

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

---

# Desarrollo de aplicación de estática gráfica para aprendizaje y diseño estructural

---

*Author:*

Sergio LORENTE CORTÉS

*Supervisor:*

Prof. Dr. Elías Cueto Prendes

Dr. Beatriz Moya García

*Máster de Ingeniería Mecánica*

29 de agosto de 2023

# TRABAJOS DE FIN DE GRADO / FIN DE MÁSTER



Escuela de  
Ingeniería y Arquitectura  
Universidad Zaragoza

## DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD

(Este documento debe remitirse a [seceina@unizar.es](mailto:seceina@unizar.es) dentro del plazo de depósito)

D./Dª. Sergio Lorente Cortés

en aplicación de lo dispuesto en el art. 14 (Derechos de autor) del Acuerdo de  
11 de septiembre de 2014, del Consejo de Gobierno, por el que se  
aprueba el Reglamento de los TFG y TFM de la Universidad de Zaragoza,  
Declaro que el presente Trabajo de Fin de Estudios de la titulación de  
Máster Universitario en Ingeniería Mecánica

(Título del Trabajo)

Aplicación de la Estática Gráfica para el diseño estructural

es de mi autoría y es original, no habiéndose utilizado fuente sin ser  
citada debidamente.

Zaragoza, a 29 de Agosto del 2023

Fdo: 



UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

## *Resumen*

Ingeniería Mecánica

Máster de Ingeniería Mecánica

**Desarrollo de aplicación de estática gráfica para aprendizaje y diseño estructural**

by Sergio LORENTE CORTÉS

A lo largo de la historia la estética en la arquitectura ha marcado el conocimiento de las civilizaciones a la hora de resolver geometrías que establezcan un equilibrio tanto en su belleza como en su estabilidad.

El medio digital ha supuesto un punto de inflexión a la hora de convertir diseños disruptivos en proyectos reales, proponiendo formas nunca antes vistas debido a su complejidad técnica.

Este Trabajo Fin de Máster se ha centrado en la programación avanzada de aplicaciones de estática gráfica computacional para el diseño y cálculo de estructuras.

El objetivo principal del trabajo ha sido el aprendizaje de esta teoría, así como la aplicación práctica de la misma mediante la creación de ejemplos interactivos utilizando la herramienta *Geogebra*.

Se ha realizado un estudio exhaustivo de la teoría de estática gráfica en el ámbito bidimensional. Se han explorado los conceptos fundamentales relacionados con la resolución de problemas estáticos, como la determinación de fuerzas y equilibrios en estructuras para estudiar el comportamiento de los arcos a compresión pura.

Por último, se ha abordado el estudio del *Thrust Network Analysis* (TNA) en el ámbito tridimensional. Se ha profundizado en la teoría y los conceptos relacionados con el análisis de redes de empujes con el fin de ser aplicados en ejemplos interactivos dentro de *Geogebra* donde resaltan ejemplos como el Great Court y el Puente Striatus, que representan estructuras reales y complejas.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. La estática gráfica . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	8
1.4. Programas . . . . .	8
1.5. Justificación . . . . .	9
<b>2. Geometrías en 2D</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. Ejemplos realizados 2D . . . . .	13
2.2.1. Puente Peatonal 1 . . . . .	13
2.2.2. Puente Peatonal 2 . . . . .	13
2.2.3. Expo Lisboa 98 . . . . .	15
2.3. Arco funicular . . . . .	17
2.3.1. Arco funicular 1 . . . . .	18
2.3.2. Arco funicular 2 . . . . .	21
2.3.3. Arcos Consecutivos . . . . .	25
2.3.4. <i>Free-Form Thruses</i> . . . . .	29
<b>3. Thrust Network Analysis</b>	<b>35</b>
3.1. Introducción TNA . . . . .	35
3.2. Descripción de los pasos principales . . . . .	36
3.2.1. Formulación Lineal . . . . .	37
3.2.2. Implementación Matricial . . . . .	40
<b>4. 3D</b>	<b>45</b>
4.1. Resolución Lineal . . . . .	45
4.1.1. Primera Cúpula . . . . .	45
Resolución Primera Cúpula . . . . .	48
Interfaz Primera Cúpula . . . . .	50
4.1.2. Segunda Cúpula . . . . .	52
Resolución Segunda Cúpula . . . . .	55
Interfaz Segunda Cúpula . . . . .	58
4.1.3. Tercera Cúpula . . . . .	60
Resolución Tercera Cúpula . . . . .	63
Interfaz Tercera Cúpula . . . . .	66
4.2. Resolución Matricial . . . . .	68
4.2.1. Great Court . . . . .	68
Interfaz Great Court . . . . .	72

4.2.2. Puente Striatus . . . . .	74
Interfaz Puente Striatus . . . . .	77
5. Resumen . . . . .	79
5.1. Conclusiones . . . . .	79
A. Rhinovault . . . . .	81
A.1. Metodología . . . . .	82
A.1.1. Creación de la malla . . . . .	82
A.1.2. Definición de Condiciones de Contorno . . . . .	83
A.1.3. Diagrama de Forma . . . . .	84
A.1.4. Diagrama de Fuerza . . . . .	85
A.1.5. Equilibrio Vertical . . . . .	86
A.1.6. Configuración de la Interfaz . . . . .	87
B. Desarrollo de ejemplos en Rhinovault . . . . .	89
B.1. Puente Striatus . . . . .	89
C. Bibliografía . . . . .	93

# Índice de figuras

1.1. <i>Fuerzas que actúan en la sección transversal de la Catedral de Beauvais. Foto obtenida de [1].</i>	1
1.2. <i>Ejemplo paramétrico de Estática Gráfica</i>	2
1.3. Forma y análisis de esqueletos de piedra. Fotos de [2].	3
1.4. a) Dibujo de Poleni haciendo una comparación entre un arco y una cadena colgante. b) Trabajo de Poleni sobre la cúpula de San Pedro. Fotos de [3].	4
1.5. <i>Resolución de equilibrio de un arco mediante Estática Gráfica.</i>	4
1.6. <i>Relación recíproca entre el Diagrama de Forma y Fuerza, dada una carga uniforme a lo largo de las funiculares [4].</i>	5
1.7. <i>Polígonos funiculares [5].</i>	5
1.8. Obras arquitectónicas basadas en la estática gráfica.	6
1.9. Armadillo Vault, Venecia 2016 [6].	7
1.10. Teoría <i>Thrust Network Analysis</i> , compuesta por malla Primal $\Gamma$ (3 primeras columnas, diferentes grados de discretización de la planta), malla Dual $\Gamma^*$ y equilibrio vertical G [7].	7
1.11. Obras arquitectónicas basadas en <i>Thrust Network Analysis</i> .	8
1.12. Aplicación y lenguaje utilizado	9
1.13. Dibujos de estática gráfica [8].	9
1.14. Estructura final, junto al análisis TNA realizado por MLK Jr. Park Stone Vault [9].	9
2.1. Equilibrio de un sistema formado por dos barras, con apoyos en A y B, con las condiciones de contorno biapoyados.	11
2.2. <i>El Puente Bayonne sobre el Kill Van Kull, conecta Bayonne (Nueva Jersey), con Staten Island, Nueva York. [10]</i>	12
2.3. Equilibrio de un sistema formado por dos barras, con apoyos en A y B, con las condiciones de contorno biapoyados.	13
2.4. Equilibrio de un sistema formado por tres barras, con apoyos en A y B, con las condiciones de contorno biapoyados.	14
2.5. Funicular en equilibrio con Diagrama de Forma que satisface la condición de contorno en carga exterior.	15
2.6. <i>Pabellón de Portugal de la Expo de 1998.</i>	16
2.7. Interfaz de Geogebra para Lisboa 2D	16
2.8. Resolución mediante Estática Gráfica. Compuesto por el diagrama de fuerza y forma del para el cálculo de la funicular a través del número de cargas impuestas mediante la metodología de la parábola.	17
2.9. <i>Tipos de funiculares.</i>	17
2.10. Antifunicular de un arco de medio punto [11].	18
2.11. Agrietamientos de arcos producidos por un incremento de la luz [12].	18
2.12. Funicular en equilibrio con Diagrama de Forma que satisface la condición de contorno en carga distribuida.	19

2.13. Funicular en equilibrio con Diagrama de Forma que satisface la condición de contorno en carga distribuida y carga puntual Q . . . . .	20
2.14. Comparación de las funiculares con carga distribuida (Naranja), y carga distribuida con carga puntual (Verde). . . . .	20
2.15. Condiciones de contorno del problema. . . . .	22
2.16. Diagrama de Fuerza, con Polo Aleatorio. . . . .	22
2.17. Funicular aleatoria. . . . .	23
2.18. Funicular aleatoria. . . . .	23
2.19. Funicular aleatoria. . . . .	23
2.20. Funicular final. . . . .	24
2.21. Interfaz del programa en la plataforma de <i>Geogebra</i> . . . . .	24
2.22. <i>Condiciones de Contorno</i> . . . . .	26
2.23. Diagramas de Fuerza con polos aleatorios. . . . .	26
2.24. Funiculares aleatoria. . . . .	27
2.25. Diagramas de Fuerza Final. . . . .	27
2.26. Funiculares finales. . . . .	28
2.27. Interfaz del programa en la plataforma de <i>Geogebra</i> . . . . .	28
2.28. Free Form Thruses . . . . .	30
2.29. Condiciones Iniciales. . . . .	30
2.30. Establecer la composición de la funicular al imponer <i>Punto<sub>F</sub></i> . . . . .	31
2.31. Diagrama de Fuerza Trial. . . . .	31
2.32. Solución del Polo final. . . . .	32
2.33. Solución mediante la estática gráfica de la funicular. . . . .	32
2.34. Análisis de esfuerzos, donde el punto de la funicular tiene mayor cota que el punto de la curva control. . . . .	33
2.35. Resultado Final de la curva de control. . . . .	33
 3.1. <i>Diagrama de forma <math>\Gamma</math>, diagrama de fuerzas <math>\Gamma^*</math>, con una escala <math>\zeta</math> dada, la relación recíproca entre un nodo en el diagrama de forma y el polígono correspondiente en el diagrama de fuerza, y la red de empuje <math>G</math> para los apoyos <math>V_F</math> y dada las cargas <math>P</math>. [13]</i> . . . . .	35
3.2. Perspectiva del Puente Striatus . . . . .	36
3.3. <i>Equilibrio estático de cada nodo con la carga definida.</i> . . . . .	37
3.4. <i>Relación geométrica entre los vectores de fuerzas y su proyección en el plano.</i> . . . . .	37
3.5. <i>Representación de un punto de la malla original como un polígono de la malla recíproca.</i> . . . . .	38
3.6. <i>Grafos de la malla Primal y Dual. Los nodos Primales y su correspondientes polígonos Diales, son etiquetados usando números, las caras Primales y sus nodos Diales son etiquetados usando letras, y por último las ramas Primales y Diales se etiquetan con números romanos.[14]</i> . . . . .	40
3.7. <i>Convenio para realización del vector columna <math>a</math> de la matriz <math>C^*</math></i> . . . . .	42
 4.1. Geometría en planta del primer estudio. Nodos en rojo hacen referencia a la imposición de apoyo cuya cota estará definida en 0. Nodos en negro hacen referencia a los puntos donde se va a evaluar la altura ya que es incógnita. . . . .	46
4.2. <i>Malla dual <math>\Gamma^*</math></i> . . . . .	47
4.3. Geometría de ambas mallas para resolución del sistema de la Primera Cúpula. . . . .	48
4.4. <i>Visualización de la primera pantalla asociado a la Primera Cúpula.</i> . . . . .	50
4.5. <i>Visualización de la segunda pantalla asociado a la Primera Cúpula.</i> . . . . .	50

4.6. Visualización de la tercera pantalla asociado a la Primera Cúpula. . . . .	51
4.7. Sección transversal de la primera estructura dentro del arco. . . . .	51
4.8. Geometría en planta del segundo estudio. Nodos en rojo hacen referencia a la imposición de apoyo cuya cota estará definida en 0. Nodos en negro hacen referencia a los puntos dónde se va a evaluar la altura ya que es incógnita. . . . .	52
4.9. Malla dual $\Gamma^*$ . . . . .	53
4.10. Geometría de ambas mallas para resolución del sistema de la Segunda Cúpula. . . . .	55
4.11. Visualización 3D de la resolución de la Segunda Cúpula. . . . .	57
4.12. Visualización de la primera pantalla asociado a la Segunda Cúpula. . . . .	58
4.13. Visualización de la segunda pantalla asociado a la Segunda Cúpula. . . . .	58
4.14. Visualización de la tercera pantalla asociado a la Segunda Cúpula. . . . .	59
4.15. Sección transversal de la segunda estructura dentro del arco. . . . .	59
4.16. Geometría en planta del tercer estudio . . . . .	60
4.17. Malla dual $\Gamma^*$ . . . . .	61
4.18. Geometría de ambas mallas para resolución del sistema de la Tercera Cúpula. . . . .	63
4.19. Visualización 3D de la resolución de la Tercera Cúpula. . . . .	65
4.20. Visualización de la primera pantalla asociado a la Tercera Cúpula. . . . .	66
4.21. Visualización de la segunda pantalla asociado a la Tercera Cúpula. . . . .	66
4.22. Visualización de la tercera pantalla asociado a la Tercera Cúpula. . . . .	67
4.23. Sección transversal de la tercera estructura dentro del arco. . . . .	67
4.24. Medidas en planta del Great Court. . . . .	68
4.25. Representación de la Malla primal $\Gamma$ con su discretización final. . . . .	68
4.26. Información detallada sobre la discretización de la planta Great Court . . . . .	69
4.27. Información asociada a la caracterización completa de la Malla primal $\Gamma$ del Great Court . . . . .	69
4.28. Malla dual $\Gamma^*$ del Great Court. . . . .	70
4.29. Metodología para realizar el ensamblado de la Matriz $C^*$ . . . . .	70
4.30. Resultados finales del Great Court. . . . .	71
4.31. Visualización de la primera pantalla asociado al Great Court. . . . .	72
4.32. Visualización de la segunda pantalla asociada al Great Court. . . . .	72
4.33. Visualización de la tercera pantalla asociado al Great Court. . . . .	73
4.34. Puente Striatus, primer puente arqueado de hormigón impreso 3D. . . . .	74
4.35. Procesos para la construcción del Puente Striatus . . . . .	74
4.36. Solucionador iterativo para el análisis de red de empuje.(a) Iteración inicial. (b) Iteración final optimizada.[15] . . . . .	75
4.37. Puente Striatus Trabajo Fin De Máster . . . . .	75
4.38. Información detallada sobre la discretización de la planta Puente Striatus . . . . .	76
4.39. Información asociada a la caracterización completa de la Malla primal $\Gamma$ del Puente Striatus . . . . .	76
4.40. Visualización de la primera pantalla asociado a al Puente Striatus. . . . .	77
4.41. Visualización de la segunda pantalla asociado al Puente Striatus. . . . .	77
4.42. Visualización de la tercera pantalla asociado al Puente Striatus. . . . .	78
A.1. Ejemplos en la Interfaz de RhinoVault . . . . .	81
A.2. Creación de la malla . . . . .	82
A.3. Creación de la malla . . . . .	82
A.4. Creación de la malla . . . . .	83
A.5. Condiciones de Contorno . . . . .	83

A.6. Imponer el diagrama de Forma . . . . .	84
A.7. Método <i>Rhinovault</i> en esquinas definidas como apoyos . . . . .	84
A.8. Eliminación automática de las esquinas . . . . .	84
A.9. Imponer el diagrama de Fuerza . . . . .	85
A.10. Imponer el Equilibrio Horizontal a través de líneas perpendiculares. . . . .	85
A.11. Imponer el Equilibrio Horizontal . . . . .	86
A.12. Imponer el Equilibrio Horizontal a través de líneas paralelas. . . . .	86
A.13. Imponer el Equilibrio Vertical . . . . .	86
A.14. Imposición del Equilibrio Vertical dada una altura máxima de la funicular de 10 metros. . . . .	87
A.15. Funicular Final que trabaja a compresión pura. . . . .	87
A.16. Configuración de la interfaz . . . . .	87
B.1. Planta del Puente <i>Striatus</i> . . . . .	89
B.2. Esqueleto del Puente <i>Striatus</i> . . . . .	89
B.3. Esqueleto discretizado del Puente <i>Striatus</i> . . . . .	90
B.4. Esqueleto final discretizado del Puente <i>Striatus</i> . . . . .	90
B.5. Definición de Boundary Conditions, en rojo los apoyos de la estructura. . . . .	90
B.6. <i>Información detallada sobre la discretización de la planta Puente Striatus</i> . . . . .	91

## Capítulo 1

# Introducción

### 1.1. Motivación

Puede parecer trivial afirmar que muchos edificios griegos, romanos o góticos todavía permanezcan en pie. No obstante, esta observación tiene sentido si se realiza en un contexto estructural, ya que implica que, además de ser una gran hazaña, poseen una gran estabilidad.

Gracias a la unión entre el diseño y criterios estructurales se proclama la supervivencia de edificios antiguos. Esta combinación permitió crear soluciones estéticamente atractivas y funcionalmente sólidas, garantizando la integridad y eficiencia de las estructuras.

Un diseño disruptivo pero deficiente desde el punto de vista estructural puede resultar en problemas como deformaciones extremas o colapsos. Por otro lado, una estructura sólida pero descuidada estéticamente puede distorsionar el impacto visual, así como sus funciones en la comunicación social.

El progresivo avance de las nuevas tecnologías han permitido desarrollar nuevas técnicas aplicables dentro del ámbito constructivo, permitiendo la integración de ambos conceptos para optimizar:

- Distribución de cargas.
- Selección de materiales.
- Soluciones innovadoras y sostenibles.
- Definición de formas disruptivas.

Las nuevas tendencias estructurales están transformando el modo en que se diseñan y construyen las edificaciones hoy en día. Entre estas tendencias, aparece la estética gráfica. Esta disciplina combina los principios de la estática con la representación gráfica, permitiendo un enfoque visual y eficiente en el análisis y diseño de

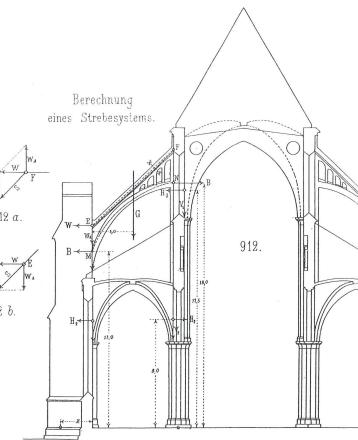


FIGURA 1.1: Fuerzas que actúan en la sección transversal de la Catedral de Beauvais. Foto obtenida de [1].

estructuras.

Aunque estas técnicas vivieron su apogeo en el siglo XX, en la actualidad se recuperan mediante su implementación computacional.

Hoy en día, el medio digital supone una herramienta fundamental en nuestra rutina. Prueba de ello es la globalización de los ordenadores y el manejo de los mismos siendo clave para el desarrollo y mejora de la educación durante este siglo.

Este medio supone un punto de inflexión en la aplicación de la estática gráfica, permitiendo reducir significativamente el tiempo de desarrollo del método a través de la programación de ejemplos para visualizar instantáneamente una gran gama de soluciones constructivas.

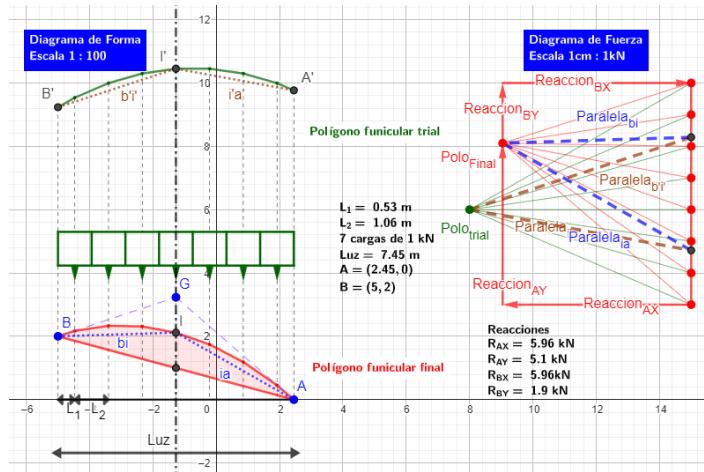


FIGURA 1.2: Ejemplo paramétrico de Estática Gráfica

Esta idea toma un papel fundamental en la educación, ya que afecta intrínsecamente a la capacidad de mejorar la comprensión y el aprendizaje de los conceptos estructurales. Mediante la visualización de los ejemplos se muestra de una manera más clara y realista cómo se distribuyen las fuerzas en una estructura. Esto permite evaluar de forma paramétrica los ejemplos para así tomar decisiones en función del diseño. Este planteamiento eficiente tiene un impacto directo en línea con los objetivos de desarrollo sostenible.

En el ámbito profesional, la estática gráfica se está convirtiendo en una herramienta útil para ingenieros y arquitectos. Permite agilizar el proceso de diseño y cálculo de estructuras. Además, la representación gráfica de las estructuras favorece la comunicación entre el equipo de trabajo, ya que se pueden presentar visualmente los conceptos técnicos de manera más accesible.

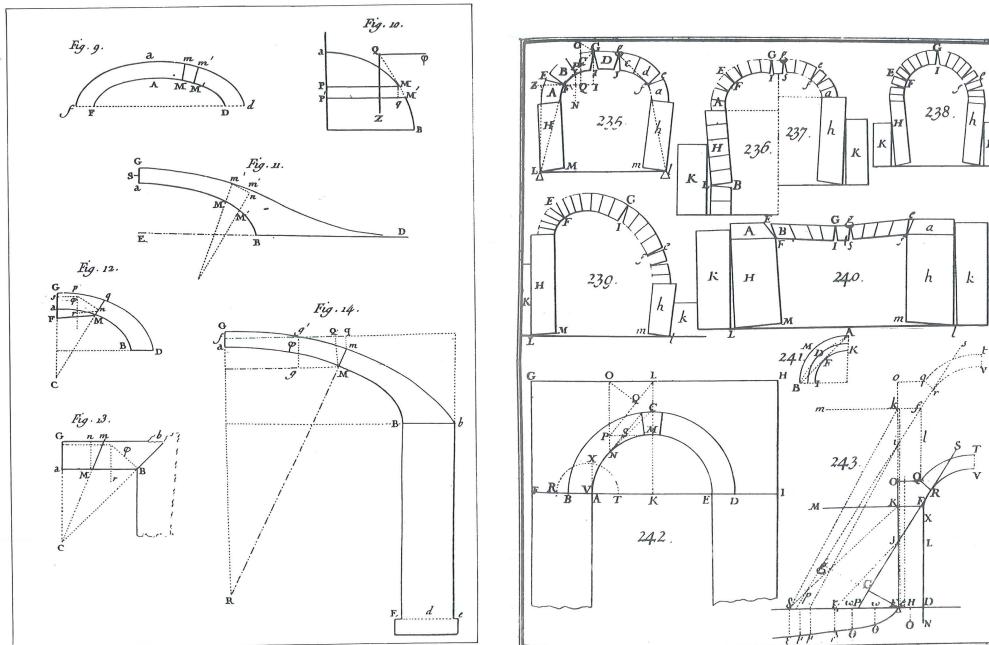
El presente proyecto se sustenta sobre un pilar fundamental, las llamadas *TIC* (Tecnologías de la Información y las Comunicaciones), cuyo principal objetivo es proporcionar herramientas y recursos digitales que refuerzan el ámbito del aprendizaje. Además, este tipo de plataformas permiten fomentar la interacción entre estudiantes y docentes, promoviendo un aprendizaje más dinámico y personalizado.

Gracias a este enfoque, el proyecto se enmarca dentro de uno de los principales objetivos y metas de desarrollo sostenible, la mejora continua en la educación de calidad fomentando las nuevas tecnologías.

Además dicha aplicación desarrollada apoya la investigación e innovación dentro del ámbito educativo fomentando el aprendizaje de teorías disruptivas como es la *estática gráfica computacional*.

## 1.2. La estática gráfica

La construcción de estructuras de fábrica se basa principalmente en el uso de la drillo y piedra para cubrir grandes luces, cuya forma queda determinada a trabajar únicamente a compresión, véase Figura 1.3.



(a) Ilustraciones de 9 a 14 de Coulomb; arcos de (b) Figuras 235-243 de Frézier; colapsos de arcos fábrica

FIGURA 1.3: Forma y análisis de esqueletos de piedra. Fotos de [2].

A mediados del siglo XVII, hubo un punto de inflexión a la hora de entender el comportamiento de dichas estructuras y la relación que mantenían con formas en arco.

En 1676, Robert Hooke (1635-1703) publicó su trabajo sobre modelos colgantes (*hanging models*), donde afirmó que: *Cuándo cuelga una cuerda flexible, si se invierte, hace la misma forma que una arco* [16]. Con ello Hooke quería reflejar que, al utilizar cables sometidos a la gravedad y sujetados por ambos extremos, definían una curva cóncava y que, invirtiendo dicha figura, explicaba el equilibrio al que estaba sujeto los arcos funiculares de estructuras de fábrica.

Una de las aplicaciones más relevantes de dicha teoría formulada por Hooke fue llevada a cabo por Giovani Poleni (1683-1761) en el análisis de la cúpula de San Pedro en Roma.

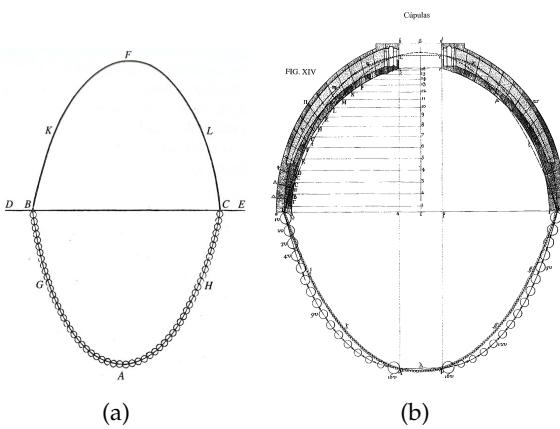


FIGURA 1.4: a) Dibujo de Poleni haciendo una comparación entre un arco y una cadena colgante. b) Trabajo de Poleni sobre la cúpula de San Pedro. Fotos de [3].

En 1864, Karl Culmann (1821-1881), profesor de Ingeniería Civil en el Instituto Federal de Tecnología de Suiza (ETH), en Zúrich, publicó la primera parte de su libro *Die graphische Statik, La estática gráfica*.

Para ello, se basó en trabajos anteriores relacionados con enfoques gráficos para la forma y la fuerza realizados por científicos como Simon Stevin (1548-1620), Pierre de Varignon (1654-1722), Luigi Cremona (1830-1903) y James C. Maxwell (1831-1879).

Gracias a ellos, Culmann adaptó y aplicó sistemáticamente estos métodos a problemas de estática. Esta metodología se basa en el uso de dos diagramas:

1. **Diagrama de Forma:** representa la geometría de las barras articuladas de la estructura.
2. **Diagrama de Fuerza:** relacionado con el polígono de fuerzas, que estará compuesto por los esfuerzos de los elementos y condiciones de contorno. El diagrama se subdivide en dos polígonos:

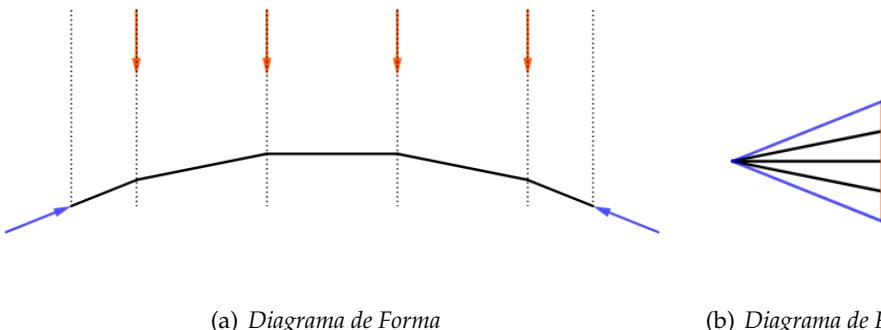


FIGURA 1.5: Resolución de equilibrio de un arco mediante Estática Gráfica.

Cabe destacar que la relación entre ambos diagramas se define como recíproco, estableciendo las siguientes condiciones:

- Ambos diagramas tienen el mismo número de contornos.
- Cada contorno  $e$  en el Diagrama de forma tiene su correspondiente contorno  $e^*$  que es paralelo en su Diagrama de Fuerza.
- La longitud del contorno  $e^*$ , representa el esfuerzo asociado al contorno  $e$ , mediante una escala establecida entre longitud y fuerza.

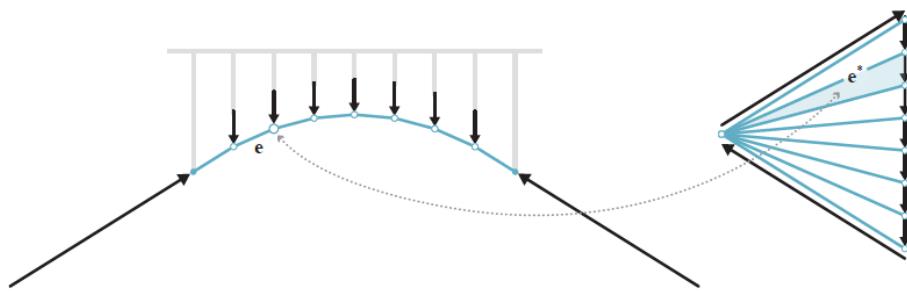
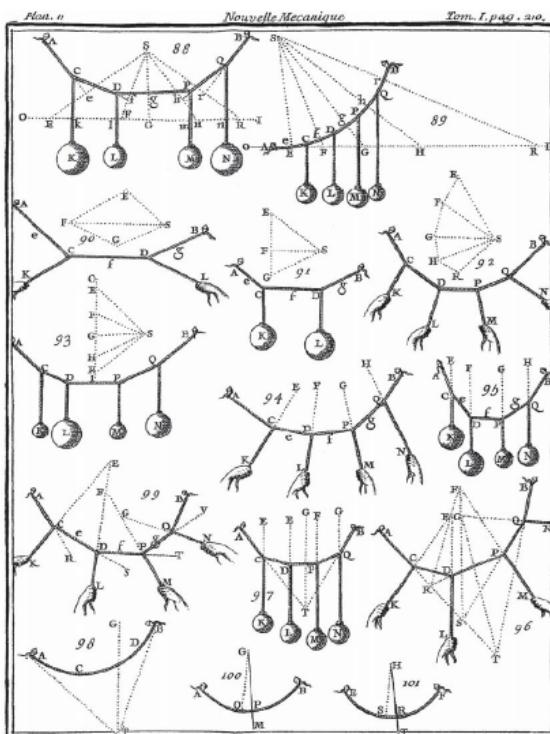


FIGURA 1.6: Relación recíproca entre el Diagramma de Forma y Fuerza, dada una carga uniforme a lo largo de las funiculares [4].

La manipulación de las diferentes condiciones y cargas, permite explorar diversos diseños que brindan de forma inmediata la relación de las fuerzas internas y externas de una estructura. Además, la visualización de las fuerzas en magnitud y dirección es extremadamente útil para tomar decisiones de diseño vinculadas con el comportamiento estructural.



No es sorprendente que muchos ingenieros y arquitectos hacia finales del siglo XIX y principios del siglo XX utilizaran ampliamente la estática gráfica para el diseño y análisis de sus obras. Gustave Eiffel (1832-1923) o Antonio Gaudí (1852-1926), utilizaron dicha técnica principalmente en la fase de diseño de sus obras.

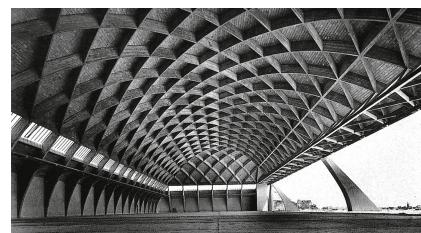
Hasta el desarrollo de los métodos numéricos para el análisis estructural a mediados del siglo XX, la estática gráfica fue una herramienta muy utilizada dentro del ámbito de diseño estructural, empleada por ingenieros como Pier Luigi Nervi (1891-1979) o Robert Maillart (1872-1940), [17].



(a) Gustave Eiffel, Torre Eiffel (1887-1889)



(b) Antonio Gaudí, La Sagrada Família (1882-En adelante)



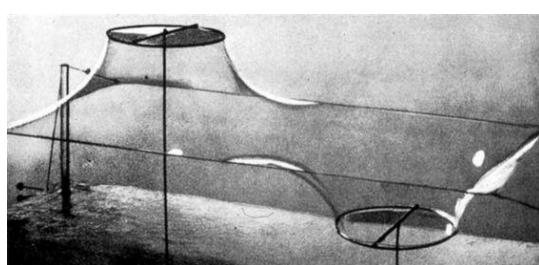
(c) Pier Luigi Nervi, Hangar de Orvieto (1935-1936)



(d) Robert Maillart, Puente Salginatobel (1929-1930)

FIGURA 1.8: Obras arquitectónicas basadas en la estática gráfica.

En la historia reciente varios han sido los arquitectos que han empleado técnicas relacionadas con las formas funiculares para buscar geometrías óptimas de estructuras abovedas, como Frei Otto (1925-2015) y sus modelos de pompas de jabón, o Félix Candela (1910-1997) y sus estructuras basadas en paraboloides hiperbólicos.



(a) Modelo hecho con pompas de jabón, realizado por Frei Otto.



(b) Oceànogràfic de València, realizado por Félix Candela

Esta metodología fue relevada por las nuevas corrientes de cálculo computacional (cálculo matricial, elementos finitos...), principalmente tanto por la cantidad de tiempo que se invertía para realizar estructuras complejas como la complejidad de implementarse en estructuras 3D.

Gracias a los profesores W. Zalewski (1917-2016) y E. Allen (1939-2020) del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), autores de *Shaping Structures Statics y Form and Forces: Designing Efficient, Expressive Structures*, impulsaron su estudio en la actualidad para el desarrollo de programas interactivos de cálculo a tiempo real utilizando la estética gráfica, dando lugar a la nueva disciplina llamada *estática gráfica computacional*.

El *Block Research Group (BRG)* del Instituto de Tecnología en Arquitectura de ETH Zürich, ha sido el sucesor principal de dicha teoría. Liderado por Phillippe Block y Tom Van Mele, se han enfocado principalmente en desarrollar algoritmos y herramientas eficientes asociados al análisis y diseño estructural para dar un enfoque disruptivo.



FIGURA 1.9: Armadillo Vault, Venecia 2016 [6].

Phillipe Block desarrolló la teoría de *Thrust Network Analysis* (2009), donde se adoptan las mismas ventajas de la estética gráfica, pero ofreciendo una extensión viable a problemas tridimensionales.

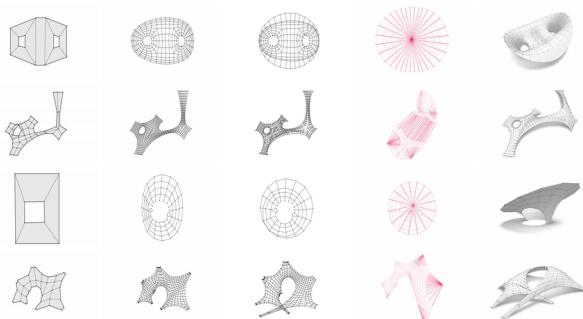


FIGURA 1.10: Teoría *Thrust Network Analysis*, compuesta por malla Primal  $\Gamma$  (3 primeras columnas, diferentes grados de discretización de la planta), malla Dual  $\Gamma^*$  y equilibrio vertical  $G$  [7].

Gracias a dicha teoría, se han podido realizar proyectos como:



(a) KnitCandela [18].



(b) NEST HiLo roof [19].



(c) Puente Striatus [20].



(d) KnitNervi [21].

FIGURA 1.11: Obras arquitectónicas basadas en *Thrust Network Analysis*.

### 1.3. Objetivos

El principal objetivo es desarrollar una aplicación interactiva por medio de lenguajes *GeogebraScript* y *JavaScript* para un uso libre en la comunidad, destinado en particular para el alumnado y el profesorado.

Dicha herramienta promoverá la interacción y participación dentro de la aplicación para el estudio de la estática gráfica. El marco virtual creado por medio de la aplicación permitirá ayudar a desarrollar competencias específicas y transversales dentro del ámbito de dicha teoría.

La plataforma ayudará a la comprensión de las bases de la estática gráfica permitiendo hacer juegos de diseños paramétricos asociados a diferentes ejemplos.

Ésto servirá de gran ayuda al ámbito formativo para poder aportar una mejora en la evaluación en línea, estableciendo mecanismos de feedback en diferentes formatos.

### 1.4. Programas

El proyecto tiene por objeto la creación de una plataforma interactiva de problemas de estática gráfica. El usuario podrá establecer diferentes condiciones de contorno, asociada a geometría y carga, con el fin de generar diferentes estructuras solicitadas a compresión y que satisfagan el equilibrio estático.

El medio escogido para la implementación del proyecto es el digital, donde el pilar fundamental será la elaboración de una codificación avanzada para resolver

tanto ejemplos en 2D como en 3D.

La programación de esta herramienta se va a realizar en la plataforma *Geogebra*. Esta plataforma se basa en el lenguaje de programación *JavaScript*, que será empleado en la codificación de opciones avanzadas y fenómenos más complejos, como el 3D.

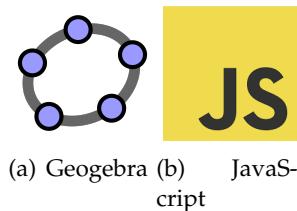


FIGURA 1.12: Aplicación y lenguaje utilizado

## 1.5. Justificación

La estática gráfica y la teoría de redes de empujes en estructuras abovedadas (*Thrust Network Analysis, TNA*) destacan por su capacidad para proporcionar soluciones rápidas y precisas para problemas estructurales.

La estática gráfica permite analizar en 2D estructuras de forma sencilla y visual.

Además, puede ser utilizada para verificar los resultados obtenidos mediante técnicas analíticas más complejas, lo que resulta útil en la verificación de resultados y en la corrección de errores.

Por otro lado, el *Thrust Network Analysis* es una técnica más avanzada que permite analizar estructuras con una gran complejidad, como bóvedas o cúpulas en 3D, véase Figura 1.14.

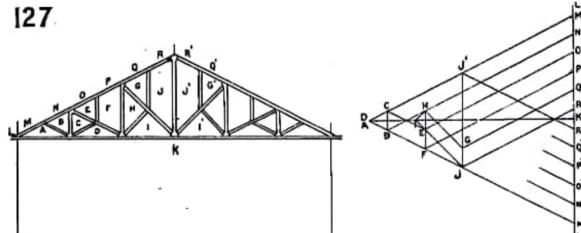


FIGURA 1.13: Dibujos de estática gráfica [8].

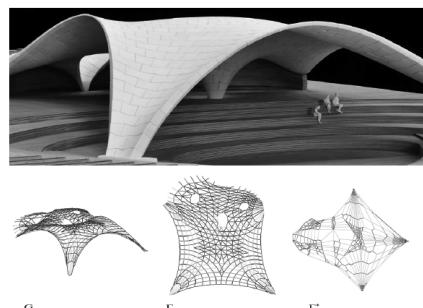


FIGURA 1.14: Estructura final, junto al análisis TNA realizado por MLK Jr. Park Stone Vault [9].

Destacan tanto por la gran versatilidad de innovación dentro del ámbito educativo como por la capacidad de adaptación que puede generar en un contexto de docencia. El proyecto principalmente está pensado para divulgar dichas metodologías.

La disciplina principal que enmarca el proyecto son las *Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC)*.

El proyecto también se encuadra en el conjunto de técnicas de transferencia de conocimiento, en este caso asociado al diseño y análisis de estructuras para ingenieros y arquitectos.

## Capítulo 2

# Geometrías en 2D

### 2.1. Introducción

La Estática Gráfica es un ámbito de la ingeniería estructural que se encarga del estudio de cuerpos en equilibrio. Se basa en la aplicación de las leyes físicas y matemáticas para determinar las fuerzas que actúan en un sistema y asegurar que este se encuentre en equilibrio.

En estos métodos se utilizan dos diagramas geométricos dependientes, los **diagramas de forma**: que representan la geometría de la estructura, y los **diagramas de fuerza**, que hacen referencia al equilibrio interno y externo de las fuerzas, véase el ejemplo de la Figura 2.1.

En el ejemplo de la figura se parte de una geometría dada, dos barras unidas sometidas a una carga puntual y biapoyadas en sus extremos opuestos, véase Figura 2.1(a).

Para representar el equilibrio se construye el polígono del diagrama de fuerzas, donde los esfuerzos se representan como flechas que se colocan sobre una estructura en dos dimensiones, véase Figura 2.1(b). Estas flechas representan la dirección y magnitud de los esfuerzos asociados a la estructura.

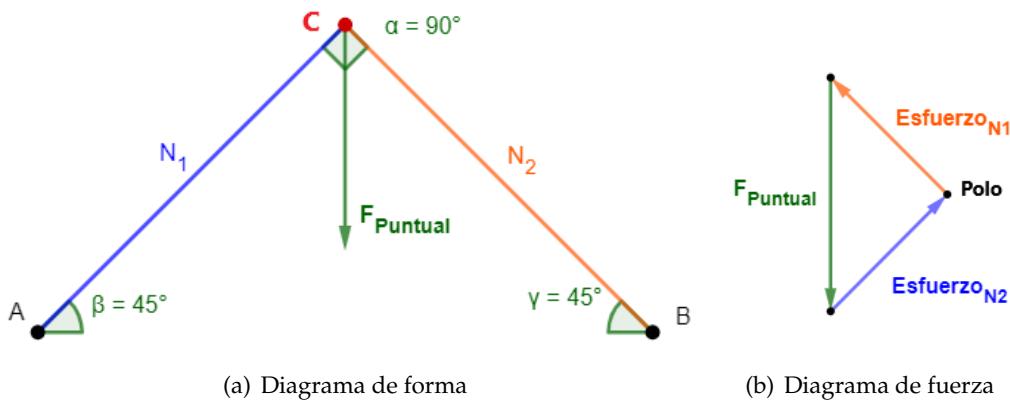


FIGURA 2.1: Equilibrio de un sistema formado por dos barras, con apoyos en A y B, con las condiciones de contorno biapoyados.

Cabe destacar que la relación fundamental entre ambos diagramas queda definida por una imposición de escalas, la primera en referencia a la escala entre el modelo

real y el modelo del dibujo, y la segunda con respecto a la escala entre la equivalencia de fuerzas y su longitud en el dibujo.

Como se ve en la Figura 2.1(a), el nodo C se representa en el diagrama de fuerza a través de un polígono cerrado, donde la carga puntual se coloca verticalmente, y tanto en el inicio como en el final de dicho segmento se trazan las paralelas del diagrama de forma asociadas a  $N_1$  y  $N_2$ .

La intersección de ambas paralelas en el diagrama de fuerza se denomina polo, véase Figura 2.1(b), y delimita la magnitud de los esfuerzos asociados a los elementos del diagrama de forma.

Dicha metodología se utiliza para un primer diseño de la forma, incluyendo la construcción de puentes, edificios, máquinas y otros tipos de estructuras.



FIGURA 2.2: El Puente Bayonne sobre el Kill Van Kull, conecta Bayonne (Nueva Jersey), con Staten Island, Nueva York. [10]

Segun el tipo de geometria se pueden aplicar dos aproximaciones distintas:

- Parábola con apoyos en la misma cota, *metodología directa*.
- Parábola con apoyos en diferente cota, *metodología iterativa*.

## 2.2. Ejemplos realizados 2D

A continuación se muestra una selección de ejemplos presentes en la plataforma creada, el resto pueden verse tanto en el anexo como en la web. Todos ellos han sido realizados mediante la programación de la teoría aplicada a cada caso.

### 2.2.1. Puente Peatonal 1

El esquema principal viene dado por:

- El puente, de 12 metros de longitud, tiene un peso  $F_1$  que se transmite a un cable  $N_1$  en el centro de la plataforma.
- $N_1, N_2$  y  $N_3$  son los tirantes que sujetan el puente, y son sometidos a análisis para resolver los esfuerzos asociados a cada elemento.

La Figura 2.3(a) muestra una configuración del diagrama de forma del puente en la plataforma *Geogebra*, donde los puntos A y B son extremos móviles que el usuario puede modificar para obtener diferentes combinaciones para ver su correspondiente diagrama de fuerza.

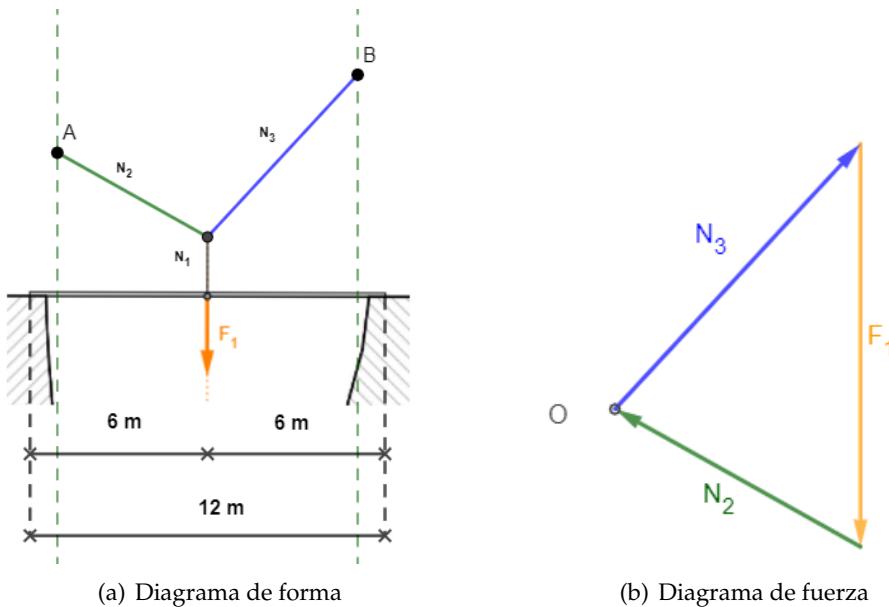


FIGURA 2.3: Equilibrio de un sistema formado por dos barras, con apoyos en A y B, con las condiciones de contorno biapoyados.

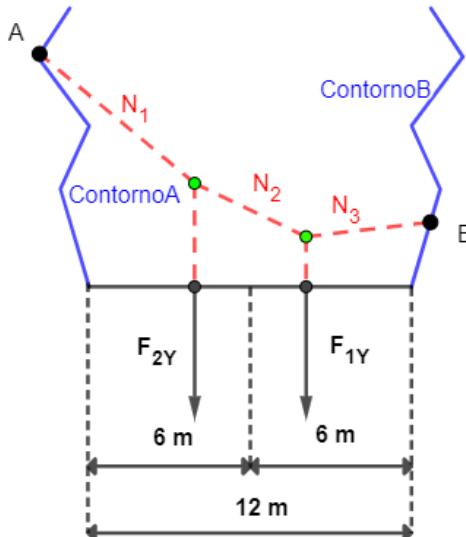
### 2.2.2. Puente Peatonal 2

En este segundo ejemplo se modifica el puente anterior, Figura 2.4, añadiendo un nuevo tirante para realizar el equilibrio de fuerzas:

- $F_1$  y  $F_2$  representan los puntos de apoyo de los tirantes sobre el puente. Dichos puntos son interactivos y se mueven a lo largo de la luz del puente.
- $N_1, N_2$  y  $N_3$  son los tirantes que sujetan el puente, y son sometidos a análisis para resolver los esfuerzos asociados a cada elemento.

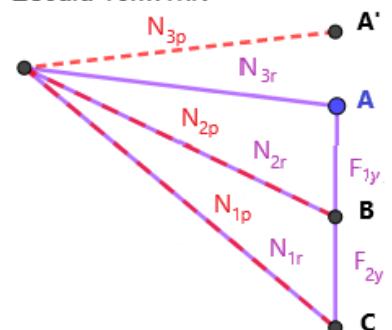
Como se ve en la Figura 2.4(a), el ejemplo programado en *Geogebra* permite cambiar los contornos a través de los extremos móviles para obtener distintas combinaciones en resultan en nuevos diagramas de fuerza.

*Escala 1:100*



(a) Diagrama de forma

*Escala 1cm:1kN*



(b) Diagrama de fuerza

FIGURA 2.4: Equilibrio de un sistema formado por tres barras, con apoyos en A y B, con las condiciones de contorno biapoyados.

La Figura 2.4(b) muestra dos diagramas de fuerza:

1. Diagrama de fuerza en morado, cuyas condiciones en cargas estarían en equilibrio con el diagrama de forma final.
2. Diagrama de fuerza discontinuo en rojo, asociado al diagrama de forma impuesto por el usuario, donde  $N_{ip}$  son los segmentos paralelos asociados a los tirantes del diagrama de forma.

El diagrama de fuerza en rojo no permanece en equilibrio ya que el punto A no pertenece al segmento  $N_{3p}$ .

Para encontrar la funicular que permanezca en equilibrio con la imposición de cargas, el usuario debe modificar las cotas de los apoyos.

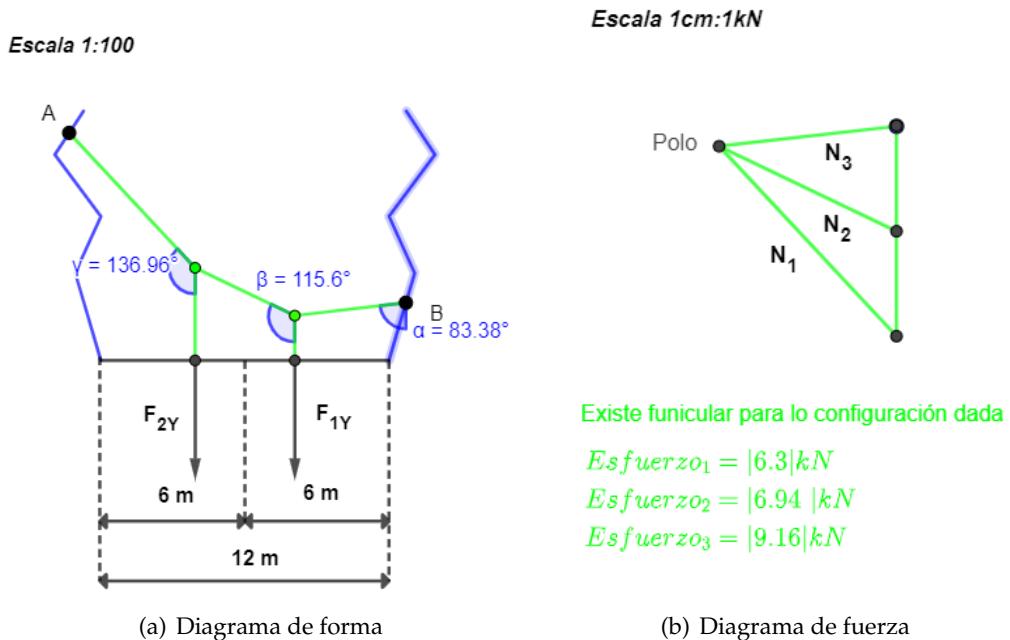


FIGURA 2.5: Funicular en equilibrio con Diagrama de Forma que satisface la condición de contorno en carga exterior.

Como se puede apreciar en la Figura 2.5(a), la altura de A ha aumentado con respecto a la posición en la Figura 2.4(a) y con ello, se ha configurado un nuevo diagrama de fuerza, coincidiendo con la solución de equilibrio.

Con respecto al diagrama de fuerza (Figura 2.5(b)), las longitudes de los diferentes segmentos en centímetros ( $N_1, N_2$  y  $N_3$ ) representan los esfuerzos a los que estarían sometidos los diferentes elementos del diagrama de forma.

Para más detalle entrar en el [Archivo de Geogebra Puente Peatonal 2](#).

### 2.2.3. Expo Lisboa 98

En el siguiente apartado se va realizar un estudio de equilibrio de fuerzas mediante estática gráfica con una edificación real, el Pabellón de Portugal de la Expo de 1998.



FIGURA 2.6: Pabellón de Portugal de la Expo de 1998.

Se realiza el diagrama de fuerza para una sola carga concentrada en el centro equivalente al peso propio total, para después compararlo con una mayor discretización de las cargas a lo largo de la luz de la estructura. Para el primer caso:

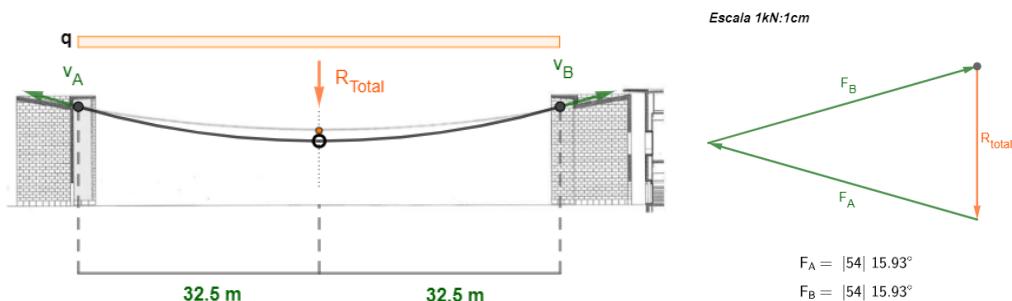
- A través de la metodología de la parábola, componemos los vectores Fuerza A y B.
- Al solo estar la estructura sometida a una carga, el diagrama de forma solo estará compuesto por dos elementos.
- Las condiciones parametrizadas son tanto las cargas totales ejercidas sobre la estructura, como la flecha del arco real.

$$CargaViento,Y = -0,05 \frac{kN}{m} \quad q = CargaViento,Y + PesoPropio,Y$$

$$PesoPropio,Y = -0,4 \frac{kN}{m} \quad ReaccionTotal = LongitudArco \cdot q \quad [kN]$$

$$LongitudArco = 65,88 \text{ m} \quad ReaccionTotal = -29,65 \text{ kN}$$

Escala 1:100



(a) Esquema del Pabellón Lisboa 2D.

(b) Diagrama de Fuerza Pabellón Lisboa 2D.

FIGURA 2.7: Interfaz de Geogebra para Lisboa 2D

Donde se corrobora el equilibrio estático mediante:

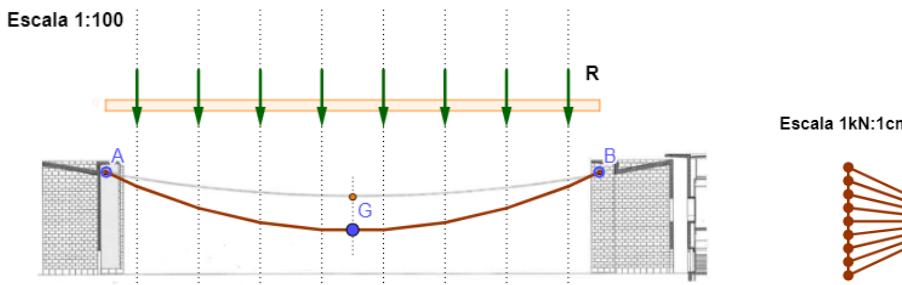
$$F_{AY} = F_A \cdot \sin 15,93 = 14,825 \text{ kN} \quad F_{BY} = F_B \cdot \sin 15,93 = 14,825 \text{ kN}$$

$$F_{AY} + F_{BY} = 29,65 \text{ kN} \quad F_{AY} + F_{BY} + Reacion_{Total} = 0$$

Para más detalle entrar en el [Archivo de Geogebra Expo Lisboa 1.](#)

Para el segundo caso:

- Podemos ver la influencia del aumento de la discretización de cargas en el dominio, para reflejar la relación existente entre el diagrama de fuerza y forma.
- Las condiciones parametrizadas son tanto la magnitud del vector reacción, como la altura máxima de la estructura en el diagrama de forma (punto G).



(a) Esquema del Pabellón Lisboa 2D versión 2.

(b) Diagrama de Fuerza Pabellón Lisboa 2D versión 2.

FIGURA 2.8: Resolución mediante Estática Gráfica. Compuesto por el diagrama de fuerza y forma del para el cálculo de la funicular a través del número de cargas impuestas mediante la metodología de la parábola.

Para más detalle entrar en el [Archivo de Geogebra Expo Lisboa 2.](#)

## 2.3. Arco funicular

El funicular de cargas es la curva que describe un cable suspendido por sus extremos, sometido a cargas en su longitud. Si las cargas son el propio peso del cable se obtiene la catenaria. Si las cargas son uniformes en proyección vertical, se obtiene la parábola. Si son perpendiculares a cada punto del cable, el arco.

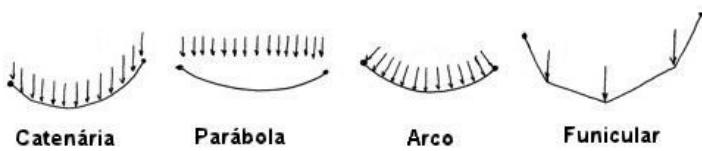


FIGURA 2.9: Tipos de funiculares.

Por su definición, al ser un cable, y desde el punto de vista estructural, podemos decir que se trata de una estructura que no sufre ningún esfuerzo flector, tan solo

tracción a lo largo de toda su longitud. Si invertimos esta curva, tenemos el antifunicular de cargas, que mantiene la propiedad de que no “sufre” fletores y que, en este nuevo estado, todo punto de la estructura está comprimido.

Dicha metodología está íntimamente relacionado con el comportamiento de la unión de dovelas para formar arcos.

Para ello se deben cumplir las ecuaciones de equilibrio, es decir, los esfuerzos internos en el arco deben equilibrar las cargas externas (incluyendo el peso propio).

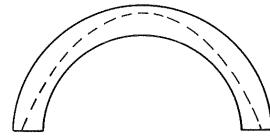


FIGURA 2.10: Antifunicular de un arco de medio punto [11].

Además se corrobora que si la antifunicular resultante tras el estudio permanece dentro del intradós y extradós del dovelado, se satisface el comportamiento a compresión pura.

Por ello, es importante tener en cuenta en el diseño variables como la luz o la altura máxima de dicho arco, ya que compromete directamente a los esfuerzos dentro de la estructura como la posibilidad de establecer una antifunicular fuera de la geometría ocasionando agrietamientos.

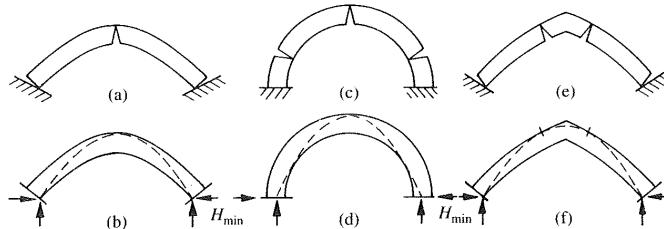


FIGURA 2.11: Agrietamientos de arcos producidos por un incremento de la luz [12].

Con todo esto, a lo largo de la siguiente sección se muestran diferentes ejemplos de arcos funiculares, donde a través de la programación de *GeogebraScript*, se realizan diagramas de forma y fuerza interactivos con parámetros de entrada variables para el usuario como pueden ser número de cargas o las luces de dicho arco.

### 2.3.1. Arco funicular 1

Para el siguiente esquema se ha realizado el arco funicular de tal manera que el usuario pueda elegir el número de cargas y distancia de luz en un rango impuesto, y con ello pueda ver la resolución gráfica de ambos diagramas.

Además se ha incluido la posibilidad de añadir una carga  $Q$  móvil para ver la influencia que tendría en la composición de la funicular.

Por último resaltar que también se ha establecido como parámetro variable la magnitud en kN tanto de la carga distribuida como la carga puntual  $Q$ .

Las funiculares presentadas en Figura 2.12 y 2.13 están caracterizadas por la siguiente imposición de parámetros:

$$\begin{array}{ll} \text{NumeroCargas} = 10 & \text{Luz} = 16 \quad [\text{m}] \\ \text{CargaPuntual,R} = 2 \quad \text{kN} & \text{CargaPuntual,Q} = 2 \quad \text{kN} \\ \text{PosicionPuntual,Q} = 8 & \end{array}$$

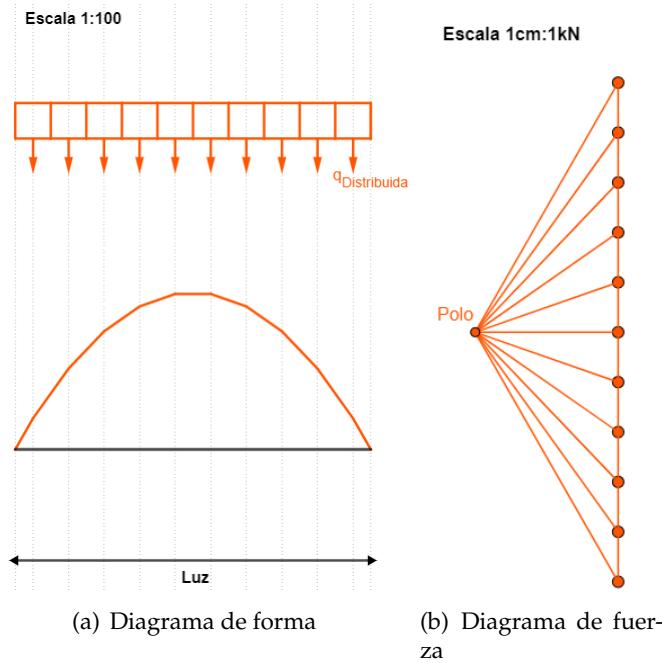


FIGURA 2.12: Funicular en equilibrio con Diagrama de Forma que satisface la condición de contorno en carga distribuida.

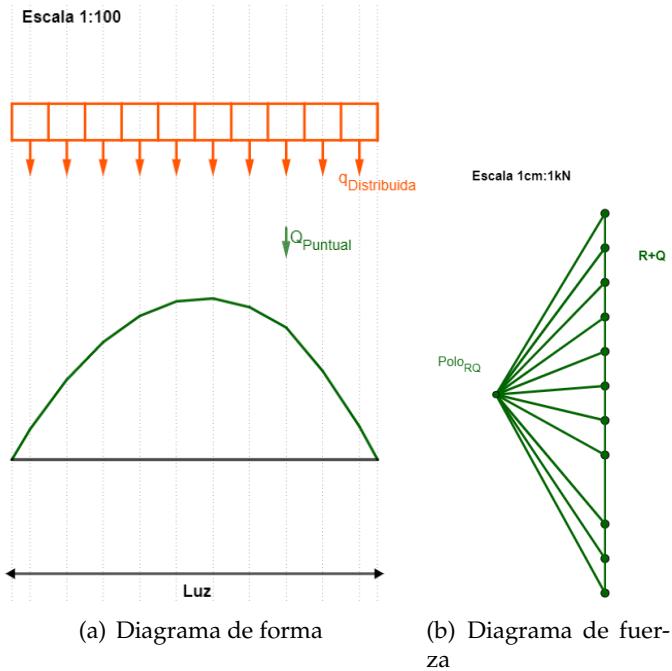


FIGURA 2.13: Funicular en equilibrio con Diagrama de Forma que satisface la condición de contorno en carga distribuida y carga puntual  $Q$ .

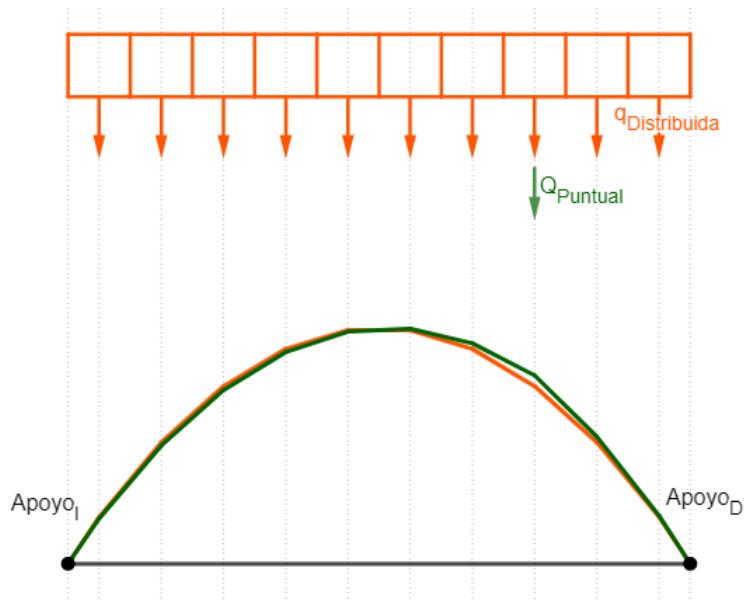


FIGURA 2.14: Comparación de las funiculares con carga distribuida (Naranja), y carga distribuida con carga puntual (Verde).

Se muestran los resultados asociados al equilibrio estático:

$$\begin{aligned}
 Carga_{Total,R} &= Numero_{Cargas} \cdot R = 20\text{kN} & Reaccion_{Izquierda,X} &= 6,67 \text{ kN} & Reaccion_{Izquierda,Y} &= 10 \text{ kN} \\
 Reaccion_{Izquierda,X} &= 6,67 \text{ kN} & Reaccion_{Derecha,X} &= 6,67 \text{ kN} & Reaccion_{Derecha,Y} &= 10 \text{ kN} \\
 Carga_{Total,R} &= Numero_{Cargas} \cdot R + Q = 22\text{kN} & Reaccion_{Izquierda,Y} &= 7,33 \text{ kN} & Reaccion_{Izquierda,X} &= 10,5 \text{ kN} \\
 Reaccion_{Izquierda,Y} &= 7,33 \text{ kN} & Reaccion_{Derecha,X} &= 7,33 \text{ kN} & Reaccion_{Derecha,Y} &= 11,5 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

A modo de conclusión la diferencia entre ambas condiciones, corresponde a un comportamiento en el arco no simétrico como se puede observar en la Figura 2.14, ya que en el diagrama de fuerza varía la magnitud de la carga (posicionada en el punto 8 para las variables impuestas en el ejemplo), y los ángulos que forman con el Polo corresponde a una configuración diferente.

Para más detalle entrar en el [Archivo de Geogebra Arco Funicular 1.](#)

### 2.3.2. Arco funicular 2

Para el siguiente ejemplo se realiza un arco funicular, con la posibilidad de que los extremos no estén en la misma cota, incluyendo valores paramétricos tanto para la definición de los apoyos A y B como el número de cargas.

A continuación se muestra la metodología para resolver el problema, definido con las siguiente características:

$$\begin{aligned}
 Numero_{Cargas} &= 7 & Luz &= 7 \text{ [m]} \\
 Apoyo_A &= (2, 45; 0) \text{ [m]} & Apoyo_B &= (4, 55; 2) \text{ [m]} \\
 Carga_R &= 1 \text{ kN} & Carga_{Total} &= Carga_R \cdot Numero_{Cargas} = 7 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

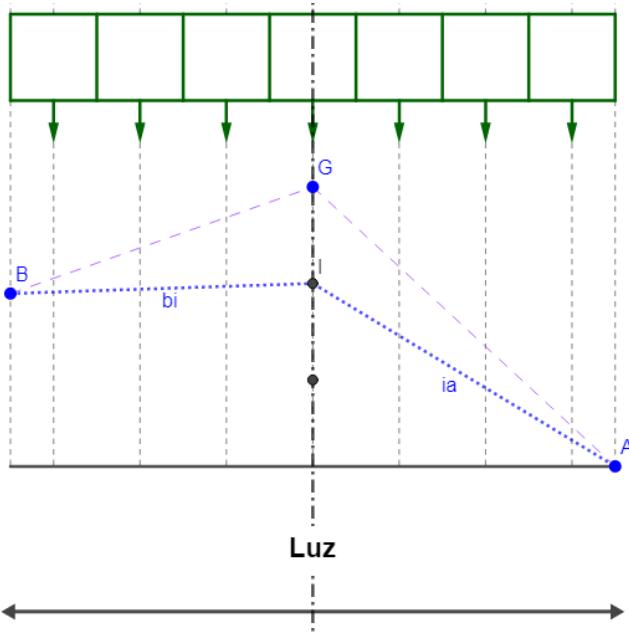


FIGURA 2.15: Condiciones de contorno del problema.

Ya que los apoyos no permanecen en la misma cota, se necesita realizar un *método iterativo*. En primer lugar, se establece un polo aleatorio, con el fin de generar una funicular cualquiera, que cumpla únicamente las condiciones de contorno en carga.

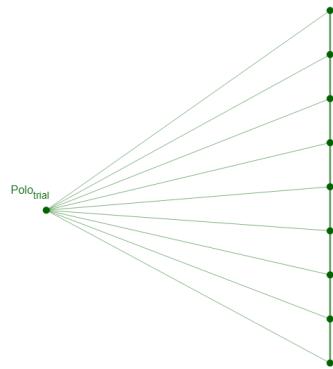


FIGURA 2.16: Diagrama de Fuerza, con Polo Aleatorio.

Construyendo la funicular a través de dicha información, los apoyos  $A'$  y  $B'$  no reflejan ninguna relación geométrica con los apoyos originales, se extraen los segmentos  $b'i'$  y  $i'a'$ , los cuales definen la geometría de la funicular aleatoria por los puntos  $B'$ ,  $I'$  y  $A'$ .

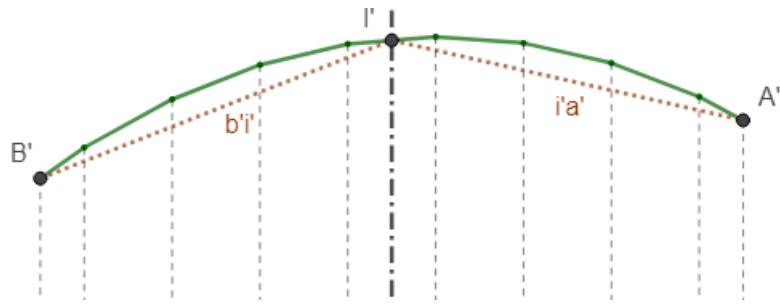


FIGURA 2.17: Funicular aleatoria.

Dichos segmentos se utilizan como rectas paralelas en el diagrama de fuerza, trazando dichas paralelas por el polo aleatorio e intersectando con el segmento que contiene la información de las condiciones en cargas (puntos  $I_{ia}$  y  $I_{bi}$ ).

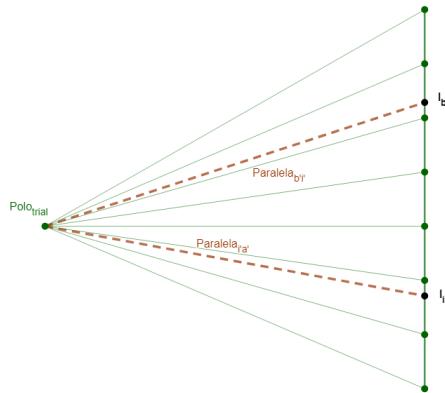


FIGURA 2.18: Funicular aleatoria.

Dichas paralelas tienen sus homólogas en las condiciones iniciales (véase Figura 2.15, segmentos  $b_i$  y  $i_a$ ), que se utilizan como paralelas en las intersecciones  $I_{bi}$  y  $I_{ia}$ , y las intersecciones entre ambas rectas definen el polo final.

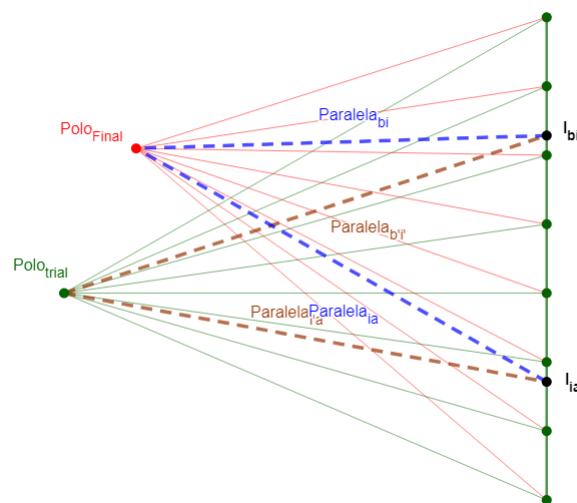


FIGURA 2.19: Funicular aleatoria.

Con la información del diagrama de fuerza que compone el polo final, se construye el arco que satisface la condición de contener dichos extremos A y B.

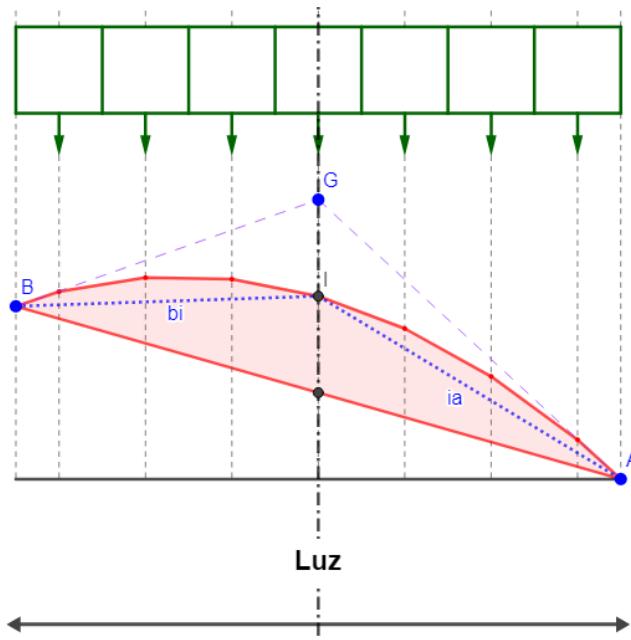
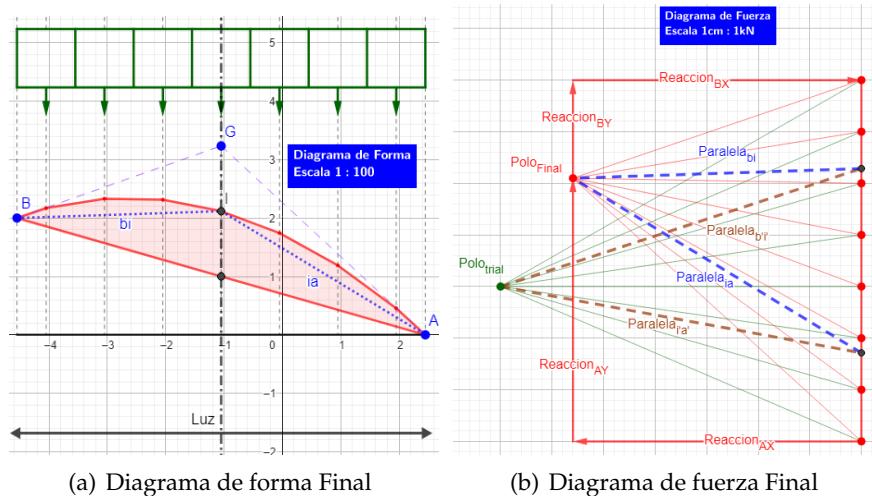


FIGURA 2.20: Funicular final.

Las funiculares presentadas en Figura 2.21(a) y 2.21(b) vienen caracterizadas por la anterior imposición de variables.



**Reacciones**

$$\begin{aligned} R_{AX} &= 5.6 \text{ kN} \\ R_{AY} &= 5.1 \text{ kN} \\ R_{BX} &= 5.6 \text{ kN} \\ R_{BY} &= 1.9 \text{ kN} \end{aligned}$$

(c) Reacciones en los apoyos A y B

FIGURA 2.21: Interfaz del programa en la plataforma de *Geogebra*

Cabe destacar que el equilibrio estático se corrobora ya que la suma de  $R_{AY}$  y  $R_{BY}$  es igual a la  $Carga_{Total}$ .

Como se puede apreciar en la Figura 2.21, se han realizado dos funiculares, en la que las condiciones de contorno en carga son idénticas, sin embargo la magnitud de los esfuerzos y los diagramas de forma son totalmente distintos.

Para más detalle entrar en el [Archivo de Geogebra Arco Funicular 2](#).

### 2.3.3. Arcos Consecutivos

Para comenzar el análisis es necesario establecer una serie de condiciones:

- Se establecen 3 apoyos,  $Nodo_1$ ,  $Nodo_2$  y  $Nodo_3$ . Dichos nodos serán paramétricos, pudiendo resolver la geometría para diferente luz total.
- Se define dos grupos de cargas:
  1.  $Cargas_{12}$ , asociado al número total de cargas distribuidas a lo largo de la  $Luz_{12}$ .
  2.  $Cargas_{23}$ , asociado al número total de cargas distribuidas a lo largo de la  $Luz_{23}$ .
- Dichas cargas se discretizan entre los diferentes apoyos.
- Para cada par de apoyos  $ij$ , se establecen los puntos paramétricos  $G_{ij}$ , que hacen referencia al ángulo que definirá la reacción total en los apoyos.
- Para cada par de apoyos  $ij$ , se establecen los puntos  $I_{ij}$ , que hacen alusión a la altura máxima de la funicular resultante, y viene definida por la mitad del segmento  $G_{ij} - P_{ij}$
- Los segmento  $A_{ij}$  y  $B_{ij}$  para cada par de nodos, como se verá en los siguientes.

A continuación se muestra la metodología para resolver el problema, definido con las siguiente características:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Numero}_{Cargas,12} = 10 & \text{Numero}_{Cargas,23} = 7 \\
 \text{Nodo}_1 = (4; 0) \quad [m] & \text{Nodo}_2 = (6,65; 4,25) \quad [m] \\
 \text{Nodo}_3 = (14, 1; 1) & \text{Carga}_R = 1,6 \quad kN \\
 \text{Carga}_{Total} = 27,2 \quad kN & \text{Luz}_{12} = 10,65 \quad [m] \\
 \text{Luz}_{23} = 7,45 \quad [m] & \text{Luz}_{Total} = 18,1 \quad [m]
 \end{array}$$

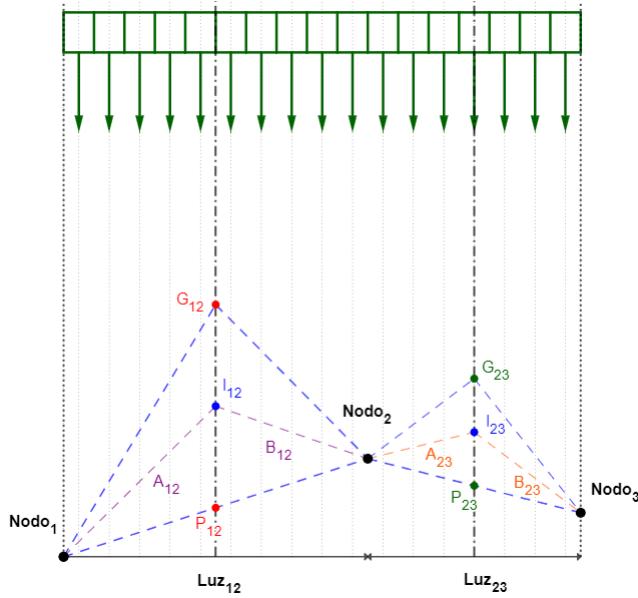


FIGURA 2.22: Condiciones de Contorno

Ya que los apoyos no permanecen en la misma cota, se necesita realizar un *método iterativo*. Procediendo como el ejemplo anterior, se establece un polo aleatorio, con el fin de generar dos funiculares cualquiera, que cumplan únicamente las condiciones de contorno en carga.

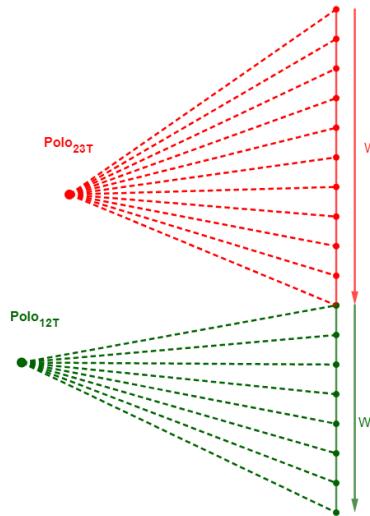


FIGURA 2.23: Diagramas de Fuerza con polos aleatorios.

A través de los polígonos definidos en la Figura 2.23, construimos las funiculares.

Los diagramas de forma resultantes (véase Figura 2.24) son aleatorios, sus apoyos ( $Nodo_1'$ ,  $Nodo_2'$  y  $Nodo_3'$ ) no reflejan ninguna relación espacial con la configuración inicial establecida ( $Nodo_1$ ,  $Nodo_2$  y  $Nodo_3$ ).

Por geometría se extraen los segmentos  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  para cada par de apoyos, los cuales definen la geometría de la funicular aleatoria por los puntos  $Nodo_{i'}$ ,  $Nodo_{j'}$  y  $I'_{ij}$ .

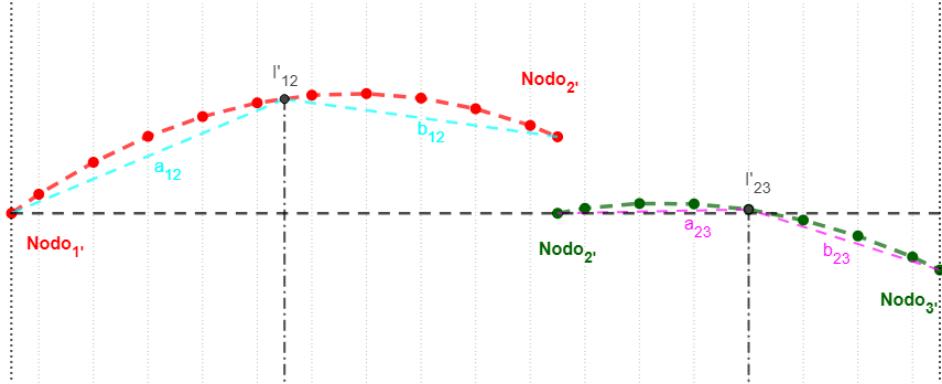


FIGURA 2.24: Funiculares aleatoria.

Dichas paralelas tienen sus homólogas en las condiciones de contorno iniciales (véase Figura 2.25, segmentos  $A_{ij}$  y  $B_{ij}$  para cada par de apoyos), que se utilizan como paralelas en las intersecciones  $I_{aij}$  y  $I_{bij}$  para cada funicular, y las intersecciones entre ambas rectas definen el Polos Finales.

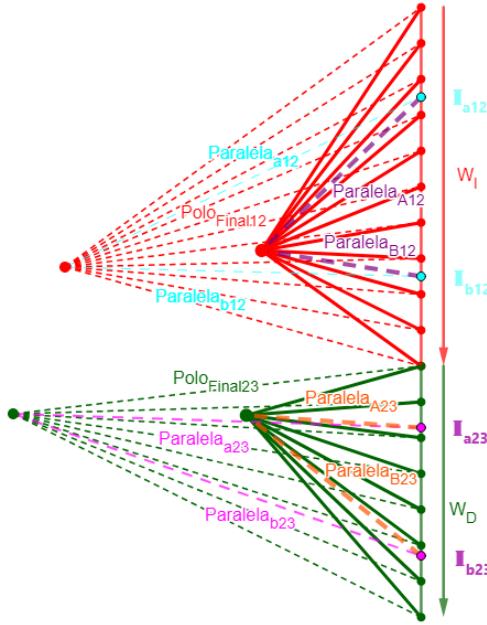


FIGURA 2.25: Diagramas de Fuerza Final.

Con la información de los diagramas de fuerza que componen los polos finales, y se construye los arcos que satisfacen la condición de contener los apoyos 1, 2 y 3.

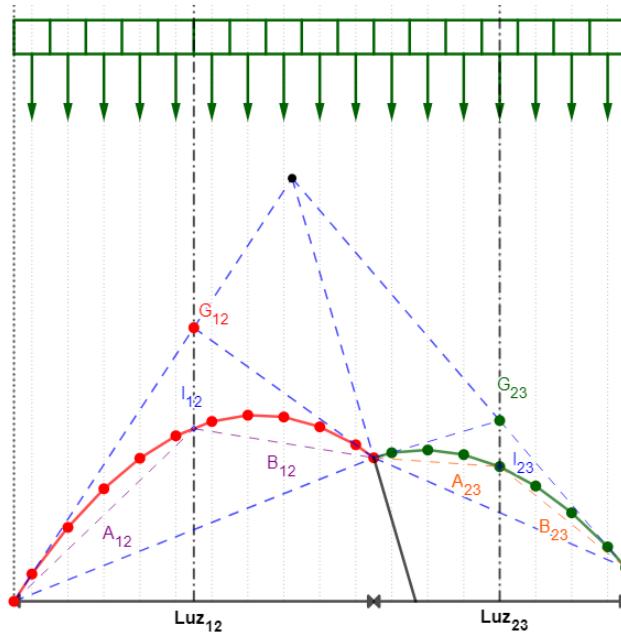
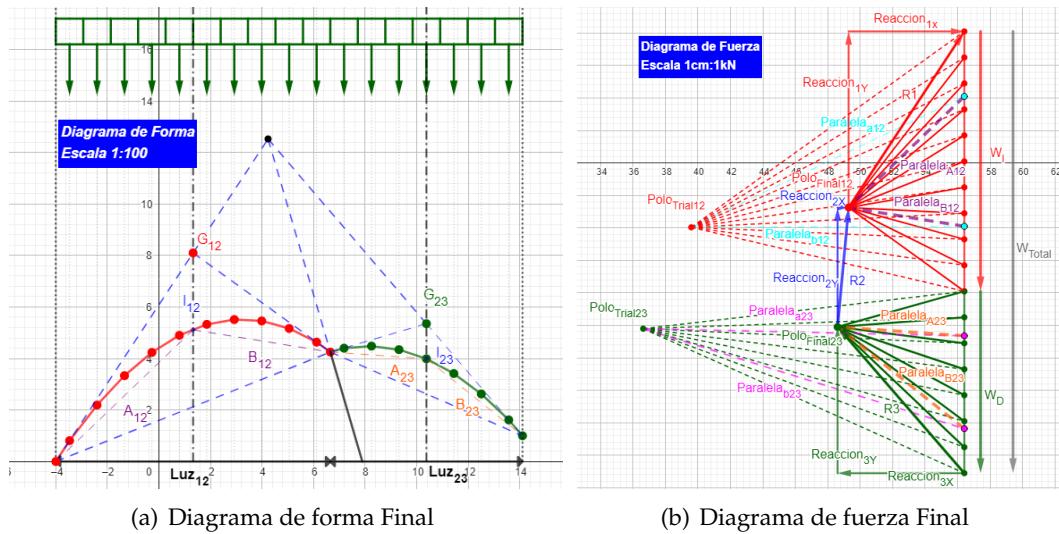


FIGURA 2.26: Funiculares finales.

Las funiculares presentadas en Figura 2.27(a) y 2.27(b) vienen caracterizadas por la anterior imposición de variables.



**Reacciones**

$$\begin{aligned} R_{1X} &= 7.13 \text{ kN} \\ R_{1Y} &= 10.85 \text{ kN} \\ R_{2X} &= 0.68 \text{ kN} \\ R_{2Y} &= 7.35 \text{ kN} \\ R_{3X} &= 7.81 \text{ kN} \\ R_{3Y} &= 9.01 \text{ kN} \end{aligned}$$

(c) Reacciones en los apoyos 1, 2 y 3

FIGURA 2.27: Interfaz del programa en la plataforma de Geogebra

De cara a resaltar las conclusiones más importantes del diagrama de fuerza:

- Las condiciones de contorno en carga total viene dado por el vector  $W_{Total}$ .
- Los vectores  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  hacen referencia tanto a la reacción en kN que habría en sus nodos correspondientes para establecer el equilibrio estático, como el ángulo paralelo para formar el polígono funicular de forma en los extremos del arco.

Para más detalle entrar en el [Archivo de Geogebra Arcos Consecutivos](#).

#### 2.3.4. Free-Form Thruses

El segundo ejemplo trata sobre el diseño controlado de estructuras con una forma no funicular y de forma libre, véase Figura 2.28.

Se puede conseguir equilibrio de una forma libre añadiendo un sistema de rigidez en relación a la magnitud de flexión que experimenta la curva.

Las acciones de esta estructura libre de forma reforzada serán las mismas que las de la solución funicular (línea discontinua).

En este ejemplo, la forma general de la estructura libre de forma está controlada por una curva de control en 3 puntos interiores (C, D y E) y dos exteriores asociados a los apoyos de la estructura (A y B).

Dado un conjunto de cargas (en este caso, una carga uniforme a lo largo de la curva de control), se puede construir una solución funicular a través de los soportes y un tercer punto elegido.

Esta línea representa una posible solución sin flexión para la carga dada. El momento de flexión  $M$  en cualquier punto a lo largo de la curva de control es proporcional a su desviación de la solución funicular:  $M = Hv$ , donde  $H$  es el empuje (horizontal) de la estructura, y  $v$  es la distancia vertical entre la curva de control y la funicular.

Donde la solución funicular y la curva de control se intersectan, el momento de flexión es cero. Al elegir la magnitud de la fuerza de tensión en el cable de refuerzo,  $T$ , se determina completamente la forma del sistema de refuerzo, ya que  $M = Td$ , donde  $d$  es la distancia perpendicular a la curva de control. Este sistema transforma la curva de control en una línea de empuje con la forma libre deseada.

En un entorno interactivo, se pueden explorar y diseñar con precisión diferentes configuraciones de este sistema estructural complejo sin realizar cálculos, simplemente determinando la forma general de la estructura utilizando los puntos de control de la curva de control, eligiendo la forma de la funicular a través de la ubicación del punto de flexión cero y eligiendo el tamaño deseado de la fuerza del cable en el sistema de refuerzo.

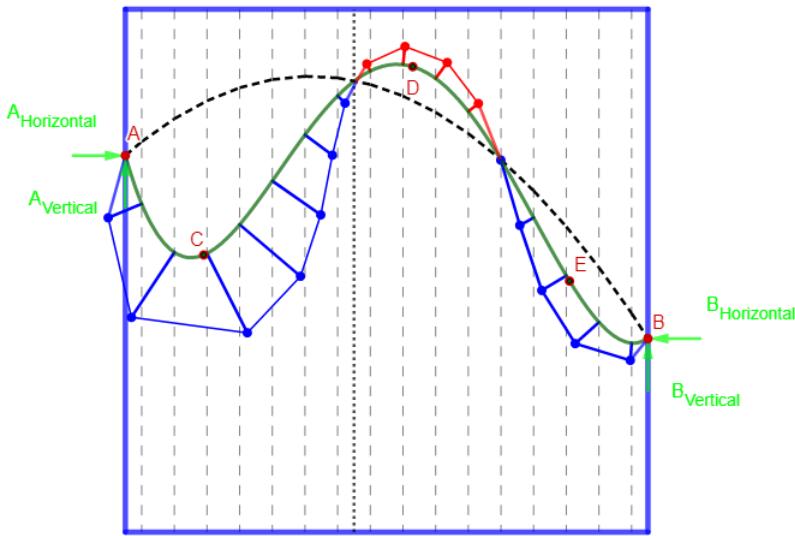


FIGURA 2.28: Free Form Thruses

Para comenzar el análisis de la metodología es necesario establecer una serie de condiciones:

- Se define una curva que tiene cinco puntos de control (A, B, C, D y E), la cual viene limitada por los puntos A y B (apoyos de la estructura).
- Se divide la luz de la estructura en  $N_{Cargas} + 1$ , haciendo referencia a la carga distribuida que actúa en la funicular.
- Se define el punto F, pertenece a la curva generada, y se utiliza para establecer de forma paramétrica funiculares que contengan dicho punto.

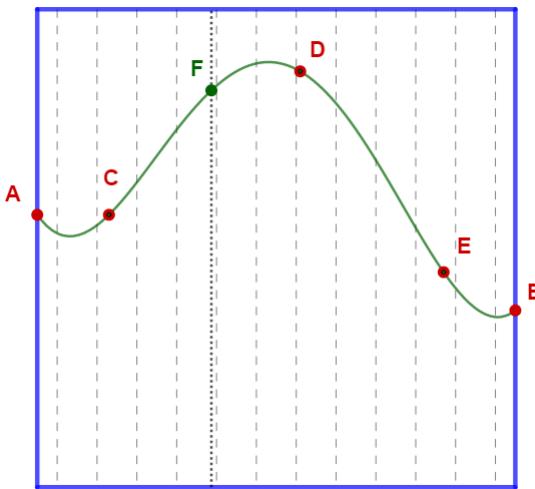


FIGURA 2.29: Condiciones Iniciales.

A continuación se muestra la metodología para resolver el problema, definido con las siguientes características:

$$\begin{aligned}
 & \text{NúmeroCargas} = 12 & Carga_R = 0,7 \text{ kN} \\
 & Punto_A = (-5; 0,7) [m] & Punto_B = (5; -1,3) [m] \\
 & Punto_C = (-3,5; 0,7) [m] & Punto_D = (0,5; 3,7) [m] \\
 & Punto_E = (3,5; -0,5) [m] & Punto_F = (-1,34; 3,32) [m] \\
 & Carga_{Total} = 8,4 \text{ kN} & Luz_{AF} = 3,66 \text{ m} \\
 & Luz_{FB} = 6,34 \text{ m} & Luz_{Total} = 10 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Para comenzar, se establecen las paralelas  $R_{MitadAF}$  y  $R_{MitadFB}$  que permiten delimitar la mitad entre los puntos AF y FB. A continuación, se trazan las rectas  $Paralela_{AF}$  y  $Paralela_{FB}$  e intersectan con las paralelas anteriores en  $R_1$  y  $R_2$ .

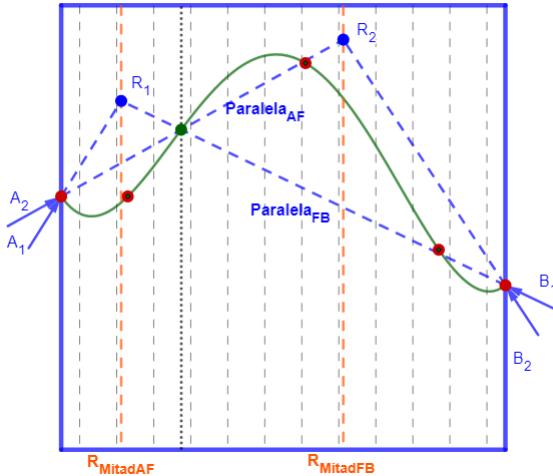


FIGURA 2.30: Establecer la composición de la funicular al imponer  $Punto_F$ .

Con todo ello, se ha creado el diagrama de fuerza asociado a la funicular que pasa por el punto F. Como se ve en la Figura 2.31, se han puesto en dirección Y las 12 cargas de 0,7 kN, por la escala utilizada (Escala 1kN :1 cm), el vector  $R_{Total}$  equivale a 8,4 centímetros.

El punto U hace referencia al porcentaje de carga que admite cada funicular en relación a la posición del punto F a lo largo del eje X.

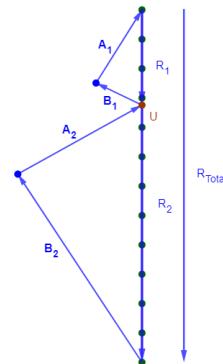


FIGURA 2.31: Diagrama de Fuerza Trial.

Una vez establecido dichos puntos, se trazan paralelas con  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  como se muestra en la Figura anterior, y se construye el diagrama de fuerza Trial.

Para encontrar el Polo que define la funicular final, utilizamos el  $Polo_{T1}$  y  $Polo_{T2}$  y establecemos paralelas  $A_2$  y  $B_2$  respectivamente, la intersección define el  $Polo_F$ , véase Figura 2.32.

La longitud de los vectores  $A_{Total}$  y  $B_{Total}$  hacen referencia a la reacción en los apoyos A y B, tanto en dirección como en sentido. La escala que relaciona la longitud con la fuerza, se ha definido como 1 centímetro es un 1 kN.

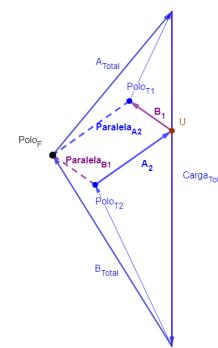
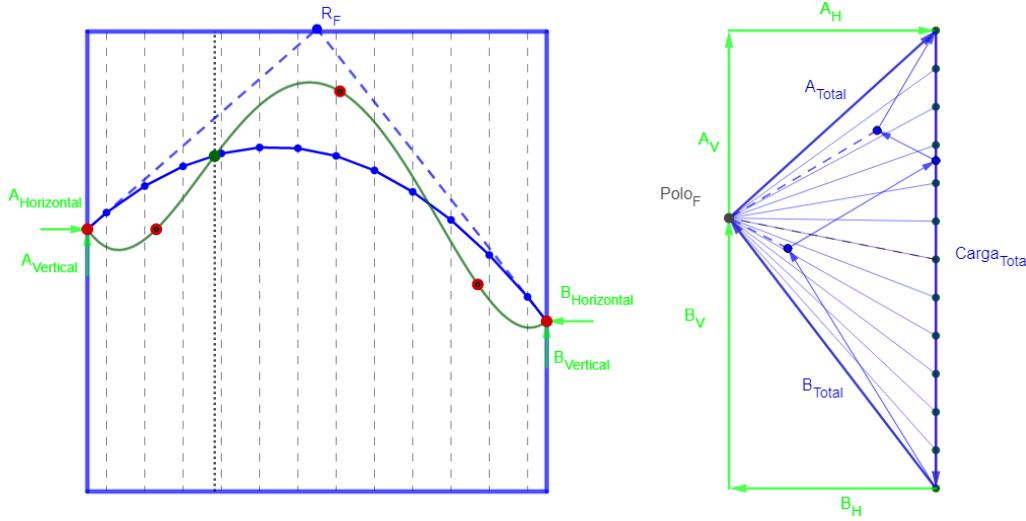


FIGURA 2.32: Solución del Polo final.

Se unen los puntos que representan las cargas al  $Polo_F$  y construimos la funicular en el diagrama de forma (véase Figura 2.33(a)), dónde el punto  $R_F$  es la intersección de las paralelas  $A_{Total}$  y  $B_{Total}$  por sus apoyos respectivamente.



(a) *Diagrama de Forma Final.*

(b) *Diagrama de Fuerza Final*

$$\begin{aligned}
 \text{Reacción } A_H &= 3.92 \text{ kN} \\
 \text{Reacción } A_V &= 3.42 \text{ kN} \\
 \text{Reacción } B_H &= 3.92 \text{ kN} \\
 \text{Reacción } B_V &= 4.98 \text{ kN} \\
 \text{Carga Total} &= 8.4 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

(c) *Resultados para el equilibrio estático.*

FIGURA 2.33: Solución mediante la estática gráfica de la funicular.

Como se ha comentado anteriormente, la funicular es una posible solución sin flexión, para trasladar la misma definición a la curva de control es necesario aplicarle un momento proporcional a la desviación con respecto a la funicular establecida.

Viene dado por la siguiente expresión:

$$M = H \cdot v = T \cdot d \quad (2.1)$$

Donde  $H$  refleja el empuje horizontal de la estructura,  $v$  la distancia vertical entre el punto de la funicular y la curva de control,  $T$  es la tensión del cable kN, y  $d$  longitud de la barra que genera dicha transformación.

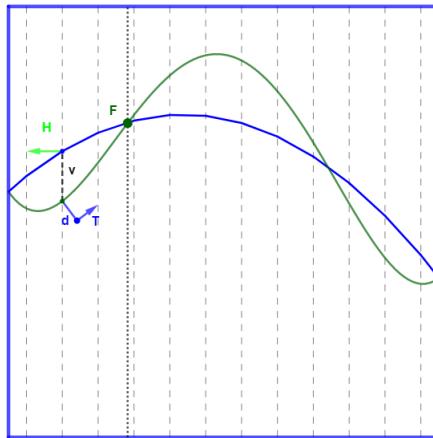


FIGURA 2.34: Análisis de esfuerzos, donde el punto de la funicular tiene mayor cota que el punto de la curva control.

Se establece la variable  $T$  como paramétrica, donde el usuario puede combinar diferentes magnitudes para resolver el valor  $d$  y visualizar su influencia en la estructura final.

Cabe destacar que cuando el punto de la curva de control tiene mayor cota que el punto de la funicular, se establece la barra que genere el momento contrario.

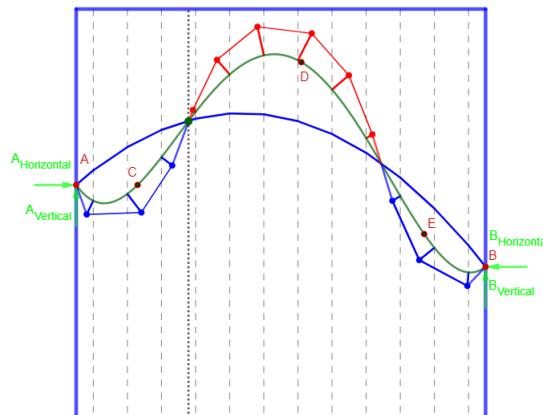


FIGURA 2.35: Resultado Final de la curva de control.

Para más detalle entrar en el [Archivo de Geogebra Free Form Thruses](#).



## Capítulo 3

# Thrust Network Analysis

### 3.1. Introducción TNA

*Thrust Network Analysis* ofrece un enfoque visual para encontrar formas de estructuras funiculares en tres dimensiones. El método resuelve el equilibrio estático de redes funiculares de manera sencilla utilizando la geometría, lo que permite seguir intuitivamente y comprender completamente el proceso de diseño estructural. Su resolución se basa en dos fases:

- **Resolver el equilibrio horizontal:** Como las cargas verticales desaparecen en el diagrama de forma  $\Gamma$ , que se define como la proyección horizontal de la red de empuje  $G$ , el equilibrio en el plano también representa el equilibrio horizontal de  $G$ , independientemente de las cargas (verticales) aplicadas.
- **Resolver el equilibrio vertical:** Para una proyección horizontal dada, y el equilibrio de los componentes de fuerza horizontal, se define una escala  $\zeta$ , que permite resolver la única red de empuje  $G$ , estando en equilibrio con la carga dada, para los vértices del contorno definidos como apoyos.

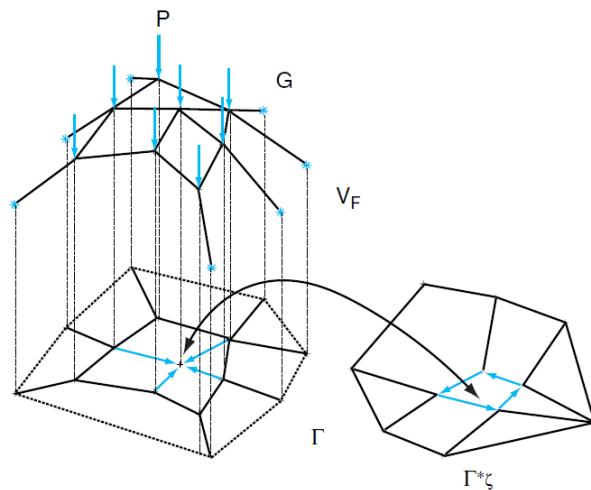


FIGURA 3.1: Diagrama de forma  $\Gamma$ , diagrama de fuerzas  $\Gamma^*$ , con una escala  $\zeta$  dada, la relación recíproca entre un nodo en el diagrama de forma y el polígono correspondiente en el diagrama de fuerza, y la red de empuje  $G$  para los apoyos  $V_F$  y dada las cargas  $P$ . [13]

Gracias a este método, se diseñan geometrías disruptivas para llevarse a cabo en la realidad, como el diseño del Puente Striatus.



FIGURA 3.2: Perspectiva del Puente Striatus

### 3.2. Descripción de los pasos principales

A continuación, se describe el proceso para realizar el cálculo de la funicular en 3D.

#### 1. Construcción de la malla Primal $\Gamma$

En primer lugar es necesario definir la malla o proyección en planta que va a determinar los patrones de esfuerzos, véase la Figura 3.1. Las aristas representan las posibles rutas de distribución de cargas a través de la estructura, y en los nodos de la malla se definen las fuerzas verticales que actúan sobre la estructura.

#### 2. Definición de las cargas nodales

Las cargas se aplican en los vértices de la malla. Aunque la carga principal que se define suele ser el peso propio, las cargas que se van a imponer en los ejemplos son arbitrarias ya que no se ha definido ningún material determinado para obtener una solución general para una carga seleccionada por el usuario.

#### 3. Generación de la malla Dual $\Gamma^*$

La malla Dual  $\Gamma^*$  es consecuencia directa de la definición geométrica de la malla Primal  $\Gamma$  mediante la definición de *figuras recíprocas de Maxwell*, donde: “*las ramas correspondientes permanecen paralelas y el equilibrio nodal en la malla Primal está garantizado por polígonos cerrados en la malla Dual*”.

Es importante comentar que la malla Dual tiene una escala desconocida  $\zeta$ , ya que la relación entre la malla Primal y la Dual es independiente de sus escalas relativas.

#### 4. Metodología matemática para la resolución del equilibrio vertical, $G$

Usando los datos en geometría, asociados a la malla Primal y la malla Dual, junto a las condiciones de contorno, los pesos aplicados en los nodos y los apoyos dentro de la malla Primal, el problema se puede resolver usando una optimización lineal de un solo paso, definiendo la escala  $\zeta$  mencionada anteriormente.

A continuación se muestra la formulación lineal para resolver el problema.

### 3.2.1. Formulación Lineal

La formulación se inicia planteando el equilibrio estático en cada uno de los nodos, de tal manera que el sumatorio de las componentes verticales de las fuerzas compense la acción vertical.

Dado que esto es aplicado en cada punto, habrá tantas ecuaciones como nudos internos tenga la estructura ya que los puntos de contorno o apoyos ya están determinados haciendo referencia a que su altura está definida en el plano XY con  $z=0$ .

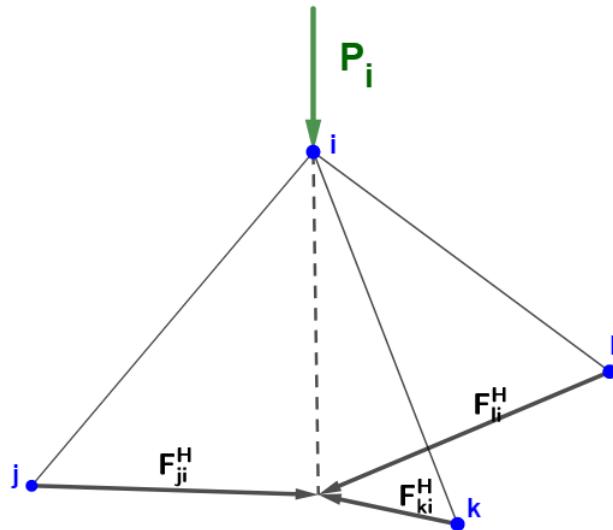


FIGURA 3.3: Equilibrio estático de cada nodo con la carga definida.

$$F_{ji}^V + F_{ki}^V + F_{li}^V = P_i \quad (3.1)$$

Describimos la ecuación 3.1 en función de componentes en fuerzas, utilizando la proporcionalidad geométrica, véase Figura 3.4.

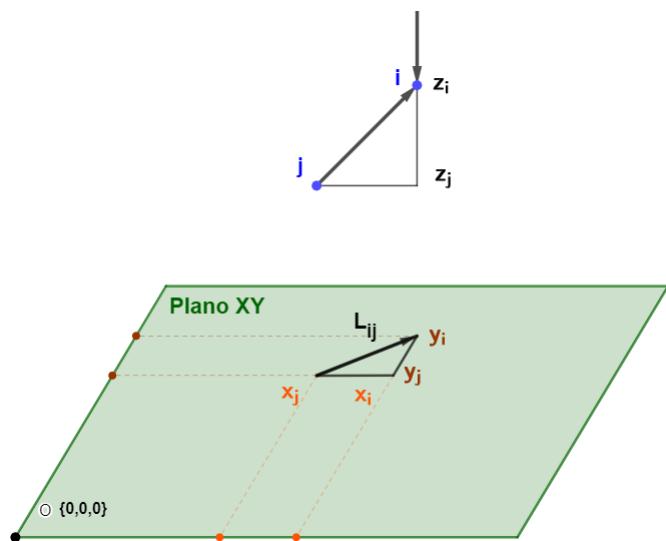


FIGURA 3.4: Relación geométrica entre los vectores de fuerzas y su proyección en el plano.

$$L_{ij}^H = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\frac{F_{ij}^H}{L_{ij}^H} = \frac{F_{ij}^V}{z_i - z_j}$$

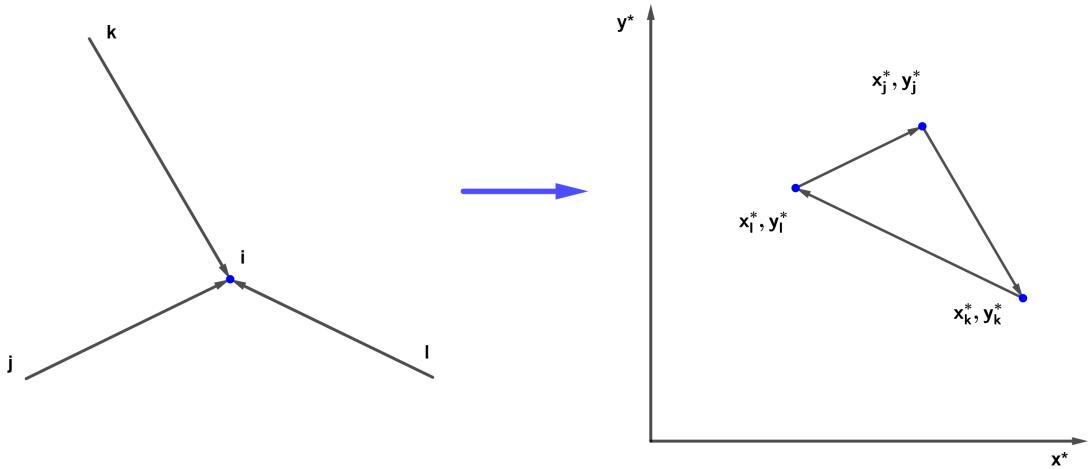


FIGURA 3.5: Representación de un punto de la malla original como un polígono de la malla recíproca.

En consecuencia de lo anterior, la Ecuación 3.2 queda en función de las fuerzas horizontales, la longitud de las ramas de la malla primal y las alturas de los nodos.

$$F_{ji}^H \cdot \frac{(z_i - z_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} + F_{ki}^H \cdot \frac{(z_i - z_k)}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}}$$

$$+ F_{li}^H \cdot \frac{(z_i - z_l)}{\sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2}} = P_i \quad (3.2)$$

La magnitud de las fuerzas horizontales se relaciona a través de la longitud de la representación de las fuerzas en la malla dual, por eso la ecuación puede expresarse en términos de la geometría de la malla propuesta, que cumple las condiciones de equilibrio y compresión pura, y del factor de escala para controlar la geometría de la solución final.

$$F_{ij}^H = \zeta \cdot L_{ij}^{H*} \quad (3.3)$$

$$L_{ij}^{H*} = \sqrt{(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2}$$

Dónde \$L\_{ij}^{H\*}\$ hace referencia a la longitud de \$ij\$ en la malla Dual.

Reordenando la Ecuación 3.2 y sustituyendo la relación de las fuerzas en función de sus respectivas longitudes en las diferentes mallas como en la Ecuación 3.3, donde  $r$  hace referencia a la inversa del valor de la escala desconocida de la malla dual,  $\zeta$ :

$$\left( \frac{L_{ij}^*}{L_{ij}} + \frac{L_{ik}^*}{L_{ik}} + \frac{L_{il}^*}{L_{il}} \right) \cdot z_i - \frac{L_{ij}^*}{L_{ij}} \cdot z_j - \frac{L_{ik}^*}{L_{ik}} \cdot z_k - \frac{L_{il}^*}{L_{il}} \cdot z_l + P_i \cdot r = 0 \quad (3.4)$$

La relación entre las longitudes de ambas mallas se puede agrupar en un término llamado  $C_n$  (donde el subíndice  $n$  hace referencia al nodo de la malla primal) ya que todos los parámetros son conocidos. Con las condiciones de contorno impuestas y el factor de escala seleccionado por el usuario, sólo queda determinar la altura de los puntos.

$$C_i \cdot z_i + C_j \cdot z_j + C_k \cdot z_k + C_l \cdot z_l - P_i \cdot r = 0 \quad (3.5)$$

El procedimiento presentado es aplicable a mallas primales con un número de nodos reducido, ya que se adapta a la capacidad de codificación.

Sin embargo, cuando la estructura se compone de un grado mayor a nivel de discretización, existe otro procedimiento para resolver ese sistema de ecuaciones más voluminoso, a continuación se presenta dicho análisis matricial.

### 3.2.2. Implementación Matricial

Basándose en los mismos principios, la implantación computacional se sirve de vectores y matrices que representan no solo la geometría de ambas mallas como en el caso anterior, sino también la conectividad de las ramas de los diferentes diagramas.

Para ello se establece una convención para la enumeración de los nodos, donde en primer lugar se numeran los nodos interiores, haciendo referencia a los nodos con cargas aplicadas, para a continuación numerar los nodos exteriores, haciendo referencia a los nodos que formarán parte de los apoyos de la estructura.

De esta forma, los vectores coordenada  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  ( $n \times 1$ ) seguirán el orden de coordenadas de nodos interiores ( $n_i \times 1$ ) y coordenadas de nodo exteriores ( $n_b \times 1$ ).

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{y}_b \end{bmatrix}; \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_b \end{bmatrix}$$

La matriz  $C$  (dimensiones  $n \times n^o$  Ramas), será la encargada de relacionar la conectividad de los nudos.

Cabe destacar que aunque haya flechas salientes del nudo, que podrían interpretarse como fuerzas de tensión, solo implican una propuesta de camino del flujo de las cargas.

Como se muestra en la Figura 3.6, se obtiene la relación recíproca entre ambos diagramas.

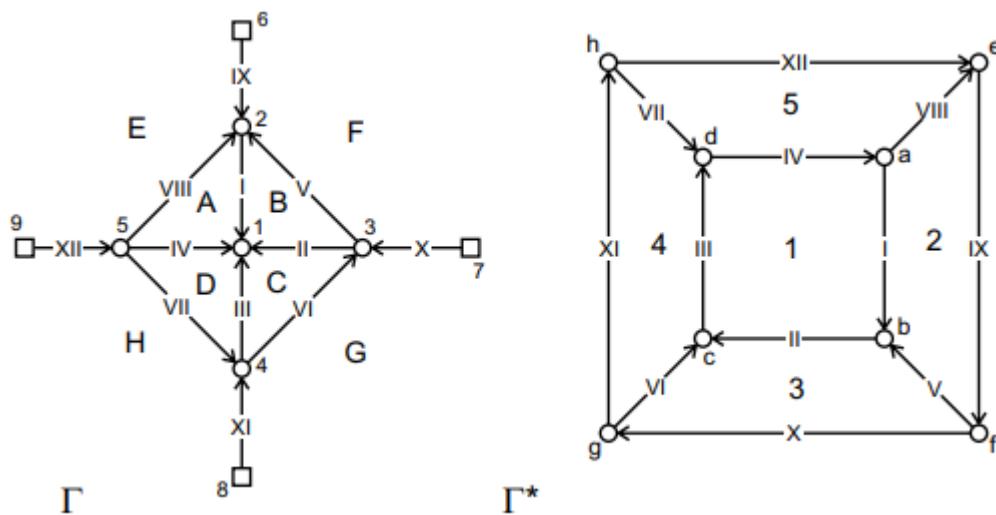


FIGURA 3.6: Grafos de la malla Primal y Dual. Los nodos Primales y su correspondientes polígonos Diales, son etiquetados usando números, las caras Primales y sus nodos Diales son etiquetados usando letras, y por último las ramas Primales y Diales se etiquetan con números romanos.[14]

Para establecer la matriz  $\mathbf{C}$ , se sigue el siguiente convenio para cada nodo en la malla Primal:

$$C(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } j \text{ es la punta de la rama } i \\ -1 & \text{si el nodo } j \text{ es la cola de la rama } i \\ 0 & \text{si el nodo } j \text{ no pertenece a la rama } i \end{cases}$$

Para el caso visto en la Figura 3.6, su matriz  $\mathbf{C}$  estará definida con las dimensiones (9x12) y su conectividad vendrá dada por la siguiente configuración:

$$\begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ I & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ II & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ III & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ IV & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ VI & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ VII & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ VIII & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ IX & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ XI & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ XII & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

La matriz  $\mathbf{C}$  tiene su homóloga dual  $\mathbf{C}^*$  y también se empleará en la aplicación del método. Igual que la primera, representa las relaciones entre los puntos de la malla dual teniendo en cuenta que los polígonos de la malla primal han pasado a ser puntos de la recíproca, y los puntos de la original son polígonos en la dual.

Para establecer los vectores columnas de  $\mathbf{C}^*$  se construyen a través los polígonos de la malla Primal. El convenio para cada polígono se establece mediante:

$$C^*(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si la rama del polígono define un vector con sentido antihorario} \\ -1 & \text{si la rama del polígono define un vector con sentido horario} \end{cases}$$

A modo de ejemplo se muestra el vector columna asociado al primer polígono A de la malla Primal, véase Figura 3.7.

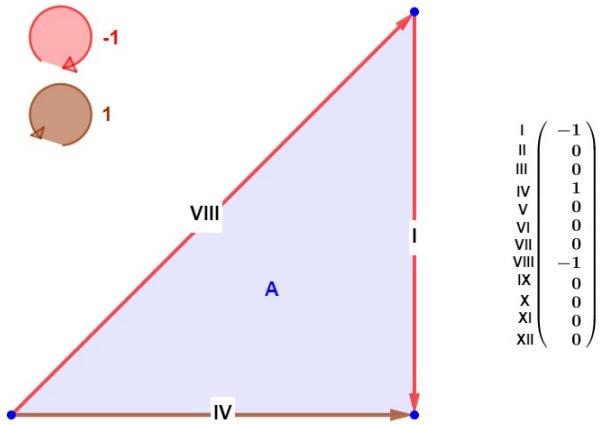


FIGURA 3.7: Convenio para realización del vector columna  $a$  de la matriz  $C^*$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & a & b & c & d & e & f & g & h \\
 \hline
 I & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 II & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 III & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 IV & 1 & 0 & 0 & -1 & -0 & 0 & 0 & 0 \\
 V & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 VI & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 VII & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 VIII & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 IX & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 XI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 XII & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
 \end{array}$$

Una vez establecidas las coordenadas en el plano de ambas mallas Primal y Dual ( $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  respectivamente), junto a las matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{C}^*$ , se pueden calcular las longitudes para obtener un sistema análogo al que se empleaba en el caso de aplicación a un único punto. Las matrices  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}^*$ ,  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{V}^*$  son los vectores de coordenadas diagonalizados de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}^*$  y  $\mathbf{v}^*$  respectivamente. Las matrices diagonalizadas Primales y Duales que contienen la información de las longitudes de las ramas vienen definidas en  $\mathbf{L}_H$  y  $\mathbf{L}_H^*$ .

$$\mathbf{u} = \mathbf{Cx} = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{C}_b \mathbf{x}_b$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Cy} = \mathbf{C}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{C}_b \mathbf{y}_b$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{C}^* \mathbf{x}^*$$

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{C}^* \mathbf{y}^*$$

$$\mathbf{L}_H = \sqrt{\mathbf{U}^t \mathbf{U} + \mathbf{V}^t \mathbf{V}}$$

$$\mathbf{L}_H^* = \sqrt{\mathbf{U}^{t*} \mathbf{U}^* + \mathbf{V}^{t*} \mathbf{V}^*}$$

De la teoría de Schek [1974] para la formulación de la ecuación de equilibrio y aplicando el concepto de densidad de fuerza de Linkwitz y Schek [1971] se obtiene el

sistema final para la resolución del problema en función del factor de escala. El vector  $P$  de la ecuación representa las cargas verticales aplicadas en cada nodo y tiene dimensiones  $n_i \times 1$ .

$$\mathbf{C}_i^t(\mathbf{L}_H^{-1}\mathbf{L}_H^*)\mathbf{Cz} - P\frac{1}{\zeta} = 0$$

Separando la ecuación en nudos internos y externos, y agrupando los términos conocidos se obtiene una formulación similar a la del apartado anterior. Para ello se utiliza la matriz  $D$  (compuesta por dos matrices, información asociada a nudos interiores  $D_i$  y nudos exteriores  $D_b$ ).

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i^t(\mathbf{L}_H^{-1})\mathbf{C}_i\mathbf{z}_i + \mathbf{C}_i^t(\mathbf{L}_H^{-1}\mathbf{L}_H^*)\mathbf{C}_b\mathbf{z}_b - P\frac{1}{\zeta} &= 0 \\ \mathbf{D}_i &= \mathbf{C}_i^t(\mathbf{L}_H^{-1}\mathbf{L}_H^*)\mathbf{C}_i \\ \mathbf{D}_b &= \mathbf{C}_i^t(\mathbf{L}_H^{-1}\mathbf{L}_H^*)\mathbf{C}_b \end{aligned}$$

La matriz  $D_i$  tiene dimensiones  $n \times n_i$  y  $D_b$  tiene dimensiones de  $n \times n_b$ .

$$\mathbf{D}_i\mathbf{z}_i + \mathbf{D}_b\mathbf{z}_b - P\frac{1}{\zeta} = \mathbf{Dz} - P\frac{1}{\zeta} = 0$$

Despejando el vector de alturas de la ecuación el sistema a implementar queda como:

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{D}_i^{-1}(P\frac{1}{\zeta} - \mathbf{D}_b\mathbf{z}_b)$$



## Capítulo 4

# 3D

Este capítulo está dedicado a las geometrías programadas en tres dimensiones a través de la teoría de *Thrust Network Analysis*.

Para comenzar se muestran tres ejemplos asociados a la resolución lineal, haciendo referencia al bajo grado de discretización de la *Malla primal*.

Después se presenta el estudio asociado a geometrías reales como son el *Great Court* y el *Puente Striatus*, los cuales se han implementado mediante la resolución matricial.

### 4.1. Resolución Lineal

#### 4.1.1. Primera Cúpula

La primera cúpula propuesta presenta una planta rectangular de 2x2 metros discretizada en 5 puntos con un total de 4 secciones. Al ser una planta sencilla, se puede emplear el análisis simple.

- Se establecen como apoyos los puntos 2, 3, 4 y 5, haciendo referencia que su cota será cero, y por lo tanto su altura es conocida.
- Se establece una carga controlada por el usuario, en *Newtons*.

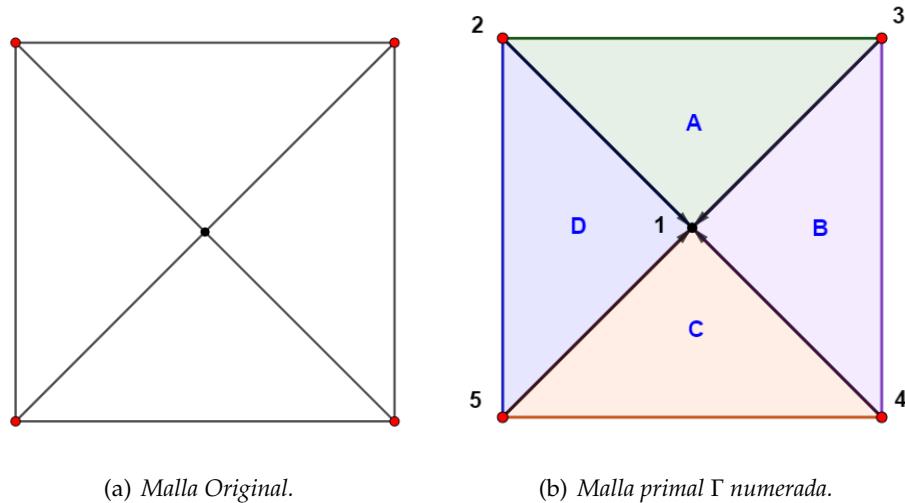


FIGURA 4.1: Geometría en planta del primer estudio. Nodos en rojo hacen referencia a la imposición de apoyo cuya cota estará definida en 0. Nodos en negro hacen referencia a los puntos dónde se va a evaluar la altura ya que es incógnita.

Una vez establecida la Malla primal  $\Gamma$ , se plantea el equilibrio vertical en el *nodo<sub>1</sub>*, en función de la carga establecida y las reacciones verticales en las ramas.

$$\text{Punto 1 : } F_{21}^V + F_{31}^V + F_{41}^V + F_{51}^V = P$$

Se reformula en el plano horizontal a través de la geometría de la planta para tener como incógnita  $z_1$ , la altura del punto interno. Para ello la geometría pasa a ser el objetivo de la resolución del problema, utilizando la proporcionalidad geométrica.

$$F_{ij}^V = \frac{F_{ij}^H \cdot (z_j - z_i)}{L_{ij}^H}$$

$$\text{Punto 1 : } F_{21}^H \cdot \frac{z_1 - z_2}{L_{21}^H} + F_{31}^H \cdot \frac{z_1 - z_3}{L_{31}^H} + F_{41}^H \cdot \frac{z_1 - z_4}{L_{41}^H} + F_{51}^H \cdot \frac{z_1 - z_5}{L_{51}^H} = P$$

Mediante  $L_{j1}$  se establecen las longitudes de las ramas en la malla primal.

$$\begin{aligned} L_{21}^H &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ L_{31}^H &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\ L_{41}^H &= \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} \\ L_{51}^H &= \sqrt{(x_1 - x_5)^2 + (y_1 - y_5)^2} \end{aligned}$$

Se construye la malla dual a través de la teoría recíproca enunciada por *Maxwell*:

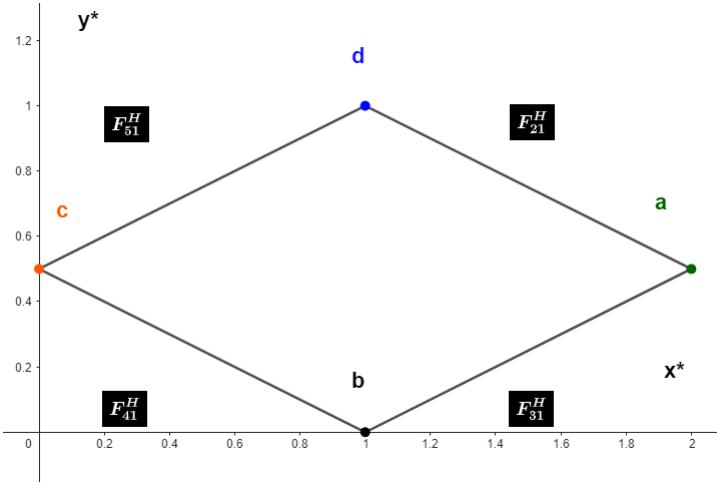


FIGURA 4.2: Malla dual  $\Gamma^*$

Ya que la malla primal y dual son recíprocas, las fuerzas en las ramas  $F_{ji}^H$  de la malla primal hacen referencia a las componentes horizontales de la solución de G, que a su vez equivalen a las longitudes de las ramas en la malla dual, multiplicadas por el factor desconocido  $\zeta$ .

$$F_{ji}^H = \zeta \cdot L_{ji}^{H*}$$

Dónde a su vez, las longitudes de las ramas en la malla dual son función de las posiciones de los nodos duales:

$$\begin{aligned} F_{21}^H &= L_{21}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_d^* - x_a^*)^2 + (y_d^* - y_a^*)^2} \\ F_{31}^H &= L_{31}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_a^* - x_b^*)^2 + (y_a^* - y_b^*)^2} \\ F_{41}^H &= L_{41}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_b^* - x_c^*)^2 + (y_b^* - y_c^*)^2} \\ F_{51}^H &= L_{51}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_c^* - x_d^*)^2 + (y_c^* - y_d^*)^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo el sistema de ecuaciones presentadas en el equilibrio inicial:

$$\frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_1 - z_2) + \frac{L_{31}^{H*}}{L_{31}^H} \cdot (z_1 - z_3) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} \cdot (z_1 - z_4) + \frac{L_{51}^{H*}}{L_{51}^H} \cdot (z_1 - z_5) = P \cdot \frac{1}{\zeta}$$

### Resolución Primera Cúpula

A continuación se resuelve estableciendo como condiciones:

- Factor de escala ( $\zeta$ ) de 5.
- Peso en el nodo 1 de 5 N.

Como se ha visto anteriormente, la ecuación que verifica el equilibrio estático del sistema es la siguiente:

$$\frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_1 - z_2) + \frac{L_{31}^{H*}}{L_{31}^H} \cdot (z_1 - z_3) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} \cdot (z_1 - z_4) + \frac{L_{51}^{H*}}{L_{51}^H} \cdot (z_1 - z_5) = P \cdot \frac{1}{\zeta}$$

Al imponer como apoyos los nodos 2, 3, 4 y 5, tienen cota cero y por lo tanto se pueden eliminar los factores  $z_i$ :

$$\frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_1 - z_2) + \frac{L_{31}^{H*}}{L_{31}^H} \cdot (z_1 - z_3) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} \cdot (z_1 - z_4) + \frac{L_{51}^{H*}}{L_{51}^H} \cdot (z_1 - z_5) = P \cdot \frac{1}{\zeta}$$

Con ello, podemos sacar factor común  $z_1$  y resolver:

$$z_1 = \frac{P}{\zeta} \cdot \left( \frac{L_{21}^H}{L_{21}^{H*}} + \frac{L_{31}^H}{L_{31}^{H*}} + \frac{L_{41}^H}{L_{41}^{H*}} + \frac{L_{51}^H}{L_{51}^{H*}} \right)$$

Para resolver la ecuación anterior, se utiliza la geometría definida tanto en la malla primal como dual.

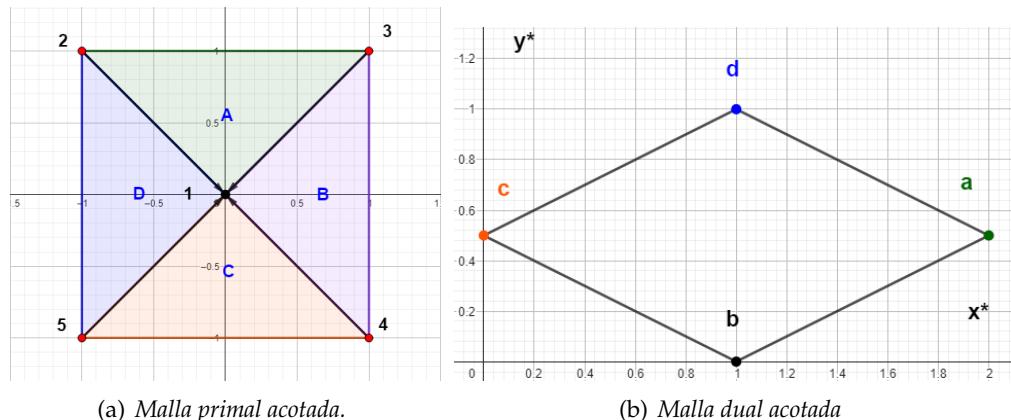


FIGURA 4.3: Geometría de ambas mallas para resolución del sistema de la Primera Cúpula.

Partimos de las longitudes de las ramas en la malla primal:

$$L_{21}^H = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (0 - 1)^2} = 1,41$$

$$L_{31}^H = \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 1)^2} = 1,41$$

$$L_{41}^H = \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - (-1))^2} = 1,41$$

$$L_{51}^H = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (0 - (-1))^2} = 1,41$$

Resolvemos las longitudes de la malla dual:

$$F_{21}^H = L_{21}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{1 - 2)^2 + (1 - 0,5)^2} = 1,12$$

$$F_{31}^H = L_{31}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{2 - 1)^2 + (0,5 - 0)^2} = 1,12$$

$$F_{41}^H = L_{41}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 0,5)^2} = 1,12$$

$$F_{51}^H = L_{51}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(0 - 1)^2 + (0,5 - 1)^2} = 1,12$$

Sustituyendo se determina la altura final del nodo 1:

$$z_1 = \frac{5}{5} \cdot \left( \frac{1,41}{1,12} + \frac{1,41}{1,12} + \frac{1,41}{1,12} + \frac{1,41}{1,12} \right) = 5,06 \quad [m]$$

### Interfaz Primera Cúpula

Dicho programación permanece en línea en *Geogebra*, dónde el usuario puede visualizar los resultados a través de la siguiente interfaz:

- En la primera ventana, el usuario puede visualizar la geometría en planta de la estructura. Además puede definir una gama de combinaciones en cuánto a las cargas nodales y el factor de escala  $\zeta$ .

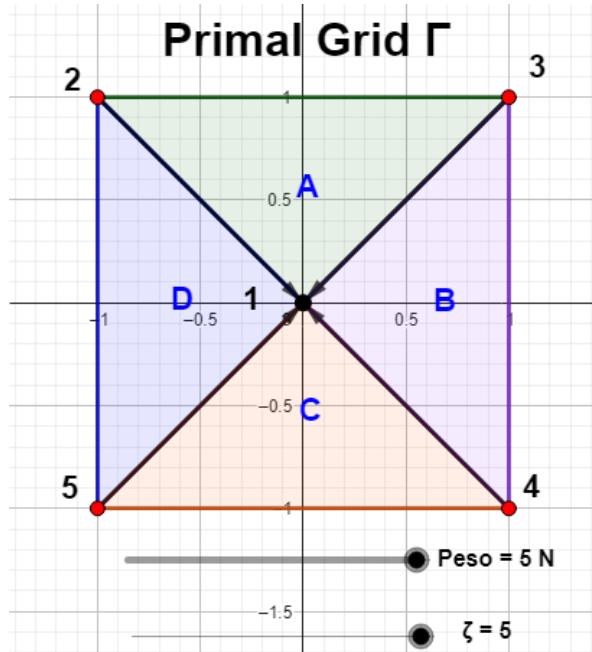


FIGURA 4.4: Visualización de la primera pantalla asociado a la Primera Cúpula.

- En la segunda ventana puede ver la *Malla dual  $\Gamma^*$*  asociada a la definición de la *Malla primal  $\Gamma$* .

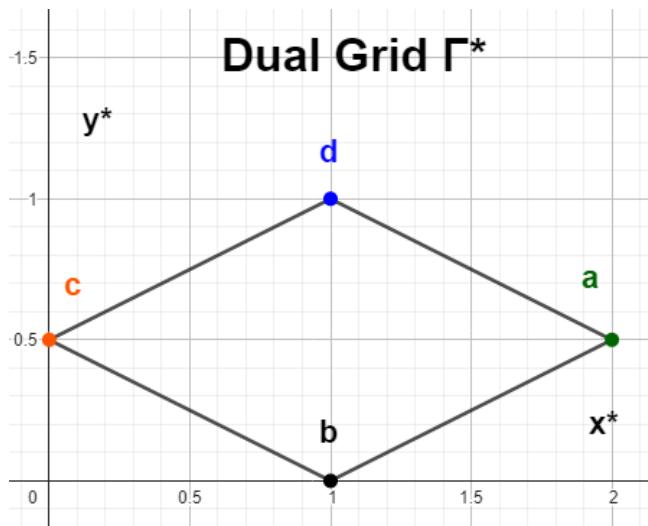


FIGURA 4.5: Visualización de la segunda pantalla asociado a la Primera Cúpula.

- En la tercera ventana puede ver el resultado asociado al equilibrio vertical en función de los parámetros definidos inicialmente.

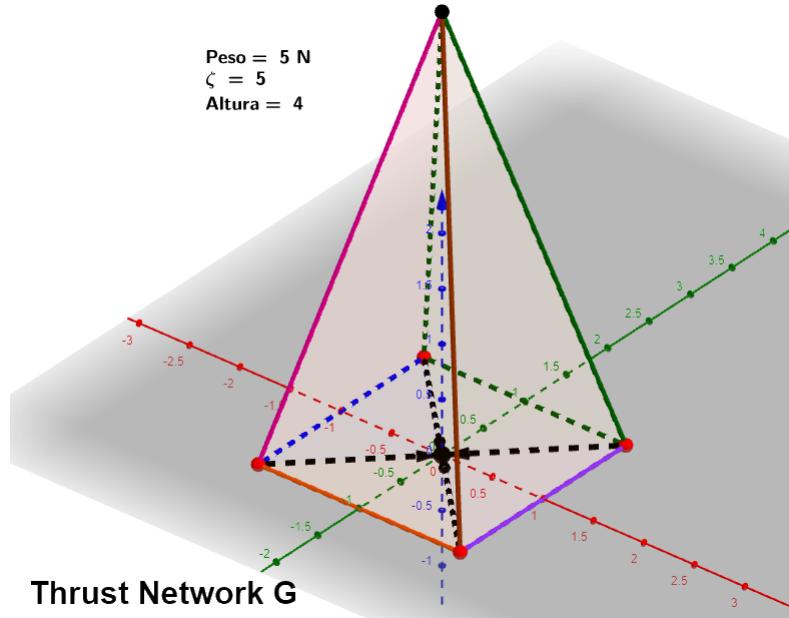


FIGURA 4.6: Visualización de la tercera pantalla asociado a la Primera Cúpula.

- Para una mejor comprensión de lo que es una estructura estilo cúpula, se añade la Figura 4.7, imagen de una sección transversal donde se pueda apreciar un arco y dentro de él la estructura en cuestión.

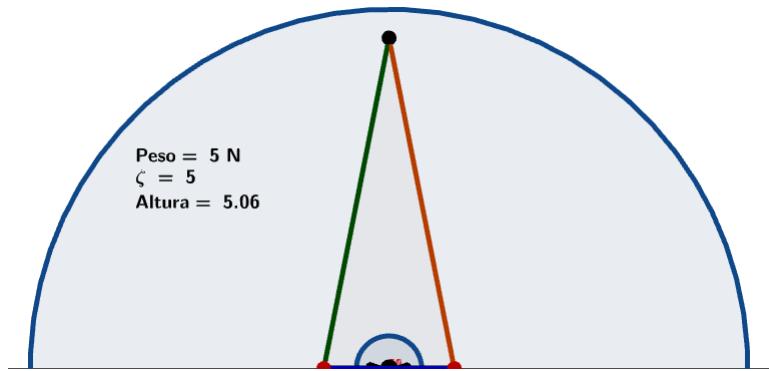


FIGURA 4.7: Sección transversal de la primera estructura dentro del arco.

### 4.1.2. Segunda Cúpula

La segunda cúpula propuesta presenta una planta rectangular de 10x10 metros discretizada en 8 puntos con un total de 5 secciones. Al ser una planta sencilla, nuevamente, se puede emplear el análisis simple.

El primer paso será numerar y nombrar a los puntos, los polígonos y las fuerzas siguiendo el criterio del método.

- Se establecen como apoyos los puntos 5, 6, 7 y 8, haciendo referencia que su cota será cero, y por lo tanto su altura es conocida.
- Se establece una carga controlada por el usuario, en *Newtons*.

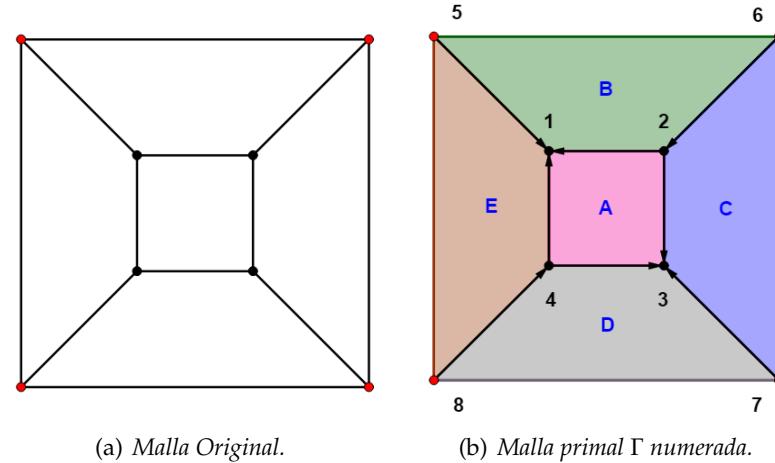


FIGURA 4.8: Geometría en planta del segundo estudio. Nodos en rojo hacen referencia a la imposición de apoyo cuya cota estará definida en 0. Nodos en negro hacen referencia a los puntos dónde se va a evaluar la altura ya que es incógnita.

Una vez establecida la Malla primal  $\Gamma$ , se plantea el equilibrio vertical en función de la numeración establecida.

$$\begin{aligned}
 \text{Punto 1 : } & F_{51}^V + F_{41}^V + F_{21}^V = P \\
 \text{Punto 2 : } & F_{62}^V + F_{21}^V + F_{32}^V = P \\
 \text{Punto 3 : } & F_{32}^V + F_{73}^V + F_{43}^V = P \\
 \text{Punto 4 : } & F_{43}^V + F_{84}^V + F_{41}^V = P
 \end{aligned}$$

Utilizando la proporcionalidad geométrica enfocamos el problema desde un punto geométrico:

$$F_{ij}^V = \frac{F_{ij}^H \cdot (z_j - z_i)}{L_{ij}^H}$$

$$\text{Punto 1 : } F_{21}^H \cdot \frac{z_1 - z_2}{L_{21}^H} + F_{51}^H \cdot \frac{z_1 - z_5}{L_{51}^H} + F_{41}^H \cdot \frac{z_1 - z_4}{L_{41}^H} = P$$

$$\text{Punto 2 : } F_{21}^H \cdot \frac{z_2 - z_1}{L_{21}^H} + F_{32}^H \cdot \frac{z_2 - z_3}{L_{32}^H} + F_{62}^H \cdot \frac{z_2 - z_6}{L_{62}^H} = P$$

$$\text{Punto 3 : } F_{32}^H \cdot \frac{z_3 - z_2}{L_{32}^H} + F_{73}^H \cdot \frac{z_3 - z_7}{L_{73}^H} + F_{43}^H \cdot \frac{z_3 - z_4}{L_{43}^H} = P$$

$$\text{Punto 4 : } F_{43}^H \cdot \frac{z_4 - z_3}{L_{43}^H} + F_{84}^H \cdot \frac{z_4 - z_8}{L_{84}^H} + F_{41}^H \cdot \frac{z_4 - z_1}{L_{41}^H} = P$$

Las longitudes de las ramas  $ij$  en la Malla primal  $\Gamma$  están definidas mediante  $L_{ji}^H$ .

$$L_{21}^H = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$L_{51}^H = \sqrt{(x_1 - x_5)^2 + (y_1 - y_5)^2}$$

$$L_{41}^H = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}$$

$$L_{62}^H = \sqrt{(x_2 - x_6)^2 + (y_2 - y_6)^2}$$

$$L_{32}^H = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

$$L_{73}^H = \sqrt{(x_3 - x_7)^2 + (y_3 - y_7)^2}$$

$$L_{43}^H = \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}$$

$$L_{84}^H = \sqrt{(x_4 - x_8)^2 + (y_4 - y_8)^2}$$

Se construye la malla dual a través de la teoría recíproca enunciada por *Maxwell*:

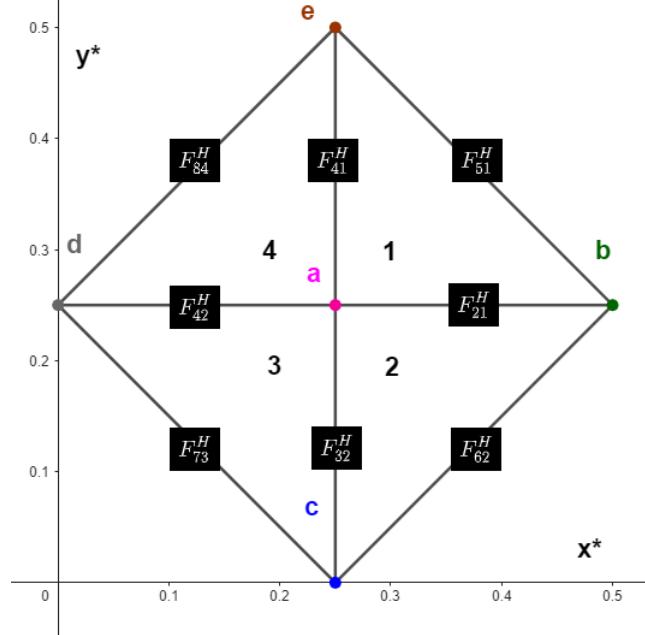


FIGURA 4.9: *Malla dual  $\Gamma^*$*

Sustituyendo por el teorema de la proporcionalidad se establecen las longitudes de las ramas duales, véase Figura 3.4:

$$\begin{aligned}
F_{21}^H &= L_{21}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_b^* - x_a^*)^2 + (y_b^* - y_a^*)^2} \\
F_{41}^H &= L_{41}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_a^* - x_e^*)^2 + (y_a^* - y_e^*)^2} \\
F_{51}^H &= L_{51}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_e^* - x_b^*)^2 + (y_e^* - y_b^*)^2} \\
F_{62}^H &= L_{62}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_b^* - x_c^*)^2 + (y_b^* - y_c^*)^2} \\
F_{32}^H &= L_{32}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_c^* - x_a^*)^2 + (y_c^* - y_a^*)^2} \\
F_{73}^H &= L_{73}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_d^* - x_c^*)^2 + (y_d^* - y_c^*)^2} \\
F_{42}^H &= L_{42}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_d^* - x_a^*)^2 + (y_d^* - y_a^*)^2} \\
F_{84}^H &= L_{84}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_d^* - x_e^*)^2 + (y_d^* - y_e^*)^2}
\end{aligned}$$

Finalmente, se presenta el sistema de cuatro ecuaciones que definen el problema propuesto:

$$\begin{aligned}
\frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_1 - z_2) + \frac{L_{51}^{H*}}{L_{51}^H} \cdot (z_1 - z_5) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} \cdot (z_1 - z_4) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\
\frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_2 - z_1) + \frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} \cdot (z_2 - z_3) + \frac{L_{62}^{H*}}{L_{62}^H} \cdot (z_2 - z_6) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\
\frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} \cdot (z_3 - z_2) + \frac{L_{73}^{H*}}{L_{73}^H} \cdot (z_3 - z_7) + \frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} \cdot (z_3 - z_4) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\
\frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} \cdot (z_4 - z_3) + \frac{L_{84}^{H*}}{L_{84}^H} \cdot (z_4 - z_8) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} \cdot (z_4 - z_1) &= P \cdot \frac{1}{\zeta}
\end{aligned}$$

### Resolución Segunda Cúpula

A continuación se resuelve estableciendo como condiciones:

- Factor de escala ( $\zeta$ ) de 4.
- Peso en los nodos 1, 2, 3 y 4, de 3 N.

El sistema a resolver viene dado por la siguientes 4 ecuaciones.

$$\begin{aligned} \frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_1 - z_2) + \frac{L_{51}^{H*}}{L_{51}^H} \cdot (z_1 - z_5) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} \cdot (z_1 - z_4) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_2 - z_1) + \frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} \cdot (z_2 - z_3) + \frac{L_{62}^{H*}}{L_{62}^H} \cdot (z_2 - z_6) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} \cdot (z_3 - z_2) + \frac{L_{73}^{H*}}{L_{73}^H} \cdot (z_3 - z_7) + \frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} \cdot (z_3 - z_4) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} \cdot (z_4 - z_3) + \frac{L_{84}^{H*}}{L_{84}^H} \cdot (z_4 - z_8) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} \cdot (z_4 - z_1) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \end{aligned}$$

Como anteriormente se ha comentado, los apoyos se definen por tener cota cero, y por lo tanto se eliminan alturas  $z_i$  en los nodos i que delimiten la geometría (5, 6, 7 y 8).

$$\begin{aligned} \frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_1 - z_2) + \frac{L_{51}^{H*}}{L_{51}^H} \cdot (z_1 - z_5) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} \cdot (z_1 - z_4) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_2 - z_1) + \frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} \cdot (z_2 - z_3) + \frac{L_{62}^{H*}}{L_{62}^H} \cdot (z_2 - z_6) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} \cdot (z_3 - z_2) + \frac{L_{73}^{H*}}{L_{73}^H} \cdot (z_3 - z_7) + \frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} \cdot (z_3 - z_4) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} \cdot (z_4 - z_3) + \frac{L_{84}^{H*}}{L_{84}^H} \cdot (z_4 - z_8) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} \cdot (z_4 - z_1) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación anterior, se utiliza la geometría definida tanto en la malla primal como dual.

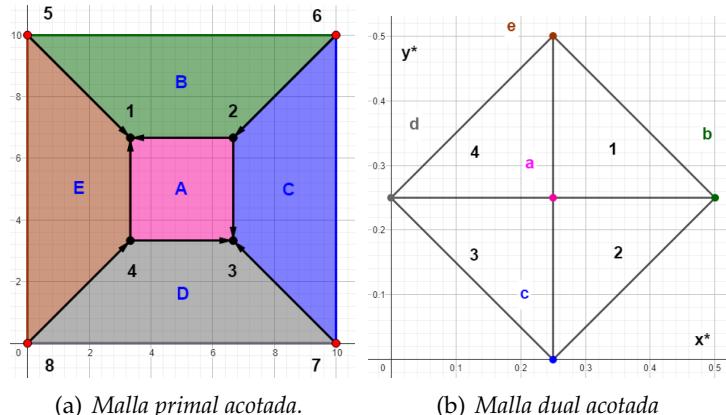


FIGURA 4.10: Geometría de ambas mallas para resolución del sistema de la Segunda Cúpula.

Partimos de las longitudes de las ramas en la malla primal:

$$\begin{aligned}
 L_{21}^H &= \sqrt{(3,33 - 6,67)^2 + (6,67 - 6,67)^2} = 3,33 \\
 L_{51}^H &= \sqrt{(3,33 - 0)^2 + (6,67 - 10)^2} = 4,71 \\
 L_{41}^H &= \sqrt{(3,33 - 3,33)^2 + (6,67 - 3,33)^2} = 3,33 \\
 L_{62}^H &= \sqrt{(6,67 - 10)^2 + (6,67 - 10)^2} = 4,71 \\
 L_{32}^H &= \sqrt{(6,67 - 6,67)^2 + (6,67 - 3,33)^2} = 3,33 \\
 L_{73}^H &= \sqrt{(6,67 - 10)^2 + (3,33 - 0)^2} = 4,71 \\
 L_{43}^H &= \sqrt{(6,67 - 3,33)^2 + (3,33 - 3,33)^2} = 3,33 \\
 L_{84}^H &= \sqrt{(3,33 - 0)^2 + (3,33 - 0)^2} = 4,71
 \end{aligned}$$

Resolvemos las longitudes de la malla dual:

$$\begin{aligned}
 F_{21}^H &= L_{21}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(0,5 - 0,25)^2 + (0,25 - 0,25)^2} = 0,25 \\
 F_{41}^H &= L_{41}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(0,25 - 0,25)^2 + (0,25 - 0,5)^2} = 0,25 \\
 F_{51}^H &= L_{51}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(0,25 - 0,5)^2 + (0,5 - 0,25)^2} = 0,35 \\
 F_{62}^H &= L_{62}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(0,5 - 0,25)^2 + (0,25 - 0)^2} = 0,35 \\
 F_{32}^H &= L_{32}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(0,25 - 0,25)^2 + (0 - 0,25)^2} = 0,25 \\
 F_{73}^H &= L_{73}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(0 - 0,25)^2 + (0,25 - 0)^2} = 0,35 \\
 F_{42}^H &= L_{42}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(0 - 0,25)^2 + (0,25 - 0,25)^2} = 0,25 \\
 F_{84}^H &= L_{84}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(0 - 0,25)^2 + (0,25 - 0,5)^2} = 0,35
 \end{aligned}$$

Sustituyendo, se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{array}{ll}
 z_1 = 10 \quad [m] & z_2 = 10 \quad [m] \\
 z_3 = 10 \quad [m] & z_4 = 10 \quad [m]
 \end{array}$$

Analizando los resultados, la estructura tiene la misma altura para los nodos interiores, ya que el problema es simétrico en referencia a la malla primal y dual.

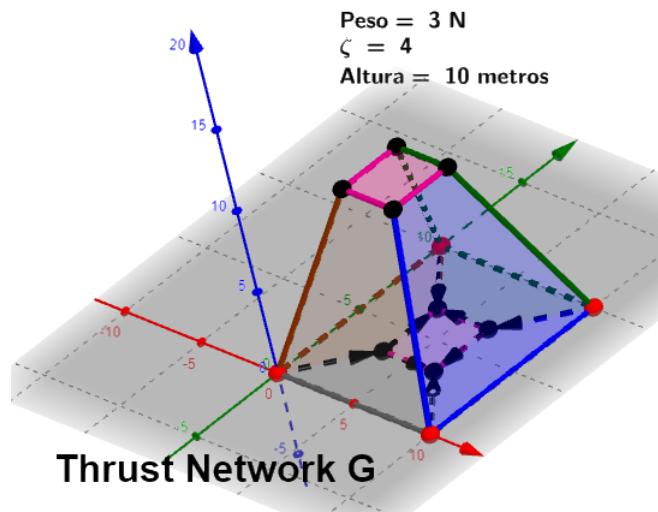


FIGURA 4.11: Visualización 3D de la resolución de la Segunda Cúpula.

### Interfaz Segunda Cúpula

Dicho programación permanece en línea en *Geogebra*, dónde el usuario puede visualizar los resultados a través de la siguiente interfaz:

- En la primera ventana, el usuario puede visualizar la geometría en planta de la estructura. Además puede definir una gama de combinaciones en cuánto a las cargas nodales y el factor de escala  $\zeta$ .

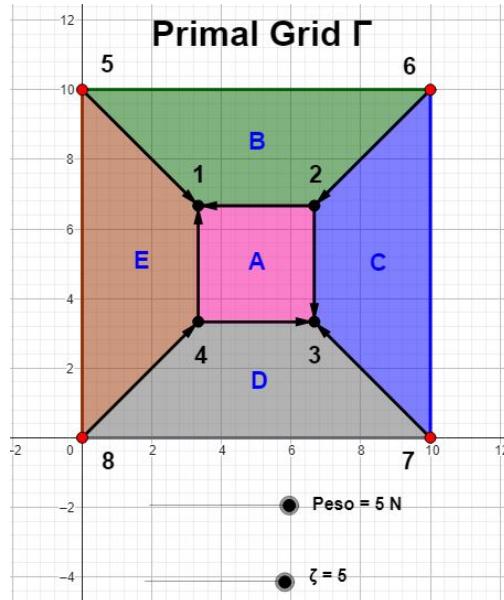


FIGURA 4.12: Visualización de la primera pantalla asociado a la Segunda Cúpula.

- En la segunda ventana se puede ver la Malla dual  $\Gamma^*$  asociada a la definición de la Malla primal  $\Gamma$ . Además está el botón de **ActualizarSolucion**.

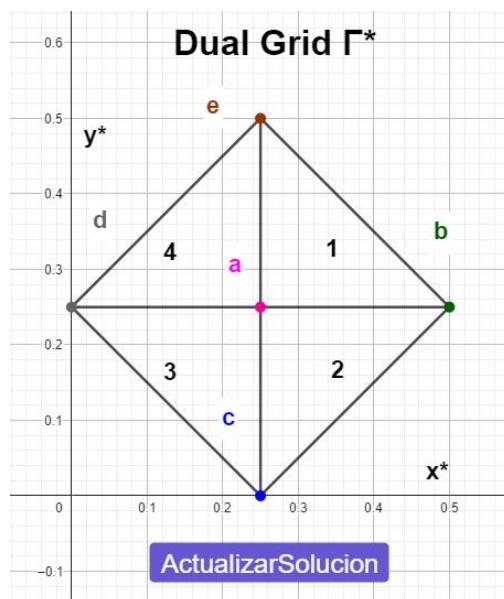


FIGURA 4.13: Visualización de la segunda pantalla asociado a la Segunda Cúpula.

- En la tercera ventana se puede ver el resultado asociado al equilibrio vertical en función de los parámetros definidos inicialmente.

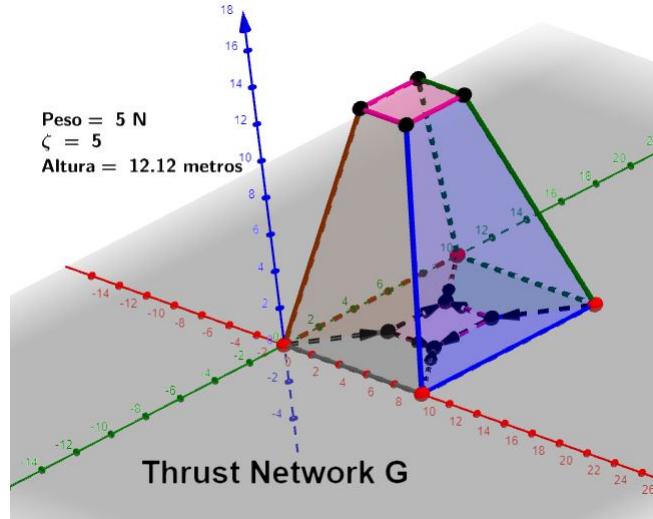


FIGURA 4.14: Visualización de la tercera pantalla asociado a la Segunda Cúpula.

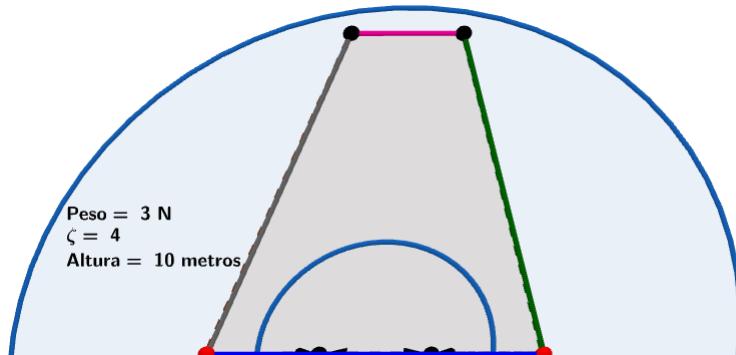


FIGURA 4.15: Sección transversal de la segunda estructura dentro del arco.

### 4.1.3. Tercera Cúpula

La tercera cúpula propuesta presenta una planta cuadrada de 8,4x8,4 metros discretizada en 16 puntos con un total de 11 secciones. Al ser una planta sencilla, nuevamente, se puede emplear el análisis simple.

El primer paso será numerar y nombrar a los puntos, los polígonos y las fuerzas siguiendo el criterio del método.

- Se establecen como apoyos los puntos 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16, su cota será cero, por lo tanto su altura es conocida.
- Se establece una carga controlada por el usuario, en *Newtons*.

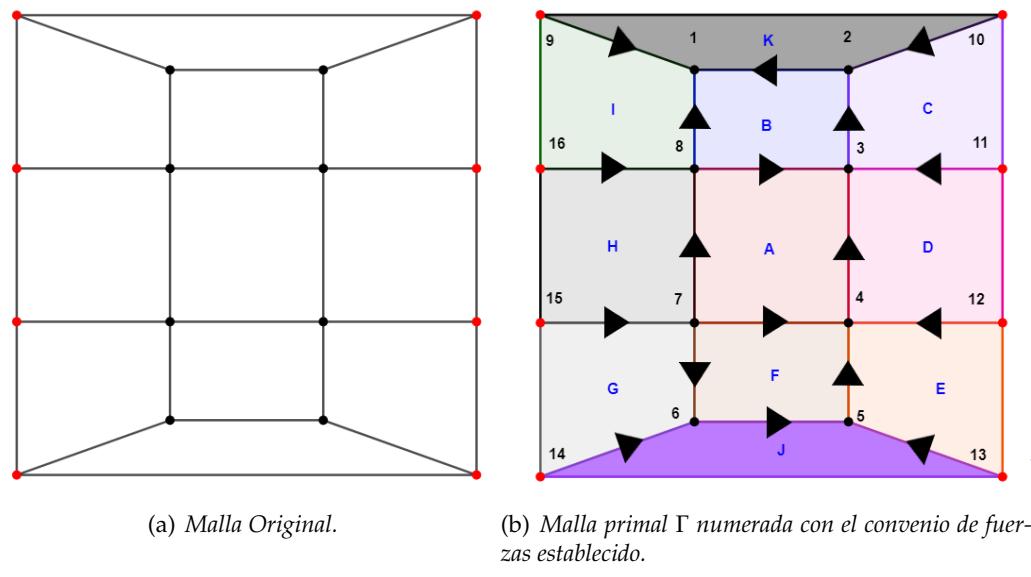


FIGURA 4.16: Geometría en planta del tercer estudio

Una vez establecida la *Malla primal*  $\Gamma$ , se plantea el equilibrio vertical en función de la numeración establecida.

$$\begin{aligned}
 \text{Punto 1 : } & F_{91}^V + F_{81}^V + F_{21}^V = P \\
 \text{Punto 2 : } & F_{21}^V + F_{10,2}^V + F_{32}^V = P \\
 \text{Punto 3 : } & F_{11,3}^V + F_{32}^V + F_{83}^V + F_{43}^V = P \\
 \text{Punto 4 : } & F_{43}^V + F_{12,4}^V + F_{54}^V + F_{74}^V = P \\
 \text{Punto 5 : } & F_{54}^V + F_{13,5}^V + F_{65}^V = P \\
 \text{Punto 6 : } & F_{65}^V + F_{14,6}^V + F_{76}^V = P \\
 \text{Punto 7 : } & F_{76}^V + F_{74}^V + F_{15,7}^V + F_{78}^V = P \\
 \text{Punto 8 : } & F_{78}^V + F_{83}^V + F_{81}^V + F_{16,8}^V = P
 \end{aligned}$$

Cómo en los casos precedidos, se utiliza la proporcionalidad geométrica:

$$F_{ij}^V = \frac{F_{ij}^H \cdot (z_j - z_i)}{L_{ji}^H}$$

$$\text{Punto 1 : } F_{91}^H \cdot \frac{z_1 - z_9}{L_{91}^H} + F_{81}^H \cdot \frac{z_1 - z_8}{L_{81}^H} + F_{21}^H \cdot \frac{z_1 - z_2}{L_{21}^H} = P$$

$$\text{Punto 2 : } F_{21}^H \cdot \frac{z_2 - z_1}{L_{21}^H} + F_{10,2}^H \cdot \frac{z_2 - z_{10}}{L_{10,2}^H} + F_{32}^H \cdot \frac{z_2 - z_3}{L_{32}^H} = P$$

$$\text{Punto 3 : } F_{11,3}^H \cdot \frac{z_3 - z_{11}}{L_{11,3}^H} + F_{32}^H \cdot \frac{z_3 - z_2}{L_{32}^H} + F_{83}^H \cdot \frac{z_3 - z_8}{L_{83}^H} + F_{43}^H \cdot \frac{z_3 - z_4}{L_{43}^H} = P$$

$$\text{Punto 4 : } F_{43}^H \cdot \frac{z_4 - z_3}{L_{43}^H} + F_{12,4}^H \cdot \frac{z_4 - z_{12}}{L_{12,4}^H} + F_{54}^H \cdot \frac{z_4 - z_5}{L_{54}^H} + F_{74}^H \cdot \frac{z_4 - z_7}{L_{74}^H} = P$$

$$\text{Punto 5 : } F_{54}^H \cdot \frac{z_4 - z_5}{L_{54}^H} + F_{13,5}^H \cdot \frac{z_5 - z_{13}}{L_{13,5}^H} + F_{65}^H \cdot \frac{z_5 - z_6}{L_{65}^H} = P$$

$$\text{Punto 6 : } F_{65}^H \cdot \frac{z_6 - z_5}{L_{65}^H} + F_{14,6}^H \cdot \frac{z_6 - z_{14}}{L_{14,6}^H} + F_{76}^H \cdot \frac{z_6 - z_7}{L_{76}^H} = P$$

$$\text{Punto 7 : } F_{76}^H \cdot \frac{z_7 - z_6}{L_{76}^H} + F_{74}^H \cdot \frac{z_7 - z_4}{L_{74}^H} + F_{15,7}^H \cdot \frac{z_7 - z_{15}}{L_{15,7}^H} + F_{78}^H \cdot \frac{z_7 - z_8}{L_{78}^H} = P$$

$$\text{Punto 8 : } F_{78}^H \cdot \frac{z_8 - z_7}{L_{78}^H} + F_{83}^H \cdot \frac{z_8 - z_3}{L_{83}^H} + F_{81}^H \cdot \frac{z_8 - z_1}{L_{81}^H} + F_{16,8}^H \cdot \frac{z_8 - z_{16}}{L_{16,8}^H} = P$$

Dónde la ramas primales  $L_{ji}^H$  vienen definidas por:

$$L_{21}^H = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$L_{81}^H = \sqrt{(x_1 - x_8)^2 + (y_1 - y_8)^2}$$

$$L_{32}^H = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

$$L_{83}^H = \sqrt{(x_3 - x_8)^2 + (y_3 - y_8)^2}$$

$$L_{12,4}^H = \sqrt{(x_4 - x_{12})^2 + (y_4 - y_{12})^2}$$

$$L_{74}^H = \sqrt{(x_4 - x_7)^2 + (y_4 - y_7)^2}$$

$$L_{65}^H = \sqrt{(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2}$$

$$L_{76}^H = \sqrt{(x_6 - x_7)^2 + (y_6 - y_7)^2}$$

$$L_{78}^H = \sqrt{(x_8 - x_7)^2 + (y_8 - y_7)^2}$$

$$L_{91}^H = \sqrt{(x_1 - x_9)^2 + (y_1 - y_9)^2}$$

$$L_{10,2}^H = \sqrt{(x_2 - x_{10})^2 + (y_2 - y_{10})^2}$$

$$L_{11,3}^H = \sqrt{(x_3 - x_{11})^2 + (y_3 - y_{11})^2}$$

$$L_{43}^H = \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}$$

$$L_{54}^H = \sqrt{(x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2}$$

$$L_{13,5}^H = \sqrt{(x_5 - x_{13})^2 + (y_5 - y_{13})^2}$$

$$L_{14,6}^H = \sqrt{(x_6 - x_{14})^2 + (y_6 - y_{14})^2}$$

$$L_{15,7}^H = \sqrt{(x_7 - x_{15})^2 + (y_7 - y_{15})^2}$$

$$L_{16,8}^H = \sqrt{(x_8 - x_{16})^2 + (y_8 - y_{16})^2}$$

Se plantea la malla dual a través de la teoría de reprociudad de ambas mallas:

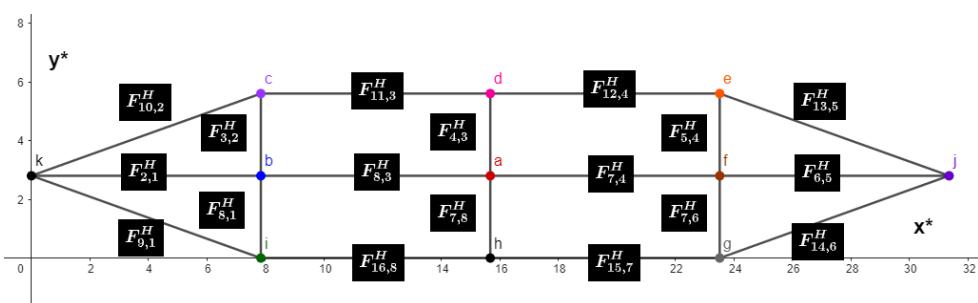


FIGURA 4.17: Malla dual  $\Gamma^*$

Se definen las longitudes de las ramas duales en función de la Figura 4.17.

$$\begin{aligned} F_{21}^H &= L_{21}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_b^* - x_k^*)^2 + (y_b^* - y_k^*)^2} \\ F_{81}^H &= L_{81}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_i^* - x_b^*)^2 + (y_i^* - y_b^*)^2} \\ F_{32}^H &= L_{32}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_b^* - x_c^*)^2 + (y_b^* - y_c^*)^2} \\ F_{83}^H &= L_{83}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_b^* - x_a^*)^2 + (y_b^* - y_a^*)^2} \\ F_{12,4}^H &= L_{12,4}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_e^* - x_d^*)^2 + (y_d^* - y_e^*)^2} \\ F_{74}^H &= L_{74}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_f^* - x_a^*)^2 + (y_f^* - y_a^*)^2} \\ F_{65}^H &= L_{65}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_j^* - x_f^*)^2 + (y_j^* - y_f^*)^2} \\ F_{76}^H &= L_{76}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_f^* - x_g^*)^2 + (y_f^* - y_g^*)^2} \\ F_{78}^H &= L_{78}^{H*} \cdot \zeta = \sqrt{(x_h^* - x_a^*)^2 + (y_h^* - y_a^*)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{91}^H \cdot \frac{1}{\zeta} &= L_{91}^{H*} = \sqrt{(x_i^* - x_k^*)^2 + (y_i^* - y_k^*)^2} \\ F_{10,2}^H \cdot \frac{1}{\zeta} &= L_{10,2}^{H*} = \sqrt{(x_c^* - x_k^*)^2 + (y_c^* - y_k^*)^2} \\ F_{11,3}^H \cdot \frac{1}{\zeta} &= L_{11,3}^{H*} = \sqrt{(x_d^* - x_c^*)^2 + (y_d^* - y_c^*)^2} \\ F_{43}^H \cdot \frac{1}{\zeta} &= L_{43}^{H*} = \sqrt{(x_a^* - x_d^*)^2 + (y_a^* - y_d^*)^2} \\ F_{54}^H \cdot \frac{1}{\zeta} &= L_{54}^{H*} = \sqrt{(x_e^* - x_f^*)^2 + (y_e^* - y_f^*)^2} \\ F_{13,5}^H \cdot \frac{1}{\zeta} &= L_{13,5}^{H*} = \sqrt{(x_e^* - x_j^*)^2 + (y_e^* - y_j^*)^2} \\ F_{14,6}^H \cdot \frac{1}{\zeta} &= L_{14,6}^{H*} = \sqrt{(x_j^* - x_g^*)^2 + (y_j^* - y_g^*)^2} \\ F_{15,7}^H \cdot \frac{1}{\zeta} &= L_{15,7}^{H*} = \sqrt{(x_g^* - x_h^*)^2 + (y_g^* - y_h^*)^2} \\ F_{16,8}^H \cdot \frac{1}{\zeta} &= L_{16,8}^{H*} = \sqrt{(x_h^* - x_i^*)^2 + (y_h^* - y_i^*)^2} \end{aligned}$$

Finalmente, se presenta el sistema de ocho ecuaciones que definen el problema propuesto:

$$\begin{aligned} \frac{L_{91}^{H*}}{L_{91}^H} \cdot (z_1 - z_9) + \frac{L_{81}^{H*}}{L_{81}^H} \cdot (z_1 - z_8) + \frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_1 - z_2) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_2 - z_1) + \frac{L_{10,2}^{H*}}{L_{10,2}^H} \cdot (z_2 - z_{10}) + \frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} \cdot (z_2 - z_3) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{11,3}^{H*}}{L_{11,3}^H} \cdot (z_3 - z_{11}) + \frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} \cdot (z_3 - z_2) + \frac{L_{83}^{H*}}{L_{83}^H} \cdot (z_3 - z_8) + \frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} \cdot (z_3 - z_4) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} \cdot (z_4 - z_3) + \frac{L_{12,4}^{H*}}{L_{12,4}^H} \cdot (z_4 - z_{12}) + \frac{L_{54}^{H*}}{L_{54}^H} \cdot (z_4 - z_5) + \frac{L_{74}^{H*}}{L_{74}^H} \cdot (z_4 - z_7) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{54}^{H*}}{L_{54}^H} \cdot (z_5 - z_4) + \frac{L_{13,5}^{H*}}{L_{13,5}^H} \cdot (z_5 - z_{13}) + \frac{L_{65}^{H*}}{L_{65}^H} \cdot (z_5 - z_6) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{65}^{H*}}{L_{65}^H} \cdot (z_6 - z_5) + \frac{L_{14,6}^{H*}}{L_{14,6}^H} \cdot (z_6 - z_{14}) + \frac{L_{76}^{H*}}{L_{76}^H} \cdot (z_6 - z_7) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{76}^{H*}}{L_{76}^H} \cdot (z_7 - z_6) + \frac{L_{74}^{H*}}{L_{74}^H} \cdot (z_7 - z_4) + \frac{L_{15,7}^{H*}}{L_{15,7}^H} \cdot (z_7 - z_{15}) + \frac{L_{78}^{H*}}{L_{78}^H} \cdot (z_7 - z_8) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{78}^{H*}}{L_{78}^H} \cdot (z_8 - z_7) + \frac{L_{83}^{H*}}{L_{83}^H} \cdot (z_8 - z_3) + \frac{L_{81}^{H*}}{L_{81}^H} \cdot (z_8 - z_1) + \frac{L_{16,8}^{H*}}{L_{16,8}^H} \cdot (z_8 - z_{16}) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \end{aligned}$$

### Resolución Tercera Cúpula

A continuación se resuelve estableciendo como condiciones:

- Factor de escala ( $\zeta$ ) de 1.
- Peso en los nodos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, de 9,5 N.
- Valor de  $A_Y = 1 [m]$

El sistema a resolver viene dado por la siguientes 8 ecuaciones. Resaltar que los apoyos (nodos 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16) tendrán cota igual a cero, pudiéndose eliminar los coeficientes  $z_b$  del sistema, quedando un sistema compatible determinado de 8 ecuaciones y ocho incógnitas.

$$\begin{aligned} \frac{L_{91}^{H*}}{L_{91}^H} \cdot (z_1 - z_9) + \frac{L_{81}^{H*}}{L_{81}^H} \cdot (z_1 - z_8) + \frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_1 - z_2) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} \cdot (z_2 - z_1) + \frac{L_{10,2}^{H*}}{L_{10,2}^H} \cdot (z_2 - z_{10}) + \frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} \cdot (z_2 - z_3) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{11,3}^{H*}}{L_{11,3}^H} \cdot (z_3 - z_{11}) + \frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} \cdot (z_3 - z_2) + \frac{L_{83}^{H*}}{L_{83}^H} \cdot (z_3 - z_8) + \frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} \cdot (z_3 - z_4) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} \cdot (z_4 - z_3) + \frac{L_{12,4}^{H*}}{L_{12,4}^H} \cdot (z_4 - z_{12}) + \frac{L_{54}^{H*}}{L_{54}^H} \cdot (z_4 - z_5) + \frac{L_{74}^{H*}}{L_{74}^H} \cdot (z_4 - z_7) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{54}^{H*}}{L_{54}^H} \cdot (z_5 - z_4) + \frac{L_{13,5}^{H*}}{L_{13,5}^H} \cdot (z_5 - z_{13}) + \frac{L_{65}^{H*}}{L_{65}^H} \cdot (z_5 - z_6) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{65}^{H*}}{L_{65}^H} \cdot (z_6 - z_5) + \frac{L_{14,6}^{H*}}{L_{14,6}^H} \cdot (z_6 - z_{14}) + \frac{L_{76}^{H*}}{L_{76}^H} \cdot (z_6 - z_7) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{76}^{H*}}{L_{76}^H} \cdot (z_7 - z_6) + \frac{L_{74}^{H*}}{L_{74}^H} \cdot (z_7 - z_4) + \frac{L_{15,7}^{H*}}{L_{15,7}^H} \cdot (z_7 - z_{15}) + \frac{L_{78}^{H*}}{L_{78}^H} \cdot (z_7 - z_8) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \\ \frac{L_{78}^{H*}}{L_{78}^H} \cdot (z_8 - z_7) + \frac{L_{83}^{H*}}{L_{83}^H} \cdot (z_8 - z_3) + \frac{L_{81}^{H*}}{L_{81}^H} \cdot (z_8 - z_1) + \frac{L_{16,8}^{H*}}{L_{16,8}^H} \cdot (z_8 - z_{16}) &= P \cdot \frac{1}{\zeta} \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación anterior, se utiliza la geometría definida tanto en la malla primal como dual.

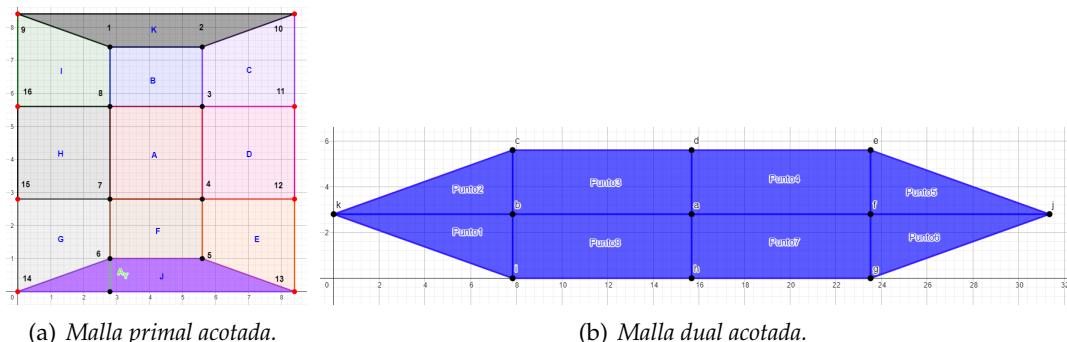


FIGURA 4.18: Geometría de ambas mallas para resolución del sistema de la Tercera Cúpula.

Partimos de las longitudes de las ramas en la malla primal:

$$\begin{aligned}
 L_{21}^H &= \sqrt{(2,8 - 5,6)^2 + (7,4 - 7,4)^2} = 2,8 & L_{91}^H &= \sqrt{(2,8 - 0)^2 + (7,4 - 8,4)^2} = 2,97 \\
 L_{81}^H &= \sqrt{(2,8 - 2,8)^2 + (7,4 - 5,6)^2} = 1,8 & L_{10,2}^H &= \sqrt{(5,6 - 8,4)^2 + (7,4 - 8,4)^2} = 2,97 \\
 L_{32}^H &= \sqrt{(5,6 - 5,6)^2 + (7,4 - 5,6)^2} = 1,8 & L_{11,3}^H &= \sqrt{(5,6 - 8,4)^2 + (5,6 - 5,6)^2} = 2,8 \\
 L_{83}^H &= \sqrt{(5,6 - 2,8)^2 + (5,6 - 5,6)^2} = 2,8 & L_{43}^H &= \sqrt{(5,6 - 5,6)^2 + (5,6 - 2,8)^2} = 2,8 \\
 L_{12,4}^H &= \sqrt{(5,6 - 8,4)^2 + (2,8 - 2,8)^2} = 2,8 & L_{54}^H &= \sqrt{(5,6 - 5,6)^2 + (2,8 - 1)^2} = 1,8 \\
 L_{74}^H &= \sqrt{(5,6 - 2,8)^2 + (2,8 - 2,8)^2} = 2,8 & L_{13,5}^H &= \sqrt{(5,6 - 8,4)^2 + (1 - 0)^2} = 2,97 \\
 L_{65}^H &= \sqrt{(5,6 - 2,8)^2 + (1 - 1)^2} = 2,8 & L_{14,6}^H &= \sqrt{(2,8 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = 2,97 \\
 L_{76}^H &= \sqrt{(2,8 - 2,8)^2 + (1 - 2,8)^2} = 1,8 & L_{15,7}^H &= \sqrt{(2,8 - 0)^2 + (2,8 - 2,8)^2} = 2,8 \\
 L_{78}^H &= \sqrt{(2,8 - 2,8)^2 + (5,6 - 2,8)^2} = 2,8 & L_{16,8}^H &= \sqrt{(2,8 - 0)^2 + (5,6 - 5,6)^2} = 2,8
 \end{aligned}$$

Resolvemos las longitudes de la malla dual:

$$\begin{aligned}
 F_{21}^H &= \sqrt{(7,84 - 0)^2 + (2,8 - 2,8)^2} = 7,84 & F_{91}^H &= \sqrt{(7,84 - 0)^2 + (0 - 2,8)^2} = 8,32 \\
 F_{81}^H &= \sqrt{(7,84 - 7,84)^2 + (0 - 2,8)^2} = 2,8 & F_{10,2}^H &= \sqrt{(7,84 - 0)^2 + (5,6 - 2,8)^2} = 8,32 \\
 F_{32}^H &= \sqrt{(7,84 - 7,84)^2 + (2,8 - 5,6)^2} = 2,8 & F_{11,3}^H &= \sqrt{(15,68 - 7,84)^2 + (5,6 - 5,6)^2} = 7,84 \\
 F_{83}^H &= \sqrt{(7,84 - 15,68)^2 + (2,8 - 2,8)^2} = 7,84 & F_{43}^H &= \sqrt{(15,68 - 15,68)^2 + (2,8 - 5,6)^2} = 2,8 \\
 F_{12,4}^H &= \sqrt{(15,68 - 23,52)^2 + (5,6 - 5,6)^2} = 7,84 & F_{54}^H &= \sqrt{(23,52 - 23,52)^2 + (5,6 - 2,8)^2} = 2,8 \\
 F_{74}^H &= \sqrt{(23,52 - 15,68)^2 + (2,8 - 2,8)^2} = 7,84 & F_{13,5}^H &= \sqrt{(23,52 - 31,36)^2 + (5,6 - 2,8)^2} = 8,32 \\
 F_{65}^H &= \sqrt{(31,36 - 23,52)^2 + (2,8 - 2,8)^2} = 7,84 & F_{14,6}^H &= \sqrt{(31,36 - 23,52)^2 + (2,8 - 0)^2} = 8,32 \\
 F_{76}^H &= \sqrt{(23,52 - 23,52)^2 + (2,8 - 0)^2} = 2,8 & F_{15,7}^H &= \sqrt{(23,52 - 15,68)^2 + (0 - 0)^2} = 7,84 \\
 F_{78}^H &= \sqrt{(15,68 - 15,68)^2 + (0 - 2,8)^2} = 2,8 & F_{16,8}^H &= \sqrt{(15,68 - 7,84)^2 + (0 - 0)^2} = 7,84
 \end{aligned}$$

Sustituyendo, se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{array}{ll}
 z_1 = 3,39 [m] & z_2 = 3,39 [m] \\
 z_3 = 3,39 [m] & z_4 = 3,39 [m] \\
 z_5 = 3,39 [m] & z_6 = 3,39 [m] \\
 z_7 = 3,39 [m] & z_8 = 3,39 [m]
 \end{array}$$

Analizando los resultados, la estructura tiene la misma altura para los nodos interiores, ya que el problema es simétrico en referencia a la malla primal y dual.

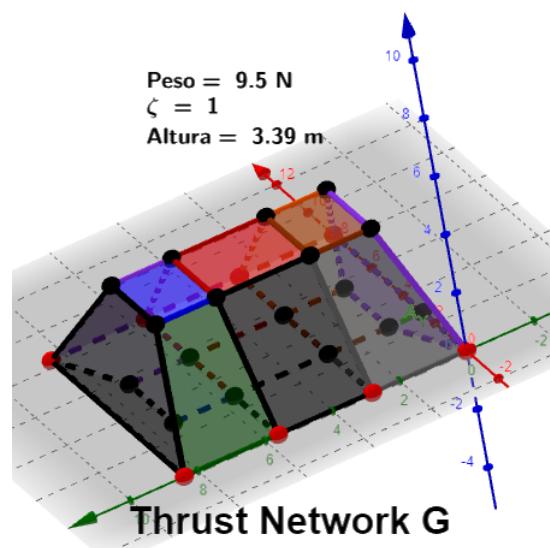


FIGURA 4.19: Visualización 3D de la resolución de la Tercera Cúpula.

### Interfaz Tercera Cúpula

Dicho programación permanece en línea en *Geogebra*, dónde el usuario puede visualizar los resultados a través de la siguiente interfaz:

- En la primera ventana, el usuario puede visualizar la geometría en planta de la estructura. Además puede definir una gama de combinaciones en cuánto a las cargas nodales y el factor de escala  $\zeta$ .

Cabe resaltar que se ha incluido un nuevo parámetro llamado  $A_y$ , permite variar las posiciones de los puntos 1, 2, 5 y 6 con el fin de ver la influencia que tiene las distintas geometrías en su *Malla dual* a través de la teoría de mallas recíprocas.

Por último aparece el botón **ActualizacionZ**, para lanzar el código cada vez que se establezcan diferentes combinaciones.

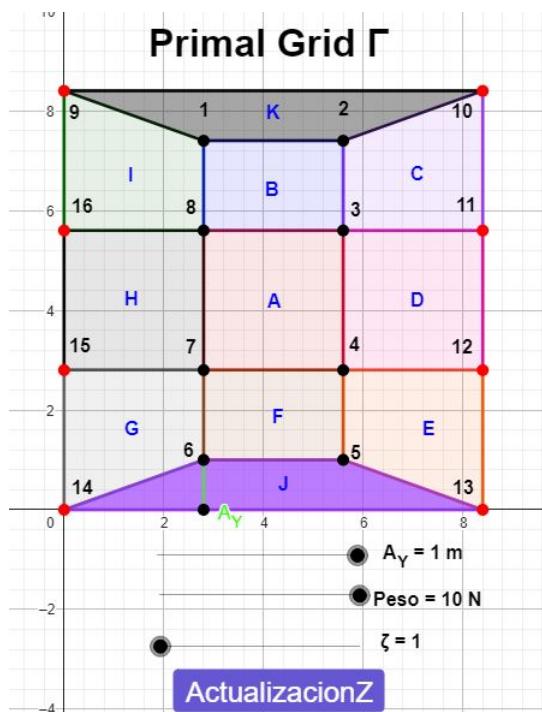


FIGURA 4.20: Visualización de la primera pantalla asociado a la Tercera Cúpula.

- En la segunda ventana se puede ver la *Malla dual*  $\Gamma^*$  asociada a la definición de la *Malla primal*  $\Gamma$ .

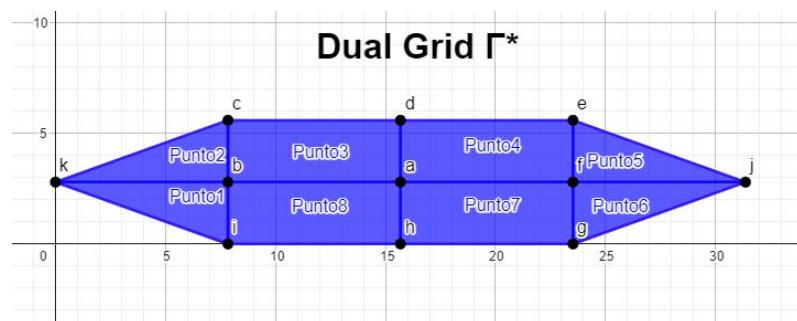


FIGURA 4.21: Visualización de la segunda pantalla asociado a la Tercera Cúpula.

- En la tercera ventana se puede ver el resultado asociado al equilibrio vertical en función de los parámetros definidos inicialmente.

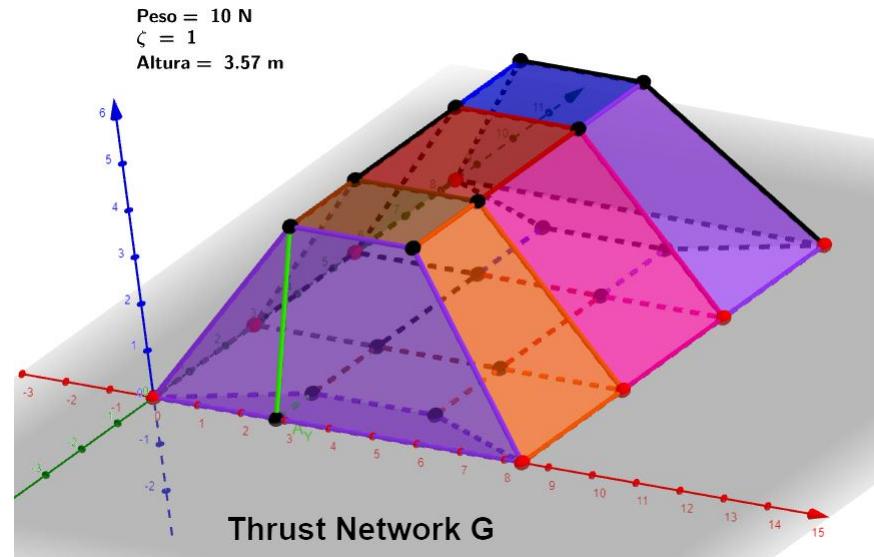


FIGURA 4.22: Visualización de la tercera pantalla asociado a la Tercera Cúpula.

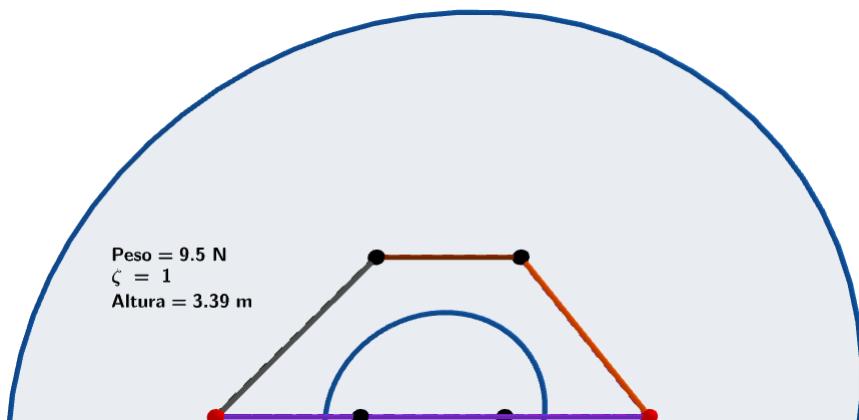


FIGURA 4.23: Sección transversal de la tercera estructura dentro del arco.

## 4.2. Resolución Matricial

### 4.2.1. Great Court

La primera propuesta como ejemplo realizado mediante la resolución matricial es el de la cubierta acristalada del Great Court en el British Museum de Londres, un área rectangular de  $73 \times 97$  metros que contiene una circunferencia de 44 metros de diámetro desplazada con un offset de 3 metros en el eje x que representa la “sala de lectura” o Reading Room. Los datos geométricos se han obtenido de un estudio sobre el desarrollo de la cúpula de J.K.Williams (2001).

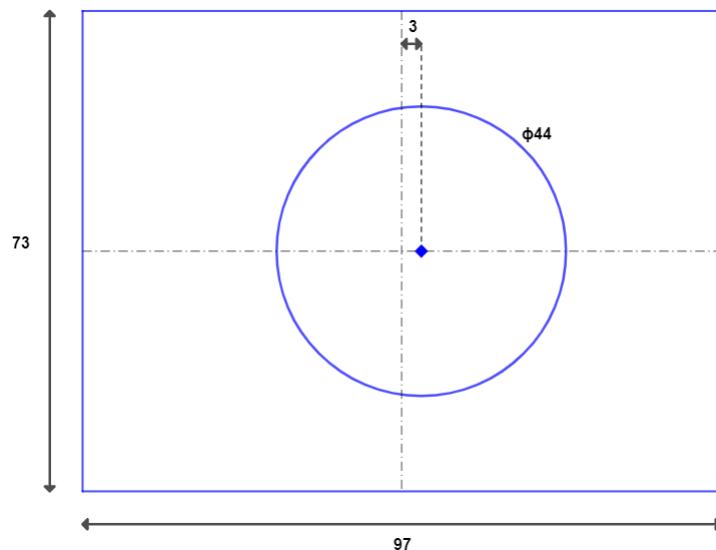


FIGURA 4.24: *Medidas en planta del Great Court.*

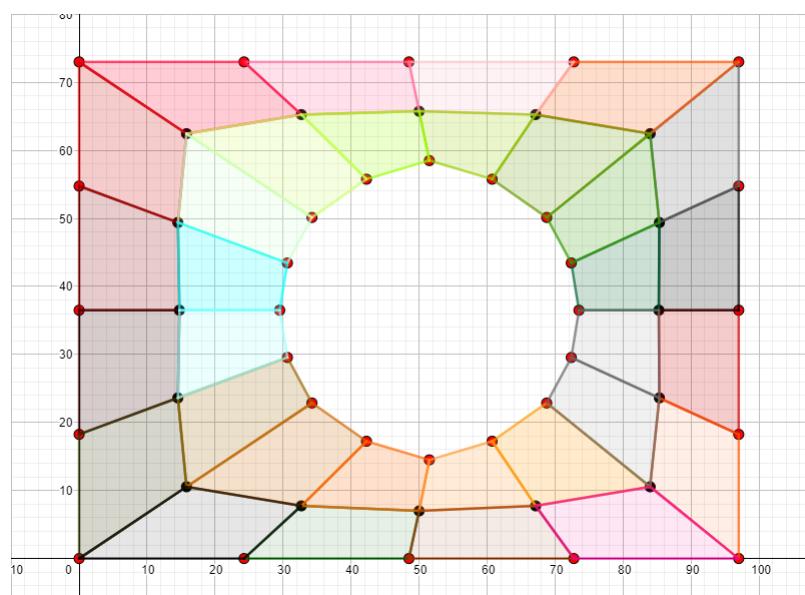


FIGURA 4.25: *Representación de la Malla primal  $\Gamma$  con su discretización final.*

La *Malla primal*  $\Gamma$  se compone de la siguiente información:

Thrust Network Analysis Great Court			
Puntos	48	Apoyos	32
		Puntos Interiores	16
Polígonos	32	Ramas	48

FIGURA 4.26: Información detallada sobre la discretización de la planta Great Court

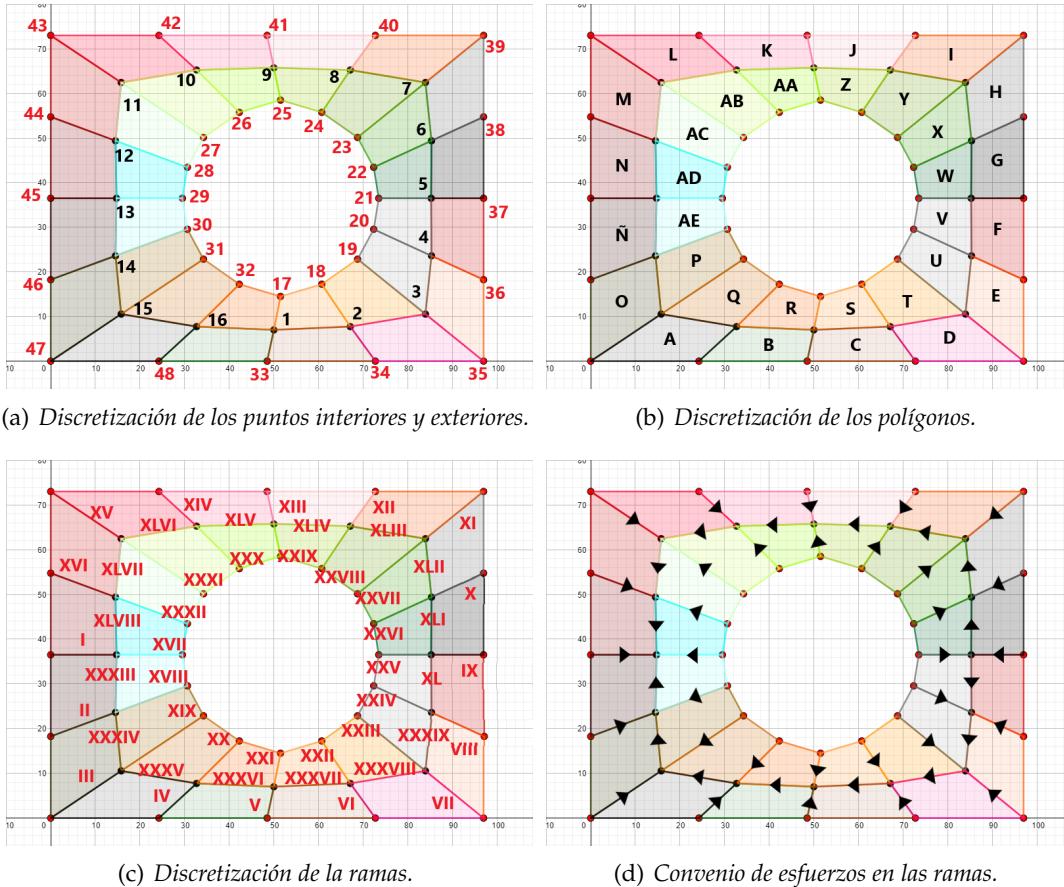


FIGURA 4.27: Información asociada a la caracterización completa de la *Malla primal*  $\Gamma$  del Great Court

Una vez definida la caracterización global de la *Malla primal*  $\Gamma$ , se dispone a realizar la matriz C de relaciones nodales.

Como se ha explicado en el Apartado 3.2.2, el procedimiento consiste en seguir el flujo de fuerzas propuesto, y completar la matriz con 1 si el punto representa la cabeza de la línea de fuerza, -1 si representa la cola de la línea de fuerza, ó 0 en el resto de los casos.

El siguiente paso es el desarrollo de la malla dual a partir de las ramas convergentes en cada punto orientadas en el sentido de las agujas del reloj las entrantes al nodo y en el opuesto las salientes.

Este proceso ha tenido una dificultad añadida para su realización debido a que las ramas son muy irregulares y los ángulos complejos, pero finalmente se ha llegado a una malla como la mostrada en la Figura 4.30.

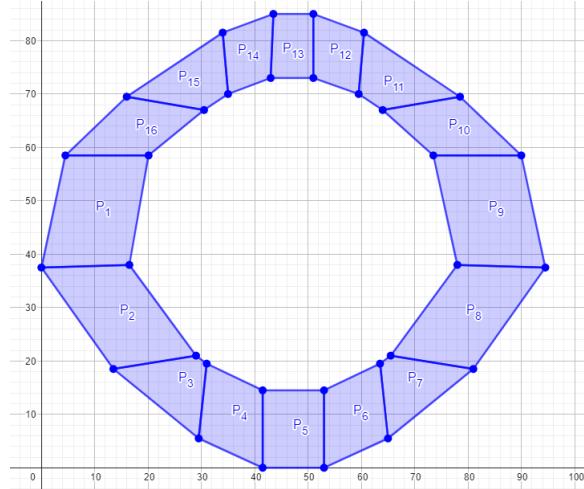
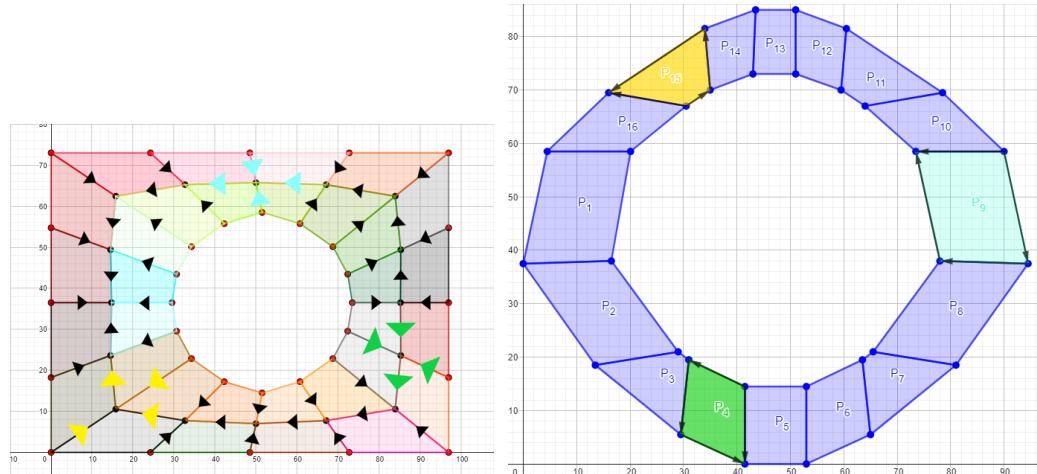


FIGURA 4.28: Malla dual  $\Gamma^*$  del Great Court.

A partir de esta malla se puede construir la matriz de relaciones del diagrama recíproco  $C^*$  de dimensiones  $m \times p$  siendo  $m$  el número de líneas de fuerza y  $p$  el número de polígonos de la malla original, que en la dual se han convertido en puntos.



(a) Convenio de Fuerzas en los nodos 4 (Verde) , 9 (Rojo) y 15 (Amarillo). (b) Polígonos duales asociados a los nodos 4 , 9 y 15. (Azul Celeste) y 15 (Amarillo).

FIGURA 4.29: Metodología para realizar el ensamblado de la Matriz  $C^*$ .

Tal y como se ha definido en la programación, se imponen como valores paramétricos tanto la carga asociada a cada nodo interior que será uniforme para todos, como el factor de escala  $\zeta$ , dando la oportunidad al usuario de componer diferentes soluciones de estructuras.

$$\mathbf{u} = \mathbf{Cx} = \mathbf{C_i}x_i + \mathbf{C_b}x_b$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Cy} = \mathbf{C_i}y_i + \mathbf{C_b}y_b$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{C}^*x^*$$

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{C}^*y^*$$

$$L_H = \sqrt{\mathbf{U}^t \mathbf{U} + \mathbf{V}^t \mathbf{V}}$$

$$L_H^* = \sqrt{\mathbf{U}^{t*} \mathbf{U}^* + \mathbf{V}^{t*} \mathbf{V}^*}$$

Cabe mencionar que dentro del programa *Geogebra* no existe ninguna función o librería para conseguir la diagonalización de los vectores  $u^*$  y  $v^*$ , por lo tanto se ha codificado a través de JavaScript.

Además tampoco permite hacer las raíces de matrices, por lo tanto se ha utilizado una mezcla entre secuencias de *Geogebra* y *JavaScript*.

Una vez realizado lo anterior, se calculan las longitudes de las ramas en ambos diagramas y se aplican la ecuación para la resolución del problema y poder definir las alturas de los nodos interiores.

$$D_i = C_i^t (L_H^{-1} L_H^*) C_i$$

$$D_b = C_b^t (L_H^{-1} L_H^*) C_b$$

$$z_i = D_i^{-1} \left( P \frac{1}{\zeta} - D_b z_b \right)$$

A continuación se resuelve estableciendo como condiciones:

- Factor de escala ( $\zeta$ ) de 50.
- Peso en el nodo interiores de 1000 N.

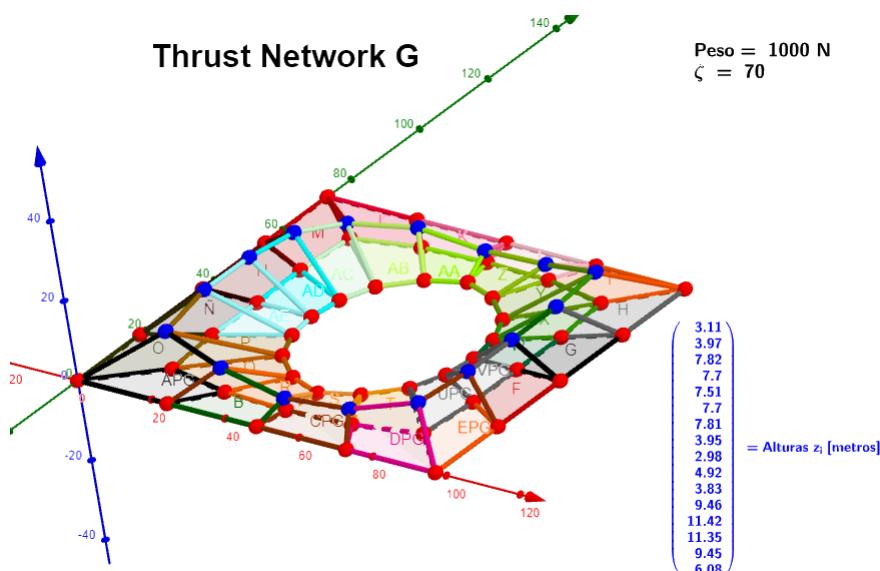


FIGURA 4.30: Resultados finales del Great Court.

### Interfaz Great Court

Como se ha comentado en apartados anteriores, la metodología del *Thrust Network Analysis* se divide principalmente en tres diagramas, *Malla primal  $\Gamma$* , *Malla dual  $\Gamma^*$*  y la *Malla Final G*. Por ello se ha establecido la interfaz en esas tres partes donde:

- En la primera ventana, el usuario puede ver la geometría en planta de la estructura, y definir las condiciones de contorno asociadas a las cargas nodales, y el factor de escala  $\zeta$ .

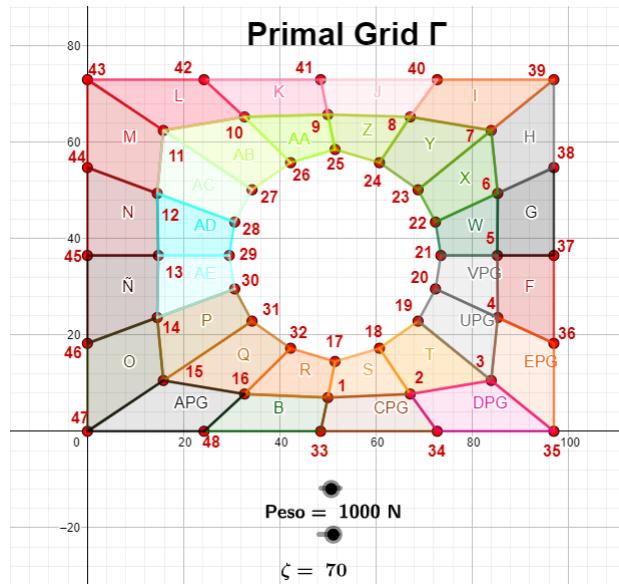


FIGURA 4.31: Visualización de la primera pantalla asociado al Great Court.

- En la segunda ventana podrá ver la *Malla dual  $\Gamma^*$*  asociada a la definición de la *Malla primal  $\Gamma$* .

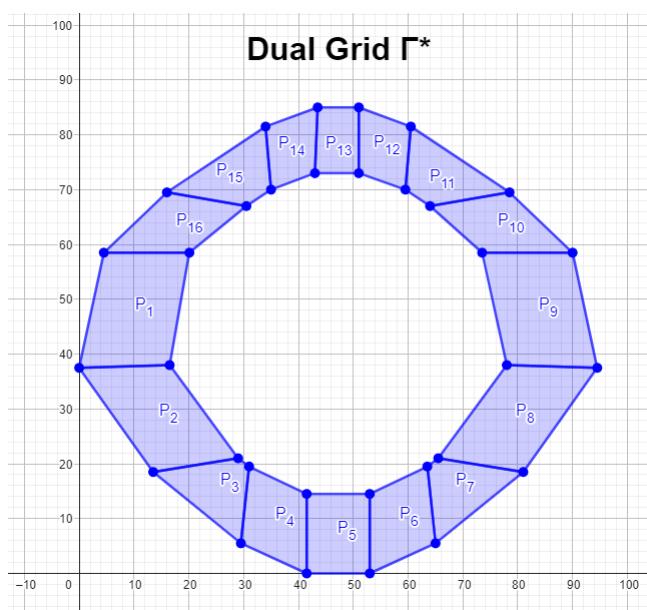


FIGURA 4.32: Visualización de la segunda pantalla asociada al Great Court.

- En la tercera ventana, podrá ver la solución final asociada a los condiciones de contorno impuestas, además de ver las alturas asociada a los nodos interiores ( $z_i$ ).

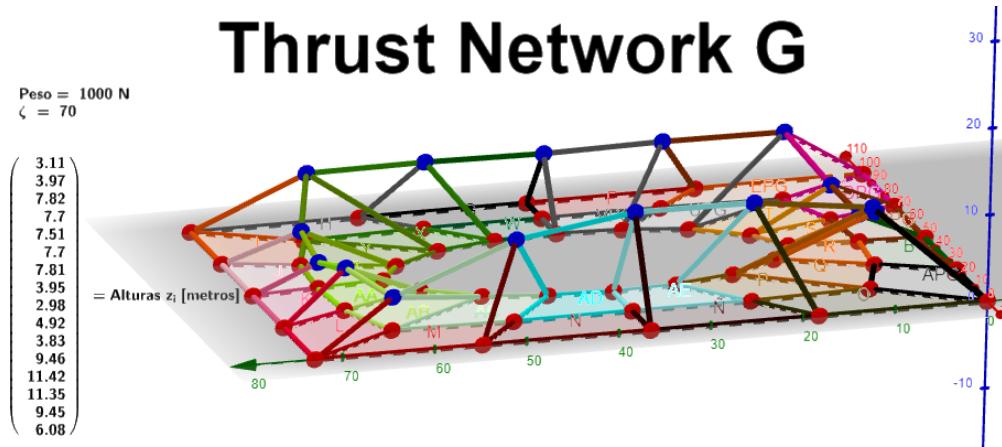


FIGURA 4.33: Visualización de la tercera pantalla asociado al Great Court.

Para más detalle entrar en el [Archivo de Geogebra Great Court](#).

#### 4.2.2. Puente Striatus

La segunda propuesta como ejemplo realizado mediante la resolución matricial es el *Puente Striatus* (véase Figura 4.34), realizado por *Block Research Group* y a la firma británica de arquitectura *Zaha Hadid Architects*.



FIGURA 4.34: *Puente Striatus*, primer puente arqueado de hormigón impreso 3D.



(a) Proceso de fabricación mediante impresión de hormigón 3D      (b) Proceso de ensamblaje 1



(c) Proceso de ensamblaje 2

FIGURA 4.35: Procesos para la construcción del Puente Striatus

Este grupo de investigación empleó dicha la teoría de redes de empujes para imponer restricciones de esfuerzos para minimizar los asociados a tracción y modelar diferentes geometrías obteniendo condiciones de compresión pura, véase 4.36.

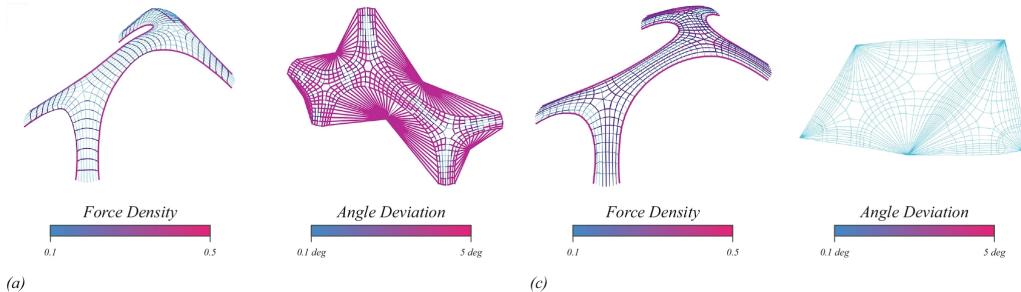
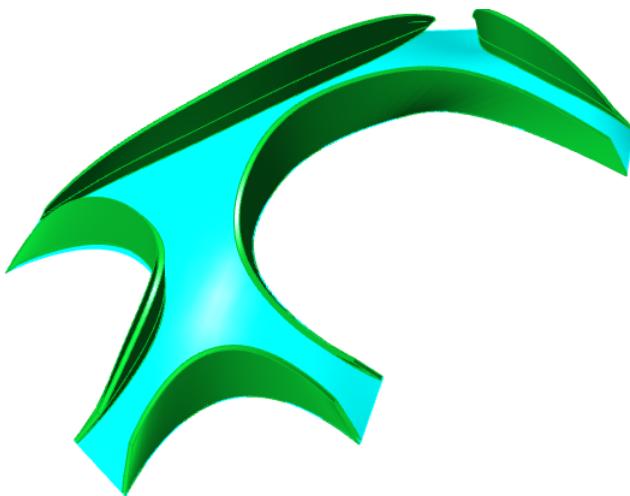


FIGURA 4.36: Solucionador iterativo para el análisis de red de empuje.(a) Iteración inicial. (b) Iteración final optimizada.[15]

Como antecedentes, dicho proyecto se abordó en el Trabajo Fin de Grado, mediante una optimización de esfuerzos a través de parametrización de alturas. [22]



Como el objetivo es encontrar una forma funicular óptima y que se pueda resolver sin aplicar el algoritmo de optimización para generar la malla dual, se propone una malla con elementos de cuatro barras.

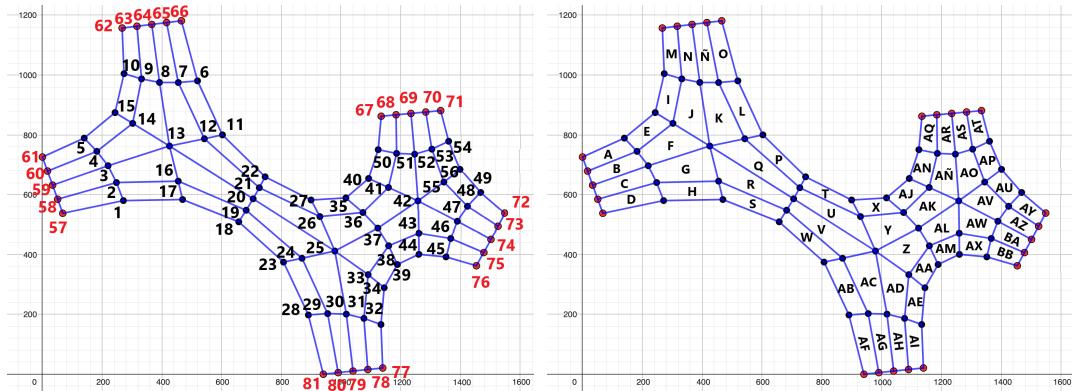
Ésta se extrae de la generación propuesta por el programa *RhinoVault*. El plugin de *Rhinoceros*, además de permitir trabajar con mallas propuestas por el usuario, también incluye un algoritmo de teselación que intenta cumplir los requisitos de máxima adaptabilidad a la superficie propuesta para maximizar la precisión independientemente de elementos de la malla y criterios de economicidad relacionados con la construcción de la estructura.

De ese proceso, se han obtenido las coordenadas para introducirlas en *Geogebra*. Dada la complejidad de la propuesta, este cálculo se va a realizar a través del procedimiento matricial.

La *Malla primal*  $\Gamma$  se compone de la siguiente información:

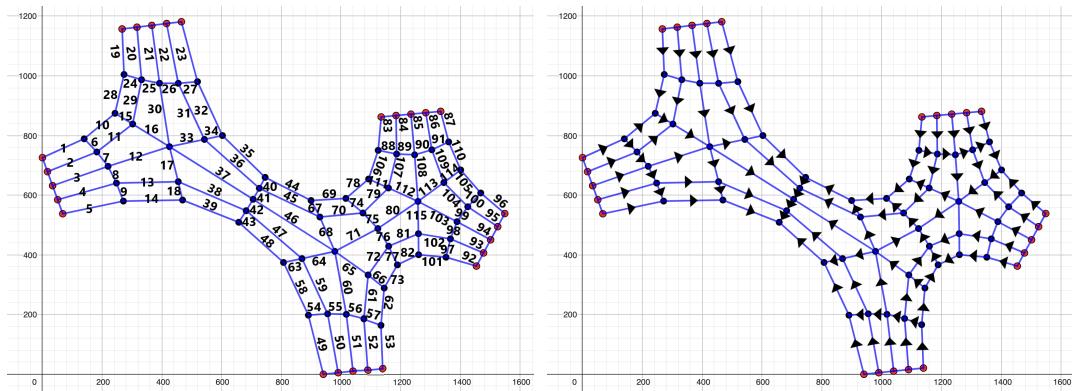
Thrust Network Analysis Puente Striatus			
Puntos	81	Apoyos	25
Polígonos	56	Puntos Interiores	56
Ramas			116

FIGURA 4.38: Información detallada sobre la discretización de la planta Puente Striatus



(a) Discretización de los puntos interiores y exteriores.

(b) Discretización de los polígonos.



(c) Discretización de la ramas.

(d) Convenio de esfuerzos en las ramas.

FIGURA 4.39: Información asociada a la caracterización completa de la Malla primal  $\Gamma$  del Puente Striatus

### Interfaz Puente Striatus

Dicho programación permanece en línea en *Geogebra*, donde el usuario puede visualizar los resultados a través de la siguiente interfaz:

- En la primera ventana, el usuario puede visualizar la geometría en planta de la estructura. Además puede definir una gama de combinaciones en cuánto a las cargas nodales y el factor de escala  $\zeta$ .

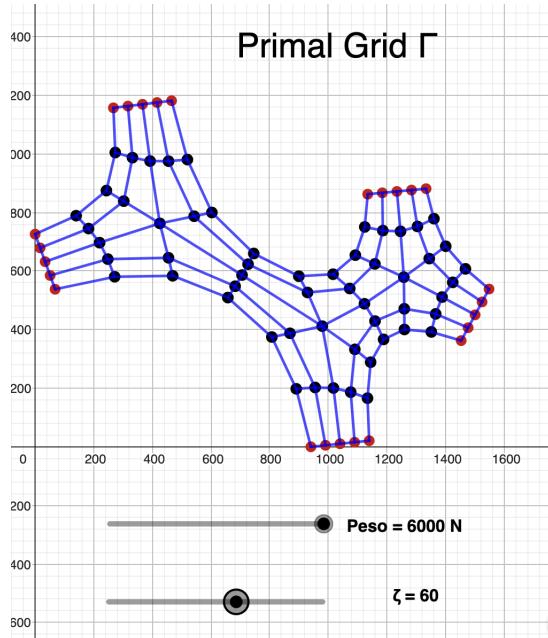


FIGURA 4.40: Visualización de la primera pantalla asociado a al Puente Striatus.

- En la segunda ventana se puede ver la *Malla dual*  $\Gamma^*$  asociada a la definición de la *Malla primal*  $\Gamma$ .

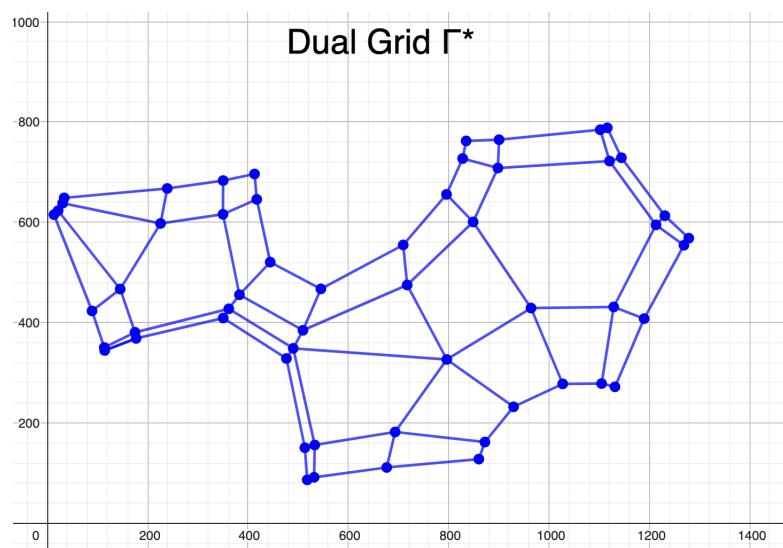


FIGURA 4.41: Visualización de la segunda pantalla asociado al Puente Striatus.

- En la tercera ventana se puede ver el resultado asociado al equilibrio vertical en función de los parámetros definidos inicialmente.

### Thrust Network G

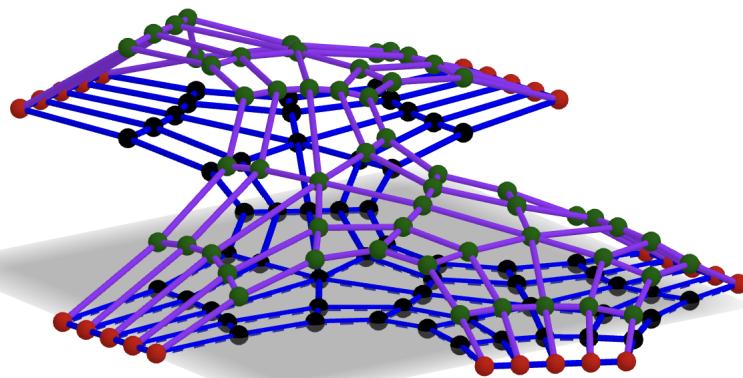


FIGURA 4.42: Visualización de la tercera pantalla asociado al Puente Striatus.

Para más detalle entrar en el [Archivo de Geogebra Puente Striatus](#).

## Capítulo 5

# Resumen

### 5.1. Conclusiones

A la vista de los resultados presentados en apartados anteriores se procede a exponer una serie de conclusiones.

- Este proyecto muestra cómo podemos utilizar un enfoque geométrico para encontrar formas estructurales eficientes. Además se han usado los principios de la estática gráfica mostrando su gran capacidad para resolver problemas bidimensionales y tridimensionales.
- Se ha demostrado que al implementar estos métodos en software modernos de modelado, permite crear herramientas para el diseño de estructuras de dos y tres dimensiones que satisfagan el equilibrio estático.
- El impacto de la programación de ejemplos relacionados con la estática gráfica en la enseñanza y el aprendizaje es significativo. Estos programas demuestran ser una herramienta eficaz para mejorar la comprensión de los conceptos de dicha teoría. Además la interactividad de la interfaz fomenta un enfoque activo dentro del aprendizaje.



## Apéndice A

# Rhinovault

El programa RhinoVAULT es una herramienta desarrollada por el Institute of Technology in Architecture de Zurich que surgió de una investigación gracias al descubrimiento de formas estructurales utilizando el enfoque del análisis de redes de Empuje (TNA) para crear y explorar estructuras de compresión únicamente.

Utilizando diagramas recíprocos, RhinoVAULT ofrece un método de implementación para resolver formas funiculares, adoptando las mismas ventajas de técnicas como la Estática Gráfica, pero ofreciendo una extensión viable a problemas tridimensionales completos.

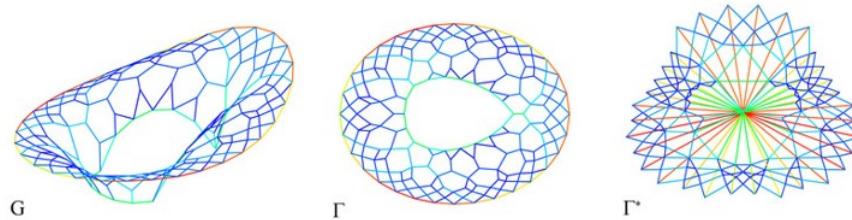


FIGURA A.1: Ejemplos en la Interfaz de RhinoVault

Con este programa se puede controlar directamente la forma de las mallas de manera interactiva para buscar una forma concreta y visualizar la solución funicular dada una altura de diseño.

## A.1. Metodología

### A.1.1. Creación de la malla

El primer paso que hay que realizar dentro de Rhinovault es definir la topología de la malla.

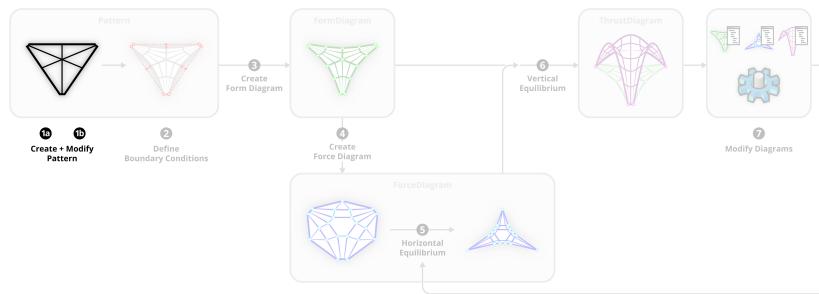


FIGURA A.2: Creación de la malla

Esta malla recoge la colección de vértices y líneas que compondrán la vista en planta de la funicular resultante. Con ello definimos como los esfuerzos van a viajar a través de la geometría para que la estructura trabaje a compresión pura.

Vamos a definir el siguiente ejemplo, una malla cuadrada de  $5 \times 5$  metros, dividido en 8 partes a lo largo de X e Y.

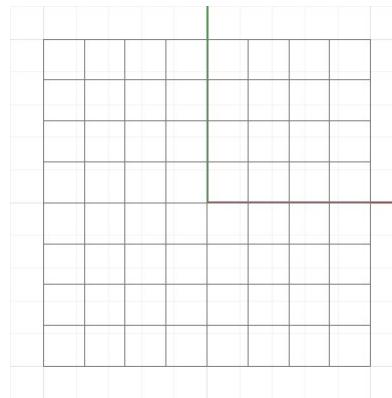


FIGURA A.3: Creación de la malla

Al pulsar el botón *Create Pattern*, se configuran los puntos de la *Malla Primal*. En este paso, no se define la distinción entre apoyo y punto de aplicación de carga, se verá en el siguiente apartado.

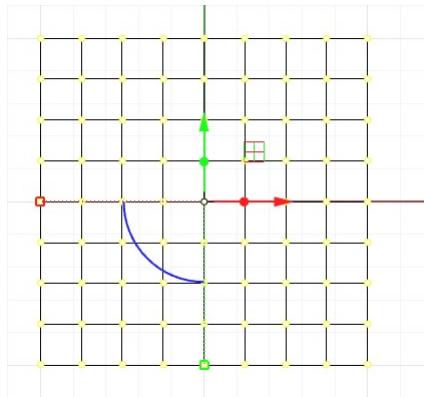


FIGURA A.4: Creación de la malla

### A.1.2. Definición de Condiciones de Contorno

Como se ha comentado en apartados anteriores, es necesario definir dos tipos de puntos asociados a la malla Primal:

- **Puntos interiores**, donde se aplican las cargas de peso propio.
- **Puntos exteriores**, o llamados boundary conditions, definen los apoyos de la estructura dónde descansan los esfuerzos.

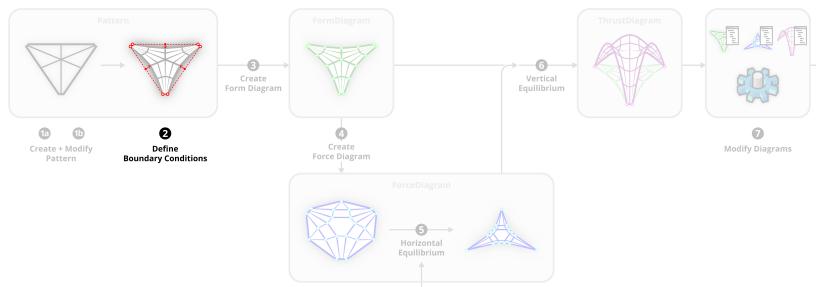
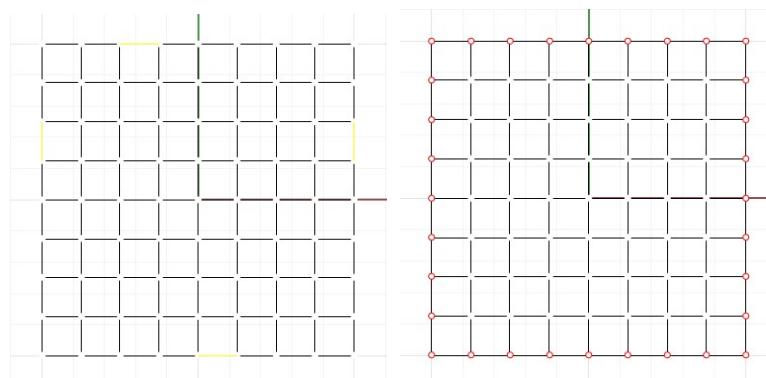


FIGURA A.5: Condiciones de Contorno

Definimos como apoyos los contornos de la geometría definida. A través de la opción *ByContinuousEdges* establecemos el perímetro total como apoyos.



(a) Opción *ByContinuousEdges*, color amarillo  
 (b) Imposición de puntos exteriores como apoyos de la estructura

### A.1.3. Diagrama de Forma

Una vez configurado las características principales de la *malla Primal*, se configura el Diagrama de Forma, donde se recoge dicha información y se transforma como una estructura de malla dentro de *RhinoVAULT*.

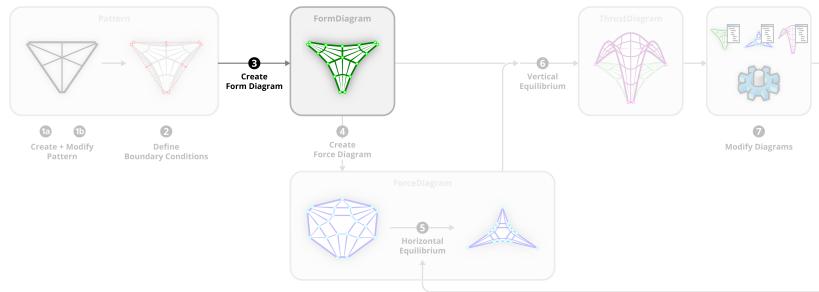


FIGURA A.6: Imponer el diagrama de Forma

Es importante resaltar que el programa dependiendo de como es la disposición de los vértices, en mallas cuadriculadas elimina los apoyos en las esquinas automáticamente.

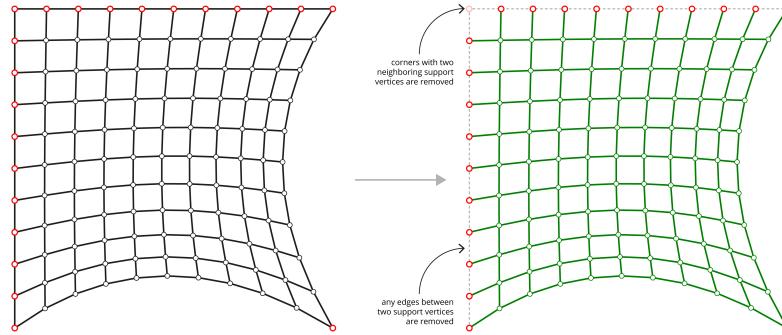


FIGURA A.7: Método Rhinovault en esquinas definidas como apoyos

En el ejemplo presentado, se corrobora la metodología aplicada por el método de *RhinoVAULT*.

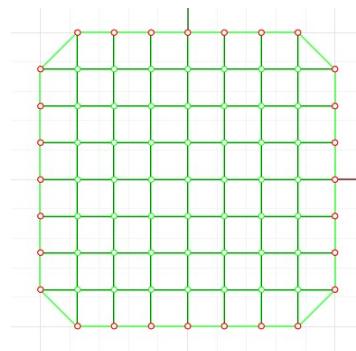


FIGURA A.8: Eliminación automática de las esquinas

### A.1.4. Diagrama de Fuerza

Una vez definida el Diagrama de Forma, se puede establecer el Diagrama de Fuerza.

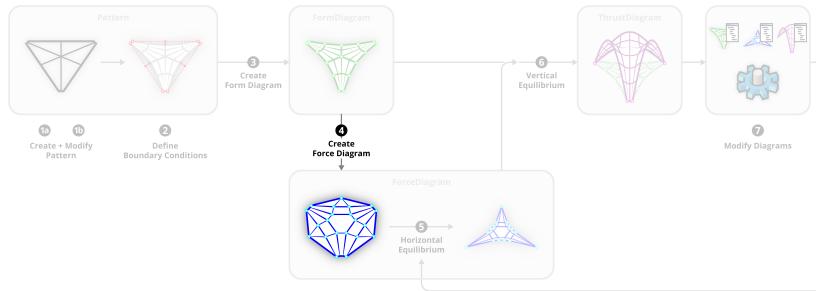


FIGURA A.9: Imponer el diagrama de Fuerza

Como se ha comentado en apartados anteriores, ambos diagramas son recíprocos, y por lo tanto a través de geometría se puede definir la *malla Dual* ya que ambos tienen el mismo número de contornos, dónde los vértices del Diagrama de Forma corresponden a un polígono cerrado en su Diagrama de Fuerza, y viceversa.

En primer lugar define un diagrama recíproco, con líneas perpendiculares al diagrama de Forma.

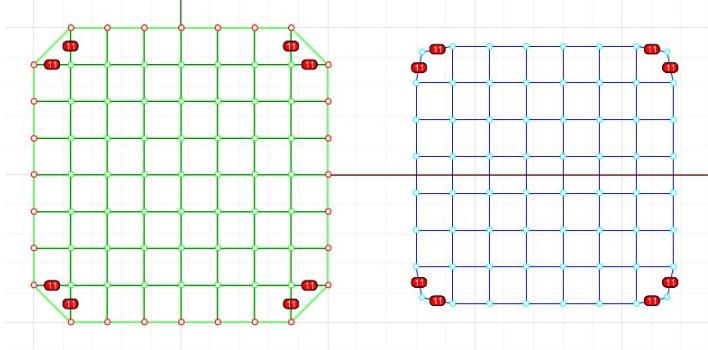


FIGURA A.10: Imponer el Equilibrio Horizontal a través de líneas perpendiculares.

Por último se define el equilibrio horizontal, con su diagrama Dual con rectas paralelas al diagrama de Forma.

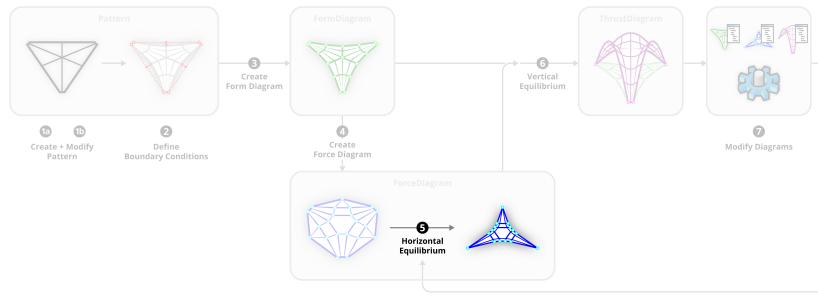


FIGURA A.11: Imponer el Equilibrio Horizontal

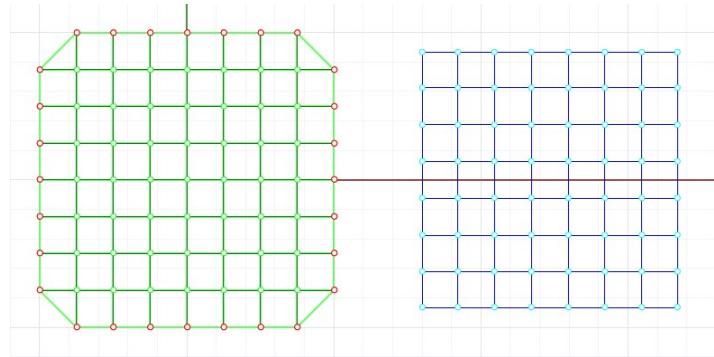


FIGURA A.12: Imponer el Equilibrio Horizontal a través de líneas paralelas.

### A.1.5. Equilibrio Vertical

Por último, se establece el equilibrio Vertical, dónde se define la altura máxima de la funicular (*TargetHeight*).

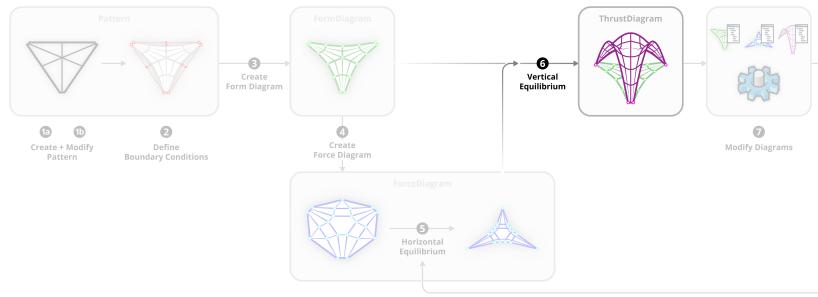


FIGURA A.13: Imponer el Equilibrio Vertical

Para el caso del ejemplo se ha configurado en una altura máxima de la funicular de 10 metros.

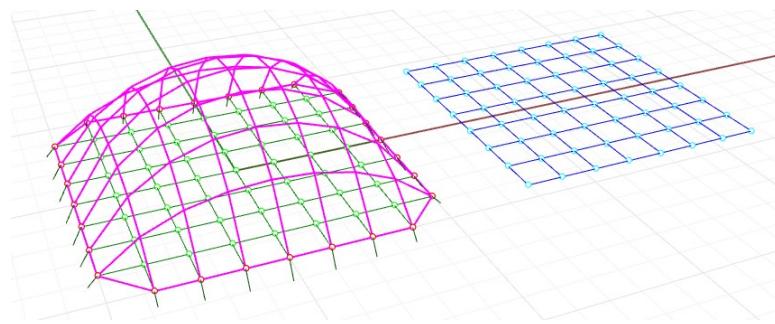


FIGURA A.14: Imposición del Equilibrio Vertical dada una altura máxima de la funicular de 10 metros.

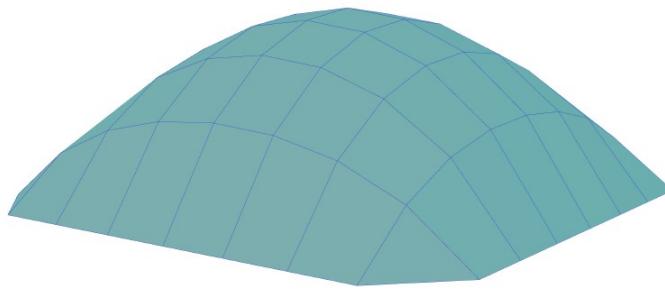


FIGURA A.15: Funicular Final que trabaja a compresión pura..

### A.1.6. Configuración de la Interfaz

Una vez realizado el análisis donde se ha resuelto tanto el equilibrio horizontal como vertical, el usuario puede interactuar con los tres diagramas para explorar diferentes diseños.

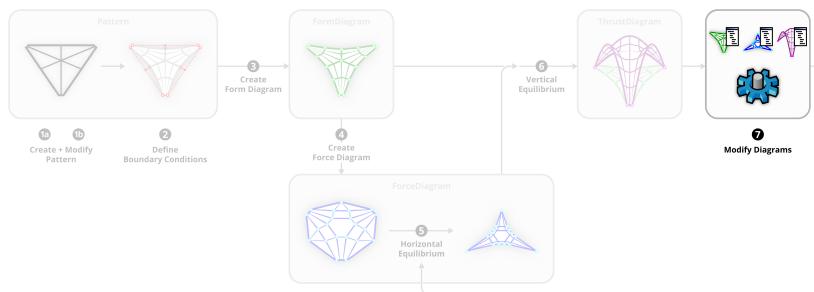


FIGURA A.16: Configuración de la interfaz



## Apéndice B

# Desarrollo de ejemplos en Rhinovault

### B.1. Puente Striatus

Como se ha mostrado anteriormente, el último ejemplo realizado fue objeto de estudio en el Trabajo Fin de Grado, para resolver la geometría se ha partido del plano en planta con escala en milímetros.

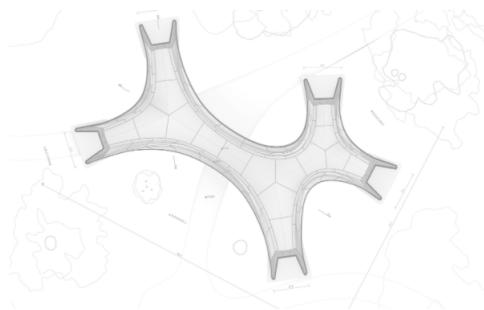


FIGURA B.1: Planta del Puente Striatus

Dentro de *Rhino 7*, se comienza dibujando el esqueleto que tiene dicha geometría. Este paso permite vincular dicha topología con *RhinoVAULT* para resolver una *malla Primal*.

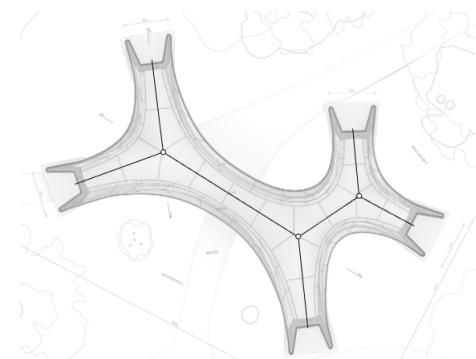


FIGURA B.2: Esqueleto del Puente Striatus

Al inicializar *RhinoVAULT*, creamos la malla a partir de la herramienta *Create Pattern*, y elegimos la opción de *FromSkeleton* pulsando el esqueleto anteriormente definido.

Definida la planta se imponen los apoyos una longitud de 2000 milímetros (véase Figura B.3).

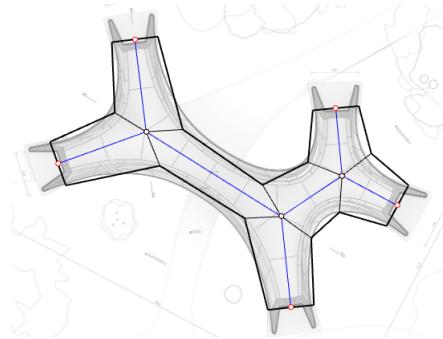


FIGURA B.3: Esqueleto discretizado del Puente Striatus

Elegimos la herramienta *Subdivide*, el algoritmo interno de *Rhinovault* discretiza en más puntos la geometría definida conservando las ramas iniciales.

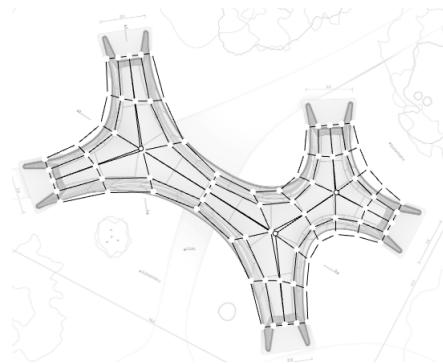


FIGURA B.4: Esqueleto final discretizado del Puente Striatus

A continuación se define

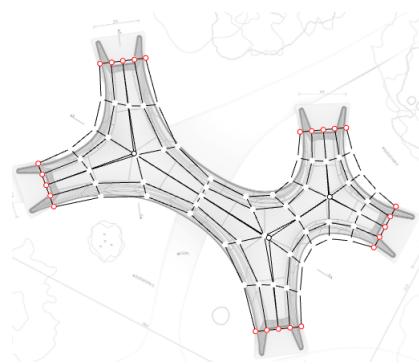


FIGURA B.5: Definición de Boundary Conditions, en rojo los apoyos de la estructura.

Finalmente, la discretización queda definida por las siguientes variables.

Thrust Network Analysis Puente Striatus			
Puntos	81	Apoyos	25
		Puntos Interiores	56
Polígonos	56	Ramas	116

FIGURA B.6: *Información detallada sobre la discretización de la planta Puente Striatus*



## Apéndice C

# Bibliografía

- [1] Jacques Heyman. *Estructuras de fábrica (Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica)*, Pág 121. 1995.
- [2] Jacques Heyman. *Estructuras de fábrica (Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica)*, Pág 4 y 9. 1995.
- [3] Jacques Heyman. *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica*, Pág 10. 1995.
- [4] Matthias Rippmann and Philippe Block. Funicular shell design exploration. In *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the ACADIA*, volume 27, pages 337–346. Riverside Architectural Press, Cambridge Ontario, 2013.
- [5] Pierre Varignon. *Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII*, volume 2. chez Claude Jombert, 1725.
- [6] Block Research Group. [Proyecto Armadillo Vault.](#)
- [7] Block Research Group. [Taller DigitalFUTURE, Tongji University.](#)
- [8] Robert Henry. *Economics of construction in relation to framed structures*, Pág 109. 1873.
- [9] Matthias Rippmann and Philippe Block. Funicular shell design exploration. In *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the ACADIA*, volume 27, pages 337–346. Riverside Architectural Press, Cambridge Ontario, 2013.
- [10] Block Research Group. [Puente de Bayonne.](#)
- [11] Jacques Heyman. *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica*, Pág 11. 1995.
- [12] Jacques Heyman. *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica*, Pág 77. 1995.
- [13] Matthias Rippmann, Lorenz Lachauer, and Philippe Block. Interactive vault design. *International Journal of Space Structures*, 27(4):219–230, 2012.
- [14] Philippe Camille Vincent Block. *Thrust network analysis: exploring three-dimensional equilibrium*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2009.
- [15] Block Resarch Group. *The Striatus Bridge. Computational design and robotic fabrication of an unreinforced, 3D-concrete-printed, masonry arch bridge*. 2022.
- [16] Robert Hooke. *A description of helioscopes and some other instruments*. Number 3. TR, 1974.

- [17] Lorenz Lachauer and Philippe Block. Interactive equilibrium modelling. *International Journal of Space Structures*, 29(1):25–37, 2014.
- [18] Block Research Group. [Proyecto KnitCandela](#).
- [19] Block Research Group. [Proyecto NEST HiLo roof](#).
- [20] Block Research Group. [Proyecto Striatus Bridge](#).
- [21] Block Research Group. [Proyecto KnitNervi](#).
- [22] Sergio Lorente. *Diseño de estructuras sostenibles mediante cálculo paramétrico y optimización de formas*. 2022.