tipo de función (nos centramos en exponencial y logarítmica).

La técnica consiste en comparar visualmente la forma de la gráfica y comprobar si verifica una serie de propiedades asociadas como son el dominio, recorrido, crecimiento, etc. Se justifica porque se asume que las propiedades entre las familias de cada función se cumplen por ellas y que la forma de la gráfica es única para cada familia.

❖ (GOIn) Obtención de la gráfica asociada a la función inversa dada otra.

La técnica consiste en aplicar la propiedad de simetría respecto a la bisectriz que se debe dar entre funciones inversas. La propiedad se da de manera axiomática.

❖ (GOBI) Obtención de la gráfica de función exponencial o logarítmica de base inversa a una dada.

La técnica consiste en aplicar la propiedad de simetría respecto a los ejes cartesianos (si es exponencial respecto al eje de ordenadas y si es logarítmica respecto al de abscisas).

♦ (S) Propios del registro simbólico encontramos los que corresponden al manejo de las propiedades del logaritmo a través de su definición axiomática como inversa aritmética de la exponencial fijada la base, tenemos:

❖ (SCVS) Cálculo del valor numérico de un logaritmo a través de propiedades simples.

La técnica consiste en reducir el argumento del logaritmo a una descomposición en producto de potencias de valores conocidos del logaritmo (normalmente dados en el enunciado o conocidos por ser potencias de la base) y aplicar propiedades para obtener una expresión lineal respecto a esos valores conocidos. Se justifica mediante las propiedades del logaritmo y estas a través de la exponencial.

❖ (SDL) Desarrollo de expresiones logarítmicas con parte literal. Se trata de problemas cuyo objetivo es mecanizar el cálculo de logaritmos que hemos visto en (SCVS).

La técnica es la misma que para el caso de valores conocidos acabando con el logaritmo expresado como combinación lineal de tantos logaritmos como literales haya. Su justificación es también igual.

❖ (SAL) Agrupación de expresiones logarítmicas de la misma base con parte literal. Se trata del problema inverso a (SDL) y tiene como objetivo preparar al alumno para la resolución de ecuaciones logarítmicas (SEL).

La técnica consiste en aplicar de manera secuencial las propiedades para acabar agrupando en una única expresión logarítmica la combinación lineal de las anteriores. Se justifica de igual manera que las dos anteriores como se podría esperar por su relación.

- (SEL) Ecuaciones logarítmicas.

La técnica consiste en aplicar la agrupación de logaritmos a cada lado de la igualdad (realizar un problema de tipo SAL a cada lado de la igualdad normalmente) y, una vez todos los elementos están agrupados, pasar a la ecuación equivalente de igualdad entre argumentos de los logaritmos. Se justifica también a través de las propiedades del logaritmo, por cumplirse siempre. Además, el logaritmo queda definido como inversa operatoria respecto a la exponencial.

- (T) Propios del registro tabular:
  - (TInfP) Inferencia de propiedades a través de la expresión tabular.

La técnica consiste en pasar a la expresión asociada en forma de potencia y, sobre esta, se argumenta. Se justifica al asumir que las propiedades de las potencias son válidas, pudiendo haber sido estas justificadas a través del modelo multiplicativo.

- (TCVPreIm) Cálculo del valor de la preimagen del valor de una función continua.

La técnica consiste en realizar un tanteo aproximando a través de la función. No se da justificación.

- (CR) Los cambios entre registro son en sí mismos una familia de problemas que podemos clasificar en:
  - (CR SG) Cambio de registro simbólico a gráfico.

Encontramos dos técnicas, la primera consiste en pasar al registro tabular como paso intermedio y después pasar del tabular al gráfico. No se da justificación tal vez por asumirse que pertenece a otro curso. La segunda técnica usa el conocimiento de las propiedades de la forma de la función a graficar y se esboza esta sin dar puntos. Se justifica por coincidir con la técnica anterior en su resultado.

- (CR GS) Cambio de registro gráfico a simbólico.

La técnica consiste en identificar el tipo de función según su forma y buscar aquellos elementos que intervienen en la expresión simbólica. En el caso del logaritmo, se busca el punto donde alcanza el valor Y=1 y se asocia la coordenada X de ese punto con la base. La justificación es que la forma de la función es una característica del tipo de función.

- (CR S-G) Asociación entre gráficas y fórmulas. Lo consideraremos un subtipo perteneciente a los dos previos.

La técnica consiste en aplicar las técnicas asociadas a (CR SG) o a (CR GS) de manera reiterada y pasar, si fuese necesario, en el registro simbólico a una expresión equivalente. Se justifica por estar ambas técnicas involucradas justificadas.

- (CR SPG) Efecto de propiedades vistas en los registros gráficos y simbólicos entre sí. Por ejemplo, "¿Cómo son las gráficas de $\log_3(x)$ y $\log_{\frac{1}{3}}(x)$? ¿Por qué?"

Se tienen dos técnicas, según el sentido en el que nos movamos. Las propiedades que provienen del registro gráfico se expresan de manera simbólica y se demuestran mediante propiedades del logaritmo. Las propiedades que provienen del registro simbólico se expresan como una relación funcional y se grafican. No se justifican.

Problemas de análisis de errores en producciones:

Son problemas de análisis de producciones erróneas, que podemos especificar en el caso del logaritmo y exponencial encontrando en los libros solo la primera:

- (AE FL) Análisis de producciones erróneas que muestre uso erróneo de propiedades del logaritmo, incluyendo la linealidad.
- (AE PP) Análisis de producciones erróneas que muestren uso erróneo de propiedades las potencias.

No se da técnica, solo se muestra el problema.

Tabla resumen:

Damos a continuación una tabla que compara los campos de problemas de los que se ha hablado en el subapartado anterior. Hemos usado la notación *nombre i* en caso de que los libros tuviesen varios temas, de esta manera el primer tema en el que aparece el logaritmo de cada uno de los libros de SM y Marea Verde tienen el número 1, donde se trata su aspecto aritmético, y el número 2, en el que se trata solo su aspecto funcional. Es importante recordar que Azarquiel no tiene un tema propio para el apartado aritmético puesto que no pretende mostrar el carácter operatorio del logaritmo, es por ello que no aparecen problemas de esta índole en general, aunque sí que es el único sitio en el que encontramos un acercamiento a este que no sea simbólico.

El fondo estará coloreado en rojo sino hay problemas de ese tipo, de amarillo si hay menos de 3 y de verde si hay 3 o más, la notación del tipo de problemas es la introducida en el apartado anterior.

Tabla comparativa

	SM 1	SM 2	Azarquiel	Marea Verde 1	Marea Verde 2
Contextos					
MEB: Mod. Crec. Biológico	X	X	X		X
MEF: Mod. Crec. Físico	X	X			
MEE: Mod. Crec. Económico		X			X
EL: Escalas logarítmicas	X	X			X
Registro gráfico					
GCC: Comparación de crecimiento		X	X		
GId: Identificación de función					X
GOIn: Obtención de gráfica inversa		X			
GOBI: Obtención de gráfica base inversa			X		X
Registro simbólico					
SCVS: Cálculo valor simple	X			X	X
SDL: Desarrollo expresiones logarítmicas	X			X	X
SAL: Agrupación expresiones logarítmicas	X			X	X
SEL: Ecuaciones logarítmicas	X				X
Registro tabular					
TInfP: Inferencia propiedades			X		
TVCPreIm: Cálculo valor preimagen			X		
Cambios entre registro					
CR SG: Simbólico a Gráfico		X	X		X
CR GS: Gráfico a Simbólico					
CR S-G: Asociación gráficas a ecuaciones		X			X
CR SPG: Efecto propiedades entre registros simbólico y gráfico		X			
Análisis de errores					
AE FL: Errores logaritmos		X			
AE PP: Errores potencias					

Cabe destacar que en la separación entre los aspectos del logaritmo que se dan en los libros repercuten como cabría esperar en los tipos de registros junto a los que se presentan. De este modo, en los dos libros que separan en dos temas estos contenidos, SM y Marea Verde, los registros gráficos y tabular se presenta únicamente en el segundo de estos temas. Por otra parte, a la vista de la tabla y teniendo en cuenta el análisis previo sobre los contenidos teóricos introducidos en cada tema, se evidencia que la aparición de los logaritmos en el primer tema de Marea Verde es superflua ya que no aporta nada a nivel teórico, ni operatorio que no se aborde posteriormente.

Se ve también que el registro tabular está bastante abandonado, salvo en la propuesta de Azarquiel, sirviendo en general como paso intermedio en el paso del registro simbólico al gráfico. Es importante señalar que el registro tabular es unidireccional en este proceso, no habiéndose encontrado ningún libro que presente cambio de registro gráfico a tabular ni de tabular a simbólico (salvo en este segundo caso del ejemplo introductorio que dan en SM, pero no se trata de un problema ni algo que repercuta en los conocimientos que deben poner en juego los alumnos a lo largo del tema).

Sobre problemas de análisis de errores solo hemos encontrado uno al final de la primera unidad de SM, desaprovechándose su uso en el caso del análisis de producciones que contengan fallos sobre la exponencial como un trabajo inicial para asegurarse de que el alumno posee al menos este conocimiento previo antes de comenzar, o que las propiedades se están interiorizando.

Por último, las propiedades no son deducidas por los alumnos ni a través del registro gráfico ni tabular, solo encontramos el ejemplo del impacto de las propiedades entre los registros en el caso de (SPG) con el efecto de las propiedades del registro simbólico en el gráfico y no con demasiada profundidad.

Conclusiones sobre los libros:

La presentación del logaritmo es en los libros posterior a la exponencial, y es presentado o como inversa operatoria o funcional de la misma sin mediar en ningún caso la notación exponencial que suele aparecer en los mismos temas. En este último caso, el de inversa funcional, salvo la propuesta del grupo Azarquiel que da una presentación directa como función inversa a través de sus propiedades de inversa operacional, se aborda esta relación a través de los modelos de crecimiento exponencial o de la propiedad de simetría entre funciones inversas, quedando en las propuestas de SM y en la de Marea Verde desarticuladas la relación entre ambos sentidos. Esto se extiende hasta el punto de que ambos tratan de abordar en cada tema de los que dan un único aspecto del logaritmo, siendo necesario en el caso de Marea Verde repetirlo en el segundo tema para abordar contenido como los modelos de crecimiento exponencial que no había tratado, pero sin darle un tratamiento de función.

Por otra parte, las propiedades se tratan de manera mecanicista y normalmente se justifican, cuando lo hacen, a través de la expresión exponencial salvo en la propuesta de Grupo Azarquiel que trata de razonar sobre las tablas de valores. Su uso queda reducido a solucionar ecuaciones logarítmicas o a problemas de cálculo de valores concretos, no se abordan por ejemplo cálculos de aproximaciones a valores de gran magnitud como pueden ser el cálculo de aproximaciones a operaciones entre números de gran magnitud o el estudio del error asociado. Tampoco se articulan estas propiedades con el registro gráfico ni viceversa, no se tratan de obtener propiedades gracias al registro gráfico como la que se muestra en Marea Verde respecto a las simetrías en los ejes de funciones de bases inversas. Sobre este último registro, la propiedad sobre la que más se trabaja en todos los textos es la de simetría de funciones inversas tal y como el currículo recomienda mostrar, aunque solo en la propuesta de Grupo Azarquiel observamos una presentación no axiomática, gracias a apoyarse en el registro tabular. También es el registro gráfico el favorito de las dos editoriales que trabajan la comparación de crecimiento para mostrarlo, tanto a funciones de otras familias como las afines como del mismo tipo y distinta base, con vistas a cursos posteriores.

La mayoría de los problemas carecen de contextos reales y no tratan la escala logarítmica salvo para realizar cálculos inmediatos. Aquellos que tienen contextos reales se resuelven casi todos aplicando la fórmula del crecimiento exponencial. No se han visto ejemplos de modelos de crecimiento exponencial en el terreno de lo algorítmico (y que se asuman verdaderamente como discretos), como podría ser la resolución de las torres de Hanoi con distinto número de discos. Por otro lado, salvo la propuesta de Azarquiel, las otras dos tratan en profundidad los aspectos aritméticos del logaritmo a través del registro simbólico. Ninguna de las propuestas estructura suficiente la relación entre lo funcional y aritmético del logaritmo como podría lograrse mediante problemas como CR SPG (Efecto propiedades entre registros simbólico y gráfico) que solo encontramos en SM o el acercamiento de Azarquiel a las propiedades mediante tabulación.

Sobre la metodología, dos de los libros presentan un claro enfoque de enseñanza para la resolución de problemas, mientras que el restante es muestra de enseñanza a través de la resolución de problemas. Sin embargo, la falta de contextos independientes del logaritmo (sin relación a un modelo de crecimiento exponencial) hace que todas estas perspectivas desemboquen en una exposición de este objeto como una adenda a la exponencial. Por otra parte, el uso de recursos tecnológicos se restringe a la calculadora no apareciendo software como GeoGebra. Tampoco se usan elementos manipulables como podrían ser reglas de cálculo.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Según el contexto en el que nos encontremos, el logaritmo recibe distintas definiciones, relacionadas entre sí, pero que para el alumno no parece natural esta vinculación. De esta manera, por la falta de articulación entre el logaritmo funcional y el operatorio que hemos podido verificar en el análisis de libro, donde encontramos que puede haber 6 o 7 temas entre ambas concepciones, los alumnos acaban desarrollando lo que Farfán y Ferrari (2002) denominaban dislexia en el logaritmo. Como ejemplo de ello, se observó durante las prácticas un curso de primero de bachillerato de ciencias que tuvo problemas de manera generalizada para hallar la función inversa del logaritmo neperiano al verse bloqueados tratando de despejar $x=\ln(y)$, ya que observaban el logaritmo como una función y no la relacionaban con los despejes que habían hecho al resolver ecuaciones logarítmicas, es decir, no lo relacionaban con su faceta aritmética de inversa operatoria.

La definición habitual del logaritmo como inversa operatoria de la exponencial que se da en los libros tiene como primer inconveniente que todo error que se cometa al manejar exponentes se va a reproducir en los logaritmos. Por tanto, es importante conocer los errores comunes que cometen los estudiantes en su manejo para poder prevenirlos. Sobre ellos encontramos en Abrate et al. (2006) un recopilatorio de algunos errores de notación exponencial que pueden contaminar el aprendizaje del logaritmo:

- $a^0=0$ o $a^0=a$ porque el alumno argumenta que es lo mismo que no multiplicar ninguna vez.
- $(a^b)^c=a^{b+c}$ esto puede dar problemas a la hora de demostrar el cambio de base en logaritmos.
- $a^{-b}=(-a)\cdots(-a)$, que se da al confundir el alumno como afecta el signo menos en el exponente.
- $(a+b)^c=a^c+b^c$ como resultado de tratar de extender la linealidad.
- $a^b=b\cdot a$ esta y la anterior se observaron durante las prácticas.
- $a^{-1/b}=a^b$ porque el alumno traslada la propiedad $a^{-b}=\frac{1}{a^b}$.

La capacidad del alumno para darse cuenta de los errores que hace como resultado de estos, por ejemplo, al solucionar una ecuación logarítmica, se ve mermada por la separación del logaritmo como modelo al exponencial, ya que carecen de herramientas para sospechar de resultados incorrectos o de ejemplos contextualizados sobre los que reflexionar. Esta separación se da desde su presentación, dando el currículo la presentación en tercero de la ESO del modelo exponencial y en cuarto del logarítmico. Pero incluso dentro de los propios libros, el discurso que se da prioriza a los radicales antes que al logaritmo, llegando a relegarlo al final del tema apartado del hilo argumental que se está dando y quedando reducido a cálculos que involucren de manera directa el paso a la exponencial o usando de manera sencilla las propiedades. Es normal, entonces, que los alumnos puedan desarrollar un obstáculo actitudinal ante el logaritmo debido a que no le ven utilidad, es poco intuitivo en su comportamiento y existen técnicas que aproximan el valor de la solución en los modelos de crecimiento que ven (como puede ser el tanteo en la exponencial asociada).

Sobre la otra óptica del logaritmo, como función inversa de la exponencial, nos advierten Vargas y González (2022) que no es sencillo de entender el concepto de función inversa ya que requiere entender previamente la composición de funciones. De hecho, el currículo no propone dar hasta el segundo curso de bachillerato el concepto de función inversa, pero sí que indica la presentación de las gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas de la misma base al mismo tiempo. Ante esto, los libros dan en un corto espacio un intento de explicación de función inversa, para poder dar de manera axiomática la propiedad de simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante entre funciones que son inversas entre sí. Esta propiedad, salvo en la propuesta de Azarquiel, queda como algo accesorio más allá de lo estético de esta, siendo razonable preguntarse que se persigue con esto de manera habitual. Por último, del mismo modo que se arrastran los problemas de la notación exponencial a la faceta operatoria, debemos esperar que aquellos vacíos que queden de la construcción de la exponencial como función (como puede ser la extensión a los reales) tengan una segunda vida en el logaritmo como función.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

Las posibles entradas al estudio de los logaritmos son múltiples y muy variadas: podría comenzarse desde la geometría y las áreas bajo las hipérbolas, los modelos de crecimiento logarítmico que aparecen en los sistemas físicos reales como los circuitos RC de corriente continua, la potencia de cálculo que otorgan al convertir productos en sumas y raíces en fracciones, etc. Pero en la construcción de una propuesta didáctica es conveniente situar el objeto y comprender su sino en el currículo en el que se enmarca. Es por ello que resulta razonable considerar, por la exposición de otros saberes que se hacen en los cursos anteriores, la entrada natural desde la perspectiva curricular como inversa de la exponencial. Un breve repaso de la exponencial nos permite ver que encontramos en ella también dos visiones: una dedicada a la notación exponencial y otra enfocada a lo funcional:

En 1º, 2º y 3º de la ESO aparece la notación exponencial en los saberes del sentido numérico A.2 Cantidad, siendo en segundo cuando se incorporan los exponentes negativos, no haciendo mención explícita del uso de racionales en potencias. Por ello determinamos que es junto a los radicales en cuarto donde aparecen éstos, aunque es posible que los docentes aprovechen el estudio del modelo exponencial que pueden realizar en tercero para presentar a estos.

Como modelo, el exponencial aparece en el sentido algebraico y pensamiento computacional en D.2 Modelo matemático y D.3 Variable ya en segundo de la Eso basándose sobre todo en el trabajo en tablas y gráficas. En tercero se propone en D.1 Patrones asociarlo como modelo a las progresiones geométricas y vuelve a aparecer en D.2, pero recomendando un estudio más detallado de este modelo, y en D.3, mediante el uso de tablas, gráficas y representaciones simbólicas. También se habla en D.6 Pensamiento computacional de realizar una primera aproximación al modelo exponencial.

Como función lo encontramos en D.5 Relaciones y funciones asociado al modelo exponencial de D.2 en tercero, pudiéndose estudiarse sus características (el estudio más sistemático puede realizarse en cuarto) cabe destacar que aparece separado el caso de base entre cero y uno y el de base mayor que uno. Y en D.6 Pensamiento computacional se habla de una primera aproximación a la función exponencial, propuesta que encuentra respaldo en autores como Weber (2002).

Obsérvese que, dada la naturalidad de la aproximación al logaritmo a través de la exponencial en el currículo, resulta interesante ver qué contenidos tiene asociados la exponencial en la asignatura de matemáticas opción B, de cuarto de la eso en pos de realizar esta entrada al concepto de manera articulada y tenerlos en cuenta para su estudio y repaso:

Aparece nuevamente en D.2 como modelo, proponiéndose consolidar el trabajo realizado en los cursos anteriores y abordar situaciones donde aparezca, y en D.3 en las diferentes representaciones de sus registros. En D.5 como función se indica también que se debe consolidar el trabajo hasta la fecha y realizar un estudio más sistemático de las funciones exponenciales $y=a^x$ tanto con a tomando valores positivos menores que la unidad como mayores que esta. Propone relacionar este estudio con las progresiones geométricas.

Por tanto, los alumnos deberían tener conocimientos de notación exponencial incluyendo el caso de negativos, tal vez habiendo visto en tercero fracciones en el exponente, y sobre funciones exponenciales. Estos son los conocimientos que deberían poseer y que vigilaremos que tengan. Para ello, la actividad inicial presenta un modelo de crecimiento exponencial sobre el que podemos hacernos una idea de hasta qué punto los alumnos tienen adquiridos los conocimientos de las funciones exponenciales. Por otra parte, la notación, está separada en subapartados de los ejercicios según se hace necesaria y se le dedican ejercicios separados y específicos, más concretamente la relación $a^0=1$ está en el primer apartado del primer ejercicio y se dan como ejercicio de conocimientos previos los tres siguientes:

Ejercicio previo 1.

Alex y Cris estaban realizando un ejercicio de potencias en el que se les pedía expresar $(9^{40})^3$ sin paréntesis. Cris dice que debería ser 9^{40^3} pero Alex cree que debería ser $9^{40 x 3}$. ¿Cuál es la respuesta correcta? ¿Qué les dirías para convencerles?

Ejercicio previo 2.

Del problema SCVS los apartados i), ii), iv), vii) y xi) repasan las principales propiedades de la exponencial, aunque se repasan en el siguiente la exponenciación sucesiva.

Ejercicio previo 3.

La masa de la población mundial de humanos resulta ser aproximadamente igual a la de la masa de termitas según Rosenberg et al (2023), Si hay alrededor de 7,888 miles de millones de personas con un peso medio de 75 kilogramos y una termita pesa en media 10 gramos. ¿Cuántas termitas hay por cada persona? Si una termita mide de media 9 milímetros de largo y 1 de ancho, ¿qué proporción de la clase ocuparían las termitas que corresponden a cada persona?

En este ejercicio se busca sobre todo el uso de magnitudes de varios órdenes de diferencia para que, de manera natural, entre en juego el uso de la notación científica.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

Al tener el currículo de la LOMLOE un enfoque claramente competencial, en la construcción de las razones de ser de un objeto no se ha de tener en cuenta solo su estatus como saber en sí mismo, sino, dentro del marco curricular, aquellas competencias que pueden ser movilizadas gracias a él, es por ello que reparamos ahora en las que son específicas de la materia en la que hemos situado el objeto:

El logaritmo, en su forma de función, admite múltiples representaciones a través de los registros simbólico, gráfico y tabular, teniendo además un valor separado de estos las reglas de cálculo. Todas estas representaciones lo enriquecen puesto que sus propiedades se pueden estudiar desde varias de ellas con diferentes resultados aportando una visión más profunda del uso de registros distintos al simbólico como elementos no solo de visualización sino de análisis de las funciones. Por ello, la competencia específica de matemáticas 7, *"Representar, de forma individual y colectiva, conceptos,..."* debería ser de fácil evocación a través de nuestro objeto ya que incluso entre sus criterios de evaluación para cuarto curso de la ESO encontramos en el 7. 2 *"la representación de diferentes formas de representación ... valorando su utilidad"* y la capacidad de deducir propiedades a través de otros registros debería propiciar este ánimo por valorar los diferentes registros que encontramos para las funciones. Otro punto de vista para justificar esta competencia son las escalas logarítmicas que están presentes en numerosas ciencias debido a su uso para condensar información que toma valores en un gran rango de ordenes de magnitud. En todo caso, se plantea como un terreno fértil para la realización de un estudio guiado de las propiedades, muy relacionado con la competencia específica de matemáticas 3, *"Formular y comprobar conjeturas sencillas…"* en particular con el criterio de evaluación 3.1 *"Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada".*

A través del crecimiento exponencial que sufren ciertos procesos en partes de su ciclo se pueden trabajar los logaritmos como agentes modelizadores haciéndose patente el trabajo sobre la competencia específica de matemáticas 1, *"Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana…",* teniendo como posible criterio de evaluación 1.1 *"Reformular de forma verbal y gráfica problemas matemáticos, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas".* Es importante no solo seleccionar el modelo adecuado sino comprender las implicaciones de este y valorar los resultados que arrojan, estando esta tarea en clara sintonía con la competencia específica en matemáticas 2, *"Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista lógico y su repercusión global",* siendo sus dos criterios de evaluación asociados pertinentes en este caso. En particular, al tratar los modelos de crecimiento exponencial se pueden dar varios problemas en su comprensión tales como el sesgo de crecimiento exponencial como observaron Schonger y Sele (2021) en un estudio con población que poseía estudios superiores. Esto, se vincula de manera clara con su implicación en otras materias como biología y geología por el caso de la pandemia quedando su papel interdisciplinar asociado a la competencia específica de matemáticas 6, *"Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales…"* y sus tres criterios de evaluación.

Un elemento que no es propio del logaritmo como objeto matemático sino de su situación en la cultura educativa es el malestar que genera entre los alumnos. Se verificó durante el prácticum que según los profesores los alumnos solían no tener claros los conceptos de los logaritmos y a considerarlos demasiado difíciles y extraños. Esto es una actitud negativa contra la que se debería oponer resistencia puesto que puede generar entre el alumnado la sensación de que existen conocimientos matemáticos que no son para todos, por ello, el tratar de acabar con los mitos de este objeto como objeto intangible, extraño en su comportamiento y de escasa utilidad para el alumnado debería ayudar en el desarrollo de su autoconcepto matemático y progresando en la adquisición de la competencia específica 9 *“Desarrollar destrezas personales,…”*. Esto queda más justificado si se plantea que el comprender un objeto con mala fama debería se tanto una fuente de motivación para proyectos futuros en matemáticas como de desarrollo personal, quedando por tanto vinculada al criterio de evaluación 9.1 *“Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático generando expectativas positivas ante nuevos retos.”*

Como saber per se, de manera natural, los logaritmos aparecen en su faceta operatoria implícitamente en las cuestiones de cálculo de tiempo asociadas a problemas monetarios de interés compuesto. Dorce (2014) señala un ejemplo temprano en los problemas de la aritmética mercantil babilónica que no llego a desarrollarse como logaritmo, siendo el método de resolución más asociado al tanteo y la aproximación. Si que señala un primer coletazo del desarrollo de este concepto en la India por motivos cosmológicos. Sin embargo, el desarrollo de la trigonometría recibiría más atención por su aplicación quedando este desarrollo mayoritariamente paralizado.

Sobre el desarrollo de este concepto en la perspectiva operatoria moderna nos habla Medina (2017), indicando que, posteriormente, durante el renacimiento (S. XVI), se popularizó el método de la prostafairesis, que permitía transformar productos a través de funciones seno y coseno en sumas a través de identidades trigonométricas. Y que de este método eran conocedores tanto John Napier como Joost Bürgi (siendo la búsqueda por parte de ambos de métodos más eficientes testimonio de la carga de operaciones que se requerían en estos métodos) quienes llegaron a objetos parecidos a nuestros logaritmos como los conocemos actualmente. A ellos llegaron, dice, a través de las relaciones que se dan entre los términos de las series geométricas y aritméticas, aunque nos recuerda que debemos a Henry Briggs el logaritmo decimal como lo conocemos actualmente en su vertiente operatoria. Por otra parte, Vargas y Gonzalez (2007) recogen que no sería hasta Euler (1707-1783) donde encontramos la definición habitual del logaritmo de un número como el valor al que debemos elevar cierta base para obtener ese número, siendo también él quien daría la fórmula del cambio de base entre logaritmos. Nos indican también que la promoción del logaritmo al rango de función se debió en gran medida a los jesuitas Gregoire de Saint-Vicent y Sarasa, quienes relacionaron las áreas bajo la hipérbola equilátera con la función logarítmica dando así el pistoletazo para su estudio analítico, primero como curva y luego como función.

Las motivaciones históricas del logaritmo se encierran en la realización de cálculos a mayor velocidad. Esto, no es un punto razonable para presentar el logaritmo en la actualidad: desencajado de su faceta funcional ya que, autores como Farfán y Ferrari (2002) nos advierten del peligro que ello conlleva. Como tal, a tono de una presentación más similar a la realizada por el grupo Azarquiel, comenzamos presentando una actividad que parte de los modelos de crecimiento exponenciales más sencillos para introducir los logaritmos en su forma de inversa funcional y herramienta de solución:

R1: El tiempo y la arena

En cierto bosque del mundo se comenzó hace 6 años un estudio con el objetivo de estudiar si este estaba sufriendo una desertificación. La siguiente tabla muestra el ratio de biomasa en comparación al año inicial del estudio al finalizar cada año:

Año de estudio	Ratio de Biomasa
0	
1	0.9800
2	0.9604
3	0.9412
4	0,9224
5	0,9039

a) ¿Qué valor debería haber en el año 0 de la tabla? Si la biomasa inicial hubiese sido de 500 T, ¿Cuánta habría el tercer año? Y si fuera 400 T, ¿Cuánta biomasa habría el quinto año del estudio? ¿Se trata de una deforestación o una reforestación? ¿Por qué?

b) El ratio de biomasa a lo largo de los años, ¿es creciente o decreciente? Representa en un diagrama de barras los datos. ¿Qué clase de modelo de crecimiento creéis que puede o no involucrar?

c) El diagrama de barras que has realizado en el apartado anterior, ¿es discreto o continuo? Planteaos ahora la realización de una gráfica asociada a los datos, ¿debería ser discreta o continua? Realiza un esbozo de la gráfica para los años estudiados.

d) ¿Cómo crees que debería extenderse el gráfico tanto para tiempos anteriores como posteriores al estudio? Realiza el esbozo de la gráfica de la extensión. ¿Qué deberíamos asumir para que pudiésemos realizar esta extensión?

e) ¿En qué momento el ratio de biomasa fue de 0.9604? ¿Y de 0.9412? ¿Y de 0.95? A la vista del gráfico extendido ¿Conocido el ratio de biomasa es posible determinar siempre el año? ¿Por qué si o no?

f) Llama L a la función que devuelve el tiempo conocida la biomasa. ¿Por qué puedo decir que L es una función?

g) Si fuéramos a representar L, ¿qué debería poner en los ejes de abscisas y ordenadas? ¿Será creciente o decreciente? ¿Por qué?

h) ¿Cuánto debería ser L(1)? ¿y L(0.98)? Rellena la siguiente tabla:

Ratio de Biomasa	L(Ratio de biomasa)
1	
0.98	
0.9604	
0.9412	
0.9224	
0.9039	

Compara esta tabla con la inicial. ¿Qué relación hay entre ambas?

i) Representa la función L en una gráfica y compárala con el gráfico hecho en c). ¿Qué observas? ¿Por qué creéis que ocurre esto?

j) Teniendo en cuenta los apartados d) y h), ¿cómo crees que debería extenderse la gráfica de la función L? ¿Por qué?

Con este problema se presenta el logaritmo como inversa funcional, sin embargo, tiene también interés presentar su utilidad a través de las escalas logarítmicas que, además de ser un elemento del discurso del tema, ofrecen un uso directo del logaritmo en su vertiente numérica. Por ello, se da el siguiente problema:

R2: La masa de los mamíferos

Durante estos años has utilizado gráficos a modo de herramienta de comunicación de datos pudiendo observar su utilidad. Supongamos que quisiéramos representar de manera visual los siguientes datos asociados al peso de distintos animales para incluirlos en una enciclopedia de animales:

Animal	Masa media
Musaraña	8 g
Gato	4,5 kg
Humano	62 kg
Hipopótamo	1,5 T
Ballena Azul	180 T

i) ¿Qué unidad os parece más apropiada para representar los datos? ¿Por qué?

ii) Haced una tabla con los datos en la unidad elegida en el apartado anterior usando la notación científica.

iii) Si representamos los datos en un diagrama de barras, ¿qué pondríais en los ejes?

iv) Toma un cuadro de altura como unidad para la altura del diagrama de barras, ¿qué longitud debería tener la barra de mayor tamaño? ¿y la de menor?

v) Probad con el resto de las unidades y calculad las longitudes de las barras. ¿Alguna parece hacer más representativo el gráfico? ¿Qué debería cumplir para que el diagrama sea más representativo?

vi) Puesto que la búsqueda está resultando infructuosa, completa la siguiente tabla de cara a tratar de representar los datos usando la tabla del apartado ii):

Animal	Log_{10}(Masa media)
Musaraña	
Gato	
Humano	
Hipopótamo	
Ballena Azul	

vii) Representa el diagrama de barras asociado a la nueva columna. ¿Se pueden ver los datos de manera cómoda? ¿Están ordenadas las alturas de cada barra de alguna manera lógica?

viii) Sea ahora un nuevo animal, el caballo, de peso medio 800 kilogramos. Sin calcular el logaritmo decimal sitúa el nuevo dato en la tabla.

ix) Si sabemos que un animal tiene su valor en la gráfica a un cuadro de distancia del gato, estima su peso. Ídem con el hipopótamo. Compara ambos resultados, ¿qué observáis?

Como tercera razón, las propiedades de los logaritmos son interesantes en el terreno de lo aritmético, aunque están en desuso actualmente debido a la abundancia de calculadoras (llegando incluso a existir propuestas a la inversa, que tienen como razón de ser del logaritmo la explicación de la tecla de la calculadora asociada tal y como hace la de Bozzano (2021)). Se da entonces este tercer problema aquí como razón (menor) aunque tiene su importancia de cara a la justificación de las propiedades:

R3: Las reglas de cálculo:

i) Realizad un gráfico en escala logarítmica de los siguientes datos:

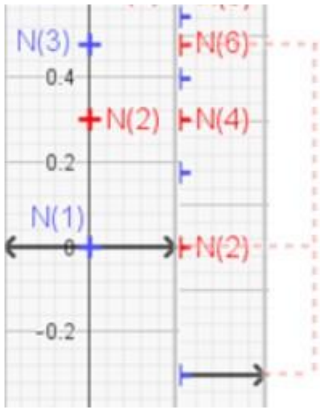
N	**Valor**	**N**	**Valor**
N(0.1)	**0.1**	**N(8)**	**8**
N(1)	**1**	**N(9)**	**9**
N(2)	**2**	**N(10)**	**10**
N(3)	**3**	**N(12)**	**12**
N(4)	**4**	**N(15)**	**15**
N(5)	**5**	**N(20)**	**20**
N(6)	**6**	**N(40)**	**40**
N(7)	**7**	**N(100)**	**100**

ii) Recorta las dos reglas y rellénalas con los valores que has obtenido para realizar el gráfico del apartado anterior: *Se reparte el Anexo I, las reglas logarítmicas para recortar de los alumnos, las otras sirven de muestra de cara a verlas ya rellenadas.*

iii) Coloca una de las reglas apoyada sobre la otra de manera que su lado derecho coincida con la recta central de la otra. Mueve después la regla superior hasta que la flecha que tiene en N(1) apunte a N(2) de la regla inferior. ¿Qué N aparece en la regla inferior a la altura del N(2) superior? ¿Y del N(3)? ¿Y de N(10)? Repite moviendo ahora la flecha de N(1) a N(3). ¿Qué ocurre en cada caso?

iv) Recordad que la altura a la que habéis situado los N son en realidad el valor del logaritmo decimal del número que tienen entre paréntesis. Observando ahora el caso en que colocabais la flecha de N(1) sobre N(2), ¿cuánto debo sumarle a la distancia de N(2) a N(1) para que sea igual a la de N(6) a N(1)?

Se puede dar como andamiaje el siguiente dibujo en la pizarra:



Plantead el resultado en función de los logaritmos asociados a cada número.

v) Completad las igualdades usando las reglas:

i) Log(3) + Log(5) = Log(______)

ii) Log(4) + Log(10)= Log(______)

iii) Log(100) +Log(0.1) = Log(______)

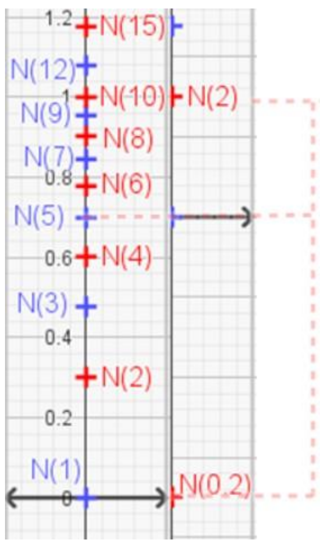
iv) Log(0.2) + Log (15) = Log(_______)

v) Log(1) + Log(1) = Log(_______)

vi) Log(20) + Log(5) = Log(_______)

vi) Completa la igualdad: Log(0.2) + Log(_______) = Log(8). ¿A qué es igual Log(8)-Log(0.2)?

vii) Coloca ahora la regla superior en la forma de multiplicar por 0.1. ¿Qué valor tiene asociado el N(1) inferior? Observa que valores aparecen al lado de N(20), N(40) y N(100). Pon ahora el N(5) superior de manera que el N(1) inferior sea su coincidente. ¿Qué valores tienen asociados los N(10), N(15), N(20), N(40) y N(100) superiores? Observa el siguiente dibujo y responde: ¿qué segmento representa Log(10) – Log(5)? ¿Qué valor tiene? ¿Es coherente con la suma?



viii) Completad las siguientes igualdades:

i) Log(4) – Log(2) = Log( ) iii) Log(10) – Log(0.1) = Log( )

ii) Log(12) -Log(3) = Log( ) iv)Log(3) – Log(15) = Log( )

ix) ¿Cuánto es Log(1) - Log(0.1)? ¿Y Log(1)-Log(5)? ¿Cuánto vale Log(1) ¿A cuánto será igual Log(9) + Log(1/9)? ¿Por qué?

x) Completa el resumen de la investigación:

- Log(a) + Log(b) =_____________
- Log(a) - Log(b) =______________, en particular: -Log(c) = __________

xi) ¿Dónde debería estar en la regla N(21)? ¿Y N(1.4)? ¿Cómo los obtenéis?

Por último, se vuelve a dar sentido a través de los modelos de crecimiento exponencial al logaritmo, pero esta vez en su aspecto operacional y no tanto funcional:

R4: Práctica del circuito RC

Se realiza la práctica del anexo II que contiene las siguientes preguntas:

Pregunta 1: Los valores que habéis tomado en cada una de las 3 pruebas, ¿son crecientes o decrecientes?

Pregunta 2: Si en vez de un condensador tuviésemos una bombilla, ¿cuál creéis que sería el voltaje que obtendrías en el paso 6 en cada una de las tres mediciones? ¿Por qué?

Pregunta 3: ¿Cómo varía el crecimiento del voltaje al cambiar las resistencias? ¿Hay alguna que se descargue más rápido? ¿Y alguna más lento?

Pregunta 4: Toma los conjuntos de datos que habéis obtenido al mantener apretado el pulsador 2 con la resistencia de 10 kilo-ohmios y represéntalos. ¿Creéis qué alguna función que conozcáis podría estar implicada? ¿A cuál se parece más?

Pregunta 5: Ya que el condensador aporta energía al circuito cuando se estaba apretando el pulsador 2 vamos a pensar que es similar a una batería. ¿Cómo calcularías el porcentaje de batería dado un voltaje inicial? Rellena la tabla poniendo el porcentaje de batería en tanto por 100:

Tiempo (s)	Batería (%)	Tiempo(s)	Batería (%)	Tiempo (s)	Batería (%)
0	100%	5		10	
1		6		11	
2		7		12	
3		8		13	
4		9		14	

Pregunta 6: Representa la tabla anterior. ¿Cuándo debería haber quedado con la mitad de carga el condensador? ¿Y un cuarto? ¿Y un octavo? ¿De qué clase de función se trata?

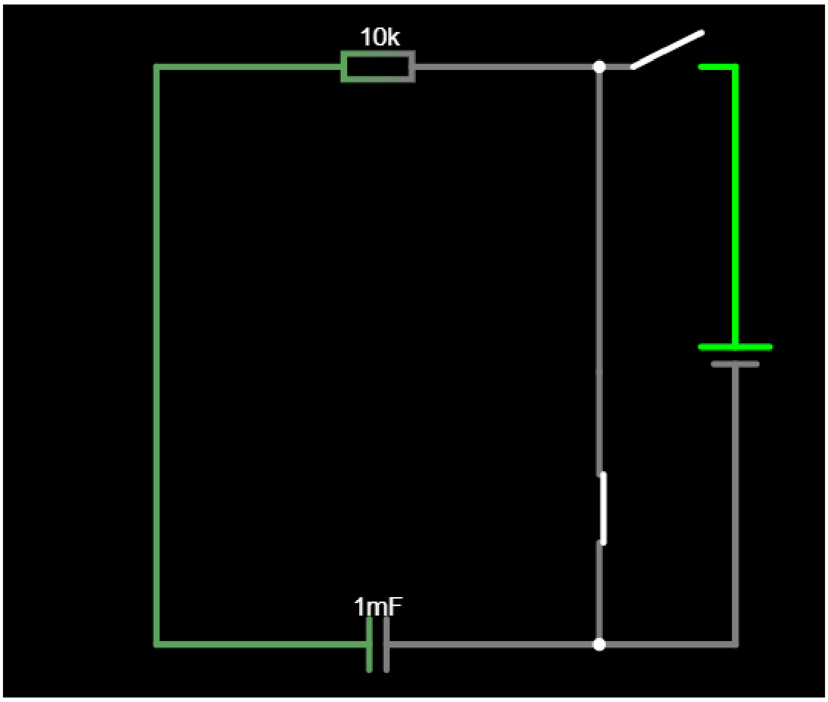
Pregunta 7: De acuerdo a lo anterior, da una expresión para (V(t))/(V(0)) con los datos que has obtenido.

Pregunta 8: ¿Cuánto tiempo tarda un condensador en descargarse completamente?

Pregunta 9: Calcula cuánto tiempo deberían tardar cada uno de los tres condensadores durante su descarga en llegar a un tercio de su voltaje inicial.

La práctica se complemente con la simulación en la siguiente página web:

https://www.falstad.com/circuit/



Sobre la metodología de implementación en el aula:

Todos los problemas están pensados para realizarse en pequeño grupo, siendo el uso de singular un elemento que distingue la obligatoriedad de realizar todos los pasos de un proceso mientras que el uso del plural indica que los problemas pueden ser divididos en partes en caso de tener apartados de cálculo repetitivo o que es obligatorio llegar a consenso sobre la solución en caso de preguntas reflexivas, ya que se espera que el dialogo pueda ser provechoso. Por ejemplo, el apartado v) de R2, las condiciones que hacen un diagrama más representativo son de índole subjetiva y es una conversación que muchas veces no se da en la educación por tomarse una serie de cánones como los diagramas de barras sin entender realmente que aportan.

Se observa que los problemas están ampliamente esquematizados ya que se espera que todos los alumnos intenten de manera autónoma (por grupos) estos una vez explicado el enunciado y contestado a dudas mientras el profesor rota por las mesas. Si todos los grupos son capaces de avanzar de manera más o menos autosuficiente el profesor seleccionará un grupo cuya resolución, correcta o no, pueda ser interesante para que uno de sus miembros la expongan a la clase en la pizarra, esto debe ser parte de la cultura de aula o pueden generarse problemas de tiempo por la falta de agilidad y costumbre en la explicación. En caso de que todos los grupos llegasen a los mismos resultados, el profesor debería cerciorarse de ello interrumpiendo el proceso de discusión e institucionalizando los resultados obtenidos o preguntando si todos los grupos han llegado a las mismas soluciones. Por otra parte, en el caso de que solo uno de los grupos o dos avancen y el resto estén en duda o hayan llegado a conclusiones equivocadas se debe fomentar el intercambio de ideas de manera ordenada, evitando siempre que los alumnos den simplemente la solución puesto que esto puede no generar un significado real para los alumnos.

E. Sobre el campo de problemas

Además de los problemas dados como razones de ser, los problemas a presentar son los explicados en el tercer apartado del punto A, en particular para cada problema indicaremos la modificación de técnica que requieran. En caso de haber varios apartados similares, se debe entender que se incluye de manera agrupada lo que sería el problema (primer apartado, puesto que sería la primera exposición) y el ejercicio subsecuente del mismo. Se ha dejado así de cara a facilitar la lectura del punto H de secuencia didáctica.

♦ (ME) Problemas que provienen de un modelo de crecimiento exponencial, se puede subdividir en los siguientes tipos de contextos del modelo:

❖ (MEB) Crecimiento exponencial biológico: como puede ser el ejemplo de un tipo de bacteria que se duplica cada cierto tiempo o de desertización.

El problema introductorio en R1 es un caso simplificado donde se comienza con todo simplificado ya que aún no se cuentan con las herramientas suficientes para abordarlo en su versión completa.

. ❖ (MEF) Crecimiento exponencial físico: problemas como la datación a través del carbono catorce.

Incluyen el concepto del tiempo de vida medio, por lo que la técnica se modifica en el proceso. Aparece uno en la sección de ejercicios.

❖ (MEE) Crecimiento exponencial económico: problemas de interés compuesto.

A nivel de técnica no es distinto al resto, sin embargo, los conceptos a lo que hace alusión (interés simple o compuesto) necesitan interpretación. Hay uno en los ejercicios.

♦ (EL) Problemas de escala logarítmica: se presentan magnitudes que son demasiado dispares en su orden y se quiere realizar alguna agrupación de los datos

❖ (ELE) Elaboración de escalas logarítmicas: incluye tanto la justificación del uso de una escala logarítmica como su tabulación y representación.

Corresponde a los apartados del i al vii) de R2. La técnica se describe en el proceso.

❖(ELI) Interpretación de escalas logarítmicas: tratan de la interpretación de escalas logarítmicas una vez elaboradas.

Corresponde a los apartados viii) y ix) de R2. No se describe la técnica y debe aparecer de la comprensión de los datos en la gráfica por los alumnos.

♦ (RC) Problemas relacionados con las reglas de cálculo: se trata del uso de las reglas de cálculo, cabe destacar que el objetivo no es saber usar una regla de cálculo sino que sirvan de apoyo para la comprensión y estudio de las propiedades de los logaritmos:

❖(RCC) Creación de reglas de cálculo:

Los apartados i) y ii) asociados al problema que constituye una razón de ser R3. La técnica se presenta de manera guiada por primera vez.

❖(RCA) Problemas de multiplicación usando reglas de cálculo: se basan en la adición.

El apartado iii) de R3. La técnica se describe sin indicar que produce, el alumno es el que debe interpretarlo.

❖(RCS) Problemas de división usando reglas de cálculo: se basan en la sustracción.

El apartado vii) de R3. Aquí tampoco se indica que debe producir la técnica, con la finalidad de que sean los alumnos quienes la doten de una finalidad.

<u>Problemas con foco en el registro:</u>

Según el tipo de registro en el que se presenta el logaritmo, (simbólico, tabular o gráfico) encontramos diferentes tipos de problemas siendo alguno propios del registro y otros asociados al cambio entre registros puesto que, de cara a un aprendizaje significativo de las funciones, es importante articular los distintos registros tal y como señala Duval (2006).

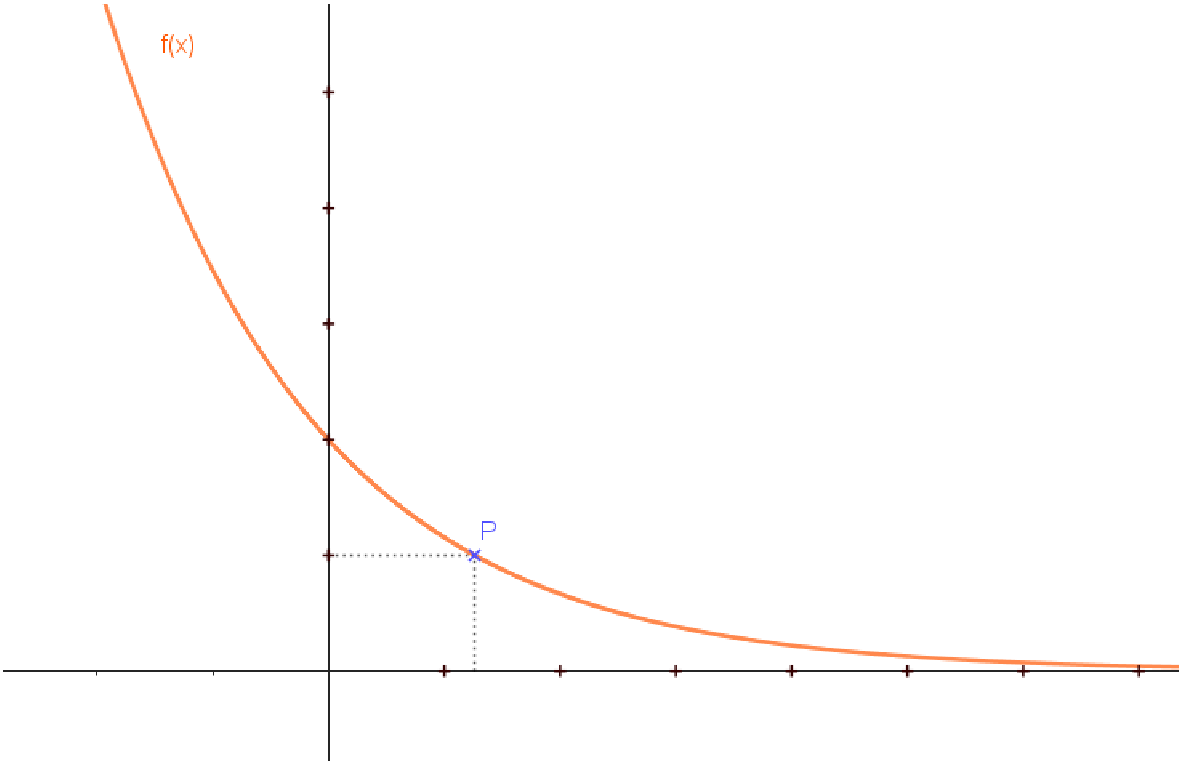
♦ (G) Propios del registro gráfico tenemos problemas del tipo:

❖ (GId) Identificación de tipo de función (nos centramos en exponencial y logarítmica).

❖ (GInfP) Inferencia de propiedades a través de la expresión gráfica

Corresponde a ambos tipos de problemas anteriores:

Se han perdido los datos asociados a una librería compuesta por 4 funciones: dos exponenciales de bases un tercio y un cuarto y dos logarítmicas de las mismas bases. Nos interesan las coordenadas del punto P de la siguiente imagen extraída de la librería. ¿Qué coordenadas tiene el punto P? Razonad la respuesta.



Completa el esquema:

Log_(A) =____⇔ (___)^{c} =_____

Respecto a la identificación de la función, por una parte, los alumnos podrían razonar que, ya que no es un logaritmo, debe ser una exponencial. Con la finalidad de que no eviten el proceso de razonamiento y traten de observar que elementos característicos tiene la función, la gráfica tiene marcado las distancias a 0,5 en vez de a 1, ya que un alumno que solo se atenga al primer razonamiento (por forma exclusivamente) es probable que no repare en ello y se le pueda preguntar. Tenemos, de esta manera, un problema de escala de manera lateral sobre los que nos habla Leinhardt et al (1990).

Sobre GInfP, la técnica no ha aparecido antes y debe surgir tras la identificación de la función por parte de los alumnos.

✧ (GOBI) Obtención de la gráfica asociada a la función inversa dada otra.

Corresponde a los apartados desde el f) hasta el j) de R1 y, por tratarse de un concepto novedoso, se trata de guiar su descubrimiento por parte de los alumnos y primer uso.

♦ (S) Propios del registro simbólico encontramos los que corresponden al manejo de las propiedades del logaritmo a través de su definición como inversa aritmética de la exponencial fijada la base. Tenemos:

✧ (SCVS) Cálculo del valor numérico de un logaritmo a través de propiedades simples.

Problema 1:

Resuelva las siguientes ecuaciones:

i) $2^x=8$	iv) $(1'5^x)^3=81/8$	vii) $\sqrt{3}=9^x$	x) $2 \times Log_{10}(x)=Log_{10}(9)$
ii) $5^x5^{2x}=125$	v) $Log_6(36)=x$	viii) $Log_{11}(3x-1)=Log_{11}(x+1)$	xi) $2^{-5}=4x$
iii) $7^x=40$	vi) $Log_x(5)=1$	ix) $7 \times Log_9(x)=5$	xii) $Log_{10}(1000)=4^x$

Los apartados iii), iv), v), vi), viii), ix), x) y xii) requieren todos usar la definición del logaritmo como inversa de la exponencial. Por tanto, se pone de manifiesto que el conocimientoadquirido previamente se puede usar a modo de herramienta de resolución de problemas.

Problema 2:

Calcula en cada caso el valor:

i) $Log_{3/7}(3) – Log_{3/7}(7) =$	iii) $Log(\sqrt{5}) + Log(\sqrt{2}) =$	v) $1 + Log_2(1/2) =$
ii) $Log_6(4) + Log_6(9) =$	iv) $3 \times Log_8(4) =$	vi) $-2 \times Log_{16}(4) =$

Aquí se incluye el uso de las propiedades para el cálculo, una que no se ha visto es el efecto de multiplicar un logaritmo por un valor, por lo que se debe animar a descomponer en sumas en caso de ser necesario.

❖ (SEL) Ecuaciones logarítmicas sencillas a través de propiedades.

¿Cuáles son las soluciones de $Log(X) + Log(Y) = 12$? Realiza una gráfica de los pares de soluciones.

La técnica aparece por primera vez como una necesidad para la resolución del ejercicio: tras comprobar una serie de casos (pudiendo apoyarse en la regla de cálculo) se hará patente que existen infinitas soluciones y para representarlas deberán dar una expresión cerrada de X e Y. Es una modificación del ejercicio propuesto en el currículo que permite la investigación con la calculadora.

♦ (T) Propios del registro tabular:

❖ (TInfP) Inferencia de propiedades a través del registro tabular.

i) En una de las teclas de tu calculadora pone log, se trata de un logaritmo en concreto que esta tabulado en las calculadoras. ¿Cómo tratarías de encontrar la base de manera sistemática?

ii) Rellena las tablas siguientes aprovechando el modo tabla de la calculadora si lo tiene:

0.001		**0.002**		**0.003**		**0,005**	
0.01		**0.02**		**0.03**		**0,05**	
0.1	**-1**	**0.2**		**0.3**		**0,5**	
1	**0**	**2**		**3**		**5**	
10	**1**	**20**		**30**		**50**	
100		**200**		**300**		**500**	
1000		**2000**		**3000**		**5000**	

Las columnas pares tienen el valor del logaritmo decimal de la columna impar anterior.

iii) ¿Qué observáis?

En este problema se trabaja también la calculadora, herramienta cuyo correcto uso se recoge como objetivo de este curso en el currículo.

♦ (CR) Los cambios entre registro son en sí mismos una familia de problemas que podemos clasificar en:

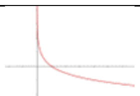
❖ (CR SG) Cambio de registro simbólico a gráfico.

Problema 1:

Representa los logaritmos de base 2, 3√ 5, 0.25 y √2/2. Para ello puedes hacer uso de la simetría vista en el problema introductorio.

a) ¿Qué tienen en común todas las funciones? ¿Qué gráficas se parecen más entre sí?

b) Completa el esquema:

Forma gráfica Log								
Base	¼	*√2/2*	**4/5**	**0.9**	**1.1**	**2**	**2.5**	**3√5**

c) ¿Cómo crees que será la forma del logaritmo de base 7 de acuerdo al esquema anterior? ¿Y la del de base 0.1? ¿Puedes dar dos puntos de cada función?

d) Completa el resumen:

- El dominio de una función logarítmica es:___

- La imagen es:________________________
- Es creciente en:__________________________________si _____________________
- Es decreciente en:________________________________si _____________________
- Siempre puedo conocer__________punto/s de la gráfica: _______________________

En este apartado se presenta por primera vez la técnica T CR SG 1 basada en la simetría respecto a la bisectriz como técnica y no como propiedad y como tal se expresa que se puede usar con objeto de que se vea que tiene una utilidad en sí misma.

Problema 2:

a) Realiza sobre el mismo gráfico los bocetos de las funciones exponenciales de base: 7, 8 y 9. ¿Cuántas veces se cortan? Esboza ahora aprovechando la simetría en la misma gráfica las funciones logarítmicas asociadas. ¿Cuántas veces se cortan?
b) Repite el apartado anterior tomando ahora como bases: ¾, 6/7 y 0.1.

c) Por último, realiza lo mismo con la pareja de bases formada por 7 y 0.3.

d) Completa el resumen:
- Dos logaritmos de distinta base se cortan siempre________vez/ces,
- Se cortan siempre en: ____________

En este ejercicio se ha realizado ya el estudio de la forma de la función y se especificará a los alumnos que no se le pide una representación lo más exacta posible, sino un esbozo, por lo que la técnica T CR SG2 basada en la forma debería aparecer de manera natural. Sirve también de cara estudiar la tendencia en cursos posteriores.

Problema 3:

Realiza un esbozo de las gráficas de las siguientes funciones en el mismo plano cartesiano:

i) $f(x)=Log_3(x^2)$ iii) $f(x)=Log_4(1/x)$
ii)$f(x)=Log_4(x)$ iv) $f(x)=Log_3(9x^2)$

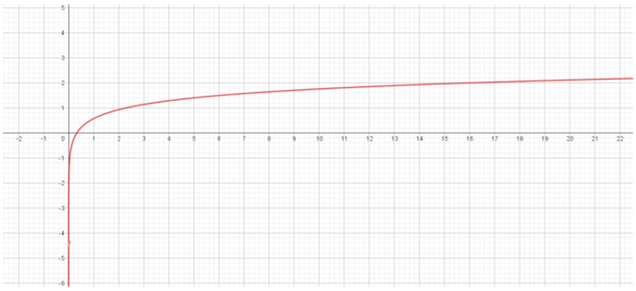
Aquí se deben aplicar primero propiedades para obtener expresiones de las cuales sean capaces de interpretar, por ello lo asociamos a la técnica T CR SG 3 que recoge este aspecto.

❖ (CR GS) Cambio de registro gráfico a simbólico.

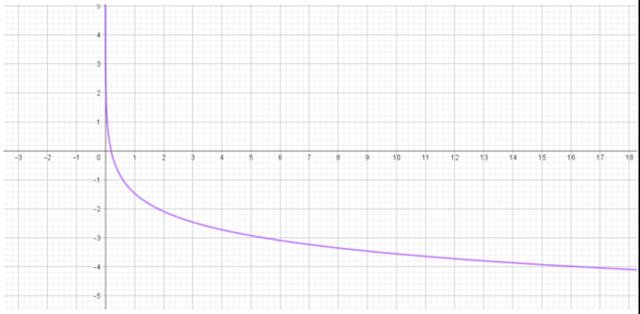
Apareciendo estas dos de manera combinada como:

‹ (CR S-G) Asociación entre gráficas y fórmulas. Lo consideraremos un subtipo perteneciente a los dos previos.

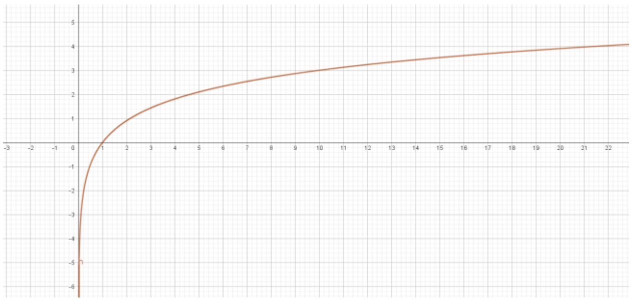
Se muestran a continuación las gráficas de cuatro funciones de entre las siguiente: $Log_3(3x)$, $Log_{1/3}(5x)$, $Log_{\sqrt{2}}(2x)$, $Log(x^3)$, $Log_7(3x)$ y $Log_{10/11}(x)$. ¿Cuáles creéis que son cada una? ¿Por qué? Realizad un esbozo razonado de las gráficas restantes.



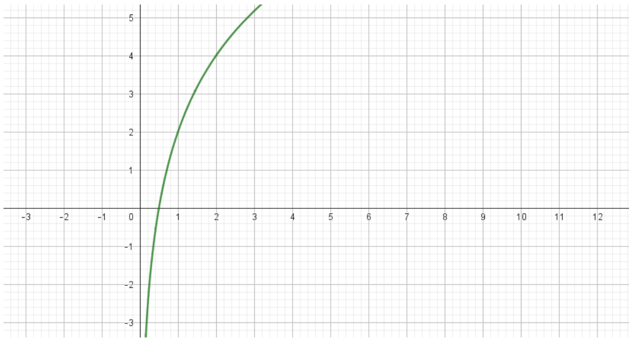
A



B



C



D

Respecto a la técnica, es la primera vez que aparece como problema combinado de uso de las técnicas anteriores a las que está asociado, requiere por tanto la combinación de ambas.

Problemas centrados en el valor numérico del logaritmo:

Tratan sobre el logaritmo en su vertiente más puramente numérica del plano aritmético, aunque se sirven ampliamente del aspecto funcional y de las diversas representaciones que de este surgen para su resolución:

♦ (CV) Comparación de logaritmos de cantidades: según si se trata de la misma base o no tendremos:

❖ (CV MB) Comparación de logaritmos de cantidades de la misma base.

Indica que valores son más grandes en cada caso:

a) $\mathrm{Log}_2(4)$ vs $\mathrm{Log}_2(7)$

b) $\mathrm{Log}_{0.2}(4)$ vs $\mathrm{Log}_{0.2}(7)$

c) $\mathrm{Log}_{300}(11)$ vs $\mathrm{Log}_{300}(10)$

d) $\mathrm{Log}_{0.7}(-2)$ vs $\mathrm{Log}_{0.7}(1)$

e) $\mathrm{Log}_{\sqrt{2}/2}(1)$ vs $\mathrm{Log}_{\pi}(1)$

f) $\mathrm{Log}_{(1+\sqrt{2})/2}(\pi)$ vs $\mathrm{Log}_{(1+\sqrt{2})/2}(4)$

g) $\mathrm{Log}_{0.9}(721)$ vs $\mathrm{Log}_{0.9}(0.1)$

h) $\mathrm{Log}_{1/3}(0.1)$ vs $\mathrm{Log}_{1/3}(10)$

La técnica T CV MB 1 que consiste en realizar un gráfico de la función, es sustituida por T CV MB 2 que se basa en el uso de propiedades de crecimiento o decrecimiento intrínseca a la propia función.

❖ (CV DB) Comparación de logaritmos de cantidades de distinta base.

Indica en los siguientes casos que valores son menores de cada pareja presentada:

i) $\mathrm{Log}_2(5)$ vs $\mathrm{Log}_3(4)$

ii) $\mathrm{Log}_{4.7}(11)$ vs $\mathrm{Log}_{5.3}(6.21)$

iii) $\mathrm{Log}_{\sqrt{3}}(22)$ vs $\mathrm{Log}_{0.5}(2)$

iv) $\mathrm{Log}_7(8)$ vs $\mathrm{Log}_3(2)$

v) $\mathrm{Log}_{5/2}(2.5)$ vs $\mathrm{Log}_{2/5}(0.4)$

vi) $\mathrm{Log}_{5/3}(10)$ vs $(5/3)^{10}$

La técnica T GOBI de representación por simetría individual de los logaritmos, se realiza ahora dos veces en cada función y se comparan las ordenadas de los pares de puntos de interés dando como resultado una nueva técnica etiquetada como T CV DB.

♦ (AV) Acotación del valor del logaritmo (restringido a enteros).

Indica en cada caso si el valor es positivo o negativo y da una estimación entre dos números enteros consecutivos:

i) $\mathrm{Log}_5(4)$

ii) $\mathrm{Log}_{3/2}(2)$

iii) $\mathrm{Log}_{0.9}(10)$

iv) $\mathrm{Log}_{0.9}(0.5)$

v) $\mathrm{Log}_{\sqrt{2}/\sqrt{3}}(\sqrt{3})$

vi) $\mathrm{Log}_{10}(101)$ -1

Los problemas adquieren una variedad de presentaciones en función de la técnica que tratan de aportar o modificar. Así, tenemos bastantes muy guiados cuando se trata de la introducción de una técnica novedosa como es el caso del problema introductorio, de la representación de escalas logarítmicas, del uso de las reglas de cálculo, etc. Y otros que buscan que sean los propios alumnos los que modifiquen la técnica, evitando hacer referencias a que algo haya cambiado, como son el segundo problema del registro simbólico de cálculo de valores o el tercero del cambio de registro de simbólico a gráfico. En cualquier caso, se evita siempre una explicación con ejemplo previo de la realización de un nuevo tipo de técnica por tratarse de una metodología mecanicista, lo que se busca es que los alumnos deban reflexionar sobre los saberes para que estos se vuelvan útiles.

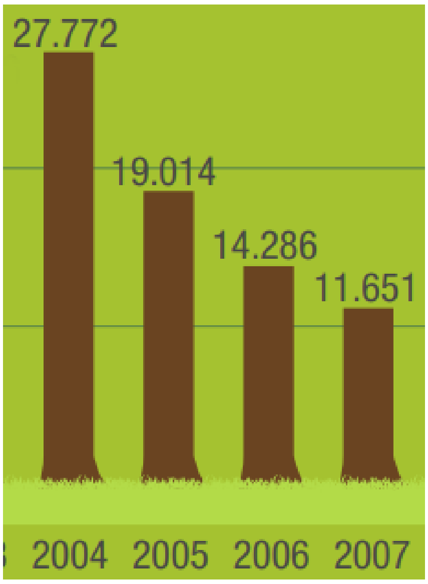
F. Sobre las técnicas

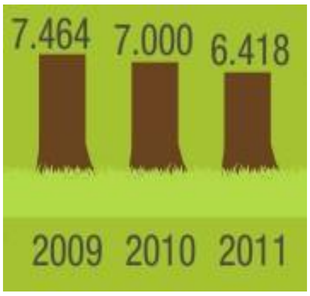
Existen bastantes técnicas de las expuestas cuyo objetivo a perseguir es la articulación de un hilo argumental del conocimiento sobre el logaritmo, como tal la repetición de ejercicios de sus respectivas temáticas no aportan tanto como continuar con la trama e interiorizar aquellos conceptos y propiedades que se requieran para su desarrollo en cursos posteriores y el afianzamiento en este. Por ello, en los ejercicios que aparecen a continuación no aparecen varias de las técnicas introducidas como problemas anteriormente. Por último, las actividades que se presentan no carecen de interés ni son meros ejercicios de repetición. Se incluye en ellas una nota del valor adicional que se pretende aporten.

<u>Ejercicios de modelos de crecimiento exponencial</u>:

<u>Biológico</u>:

Las siguientes dos imágenes muestran los kilómetros cuadrados deforestados del Amazonas brasileño por año extraído de un artículo de Iberdrola:

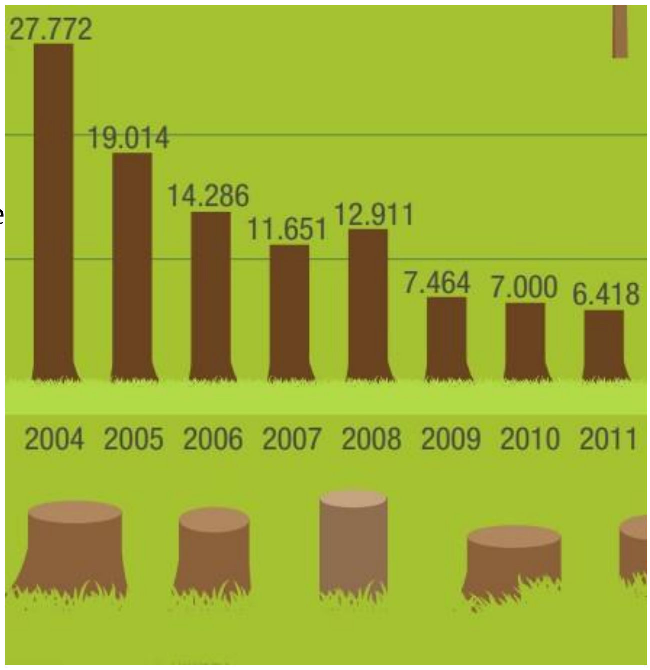




i) ¿Qué modelo creéis que se ajusta mejor a cada gráfico por separado, uno lineal o uno exponencial? ¿Y de manera combinada? ¿Por qué? ¿Qué valores tomaríais para cada aproximación?

ii) Observa que el año 2008 no está incluido en ninguna de las series. Estimad su valor considerando que es el último año de la serie 2004-2008, es decir, suponiendo que pertenece al modelo de esa serie, y considerando que es el primero de la serie 2008-2011. ¿Cuál creéis que es más acertado? ¿Por qué?

iii) La gráfica real es la siguiente:



iv)¿Es el valor de 2008 atípico? ¿A qué crees que se puede deber? Buscad información sobre los daños en el Amazonas en el 2008.

v) Suponiendo que la deforestación hubiese seguido el ritmo de recuperación inicial, ¿cada cuánto se hubiese recuperado la mitad de la superficie deforestada?

vi) Representa el año en función de los kilómetros de superficie deforestada. ¿Qué relación debería tener este gráfico con el inicial? ¿Se trata de una función logarítmica?

Sobre el ejercicio: permite observar la capacidad de los modelos para detectar sucesos que, a priori, no parecen tan extraños pero que en realidad llaman la atención una vez contextualizados.

Físico:

El carbono catorce es un isótopo que se encuentra de manera natural en los tejidos orgánicos debido a que las plantas lo captan a través del dióxido de carbono y este es incorporado por los animales al alimentarse de estas. Este isótopo decae de manera exponencial, lo que quiere decir que, dada una cantidad de átomos de este isótopo, la proporción de átomos que encontraremos pasado un tiempo t vendrá dado por la potencia de un número.

i) Plantead la relación descrita en la frase anterior llamando N_0 al número de átomos iniciales, N al número de átomos actuales y K al número que elevamos.

ii) El tiempo de vida medio del carbono catorce es de en torno a 5570 años, es decir, pasado ese tiempo tendremos siempre la mitad de los átomos en nuestra muestra inicial. ¿De qué valor crees que estará más cerca K: de 0, de 1, de 10 o de 100? ¿Por qué? ¿Cuánto vale K?

iii) Uno de los inconvenientes de usar este método para datar es que destruye la muestra en el proceso, por ello se trata de seleccionar restos con poco valor o que den información de manera indirecta. Por ejemplo, para datar los manuscritos del mar muerto se analizó un resto de lino de la misma cueva. Si el lino inicialmente se estima que debía contener dos miligramos y la muestra dio 1.521 miligramos, ¿qué estimación podríais dar de las fechas de los pergaminos?

iv) Actualmente, el carbono catorce tiene como límite de datación los 50000 años, ¿a partir de qué proporción del isótopo deberíamos dudar de los resultados?

Sobre el ejercicio: además de la conexión con las asignaturas de física y química y geografía e historia, relacionado con la competencia específica 6, este ejercicio aporta un nuevo concepto que aparece de vez en cuando en la divulgación científica en distintos niveles: el periodo de vida medio. Por otra parte, se repasa la metodología de ajuste de un modelo de crecimiento exponencial vista en la razón de ser 4.

Económico:

En nuestro banco nos ofrecen dos posibilidades para invertir una pequeña cartera de fondos de 2000 euros: por un lado, podríamos prestarles el dinero y al cabo de x meses nos devolverían el doble. Por el otro, podríamos dejarlo en un interés compuesto de manera que cada mes aumentaría un 10% de la cantidad que hubiese en ese momento.

I) Plantead las ecuaciones que relacionan el dinero que nos devolvería cada inversión según el mes x en el que estemos.

II) Realizad el esbozo de un gráfico que enfrente ambas funciones. ¿Se puede afirmar que siempre es mejor invertir con un interés compuesto que con un fijo?

III) ¿En qué mes el interés compuesto nos devolvería el doble de lo que hemos invertido?

IV) ¿Cuánto tendría que esperar para tener el triple de los 2000 euros que he invertido? ¿Y cuánto más tendría que esperar desde que tenga el triple para tener el cuádruple? ¿Es lo mismo que lo que he tardado en tener el doble? ¿Por qué crees que pasa?

V) A la vista de las gráficas realizadas en II) y de lo observado en IV), ¿podéis afirmar siempre que una función exponencial crezca más rápido que una lineal? ¿Por qué?

Sobre el ejercicio: se trata de aplicar ya de manera directa el modelo de crecimiento exponencial, al realizar el esbozo en II) se les cuestionará por su continuidad o ausencia de ella. Por otra parte, al finalizar el ejercicio (tras el apartado V) se hablaría del sesgo del crecimiento exponencial relacionándolo con la leyenda de Sissa que seguramente vieran el año anterior y el artículo de la BBC sobre el sesgo del crecimiento exponencial de David Robson (2020).

Ejercicio de cambio de registro simbólico a gráfico:

Realiza un esbozo de las gráficas de las siguientes funciones logarítmicas sobre el mismo plano cartesiano:

i) $y=Log_2(x)$ iii) $y=Log_{1/2}(x)$

ii) $y=Log_5(x)$ iv) $y=Log_{1/5}(x)$

Sobre el ejercicio: Puesto que no se ha incluido un apartado específico para repasar la simetría gráfica entre las exponenciales de bases inversas se puede apreciar aquí una cualidad análoga. Con ello se tiene la oportunidad de recordar esa cualidad y relacionarla con la nueva.

Ejercicio de registro simbólico de cálculo de valor:

Apartado 1:

i) $Log_{31}(7) + Log_{31}(1/7) =$ iii) $Log(9)/2-Log(3) =$

ii) $5xLog_{2.5} (2.1) – Log_{2.5}(2.1^5) =$ iv) $Log(36^{\sqrt{2}})-\sqrt{2}Log(36) =$

Nota sobre el ejercicio: Sirve para ir preparando una propiedad que será vista después, se complementa con los dos apartados de estudio que le siguen. El iii) y iv) están pensados para que se realicen con calculadora, aunque esto no se especificará de cara a que sean los alumnos quienes lo intenten. Se trata por tanto de comenzar un estudio de una propiedad y de legitimar a la calculadora como una herramienta de análisis. Es cierto que el iii) puede ser realizado simbólicamente, y si algún grupo llega a ello debería ser puesto en común.

Ejercicio a caballo entre el cálculo de valor del registro simbólico y la comparación de logaritmos de distintas bases:

Indica en cada caso que valor es mayor:

i) $\mathrm{Log}_3(5) - \mathrm{Log}_4(3)$ vs $\mathrm{Log}_4(5/3)$ iii) $\mathrm{Log}_7(1/8)$ vs $\mathrm{Log}_{0.3}(1/10)$ v) $\mathrm{Log}_9(1) + \mathrm{Log}_9(1)$ vs $\mathrm{Log}_9(2)$

ii) $\mathrm{Log}_6(8)$ vs $3\mathrm{x}\mathrm{Log}(11)$ iv) $\mathrm{Log}_\pi(4)-1$ vs $2\mathrm{x}\mathrm{Log}_{9/4}(1.5)$ vi) $2\mathrm{x}\mathrm{Log}_6(3)$ vs $\mathrm{Log}_6(2\mathrm{x}3)$

Sobre el ejercicio: combina el uso de las propiedades con la simetría, los resultados por acotación se valorarán como buenos y se marcará de cara a no tensionar el contrato didáctico. Puesto que no es clara la metodología a seguir en este punto para este ejercicio por la existencia de procesos distintos razonables, se espera que aparezcan soluciones alternativas y se comparen de cara a analizar sus cualidades. Los últimos dos apartados tratan de representar la no linealidad del logaritmo.

Presentamos además la **lista completa de técnicas** extendida:

- (T ME) Técnicas asociadas a los modelos de crecimiento exponencial:
  - (TME1) Simplificar a función exponencial dividiendo por un valor de referencia.
  - (TME2) Aplicar logaritmos a cada lado de la igualdad y usar propiedades.
- (T EL) Técnicas asociadas a las escalas logarítmicas:
  - (TELE) Técnica de representación de escalas logarítmicas: consiste en la tabulación del logaritmo de los valores como paso intermedio antes de representar.
  - (TELI) Técnica de interpretación de escalas logarítmicas: consiste en estudiar los datos que aparecen en una escala logarítmica de manera comparativa y acotarlos.
- (T RC) Técnicas asociadas a las reglas de cálculo:
  - (T RCC) Técnica de creación de reglas de cálculo: se trata de crear una representación en escala logarítmica de tantos números como se crea conveniente y situar los valores calculados sobre la misma línea en dos papeles, de manera que se puedan superponer estosde manera cómoda.
  - (T RCA/S) Técnica de multiplicación/división por adición/sustracción: consiste en posicionar la regla de cálculo de manera que las distancias entre los números a multiplicar/dividir se sumen/resten y observar el resultado.
- (T G) Técnicas asociadas al registro gráfico:
  - (T GId) Comparar visualmente la forma de la gráfica y comprobar si verifica una serie de propiedades asociadas como son el dominio, recorrido, crecimiento, etc.
  - (T GOBI) Aplicar propiedad de simetría respecto a la bisectriz que se debe dar entre las gráficas de funciones inversas.
  - (T GInfP) Se busca observar una relación que se da entre las coordenadas de los

puntos de una gráfica.

- (T S) Técnicas del registro simbólico:
  - (T SCVS) Reducir el argumento a una descomposición en producto de potencias de valores conocidos del logaritmo, conocidos por ser potencias de la base, y aplicar propiedades para poner de manera lineal respecto a esos valores.
  - (T SEL) Aplica la agrupación de logaritmos a cada lado de la expresión y, una vez todos los elementos están agrupados, pasa a la ecuación equivalente de igualdad entre argumentos de los logaritmos.
- (T T) Técnicas del registro tabular:
  - (T TInfP) Se verifica una propiedad para una serie de casos y se acepta su certeza por no fallar para ninguno de ellos y asumir que se cumple también para el resto de los casos (alternativamente, se acepta que se cumple un patrón siempre).
- (T CR SG) Técnicas de cambio de registro de simbólico a gráfico:
  - (T CR SG1) Se usa GOBI con la exponencial de la misma base.
  - (T CR SG2) Se usa el conocimiento de las propiedades de la forma de la función a graficar y se esboza esta sin dar puntos.
  - (T CR SG3) Se usa el conocimiento de la forma de una función a graficar desplazada (ya sea f(x+a) o f(x)+a con "a" el valor apropiado) y se realiza el esbozo considerando los ejes desplazados.
- (T CR GS) Técnicas de cambio de registro de gráfico a simbólico: Se identifica el tipo de función según su forma y se buscan aquellos elementos que intervienen en la expresión simbólica. En el caso del logaritmo, se busca el punto donde alcanza el valor Y=1 y se asocia la coordenada X de ese punto con la base.
  - (T CR S-G) Técnicas de asociación entre gráficas y fórmulas: Consiste en aplicar (T CR SG) o (T CR GS) de manera reiterada y pasar, si fuese necesario, en el registro simbólico a una expresión equivalente.
- (T CV) Técnicas de comparación de logaritmos de cantidades:
  - (T CV MB 1) Consiste en representar de manera gráfica el logaritmo y buscar a que altura queda cada una de las funciones en el punto de interés.
  - (T CV MB 2) Consiste en determinar según el valor de la base del logaritmo si la función es creciente o decreciente y ver que argumento es mayor o menor que el otro.
  - (T CV DB) Se representan ambos logaritmos (por ejemplo usando GOBI) y se trata de comparar la altura de los puntos de las imágenes.
- (T AV) Técnica de acotación del valor del logaritmo (restringido a enteros): La técnica consiste en aplicar primero que, si el argumento es mayor o menor que 1, será es creciente o decreciente respectivamente la función y aplicar que en el 1

alcanza siempre el valor 0 para determinar el signo y luego usar la definición del logaritmo como inversa de la exponencial para tantear con la potencia.

Sobre la adecuación de las técnicas:

Una parte importante de las técnicas presentadas es su utilidad como paso intermedio, de esta formatenemos técnicas que sirven para desarrollar el resto como es el caso de la técnica asociada a la simetría (T GOBI) influyendo en la creación de la primera técnica de cambio de registro de simbólico a gráfico (T CR SG 1), o en el uso de las distintas técnicas de representación gráfica que se pueden usar para comparar valores de logaritmos con distintas bases (T CV DB).

Tenemos, por otra parte, aquellas técnicas que van evolucionando según su adecuación al problema. En esta categoría encontramos a las asociadas al modelo de crecimiento exponencial siendo la primera de ellas un proceso de reducción a una función exponencial que deja de ser necesario cuando se ha interiorizado el modelo. Por ello, pierde utilidad realizar el proceso de manera completa y basta con trabajar sobre él. Por otra parte, las técnicas de cambio de registro adquieren un valor centrado en la forma de la gráfica y no tanto en la precisión de los valores al avanzar la secuencia. Así, la técnica que es más precisa pero más lenta (T CR SG 1) pierde valor cuando se requiere realizar un esbozo en favor de aquellas basadas en la forma de la función (T CR SG 2 Y 3). Sin embargo, puede tener su sentido cuando se traten de comparar logaritmos de distinta base ya que un esbozo puede resultar engañoso.

Por último, las técnicas asociadas a la comparación de logaritmos de cantidades con la misma base tienen cierta equivalencia y es decisión del alumno que técnica usar.

Sobre la metodología asociada a las técnicas:

Por tratarse de un tema bastante nuevo respecto a las técnicas a usar, y siendo bastantes de ellas de un único uso, muchas de las técnicas se observa que están guiadas. Esto no quiere decir que se robe del papel de descubridor al alumno, sino que se valora que este descubrimiento debe ser principalmente en el papel reflexivo de las aplicaciones de la teoría que va generando a las técnicas y no tanto en la modificación de las mismas a problemas similares. Este ejercicio de modificar la técnica tiene su razón de ser en tanto en cuanto sirvan para esta reflexión ya que la proyección del currículo del logaritmo para cursos posteriores no da pie a la necesidad de desarrollar ahora una batería de técnicas dedicadas para la resolución de problemas como pueden ser las ecuaciones logarítmicas.

Se citan a continuación aquellas técnicas que se espera sean descubiertas por el alumno, entendiéndose que el resto están guiadas (muchas veces en el propio enunciado, como es el caso de las escalas logarítmicas o las reglas de cálculo):

- T GId: la identificación de las funciones logarítmicas una vez vista su forma y características principales se deja en manos de los alumnos, de esta forma se incentiva a la reflexión sobre la teoría.
- T S: las técnicas del registro simbólico, tanto el cálculo del valor simple como las ecuaciones logarítmicas, se entienden como ejercicios de aplicación de las propiedades que se ven previamente, por ello se considera más fructífero si son los alumnos quienes deben trabajar el desarrollo de su capacidad de aplicación de la teoría.
- T CR SG2 Y SG3: puesto que los alumnos deben desarrollar la capacidad de juzgar cuán precisa debe ser una respuesta, el dar una aproximación a la forma de la función debe salir de ellos, y no convertirse en un mero problema de identificación de palabras en el enunciado. En este caso, se espera que empiecen a relacionar la palabra esbozo con la suficiencia de estas técnicas, pero que al aplicarlas como proceso intermedio deban ellos ajustar su uso. Es decir, se sabe la automatización que se va a dar en un tipo de ejercicio, pero su verdadero valor se dará al usarse como paso intermedio en la comparación de valores.
- T CR GS: por considerarse que es un ejercicio interesante en sí mismo aplicar las propiedades en ambos sentidos, se deja a los alumnos que sean quienes deban tratar de reconocer la expresión simbólica de una gráfica cuando se ha realizado el estudio del caso inverso de manera guiada.
- T CR S-G: por tratarse de una combinación de las anteriores técnicas, aporta más que sean los propios alumnos quienes busquen fórmulas de aplicación propias de estas que tratar de dar consejos heurísticos.
- T CV DB: puesto que se ha visto el caso de la T CV MB 1, es decir la representación gráfica de los logaritmos, se espera que sean los propios alumnos quienes razonen que pueden realizar el mismo proceso dos veces.
- T AV: debido a que la acotación es una tipología de problema bastante personal en los procesos que realiza cada alumno, el dar un recetario es contrario al espíritu de desarrollo de esta capacidad. Los alumnos deben realizar este proceso de manera personal y debatiendo dentro de cada grupola adecuación del mismo.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

a. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

Puesto que la clasificación dada al inicio es demasiado general, para cada una de las técnicas presentadas se da la tecnología asociada que presentaremos en el aula:

♦ (Tc ME) Queda justificada a través del trabajo realizado en la razón de ser 1 y 4.

♦ (Tc EL) Se justifica a través de la imposibilidad de representar determinados conjuntos de datos de manera razonable y de la definición de logaritmo para su interpretación, se observará en larazón de ser 2.

♦ (Tc RC) Se justifica por su fabricación y comprobación empírica realizado en la razón de ser 3.

♦(Tc G) Las tecnologías asociadas al modelo gráfico son:

❖(Tc GId) La forma y características de las gráficas se conservan dentro cada familia de funciones, se observará en concreto la función logarítmica analizando casos.

❖(Tc GOBI) La propiedad de simetría se comprueba por experimentación en el problema de la razón de ser 1 (entre puntos) y se asume su generalidad.

❖ (Tc GInfP) La relación entre las coordenadas es genérica y se cumple para todos los puntos, luego para todos los valores.

♦(Tc S):

❖(Tc SCVS) Las propiedades del logaritmo se cumplen siempre (se ve demostración con caso numérico y algebraico), y estas quedan justificadas a través del cambio a exponencial.

❖(Tc SEL) Las propiedades del logaritmo se cumplen siempre, y estas quedan justificadas a través del cambio a exponencial. Además, el logaritmo queda definido como inversa operatoria respecto a la exponencial desde el problema GInfP.

❖(Tc TInfP) La consistencia del resultado, la propiedad ha sido validada en suficientes casos por lo que se asume que se puede extender. Posteriormente se demostrará de manera simbólica.

♦(Tc CR) Todas las técnicas asociadas a cambio de registro (CR) quedan justificadas por la equivalencia entre registros que ya se ha estudiado en cursos anteriores.

♦(Tc CV) Se justifica por la equivalencia de registros (T CV MB1) y (T CV DB) y por la universalidad de la monotonía dentro de regiones se las bases (T CV MB2) que se observa en el problema 1 del cambio de registro simbólico a gráfico.

♦(Tc AV) Se justifica en la relación entre logaritmo y exponencial y la continuidad de la función exponencial vista en el problema de cambio de registro simbólico a gráfico 2.

b. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Tal y como se ha señalado antes, se han dividido las técnicas en dos conjuntos: aquellas que se presentan al alumno y aquellas que debe descubrir el mismo. Esta clasificación tiene su simétrico en lo que respecta a las tecnologías asociadas. Esto, se traduce en que las técnicas que hemos clasificado como de descubrimiento por parte del alumno incluirán, como tarea para este, su justificación en primera instancia, aunque se buscará un consenso en la clase. Por otra parte, corresponde al profesor la carga de justificar el resto de las técnicas y de aquellos vacíos que puedan haber quedado. Es necesario señalar que esto no se realiza mediante una lectura de la tecnología que corresponda en cada caso del subapartado anterior (tal y como se ilustra en el siguiente subapartado).

c. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Vamos a dividir al logaritmo como saber en tres aspectos principales:

i. Función logarítmica.
ii. Características operatorias del logaritmo.
iii. Modelo de crecimiento exponencial.

No debemos entender estos tres pilares conceptuales de manera aislada, aunque se precisa de clasificar para poder diferenciar algunos aspectos más concretos que se muestran en el estudio del objeto.

Por una parte, la función logarítmica se institucionaliza tras una primera observación de la misma en el problema de razón de ser 1 al mismo tiempo que la simetría con las exponenciales de la misma base. Por otra parte, sus características como el dominio, imagen, crecimiento, etc. Son estudiadas con el problema de cambio de registro simbólico a gráfico 1.

Respecto a la operatoria podemos dividir a su vez en dos ejes:

- Inversa operacional de la exponenciación.
- Propiedades de adición, sustracción y exponenciación del argumento.

La primera se institucionalizará tras el problema de inferencia de propiedades del registro gráfico mientras que la segunda se divide en: los resultados obtenidos del estudio de las reglas de cálculo y las demostraciones que se darán a continuación y el ejercicio que se pone como ejemplo en la metodología y posterior demostración.

Por último, los aspectos del modelo de crecimiento exponencial que involucran al logaritmo están presentes desde su definición en la secuencia, y como tal se señalarán, y se verán desarrollados en la resolución de los ejercicios.

d. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Todas las tecnologías de nueva introducción tienen un foco en la experimentación por parte de los alumnos a lo largo de los diversos problemas y ejercicios presentados. Así, aunque sea en última instancia el profesor quien de una demostración más formal o una definición concreta, estas no están vacías de significado o intuición previa. Por ejemplo, tal y como se ha señalado previamente, la demostración de la propiedad de equivalencia de exponenciación del argumento se realizará de la siguiente manera:

Primero se realizará el ejercicio de registro simbólico de cálculo de valor expuesto anteriormente como preparación, se tratan de casos en los que se debe usar o propiedades ya vistas o la calculadora por tratarse del logaritmo decimal. Este uso de la calculadora desde aquí va encaminado a dotar de legitimidad el estudio que se realiza a continuación:

Apartado 2:

Rellenad la tabla, primero con lo que creéis y debatid el porqué, después comprobadlo usando la calculadora:

¿$Log(0.15^{3.1})=3.1xLog(0.15)$?	Sí/No
¿$Log(\sqrt{2}^{\sqrt{3}})=\sqrt{3}xLog\sqrt{2}$?	
¿$-1/7xLog(13.5)=Log(1/13.5^{7})$?	
¿$-2xLog(4)=Log(1/4^{2})$?	
¿$6xLog(2^{7})=Log(2^{42})$?	
¿$0xLog(29)=Log(29^{0})$?	
¿$Log(\pi^{\pi})= \pi$ x $Log(\pi)$?	
¿$(Log(3))^{4}=4$ x $Log(3)$?	
¿$Log(25.6^{0.27})=0.27xLog(25.6)$?	

Se trata de un estudio numérico posterior a una reflexión por parte de los alumnos. Notar que contiene dos casos que no son correctos para evitar que los alumnos obvien el estudio. Este estudio de casos se realiza siempre y viene acompañado de manera usual de la pregunta del último apartado:

Apartado 3:

¿Qué hipótesis tenéis?

Tras ello se daría una demostración con números tal y como:

“Si hago $(10^{\mathbf{Log\ 5}})^{\mathbf{3}}$, ¿a qué es igual?”

Se esperan dos respuestas, en caso contrario se planteará la que falte:

“Por un lado es igual a $5^{\mathbf{3}}$ si hago primero el logaritmo y por otro a $10^{\mathbf{3xLog\ 5}}$ si aplico la potencia primero, pero deben ser lo mismo, a si qué, ¿a qué es igual $Log(5^{\mathbf{3}})$?”

En caso de ser necesario se indicará que debe ser el número al que al elevar a 10 sea 5^3 y que ya hemos visto ese número.

"Y esto que hemos visto, ¿es exclusivo del logaritmo decimal con el 5 y el 3 o se mantiene si cambiamos esos tres números por cualquiera otros?"

Una vez se convenza de que pasa siempre (cosa para la cual nos apoyaríamos en enfrentar con ejemplos) se daría el resumen de la propiedad:

"Por tanto tenemos que $\mathrm{Log}_b(a^c)=c\times\mathrm{Log}_b(a)$ para cualesquiera a y b positivos y todo c".

En lo que respecta a las técnicas que deben justificar los alumnos por ser de su propia modificación, al finalizar los correspondientes problemas se haría una puesta en común para su justificación.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

De cara a comprender el sentido de la secuencia presentada a continuación, deben ser explicitadas las dos motivaciones principales de la misma. Por un lado, tal y como recogen Leinhardt et al (2006) en el caso general de las funciones, una vez elegido el foco de entrada a un objeto, este dictamina hasta cierto punto la secuencia que le sigue. Así, el comenzar desde el punto de vista funcional y gráfico posterga hasta la mitad de la secuencia (sexta sesión) la aparición de las propiedades operatorias del logaritmo usuales. Por otro, al existir técnicas que se han considerado interesantes su trabajo por motivos teóricos y que son fácilmente sustituibles por las que le siguen en la secuencia (como caso particular piénsese en el cambio de registro simbólico a gráfico del logaritmo), no pueden aparecer antes aquellas que son ya mejores o de lo contrario no daremos razón de ser a las que también nos interesan.

Por último, un elemento que se ha evitado mostrar de manera consciente es la presentación del logaritmo fraccionando su dominio. Esto, tiene sentido si lo que se busca es ganar profundidad en la técnica de representación de inversas (GOBI). Tiene su lugar, esta decisión, bajo la óptica de un curso en el que de manera posterior podría presentarse la función raíz cuadrada a través de esta técnica, usando un dominio restringido de la función cuadrática. Se ha decidido en contra ya que los alumnos tienden a recordar las primeras presentaciones y ejemplos como su principal fuente de información, nuevamente en Leinhardt et al (2006), y a que esto solo posterga la introducción del objeto que se busca en este trabajo, el logaritmo.

Se recoge a continuación un cronograma por sesión:

Sesión 1:
-Problema de razón de ser 1.
-Institucionalización y definición funcional del logaritmo.

Sesión 2:
-Problema 1 de cambio de registro simbólico a gráfico.
-Institucionalización de las características de las funciones logarítmicas.
-Realización del problema 1 de comparación de logaritmos de cantidades de la misma base.

Sesión 3:
- Realización del problema 2 de cambio de registro simbólico a gráfico.
- Proyección de GeoGebra de dos logaritmos con base con deslizador positivo para estudio de cortes.
- Realización del problema de comparación de logaritmos de cantidades de distinta base.

Se espera que este segundo problema se alargue un poco debido a que se debe debatir sobre la necesidad de hacer una representación lo más fiel posible en todos los casos o si con esbozar las funciones podría servir a veces.
- Realización del problema de inferencia de propiedades a través de la expresión gráfica.
- Institucionalización del logaritmo como inversa operatoria de la exponenciación.

Sesión 4:
- Realización del problema 1 de cálculo del valor numérico de un logaritmo a través de propiedades simples.
-Corrección y recordatorio en caso de que sea necesario de las propiedades de las potencias.
-Realización del problema de acotación del valor del logaritmo (restringido a enteros).
-Realización del ejercicio de cambio de registro simbólico a gráfico.

Sesión 5:
- Realización del problema de conocimientos previos 3 (notación científica).
- Breve recordatorio de notación científica en caso de ser necesario.
- Realización del problema de inferencia de propiedades a través del registro tabular.
- Institucionalización del logaritmo decimal.
- Realización del problema de razón de ser 2.
- Institucionalización de las escalas logarítmicas.
- Breve discusión sobre: ¿qué hace representativa a una gráfica?

Sesión 6:
-Realización del problema de razón de ser 3.
-Institucionalización de las reglas logarítmicas.
-Ejemplificación y prueba de propiedades de sustracción y adición de logaritmos.

Sesión 7:
- Realización del problema 2 de cálculo del valor numérico de un logaritmo a través de propiedades simples.
-Realización del problema de asociación entre gráficas y fórmulas.
-Realización del problema de ecuaciones logarítmicas sencillas a través de propiedades.

Sesión 8:
-Realización del problema de conocimientos previos 1 (exponenciación sucesiva)
-Realización del ejercicio de registro simbólico de cálculo de valor con los tres apartados, como en el ejemplo dado en la metodología de implementación de la tecnología visto.
- Institucionalización de propiedad de exponenciación de argumento del logaritmo.
- Realización del problema 3 de cambio de registro simbólico a gráfico.

Sesión 9:
-Realización del problema de razón de ser 4 (práctica del circuito RC).
-Institucionalización del modelo de crecimiento exponencial,

Sesión 10:
-Realización de ejercicios de modelo de crecimiento exponencial de los submodelos físico y biológico.
-Estudio e investigación del problema en el Amazonas durante 2008.

Sesión 11: (Repaso y preparación para el examen)

- Realización del ejercicio de modelo de crecimiento exponencial submodelo económico (la lectura de la noticia se dejará como tarea para casa).
- Realización del ejercicio a caballo entre el cálculo de valor del registro simbólico y la comparación de logaritmos de distintas bases.
-Repaso de ejercicios sobre los cuales los alumnos expresen dudas.

Sesión 12:
Prueba.

Sesión 13:
Realización en clase de la prueba.

I. <u>Sobre la evaluación</u>

Previo al diseño de la prueba, en consideración de la formación evaluativa y continua que promueve la LOMLOE se hace necesario señalar algunas actividades que podrían servirnos para realizar esta junto los criterios de evaluación asociados a las competencias específicas que movilizarían por sesión salvo la primera ya que le damos un cierto valor de evaluación inicial:

➢ Sesión 2: Problema 1 de cambio de registro simbólico a gráfico.

Competencia Específica 3: “Formular y comprobar conjeturas sencillas…”
Criterio de evaluación 3.1: Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.

Se trata del estudio guiado de las características de la función logarítmica.

➢ Sesión 3: Problema 2 de cambio de registro simbólico a gráfico.

Competencia Específica 3 : “Formular y comprobar conjeturas sencillas…”
Criterio de evaluación 3.1: Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.

Se trata del estudio guiado del número de cortes entre funciones logarítmicas.

➢ Sesión 4: Problema de acotación del valor del logaritmo (restringido a enteros).

Competencia específica 1: “Interpretar, modelizar y resolver problemas…”
Criterio de evaluación 1.2 “Analizar y seleccionar diferentes herramientas…”

El problema puede abordarse desde el registro gráfico o desde la equivalencia con el problema exponencial, es por ello que debe ser el alumno quien seleccione la técnica que considere adecuada. Si tuviésemos como objetivo trabajar un poco más la competencia específica de pensamiento algorítmico, podríamos incluir la búsqueda de la base del logaritmo neperiano por parte de los alumnos.

Competencia específica 2: “Analizar las soluciones…”
Criterio de evaluación 2.1 “ Comprobar la corrección matemática…”

Parte del proceso de acotación requiere, una vez propuesta una, comprobar su idoneidad.

➢ Sesión 5: Problema de inferencia de propiedades a través del registro tabular.

Competencia Específica 3 : “Formular y comprobar conjeturas sencillas…”
Criterio de evaluación 3.1: Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.

Se trata del estudio guiado del patrón que aparece en los logaritmos del argumento por múltiplos de la potencia.

Competencia Específica 4 : “Utilizar los principios del pensamiento computacional…”
Criterio de evaluación 4.2: Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando, modificando, generalizando y creando algoritmos.

La búsqueda de la base que le corresponde al logaritmo decimal en la calculadora fuerza a que los alumnos deban idear métodos organizados de búsqueda ya que el tanteo se evidencia poco útil.

- Sesión 6: problema de razón de ser 3.

Competencia Específica 3 : “Formular y comprobar conjeturas sencillas…”
Criterio de evaluación 3.1: Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.

A lo largo de todo este ejercicio aparecen numerosas ocasiones para valorar esta competencia al mismo tiempo que se realiza una investigación de las propiedades de los logaritmos.

- Sesión 7: Problema de asociación entre gráficas y fórmulas,

Competencia específica 1: “Interpretar, modelizar y resolver problemas…”
Criterio de evaluación 1.2 “Analizar y seleccionar diferentes herramientas…”

Se ha visto en este punto unas cuantas técnicas que a priori pueden parecer igual de útiles para la resolución de este problema. Por ello se vuelve necesario ir seleccionándolas bajo algún criterio de optimalidad subjetivo.

Competencia específica 2: “Analizar las soluciones…”
Criterio de evaluación 2.1 “ Comprobar la corrección matemática…”

Puesto que las gráficas son similares en algunos casos, los alumnos deberían tener hasta cierto punto dudas de su elección y realizar de forma autónoma algún tipo de comprobación.

- Sesión 8: Problema 3 de cambio de registro simbólico a gráfico.

Competencia específica 5: “Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemático…”
Criterio de evaluación 5.1 “ Deducir relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.”

El problema precisa de aplicar las propiedades que se han desarrollado en el terreno de lo operatorio para realizar las gráficas de funciones nuevas.

- Sesión 9: Problema de razón de ser 4.

Competencia Específica 3 : “Formular y comprobar conjeturas sencillas…”
Criterio de evaluación 3.1: Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.

Se trata nuevamente de una exploración guiada, siendo esta vez el foco el terreno de la modelización y de las funciones,

Competencia Específica 6 : “Identificar las matemáticas implicadas en otras materias…”
Criterio de evaluación 6.2: Analizar y aplicar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias realizando un análisis crítico.

Se vuelve necesario en todo proceso de modelización tener una sana ración de duda. En lo que involucra a este problema al tratar con resistencias elevadas en tan poco tiempo en comparación puede volverse razonable dudar si se trata realmente de una función exponencial o si en cambio es una recta. De aquí también la importancia de la simulación con ordenador para convencer.

➢ Sesión 10: Ejercicio de crecimiento exponencial natural.

Competencia Específica 6 : “Identificar las matemáticas implicadas en otras materias…”
Criterio de evaluación 6.2: Analizar y aplicar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias realizando un análisis crítico.

El punto de interés estaría en que, un dato que simplemente puede parecer atípico, pero no en exceso (el referido al año 2008) se revela bastante más extraño ante la aparente conformidad del resto de datos al modelo. Ello ayuda a empujar al alumno a reflexionar sobre la existencia de un hecho distinto, aportando información tanto sobre el modelo de crecimiento exponencial como sobrela historia de la deforestación en el Amazonas.

Cuadro resumen de criterios de evaluación por sesión:

Sesión	Criterios de evaluación
2	3.1
3	3.1
4	1.2 y 2.1
5	3.1 y 4.2
6	3.1
7	1.2 y 2.1
8	5.1
9	3.1 y 6.2
10	6.2

No es casualidad que encontremos solo 3 criterios repetidos casi todas las veces. La razón de esto es doble, por un lado hay un principio de equidad ante el alumnado: de cara a evaluar a los mismos, en caso de que nos dedicásemos a tratar de evaluar bastantes más competencias, no podríamos realizar una evaluación en un entorno de clase habitual de más de dos o tres grupos en cada clase por razones físicas. Si a esto le añadimos el interés que resulta de poder caracterizar la evolución de los alumnos como resultado del proceso de enseñanza-aprendizaje con vistas a la mejora del mismo, es razonable pensar que, por lo menos durante los primeros ciclos de la unidad, el interés radica en la intensidad de las competencias y criterios afectados. En la misma tónica, se considera útil que los dos primeros problemas que evaluaríamos (los de las sesiones 2 y 3) sean tan similares, puesto que nos permite hacernos una idea de cómo está calando el nuevo concepto.

Es claro, por otra parte, que la decisión de las competencias y criterios de evaluación a seleccionar para cada unidad no son independientes y deberían compensarse a lo largo del curso en función de los objetivos que se tengan. Por esto, puede resultar artificioso tener una unidad que concentre un tipo de competencia.

Como última consideración, las competencias socioafectivas relacionadas al trabajo grupal(competencia específica 10) y sus respectivos criterios de evaluación (10.1 y 10.2) se pueden valorar a diario por la metodología elegida para el trabajo, aunque es razonable considerar que, puesto que los problemas elegidos como razón de ser suelen incluir una división de trabajo a gestionar por los alumnos, se tomen estos como referencias para la evaluación.

Nota: no se ha incluido una competencia en la sesión de preparación para el examen por considerarse que el objetivo de la misma no debe estar tan centrado en evaluar sino en transmitir calma y preparar a los alumnos. En caso de preferirse continuar con la evaluación, el ejercicio de modelo exponencial económico presenta características que lo vuelven apto para la evaluación de la competencia 6 nuevamente con el criterio 6.2.

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

La prueba es sobre 10, con un reparto de 2 puntos por pregunta y, dentro de cada una de ellas, los apartados valen lo mismo.

1- Indica en cada caso que valor es mayor:

i) $Log_3(5)$ vs $Log_3(2)$

ii) $Log_{\sqrt{2}/2}(6)$ vs $Log_{\sqrt{2}/2}(6.1)$

iii) $Log_{1.1}(0.1)$ vs $Log_{0.9}(0.1)$

iv) $Log_{0.2}(2)$ vs $Log_2(12)$

2- Calcula los siguientes valores:

i) $Log_5(4) + Log_5(1/4)$

ii) $Log_{3/2}(3/\sqrt{2}) - Log_{3/2}(\sqrt{2})$

iii) $(Log_2(8))^2$

iv) $5xLog_9(\sqrt{3}) + 2xLog_9(\sqrt{3}) + 0.5xLog_9(3)$

3- Esboza de manera razonada las siguientes funciones:

i) $f(x) = Log(x)$

ii) $f(x) = Log_2(3x)$

iii) $f(x) = Log_{1/2}(2x)$

iv) $f(x) = Log_6(x^5)$

4- Si en un banco nos ofrecen invertir 200 euros en interés compuesto del 5% durante dos años o 300 al 6% simple.

i) ¿Qué deberíamos escoger para tener el mayor beneficio posible?

Nota: el beneficio se calcularía como la cantidad de dinero que tendríamos al final menos el que habríamos invertido.

ii) Si la duración del préstamo fuera variable, ¿con qué duración de los prestamos nos daría igual invertir en uno o en otro? Da una respuesta entre dos meses consecutivos.

iii) Realiza la gráfica asociada a la situación del apartado anterior de la manera más exacta posible,es decir, sin esbozar.

5- Si la función logarítmica de una cierta base es decreciente, ¿podemos afirmar algo sobre el crecimiento de la exponencial de la misma base? ¿Por qué?

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

El primer ejercicio evalúa en los dos primeros apartados la adquisición y elección de técnicas asociadas a los problemas de comparación de valor de la misma base. Por otra parte, los siguientes dos responden a los de comparación de valor de distinta base.

El segundo es en realidad un ejercicio de aplicación de propiedades: el primero y el cuarto se pueden realizar aplicando que la suma de logaritmos es el logaritmo del producto y aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia, el segundo es diferencia de logaritmos y el tercero no es ninguna propiedad.

El tercero trata sobre el cambio de registro simbólico a gráfico y el efecto que tienen las propiedades en este desde el segundo al cuarto.

El cuarto busca la aplicación correcta de un modelo de crecimiento exponencial adaptado a términos económicos, la aplicación acotación con enteros del valor y una confirmación gráfica aprovechando la simetría.

El quinto busca reflexionar sobre los efectos de la simetría entre las dos funciones inversas (exponencial y logarítmica de la misma base).

3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

1-

i) y ii) Existen tres posibilidades: que representen la función (de manera correcta o incorrecta) y deduzcan de ahí la respuesta, que traten de usar que la función es creciente por tener base mayor a 1 y por ende el primero es mayor o que acoten con enteros ambas y de ahí deduzcan el resultado en el caso de i) (para ii) esta técnica no funciona).

iii) Pueden estimar que el primer valor será negativo y el segundo positivo o representar ambas funciones.
iv) Solo pueden representar las funciones, lo interesante aquí es ver si consideran suficiente realizar un esbozo o si pierden el tiempo usando simetría y precisión.

2-
i) Tienen dos posibilidades: aplicar la propiedad de suma de logaritmos directamente y con ello obtener el logaritmo de la unidad o aplicar que el logaritmo del inverso es menos el logaritmo.

ii) Deberían aplicar la propiedad de la diferencia de logaritmos. Una respuesta que trate de subdividir en logaritmos que solo contengan potencias de dos y de tres podría indicar una fuente secundaría de técnicas de resolución de problemas (por ejemplo videos) ya que no es algo que se haya trabajado.

iii) La resolución correcta pasa por considerar al 8 como el cubo de 2 y aplicar propiedades de manera apropiada. Por otra parte, es probable que los alumnos apliquen una propiedad inventada delogaritmo de la potencia igual a producto del logaritmo.

iv) Se espera que apliquen la suma de manera reiterada tras pasar el producto a la potencia del argumento de cada logaritmo. Puede ser que no interpreten la raíz en su forma de potencia de ½ y no sepan realizar el problema o que salven este problema multiplicando y dividiendo la expresión por 2 (aunque esto es excesivo para cuarto de la ESO, es una posibilidad en momentos de necesidad).

3-
i) Se espera que realicen esta bien, aunque puede ser que no entiendan que esta es la forma de expresar el logaritmo decimal en cuyo caso dudarán al buscar la base.

ii) Deberían aplicar propiedades primero de manera que dividan en suma de logaritmos y luego estimen el valor de $Log_2(3)$ entre 1 y 2 para dar la función desplazada. Por otra parte, puede que traten de hacer el esbozo de manera directa. Si son capaces de justificar su esbozo directo de manera razonada se dará por válido.

iii) Es similar a ii).

iv) Se debe aplicar la propiedad de logaritmo de potencia y de ahí graficar. Sin embargo, existe laposibilidad de que traten de graficar de manera directa. Nuevamente, si se da un razonamiento apropiado se considerará oportuno.

4-

i) El primer caso nos daría 200 x $1'05^2$ = 220’50 euros, es decir, habríamos ganado 20 euros con 50. En el segundo tendríamos 300 x 1’06= 318 euros, habríamos ganado 18 euros. Es mejor el primer caso.
Los alumnos pueden confundir el interés simple y el compuesto o interpretar mal el beneficio aún con la nota. También pueden aplicar mal el modelo de crecimiento exponencial.

ii) Uno de los prestamos da siempre lo mismo: 318 euros, luego se trata de estimar cuando nos devolvería 318-300 = 18 euros el otro préstamo más, es decir 218 euros. Para ello basta con plantear la ecuación:

$218 = 200 \times 1'05^{t/12}$ y despejar usando logaritmos:

t = 12 x Log(218/200)/Log(1’05) y dar dos valores que estimen esta cantidad.

Como error muy preocupante tendríamos el que “tachase” Log de arriba y abajo, implicaría que no ha interiorizado el concepto funcional del logaritmo.

Por otra parte, puede ser que no calcule bien cuánto debería ganar para que diesen lo mismoy piense que deba ser 318 euros. Esto no es el objetivo del problema aunque influirá en la calificación.

Como técnica alternativa, un alumno podría ver que el valor calculado previamente es cercano al buscado y acotarlo por tanteo en torno a él. Se valorará como correcto en ese caso.

iii) Se debe graficar a través de la simetría y verificar el resultado.

5-

Se puede afirmar que será también decreciente, para ello basta con reparar en la simetría.

Es un ejercicio de reflexión sobre las propiedades y puede generar respuestas distintas a la presentada, un ejemplo concreto sin una justificación de que se cumple siempre no se valorará como idónea.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Se usará el modelo de tercios: este considera que la actividad matemática puede ser dividida en tareas jerarquizadas según el contexto del problema (no solo interno sino externo). Así, divide en:

- Tareas principales: que marcan el objetivo de evaluación principal.
- Tareas auxiliares siendo tareas que, aunque necesarias, accesorias. Están a su vez divididas en:
  - Específicas: que están en comunión con aquellos contenidos propios de la tarea.
  - Generales: que no son específicos.

Bajo este criterio de clasificación, se permite descontar hasta un tercio de la nota por fallos en tareas auxiliares generales, hasta dos tercios por fallos en tareas auxiliares específicas y generales y hasta el total por fallos en tareas principales.

1-

Tarea principal: -Identificación y aplicación de alguna de las técnicas adecuadas.

Tareas auxiliares específicas: - Representación de las funciones

- Identificación de las características de crecimiento de la función.

Tareas auxiliares generales: -Comparación de valores.

2-

Tarea principal: -Aplicación de las propiedades de manera adecuada.

Tarea auxiliar general: -Aritmética.

3-

Tarea principal: - Descomposición de la función en traslaciones o múltiplos de la función.

Tareas auxiliares específicas: -Correcto uso de las propiedades de los logaritmos.

-Estimación razonable del valor de un logaritmo simple.

Tareas auxiliares generales: -Aritmética.

4-

i)

Tareas principales: -Aplicación correcta del modelo de crecimiento exponencial.

Tareas auxiliares específicas: -Interpretación del modelo de crecimiento exponencial en el contexto económico.

Tareas auxiliares generales: -Aritmética.

ii)

Tarea principal: -Planteamiento de la ecuación.

Tareas auxiliares específicas: -Estimación apropiada entre enteros.

Tareas auxiliares generales: -Aritmética.

iii)

Tarea principal: -Uso de técnica de representación adecuada (simetría respecto a la bisectriz).

Tarea auxiliar específica: -Representación del corte.

Tarea auxiliar general: -Representación función constante.

5-

Tarea principal: - Argumentación lógica sobre las relaciones entre las funciones.

Bibliografía:

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Álvarez A. M., García, M., Marcos, M. y Fuente, C. (2008). *Ábaco, matemáticas, 4 ESO, 2º ciclo, opción B. Recursos didácticos.* SM.

Alonso, F., Fuentes, I., García, A., García, J. M., Gutierrez, S., Ortiz, M. A. y da Veiga, C. (2001). *Proyecto Azarquiel Matemáticas: Orientaciones didácticas Segundo ciclo 4º B de E.S.O.* Ediciones de la Torre.

Bozzano, P. (2021). Logaritmo ¡no te tenemos miedo! La calculadora científica como artífice para arribar a la definición de logaritmo. Entorno abierto, 39, 2-6.

Cid, E. & Muñoz, J.M. (2022). Apuntes de diseño instruccional de matemáticas. En *Diseño curricular e instruccional en matemáticas*. Universidad de Zaragoza.

Dorce , C. (2014). Un paseo histórico por la invención de los logaritmos. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *75*, 35-45.

Duval, R. (2006), Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME,* 9, 143-168.

Farfán, R. y Ferrari, M. (2002). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. En Crespo, Cecilia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 62-67). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Iberdrola. (1 de Julio de 2021). *La deforestación hace saltar las alarmas en la Amazonia, ¿cómo podemos frenarla?.* https://www.iberdrola.com/sostenibilidad/deforestacion-amazonas.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Kay Stain, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of educational research*, 60, 1-64.

Medina, A. (2017). Efemérides: 400 años: John Napier, inventor de los logaritmos. *Revista 100cias@uned*, *10*, 188-193.

Moya, P. (2014). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 4ºB de ESO.* Recuperable en https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/4B/CuartoB.pdf

Robson, D. (13 de Agosto de 2020). Exponential growth bias: The numerical error behind Covid-19. *BBC.* https://www.bbc.com/future/article/20200812-exponential-growth-bias-the-numerical-error-behind-covid-19.

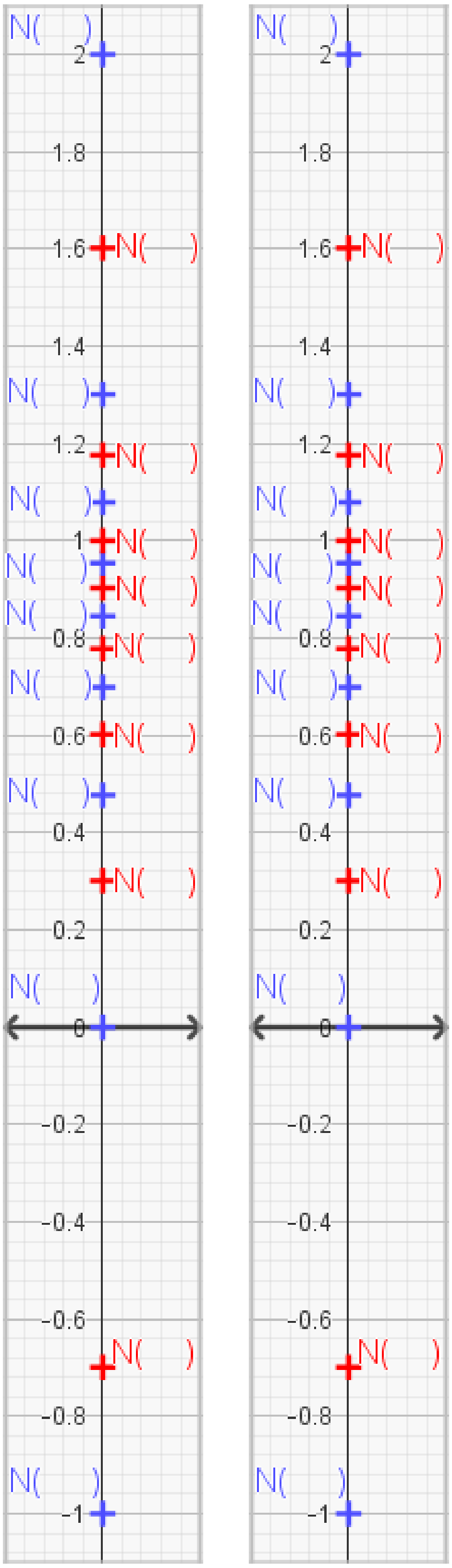
Schonger, M. y Sele, D. (2021) Intuition and exponential growth: bias and the roles of parameterization and complexity. *Math Semesterber, 68,* 221-235.

Vargas, J. y González, M. T. (2022). La enseñanza de la función logarítmica como inversa de la función exponencial: un estudio de caso. En Fernández-Plaza, J. A., Lupiañez, J. L., Moreno, A. y Ramirez, R. (Coords.), *Investigación en Educación Matemática: Homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia* (351-367). Octaedro.

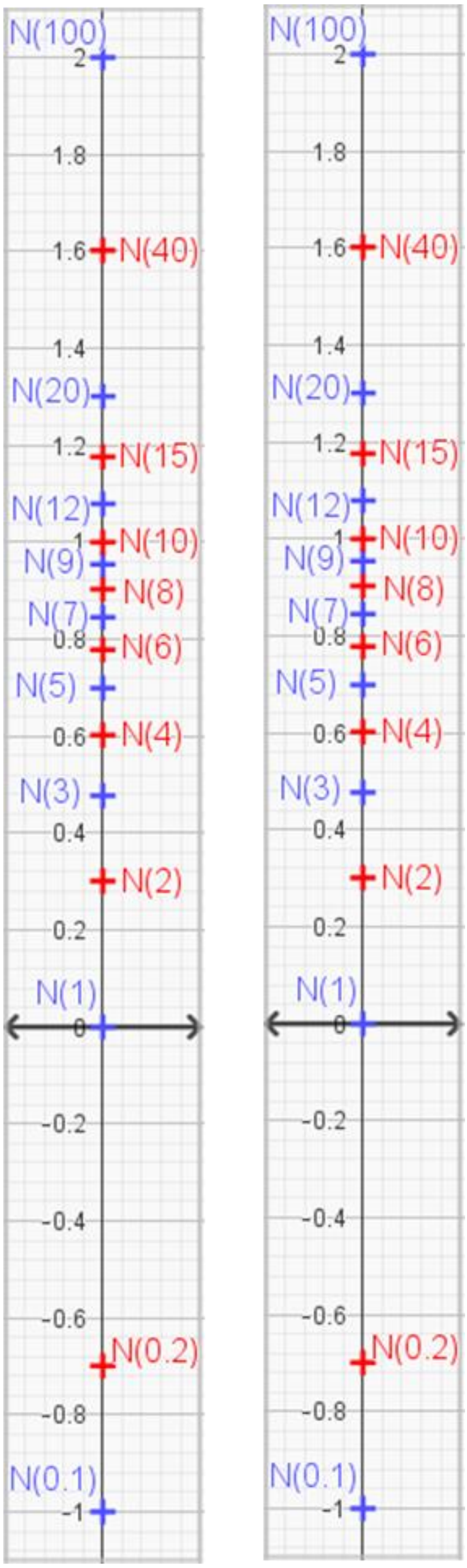
Weber, K. (2002). Students' Understanding of Exponential and Logarithmic Functions. En D. Quinney (Ed.), *Proceedings of the second international conference on the teachings of mathematics* (591-597). University of crete.

Yuval Rosenberg et al. (2023), The global biomass and number of terrestrial arthropods. *Sci. Adv.* 9, eabq4049. DOI: https://doi.org/10.1126/sciadv.abq4049

Anexo I: Reglas logarítmicas para impresión:



Versión para alumnos



Versión rellena

Anexo II: Práctica con formato para alumno.

Práctica de matemáticas:

Circuitos RC con corriente continua

Antes de empezar:

- ¡Recuerda mantener la fuente de alimentación apagada salvo cuando se indique!
- Se llama circuito RC a aquel que lo compone una **resistencia** y un **condensador** en serie.
- Un **condensador** es un componente electrónico que sirve para almacenar energía acumulando carga eléctrica. Esta acumulación y liberación de la energía no es instantánea y requiere tiempo, en esta práctica vamos a estudiar el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo cuando se descarga el condensador, para ello mediremos la diferencia de voltaje entre los dos extremos de un condensador a lo largo del tiempo.
- Comprobad que tenéis los materiales indicados a continuación.

Materiales por grupo:

- Fuente de alimentación de corriente continua de 5 vatios (alternativamente una pila de petaca de 4,5 vatios).
- Dos pulsadores.
- Un voltímetro (alternativamente un multímetro).
- Resistencias de 10, 20 y 30 kilo-ohmios.
- Un condensador de 1000 microfaradios (y un voltaje soportado de al menos 5 vatios).
- Un cronómetro.
- Opcional: Un teléfono móvil con cámara (aportado por los alumnos).

Proceso:

- *Leed todas las páginas que se os han dado antes de comenzar, si tenéis dudas preguntad.*
- *Se deberá repetir con cada una de las tres resistencias.*

A. Montaje:

Mantened desconectada la fuente por ahora.

1- Montad el circuito que se indica al final de la segunda hoja, es importante que respetéis los sentidos de la corriente en las componentes que lo indiquen, deja ambos interruptores abiertos (que no circule corriente).

2- Colocad los conectores del voltímetro en las patillas del condensador.

3- Preparad la cámara del móvil y el cronómetro de manera que se puedan ver tanto el voltímetro como el cronómetro.

B. Medición:

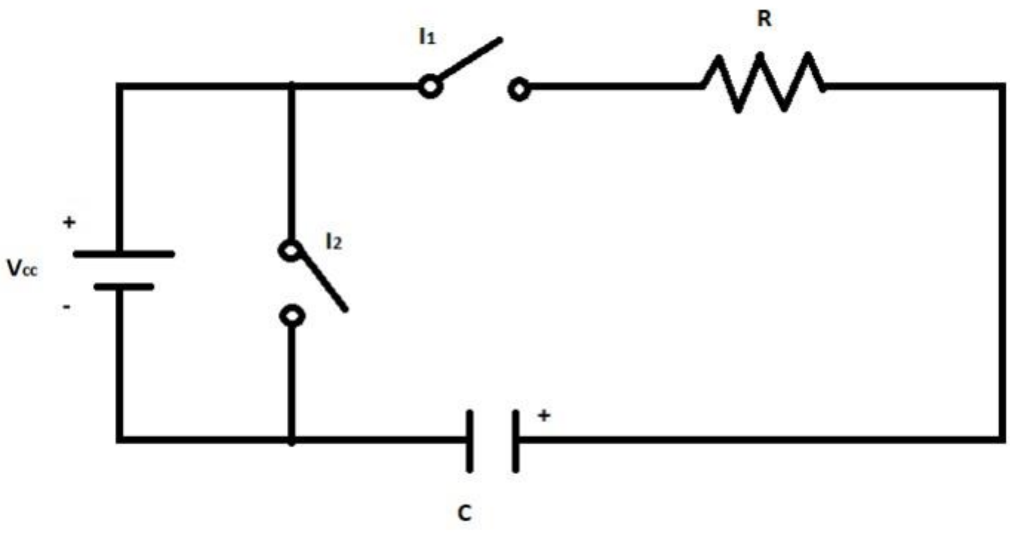
Solo se mantendrá apretado un pulsador cada vez según se indique.

Una vez te hayas asegurado de que todos los componentes estén debidamente conectados procede como sigue:

4- Vais a mantener presionado el pulsador 1 durante 15 segundos. Pasado el tiempo indicado debéis soltar el pulsador 1 y esperar unos segundos.
5- Apaga la fuente de alimentación.
6- Tomad datos del voltaje cada segundo durante 15 segundos mientras apretáis el pulsador 2, para ello deberéis dividiros las tareas de manera apropiada.

Una vez realizadas las tres mediciones contestad las siguientes preguntas:

Pregunta 1: Los valores que habéis tomado en cada una de las 3 pruebas, ¿son crecientes o decrecientes?
Pregunta 2: Si en vez de un condensador tuviésemos una bombilla, ¿cuál creéis que sería el voltaje que obtendrías en el paso 6 en cada una de las tres mediciones? ¿Por qué?
Pregunta 3: ¿Cómo varía el crecimiento del voltaje al cambiar las resistencias? ¿Hay alguna que se descargue más rápido? ¿Y alguna más lento?



Esquema del circuito RC

I: Pulsador C: Condensador

R: resistencia V_{cc}: Fuente de corriente continua

Pregunta 4: Toma los conjuntos de datos que habéis obtenido al mantener apretado el pulsador 2 con la resistencia de 10 kilo-ohmios y represéntalos. ¿Creéis qué alguna función que conozcáis podría estar implicada? ¿A cuál se parece más?

Pregunta 5: Ya que el condensador aporta energía al circuito cuando se estaba apretando el pulsador 2 vamos a pensar que es similar a una batería. ¿Cómo calcularías el porcentaje de batería? Rellena la tabla poniendo el porcentaje de batería en tanto por 100:

Tiempo (s)	Batería (%)	Tiempo(s)	Batería (%)	Tiempo (s)	Batería (%)
0	100%	5		10	
1		6		11	
2		7		12	
3		8		13	
4		9		14	

Tabla pregunta 5

Pregunta 6: Representa la tabla anterior. ¿Cuándo debería haber quedado con la mitad de carga el condensador? ¿Y un cuarto? ¿Y un octavo? ¿De qué clase de función se trata?

Pregunta 7: De acuerdo a lo anterior, da una expresión para $\frac{V(t)}{V(0)}$ con los datos que has obtenido.

Pregunta 8: ¿Cuánto tiempo tarda un condensador en descargarse completamente?

Pregunta 9: Calcula cuánto tiempo deberían tardar cada uno de los tres condensadores durante su descarga en llegar a un tercio de su voltaje inicial.