

Funciones de Bessel



Lourdes Gómez Alberto
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Dirigido por: **Mario Pérez Riera**

27 de enero de 2024

Abstract

Bessel functions were first introduced by the German astronomer Friedrich Wilhelm Bessel (Minden, 1784 – Königsberg, 1846). His work on celestial mechanics, particularly on the determination of accurate paths for planets and other celestial bodies, led him to study various mathematical problems involving circular and cylindrical symmetry.

Bessel developed ‘Fourier series’ independently and by a different method in 1816, although Bessel series are a generalisation of Fourier’s. Later, when studying the motion of three bodies moving under mutual gravitation (for example, the Sun-Earth-Moon system), Bessel investigated properties of the functions

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nE - z \sin E) dE, \quad n \in \mathbb{Z},$$

where E is an important term in astronomy called *eccentric anomaly*, related to the angle swept by a celestial body moving in an elliptic orbit. In fact, this corresponds to the original definition of the Bessel function of the first kind. From here, it was easy to deduce the Bessel equation

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = 0.$$

Some particular cases had already been obtained about a century earlier by Daniel Bernoulli (1700–1782), Leonhard Euler (1707–1783), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) or Siméon Denis Poisson (1781–1840).

In 1817, Bessel published a seminal paper titled *Abhandlung über die functionen, welche durch die trigonometrischen reihen vorkommen*¹, which translates to *Treatise on the functions that occur through the trigonometric series*. With it, he introduced these special functions and showed their importance in different fields such as mathematics, physics and engineering through some immediate applications. Nowadays, they are used when studying wave propagation, fluid mechanics, quantum mechanics, nuclear physics or image processing, among others.

Moreover, on top of all of their applications, they are very interesting to study from a purely mathematical perspective in the branch of complex variable analysis. This will be the main focus of this project.

In the first chapter, *Bessel equation and Bessel functions*, we will define the Bessel equation and calculate its general solution in the form of a series expansion, using the Frobenius’ method. We will analyse some of its properties that we will need for later proofs, as well as describe other related functions, such as the *spherical Bessel functions*, *Bessel functions of the second kind*, *Hankel functions* and the *modified Bessel functions*.

Bessel functions were not originally defined in their series expansion, rather in their integral representation, as mentioned above. In the second chapter, *Integral representation and asymptotic estimations of Bessel functions*, we will provide such original definitions. This integral representation is of enormous importance in physical problems, since it allows us to analyse its asymptotic behaviour.

The purpose of the next chapter will be studying the zeroes of the Bessel functions. We can deduce from intuition that there are infinite values for which the function is cancelled, but we will prove it

¹Bessel, F. W. (1817). *Abhandlung über die functionen, welche durch die trigonometrischen reihen vorkommen*. *Astronomische Nachrichten*, 1, 41-84.

rigorously in 3.1. Due to the fact that there do not exist explicit formulae for calculating the zeroes of the Bessel functions, we will provide some results about their location. These properties will allow us to write our Bessel function as an infinite product.

Finally, in the last chapter we will mention Fourier series as an introduction to *Bessel series* (also called *Fourier-Bessel series*), which are a generalisation of the former. They are useful when studying the Laplacian in spherical and cylindrical coordinates.

Our main references for this project are the books [11] and [12] mentioned in the bibliography.

For this preamble we have extracted the information from [5], [7] and [10].

Índice general

Abstract	III
1. Ecuación de Bessel y funciones de Bessel	1
1.1. Las funciones de Bessel como solución de su ecuación diferencial	1
1.2. Soluciones como serie de potencias	1
1.3. Fórmulas de recurrencia	4
1.4. Otras clases de funciones de Bessel: esféricas, de segunda especie y funciones de Hankel	5
1.4.1. Funciones de Bessel esféricas	5
1.4.2. Funciones de Bessel de segunda especie	6
1.4.3. Funciones de Hankel	7
1.5. Funciones de Bessel modificadas	7
2. Representación integral y estimaciones asintóticas de las funciones de Bessel	9
2.1. Coeficientes de Bessel	9
2.2. Representación integral de las funciones de Bessel	10
2.3. Representación integral de las funciones de Hankel modificadas	11
2.4. Expansión asintótica de $K_\nu(z)$	13
2.5. Expansiones asintóticas de las funciones de Bessel	14
3. Ceros de funciones de Bessel	15
3.1. El teorema de Bessel-Lommel sobre los ceros de $J_\nu(z)$	15
3.2. Algunas propiedades	16
3.3. Ceros de otras funciones de Bessel	17
3.4. $J_\nu(z)$ como producto infinito	18
4. Series de Fourier-Bessel	21
4.1. Series de Fourier	21
4.2. Series de Fourier-Bessel	22
Bibliografía	25

Capítulo 1

Ecuación de Bessel y funciones de Bessel

Las funciones de Bessel, que son un ejemplo de funciones especiales, surgen como solución general de la ecuación de Bessel, pero aparecen además en otros contextos, como al estudiar el laplaciano en coordenadas polares y cilíndricas. De hecho, estas funciones fueron usadas por Bessel en el siglo XIX cuando estaba trabajando en problemas de astronomía. Además, tienen numerosas aplicaciones en la teoría de ecuaciones diferenciales, en física matemática y matemática aplicada. Las encontramos al estudiar la propagación de ondas, la mecánica de fluidos, mecánica cuántica, física nuclear o procesamiento de imágenes.

Pero no solo su aspecto aplicado es interesante, sino que se puede desarrollar mucha matemática pura a partir de ellas, especialmente dentro de la rama de la variable compleja. En este trabajo de fin de grado nos centramos en dicho aspecto teórico, haciendo una mezcla entre el desarrollo original realizado fundamentalmente por Bernoulli, Lommel y Bessel; así como desarrollos posteriores que simplifican los originales.

1.1. Las funciones de Bessel como solución de su ecuación diferencial

Definición (ecuación de Bessel de orden ν). La *ecuación diferencial de Bessel de orden ν* , con $\nu \in \mathbb{C}$ constante, viene dada por

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = 0. \quad (1.1)$$

Las funciones $w(z)$ que son solución de esta ecuación se denominan *funciones de Bessel*.

Nuestro primer objetivo será calcular dichas soluciones; así como representarlas como una serie de potencias (mediante el método de Frobenius). Hemos seguido en este capítulo las ideas y notación de [11, § 1].

1.2. Soluciones como serie de potencias

Sea $w(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{\alpha+r}$ una supuesta solución de (1.1), expresada como serie de potencias. Aquí y en lo que sigue entenderemos las potencias z^α como su valor principal ($z^\alpha = e^{\alpha \text{Log} z}$). Los coeficientes a_r son los denominados *coeficientes de Bessel* y el orden α tendremos que fijarlo según los diferentes casos que aparezcan. Sin perder generalidad podemos suponer que $a_0 \neq 0$. Calculando

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r (\alpha + r) z^{\alpha+r-1}, \\ \frac{d^2 w}{dz^2} &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r [(\alpha + r)^2 - \alpha - r] z^{\alpha+r-2}, \end{aligned}$$

sustituimos en (1.1) para llegar a

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} a_r [(\alpha + r)^2 - \alpha - r] z^{\alpha+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r (\alpha + r) z^{\alpha+r} + (z^2 - v^2) \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{\alpha+r} \\ = \sum_{r=0}^{\infty} [(\alpha + r)^2 - v^2] a_r z^{\alpha+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{\alpha+r+2} = 0. \end{aligned}$$

Ahora, igualamos los coeficientes de las potencias de z a cero, de donde obtenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} (\alpha^2 - v^2) a_0 = 0, \\ [(\alpha + 1)^2 - v^2] a_1 = 0, \\ [(\alpha + r)^2 - v^2] a_r + a_{r-2} = 0, \quad r \geq 2. \end{cases} \quad (1.2)$$

La primera condición implica que al menos uno de ambos factores será nulo, pero habíamos supuesto que $a_0 \neq 0$. Entonces, $\alpha = \pm v$ y dividiremos el estudio según el valor de α (respectivamente, de v).

Tomemos primero el caso $\alpha = v$. La segunda y tercera condición se reducen a:

$$\begin{cases} (2v + 1) a_1 = 0, \\ r(2v + r) a_r + a_{r-2} = 0, \quad \text{para } r \geq 2. \end{cases} \quad (1.3)$$

Vemos que los valores de a_r para $r \geq 2$ siempre dependen de a_0 (si r es par) o de a_1 (si r es impar), debido a la recursividad de la segunda fórmula, salvo en el caso en que $2v$ sea un entero negativo. Descartando de momento esta situación, es claro que entonces $a_1 = 0$ y por tanto, todos los a_{2r-1} son nulos también. Es decir, hemos obtenido que

$$w(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} z^{v+2r}. \quad (1.4)$$

Por otro lado, tomando índice $r \mapsto 2r$ y despejando de la segunda fórmula, tenemos $a_{2r} = -\frac{a_{2r-2}}{4r(v+r)}$, hemos llegado a una fórmula recurrente. Para un $2r$ general tenemos:

$$a_{2r} = a_0 \frac{(-1)^r \Gamma(v+1)}{2^{2r} r! \Gamma(v+r+1)}.$$

Comprobemos la fórmula.

Demostración. Para $r = 0$ la fórmula se satisface trivialmente. Por inducción, si es cierta para algún $r - 1$, entonces

$$a_{2r} = -\frac{a_{2r-2}}{4r(v+r)} = -\frac{a_0}{4r(v+r)} \cdot \frac{(-1)^{r-1} \Gamma(v+1)}{2^{2r-2} (r-1)! \Gamma(v+r)} = a_0 \frac{(-1)^r \Gamma(v+1)}{2^{2r} r! \Gamma(v+r+1)}.$$

Por tanto, la fórmula es cierta para todo $r \geq 0$. □

La constante a_0 queda pues a nuestra elección, sin embargo le damos el valor $a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$ por dar la solución normalizada. Con esto,

$$a_{2r} = \frac{(-1)^r}{2^{v+2r} r! \Gamma(v+r+1)}.$$

Sustituyendo esta expresión en (1.4), obtenemos la solución buscada, que denotamos $J_v(z)$ y que recibe el nombre de *función de Bessel de primera especie de orden v y argumento z* :

$$J_v(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{v+2r}}{r! \Gamma(v+r+1)}. \quad (1.5)$$

Definición. Definimos con mayor generalidad, para $\nu \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$, la función de Bessel $J_\nu(z)$ como en la expresión (1.5).

Esta serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$, por el criterio del cociente:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{r+1} (z/2)^{\nu+2r+2} r! \Gamma(\nu+r+1)}{(-1)^r (z/2)^{\nu+2r} (r+1)! \Gamma(\nu+2r+2)} \right| = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{(z/2)^2}{(r+1)(\nu+r+1)} \right| = 0, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Es decir, $J_\nu(z)$, solución de la ecuación diferencial (1.1) está definida para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

Análogamente, tomando $\alpha = -\nu$ en (1.2) y descartando el caso de que 2ν sea un entero positivo, obtenemos una segunda solución de (1.1), que llamamos $J_{-\nu}(z)$ y extendemos su definición para todo $\nu \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2, \dots\}$ de manera análoga a $J_\nu(z)$:

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{-\nu+2r}}{r! \Gamma(-\nu+r+1)}. \tag{1.6}$$

Calculando el mismo límite que para $J_\nu(z)$, vemos que esta otra solución de (1.1) está también bien definida para todo $z \in \mathbb{C}$.

Entonces, es lógico pensar que la solución general w será una combinación lineal de ambas $J_\nu(z)$ y $J_{-\nu}(z)$, pero necesitaremos comprobar que estas soluciones son linealmente independientes.

Notemos que la ecuación (1.1) es lineal de segundo orden, por lo que recurrimos al wronskiano W para comprobar su independencia.

$$W = \begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_{-\nu}(z) \\ J'_\nu(z) & J'_{-\nu}(z) \end{vmatrix}.$$

Dado que $J_\nu(z)$ y $J_{-\nu}(z)$ son soluciones particulares de la ecuación de Bessel, ambas satisfacen (1.1), es decir, son ciertas las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} z^2 J''_\nu(z) + z J'_\nu(z) + (z^2 - \nu^2) J_\nu(z) &= 0, \\ z^2 J''_{-\nu}(z) + z J'_{-\nu}(z) + (z^2 - \nu^2) J_{-\nu}(z) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por $J_{-\nu}(z)$, la segunda por $J_\nu(z)$ y restándolas:

$$\begin{array}{rclcl} z^2 J''_{-\nu}(z) J_\nu(z) & + & z J'_{-\nu}(z) J_\nu(z) & + & * & = & 0 \\ - & & & & & & \\ z^2 J''_\nu(z) J_{-\nu}(z) & + & z J'_\nu(z) J_{-\nu}(z) & + & * & = & 0 \\ \hline z^2 [J''_{-\nu}(z) J_\nu(z) - J''_\nu(z) J_{-\nu}(z)] & + & z [J'_{-\nu}(z) J_\nu(z) - J'_\nu(z) J_{-\nu}(z)] & & & = & 0, \end{array}$$

donde $(*) = (z^2 - \nu^2) J_{-\nu}(z) J_\nu(z)$. Debido a que

$$\begin{aligned} z \frac{d(zW)}{dz} &= zW + z^2 \frac{dW}{dz} = z [J'_{-\nu}(z) J_\nu(z) - J'_\nu(z) J_{-\nu}(z)] \\ &\quad + z^2 [J'_\nu(z) J'_{-\nu}(z) + J''_{-\nu}(z) J_\nu(z) - J''_\nu(z) J_{-\nu}(z) - J'_\nu(z) J'_{-\nu}(z)], \end{aligned}$$

obtenemos que $\frac{d(zW)}{dz} = 0$, por lo que $W = \frac{C}{z}$, con C constante a determinar. Como, por (1.5) y (1.6),

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} + \mathcal{O}(z^{\nu+2}), & J'_\nu(z) &= \frac{(z/2)^{\nu-1}}{2\Gamma(\nu)} + \mathcal{O}(z^{\nu+1}), \\ J_{-\nu}(z) &= \frac{(z/2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)} + \mathcal{O}(z^{-\nu+2}), & J'_{-\nu}(z) &= \frac{(z/2)^{-\nu-1}}{2\Gamma(-\nu)} + \mathcal{O}(z^{-\nu+1}), \end{aligned}$$

tenemos que, finalmente, el wronskiano es

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \frac{(z/2)^{-\nu-1}}{2\Gamma(-\nu)} - \frac{(z/2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)} \frac{(z/2)^{\nu-1}}{2\Gamma(\nu)} + \mathcal{O}(z) \\
 &= \frac{(z/2)^{-1}}{2\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)} - \frac{(z/2)^{-1}}{2\Gamma(\nu)\Gamma(-\nu+1)} + \mathcal{O}(z) \\
 &= \frac{1}{z} \left[\frac{1}{\Gamma(-\nu)\Gamma(1-(-\nu))} - \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} \right] + \mathcal{O}(z) = -\frac{2\operatorname{sen}(\nu\pi)}{\pi z} + \mathcal{O}(z).
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Remarquemos que aquí, habiendo aplicado la fórmula $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}$ y la imparidad de la función seno, hemos obtenido

$$C = -\frac{2\operatorname{sen}(\nu\pi)}{\pi}.$$

Recordemos que estábamos excluyendo los valores de $\nu \in \mathbb{Z}$ (los enteros negativos para $\alpha = \nu$ y los enteros positivos para $\alpha = -\nu$), por lo que el wronskiano no se anula y así demostramos que $J_\nu(z)$ y $J_{-\nu}(z)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel. Es decir, la solución general será la combinación lineal

$$w(z) = AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z), \tag{1.8}$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

1.3. Fórmulas de recurrencia

Proposición 1.1. *Para derivadas iteradas, tenemos las siguientes fórmulas:*

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{zdz} \right)^m [z^\nu J_\nu(z)] = z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z), \\ \left(\frac{d}{zdz} \right)^m [z^{-\nu} J_\nu(z)] = (-1)^m z^{-\nu-m} J_{\nu+m}(z). \end{cases} \tag{1.9}$$

Demostración. Volviendo a (1.5), podemos expresar la serie de las siguientes dos formas:

$$\begin{aligned}
 z^{-\nu} J_\nu(z) &= 2^{-\nu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)}, \\
 z^\nu J_\nu(z) &= 2^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{2\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)}.
 \end{aligned}$$

Operando,

$$-z^\nu \frac{d}{dz} [z^{-\nu} J_\nu(z)] = -z^\nu 2^{-\nu} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{2r-1}}{(r-1)! \Gamma(\nu+r+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{\nu+1+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+2)} = J_{\nu+1}(z).$$

Es decir,

$$\left(\frac{d}{zdz} \right) [z^{-\nu} J_\nu(z)] = (-1) z^{-\nu-1} J_{\nu+1}(z).$$

Finalmente, derivando repetidas veces, llegamos a la segunda fórmula del enunciado.

De manera análoga para la primera,

$$z^{-\nu} \frac{d}{dz} [z^\nu J_\nu(z)] = z^{-\nu} 2^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{2\nu+2r-1}}{r! \Gamma(\nu+r)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{\nu-1+2r}}{r! \Gamma(\nu+r)} = J_{\nu-1}(z).$$

Podemos reescribirlo como

$$\left(\frac{d}{zdz} \right) [z^\nu J_\nu(z)] = z^{\nu-1} J_{\nu-1}(z),$$

que derivando repetidas veces, volvemos a obtener el resultado. \square

Proposición 1.2. Las siguientes fórmulas de recurrencia son ciertas para $J_\nu(z)$, pero también para las funciones de Bessel de segunda especie y funciones de Hankel, que se definirán a continuación.

$$\begin{cases} J_{\nu+1}(z) = \frac{\nu}{z}J_\nu(z) - J'_\nu(z), \\ J_{\nu-1}(z) = \frac{\nu}{z}J_\nu(z) + J'_\nu(z), \\ J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}J_\nu(z), \\ J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z). \end{cases} \quad (1.10)$$

Además, también se da $J_1(z) = -J'_0(z)$.

Demostración. Recordando la demostración anterior, tenemos que

$$J_{\nu+1}(z) = -z^\nu \frac{d}{dz} [z^{-\nu} J_\nu(z)] = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J'_\nu(z).$$

Análogamente para la segunda expresión, tenemos

$$J_{\nu-1}(z) = z^{-\nu} \frac{d}{dz} [z^\nu J_\nu(z)] = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) + J'_\nu(z).$$

Las dos fórmulas restantes son consecuencias directas. La quinta se deduce de la primera, para el caso particular $\nu = 0$.

Estas fórmulas también se aplican a $Y_\nu(z)$ (función de Bessel de segunda especie), ya que, como veremos, es una combinación lineal de $J_\nu(z)$ y de $J_{-\nu}(z)$. Paralelamente, a las funciones de Hankel $H_\nu^{(1)}(z)$ y $H_\nu^{(2)}(z)$, que asimismo veremos que son combinación lineal de $J_\nu(z)$ y $Y_\nu(z)$. \square

1.4. Otras clases de funciones de Bessel: esféricas, de segunda especie y funciones de Hankel

Estudiamos ahora los casos que hemos excluido anteriormente y algunos casos especiales.

1.4.1. Funciones de Bessel esféricas

- $2\nu = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$

Particularizamos este caso concreto porque nos será de utilidad posteriormente. El resultado general (1.8) sigue siendo cierto, ya que el wronskiano de $J_\nu(z)$ y de $J_{-\nu}(z)$ no se anula para estos valores de ν . Además, sustituyendo en (1.5) y (1.6), tenemos las funciones de Bessel

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{n+\frac{1}{2}+2r}}{r! \Gamma(n+r+\frac{3}{2})},$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{-n-\frac{1}{2}+2r}}{r! \Gamma(-n+r+\frac{1}{2})}.$$

Aparecen en problemas físicos relacionados con ondas esféricas, por lo que se denominan *funciones de Bessel esféricas*.

Podemos notar que sustituyendo en la segunda condición de (1.2) para el caso $\alpha = -\nu = -n - \frac{1}{2}$, obtenemos $[(-n + \frac{1}{2})^2 - (n + \frac{1}{2})^2] a_1 = -n a_1 = 0$. En el caso $n = 0$, a_1 toma un valor arbitrario, mientras que los coeficientes de orden impar dependen de dicho valor a_1 .

La solución general viene dada por:

$$w = B J_{-n-\frac{1}{2}}(z) + A J_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

donde $B = 2^{-n-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2} - n) a_0$, y $A = 2^{n+\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{3}{2} + n) a_{2n+1}$, para dar una solución normalizada.

Pasamos a calcular los casos concretos para $n = 0$: $J_{1/2}(z)$ y $J_{-1/2}(z)$. Vamos a usar la igualdad $r! \Gamma(r + \frac{3}{2}) = \Gamma(r+1) \Gamma(r + \frac{3}{2}) = \sqrt{\pi} 2^{-2r-1} \Gamma(2r+2)$. Sustituyendo en (1.5) para $\nu = 1/2$:

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{\frac{1}{2}+2r}}{r! \Gamma(r + \frac{3}{2})} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{\frac{1}{2}+2r}}{\sqrt{\pi} 2^{-2r-1} \Gamma(2r+2)} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r+1}}{\Gamma(2r+2)} \\ &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r+1}}{(2r+1)!} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \text{sen}(z). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Análogamente, empleando la igualdad $r! \Gamma(r + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} 2^{-2r} \Gamma(2r+1)$ y sustituyendo en (1.6) para $\nu = -1/2$:

$$\begin{aligned} J_{-1/2}(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{-\frac{1}{2}+2r}}{r! \Gamma(r + \frac{1}{2})} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{-\frac{1}{2}+2r}}{\sqrt{\pi} 2^{-2r} \Gamma(2r+1)} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r}}{\Gamma(2r+1)} \\ &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r}}{(2r)!} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \text{cos}(z). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Para calcular expresiones para los casos generales $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ y $J_{-n-\frac{1}{2}}(z)$, utilizamos las fórmulas de recurrencia (1.9) y tomando $\nu = \pm 1/2$, $n = m$, llegamos a

$$\begin{aligned} (-1)^n z^{-(n+\frac{1}{2})} J_{n+\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{d}{zdz}\right)^n [z^{-1/2} J_{1/2}(z)], \\ z^{-(n+\frac{1}{2})} J_{-n-\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{d}{zdz}\right)^n [z^{-1/2} J_{-1/2}(z)]. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores calculados de $J_{1/2}(z)$ y $J_{-1/2}(z)$ en (1.11) y (1.12) y despejando:

$$\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(z) &= (-1)^n z^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \left[\frac{\sqrt{2}}{z\sqrt{\pi}} \text{sen}(z) \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+\frac{1}{2}} \left(-\frac{d}{zdz}\right)^n \left[\frac{\text{sen}(z)}{z} \right], \\ J_{-n-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \left[\frac{\text{cos}(z)}{z} \right]. \end{aligned}$$

1.4.2. Funciones de Bessel de segunda especie

- $\nu \in \mathbb{Z}$. Notar que para $-\nu \in \mathbb{N}$ no está definida $J_\nu(z)$, pero sí $J_{-\nu}(z)$ y para $\nu \in \mathbb{N}$ no está definida $J_{-\nu}(z)$ pero sí $J_\nu(z)$. Para $\nu = 0$, $J_\nu(z)$ y $J_{-\nu}(z)$ son una misma función.

Para $\nu \in \mathbb{Z}$, $J_n(z)$ y $J_{-n}(z)$ ya no son linealmente independientes. De hecho, tenemos la igualdad $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$:

$$J_{-n}(z) = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{-n+2r}}{\Gamma(r+1) \Gamma(-n+r+1)} = \sum_{s=r-n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} (z/2)^{n+2s}}{\Gamma(n+s+1) \Gamma(s+1)} = (-1)^n J_n(z).$$

Esto implica que debemos construir una segunda solución que sea linealmente independiente a $J_n(z)$. Podemos observar además a partir de la definición que $J_n(z)$ será par o impar según la paridad de n .

Definimos entonces $Y_\nu(z)$, llamada *función de Bessel de segunda especie de orden ν y argumento z* , o también *función de Neumann*:

$$Y_\nu(z) = \frac{(\cos \nu \pi) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\text{sen } \nu \pi}. \quad (1.13)$$

Tomando ahora constantes A y B , construimos la solución general

$$w = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z), \tag{1.14}$$

que es válida siempre que ν no sea entero, ya que en ese caso obtendríamos la indeterminación $Y_\nu(z) = \frac{0}{0}$.

Ya que existe el límite $\lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z)$, extendemos la definición de $Y_\nu(z)$ en el caso $\nu = n \in \mathbb{Z}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{-\pi \sin(\nu\pi)J_\nu(z) + \cos(\nu\pi) \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}}{\pi \cos \nu\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right] \Big|_{\nu=n}. \end{aligned}$$

El wronskiano de $J_\nu(z)$ e $Y_\nu(z)$ es

$$\begin{vmatrix} J_\nu(z) & Y_\nu(z) \\ J'_\nu(z) & Y'_\nu(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_\nu(z) & \frac{(\cos \nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi} \\ J'_\nu(z) & \frac{(\cos \nu\pi)J'_\nu(z) - J'_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sin(\nu\pi)} \begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_{-\nu}(z) \\ J'_\nu(z) & J'_{-\nu}(z) \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sin(\nu\pi)} W = \frac{2}{\pi z},$$

donde W era el wronskiano descrito en (1.7).

Por continuidad, este wronskiano sigue siendo $\frac{2}{\pi z}$ en el caso $\nu = n \in \mathbb{Z}$, por lo que $J_\nu(z)$ e $Y_\nu(z)$ siempre son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel y (1.14) es siempre su solución general.

1.4.3. Funciones de Hankel

Hay veces que resulta más conveniente tomar unas combinaciones lineales concretas de (1.14). Estas son las *funciones de Hankel* o también llamadas *funciones de Bessel de tercera especie*. Vienen definidas por

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z). \tag{1.15}$$

Son soluciones independientes de la ecuación de Bessel y tomando constantes A y B , obtenemos otra solución general:

$$w = AH_\nu^{(1)}(z) + BH_\nu^{(2)}(z).$$

1.5. Funciones de Bessel modificadas

A menudo en problemas físicos, nos interesa tomar la ecuación de Bessel (1.1) con el cambio de variable $z \mapsto iz$. Así obtenemos la ecuación de Bessel modificada

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0. \tag{1.16}$$

En estos problemas interesan soluciones reales, por lo que descartaremos soluciones complejas como $J_\nu(iz)$ e $Y_\nu(iz)$.

Proposición 1.3. *La función $e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu(iz) = i^{-\nu} J_\nu(iz)$ toma valores reales para $z, \nu \in \mathbb{R}$ y es solución de (1.16). Recibe el nombre de función de Bessel modificada de primera especie y se denota $I_\nu(z)$. Además tenemos:*

$$I_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)}. \tag{1.17}$$

Demostración. Claramente, $J_\nu(iz)$ es solución de (1.16). Recordando (1.5), su expansión en serie es

$$J_\nu(iz) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r i^{\nu+2r} (z/2)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^\nu (z/2)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)} = i^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)}.$$

Por definición, $i^\nu = e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}$, por lo que

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu(iz) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)}$$

es solución de la ecuación de Bessel modificada y toma valores reales si $z, \nu \in \mathbb{R}$. \square

Análogamente se define $I_{-\nu}(z)$. Expresando $I_\nu(z)$ e $I_{-\nu}(z)$ en términos de $J_\nu(z)$ y de $J_{-\nu}(z)$, sale fácilmente que su wronskiano es

$$-\frac{2 \operatorname{sen}(\nu\pi)}{\pi z}.$$

Es decir, $I_\nu(z)$ y $I_{-\nu}(z)$ son soluciones linealmente independientes siempre y cuando $\nu \notin \mathbb{Z}$.

Entonces, la solución general de (1.16) es

$$w = AI_\nu(z) + BI_{-\nu}(z),$$

donde A y B son constantes arbitrarias y $\nu \notin \mathbb{Z}$.

Proposición 1.4. Sea $\nu = n \in \mathbb{Z}$, entonces $I_n(z) = I_{-n}(z)$.

Demostración. Recordemos que $\Gamma(-n+r+1) = \infty$ cuando $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Sustituyendo en (1.17):

$$I_{-n}(z) = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(z/2)^{-n+2r}}{\Gamma(r+1)\Gamma(-n+r+1)} = \sum_{s=r-n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2s}}{\Gamma(n+s+1)\Gamma(s+1)} = I_n(z). \quad \square$$

También se podría haber visto directamente, ya que $J_{-\nu}(z) = (-1)^n J_n(z)$.

Por tanto, en este caso debemos construir una segunda solución linealmente independiente a $I_n(z)$. Definimos entonces $K_\nu(z)$, *función de Bessel modificada de tercera especie*, también llamada *función de Hankel modificada*. Viene definida por:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}. \quad (1.18)$$

Notamos que en el caso $\nu = n \in \mathbb{Z}$, (1.18) es una indeterminación del tipo 0/0, pero dado que el límite $\nu \rightarrow n$ existe, definimos

$$\begin{aligned} K_n(z) &= \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{\pi}{2} \lim_{\nu \rightarrow n} \left(\frac{\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(z)}{\partial \nu}}{\pi \cos(\nu\pi)} \right) \Bigg|_{\nu=n} \\ &= \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(z)}{\partial \nu} \right) \Bigg|_{\nu=n}. \end{aligned}$$

Veamos una identidad que nos será útil en el siguiente capítulo. Utilizando las definiciones de $Y_\nu(z)$ y de $K_\nu(z)$ vistas en (1.13) y en (1.18), respectivamente, obtenemos:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} [J_\nu(iz) + iY_\nu(iz)] = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(iz). \quad (1.19)$$

Capítulo 2

Representación integral y estimaciones asintóticas de las funciones de Bessel

Las funciones de Bessel no se definieron originalmente como hemos expuesto en el capítulo previo, sino que fueron definidas en su forma integral. Esta forma de representarlas es especialmente interesante para estudiar problemas físicos, ya que permite estudiar su comportamiento asintótico cuando el módulo del argumento z es grande. Las soluciones en forma de serie tienen una convergencia muy lenta en este caso.

Completamos las ideas de [11, § 2, § 3] con [12, § 2, § 6, § 7]. También empleamos, del mismo autor, [13, § 17].

2.1. Coeficientes de Bessel

Definición. Llamamos *función generadora de los coeficientes de Bessel* a

$$\exp\left\{\frac{1}{2}z(t-t^{-1})\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z). \quad (2.1)$$

Este nombre se debe a que puede ser desarrollada en una serie de Laurent cuyos coeficientes son $J_n(z)$ y $J_{-n}(z)$, según el índice de la serie sea positivo o negativo. Por ello, las funciones $J_n(z)$ reciben el nombre de *coeficientes de Bessel de argumento z y orden $n \in \mathbb{Z}$* .

Las funciones $\exp\{zt/2\}$ y $\exp\{-z/2t\}$ se pueden expresar como series absolutamente convergentes (ascendente y descendente en potencias de t , respectivamente), por lo que podemos multiplicarlas término a término. Entonces,

$$\exp\left\{\frac{1}{2}z(t-t^{-1})\right\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{zt}{2}\right)^r \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{z}{2t}\right)^s = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{r!s!} \left(\frac{z}{2}\right)^{r+s} t^{r-s}.$$

Para hallar los coeficientes de t^n , diferenciamos según n sea no negativo o negativo. En el primer caso, tomamos $r = n + s$ y para el segundo, $r = -n + s$. Así obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{coeficiente de } t^n &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)!s!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2s} = J_n(z), \\ \text{coeficiente de } t^{-n} &= \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(-n+s)!s!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2s} = J_{-n}(z). \end{aligned}$$

Juntándolas, obtenemos la función generadora de coeficientes de Bessel (2.1).

2.2. Representación integral de las funciones de Bessel

Originalmente, Bessel definió de esta manera $J_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, y a partir de esta obtuvo las demás propiedades.

Proposición 2.1 (definición de Bessel).

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z \operatorname{sen} \theta) d\theta.$$

Demostración. Vamos a integrar en la frontera del disco unidad $\partial D(0, 1)$, donde $\operatorname{Ind}_{\partial D(0,1)}(0) = 1$. Aplicamos el teorema de los residuos¹:

$$J_n(z) = \operatorname{Res}(f, 0) \operatorname{Ind}_{\partial D(0,1)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1)} t^{-n-1} \exp\left\{\frac{1}{2}z(t-t^{-1})\right\} dt.$$

Como estamos en la frontera del disco unidad, parametrizamos usando $t = e^{i\theta}$ para $\theta \in [-\pi, \pi]$ y las fórmulas trigonométricas complejas. Notamos que $\frac{t-t^{-1}}{2} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} = i \operatorname{sen} \theta$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+1)\theta} e^{iz \operatorname{sen} \theta} i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta + iz \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} e^{-in\theta + iz \operatorname{sen} \theta} d\theta + \int_{-\pi}^0 e^{-in\theta + iz \operatorname{sen} \theta} d\theta \right] \end{aligned}$$

Aplicamos el cambio de variable $\varphi = -\theta$ para el segundo sumando:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} e^{-in\theta + iz \operatorname{sen} \theta} d\theta + \int_0^{\pi} e^{in\varphi - iz \operatorname{sen} \varphi} d\varphi \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z \operatorname{sen} \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z \operatorname{sen} \theta) d\theta. \quad \square \end{aligned}$$

Nuestro objetivo ahora va a ser generalizar la representación integral obtenida para un orden cualquiera $\nu \in \mathbb{C}$, lo cual fue estudiado por Lommel. Definió de manera generalizada los coeficientes de Bessel para cualquier $J_\nu(z)$ tal que $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$ de la siguiente forma:

Proposición 2.2 (definición de Lommel).

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) \operatorname{sen}^{2\nu} \theta d\theta. \quad (2.2)$$

Demostración. Transformamos la serie de $J_\nu(z)$ que hemos visto en (1.5). Vamos a usar las siguientes propiedades de la función gamma.

$$\begin{aligned} \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right) r! &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{-2r} (2r)!, \\ \beta\left(\nu + \frac{1}{2}, r + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu + r + 1)} = \int_0^1 t^{\nu-\frac{1}{2}} (1-t)^{r-\frac{1}{2}} dt, \quad \text{si } \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

¹Teorema de los residuos: Sea Ω un abierto no vacío de \mathbb{C} y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus A$, donde $A \subseteq \Omega$ consta de singularidades aisladas de f . Para todo ciclo Γ homólogo a 0 respecto de Ω tal que $A \cap \operatorname{sop} \Gamma = \emptyset$ se verifica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f, a) \operatorname{Ind}_\Gamma(a).$$

Entonces, suponiendo que $\text{Re } \nu > -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \frac{z^{2r}}{(2r)!} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+r+1)} \\ &= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r}}{(2r)!} \int_0^1 t^{\nu-\frac{1}{2}} (1-t)^{r-\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Por el teorema de Fubini, como hay convergencia absoluta, podemos intercambiar el sumatorio con la integral.

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r} (1-t)^{r-\frac{1}{2}}}{(2r)!} \right) dt \\ &= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2\nu-1} \theta \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r} \text{cos}^{2r-1} \theta}{(2r)!} \right) 2 \text{sen } \theta \text{cos } \theta d\theta. \end{aligned}$$

(*) Hemos aplicado el cambio de variable $t = \text{sen}^2 \theta$. Ahora, sumando la serie obtenemos finalmente la fórmula proporcionada por Lommel.

$$J_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \text{cos}(z \text{cos } \theta) \text{sen}^{2\nu} \theta d\theta = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi \text{cos}(z \text{cos } \theta) \text{sen}^{2\nu} \theta d\theta. \quad \square$$

Veamos cómo quedaría la definición de Lommel para el caso concreto $\nu = \frac{1}{2}$. Recordemos que ya habíamos obtenido esta fórmula en (1.11).

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= \frac{(z/2)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \text{cos}(z \text{cos } \theta) \text{sen } \theta d\theta = \frac{(z/2)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 \text{cos}(zu) du = \frac{(z/2)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2 \text{sen } z}{z} \\ &= \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \text{sen}(z). \end{aligned}$$

Notamos que no es posible calcular el análogo para $J_{-1/2}(z)$ a través de esta fórmula de Lommel debido a que la función gamma no está definida en el 0.

Por otro lado, podemos aplicar varias transformaciones sobre esta fórmula para obtener otras que nos puedan resultar de utilidad más adelante. Destacamos las siguientes dos fórmulas equivalentes. Para la primera, dado que $\int_0^\pi \text{sen}(z \text{cos } \theta) \text{sen}^{2\nu} \theta d\theta = 0$, podemos escribir:

$$J_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{iz \text{cos } \theta} \text{sen}^{2\nu} \theta d\theta, \quad \text{si } \text{Re } \nu > -\frac{1}{2}.$$

Para la segunda, tomando ahora el cambio de variable $\text{cos } \theta = t$,

$$J_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{izt} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad \text{si } \text{Re } \nu > -\frac{1}{2}. \quad (2.3)$$

2.3. Representación integral de las funciones de Hankel modificadas

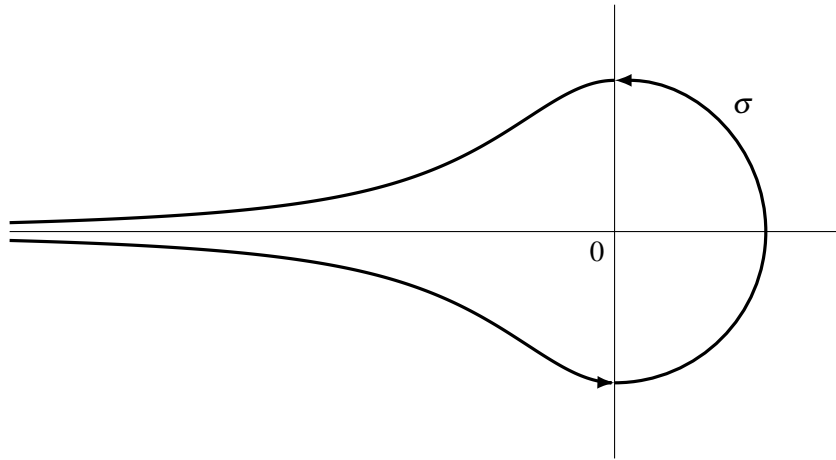
En esta sección vamos a presentar una fórmula integral para $K_\nu(z)$, concretamente:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right) K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\xi}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} d\xi. \quad (2.4)$$

La demostración no es excesivamente complicada, pero es larga y se sale fuera del propósito del trabajo. Sin embargo, queremos dar una idea general de las técnicas que se usan. Partimos de la integral de contorno para la función gamma, dada por la fórmula

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+r+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma e^t t^{-\nu-r-1} dt,$$

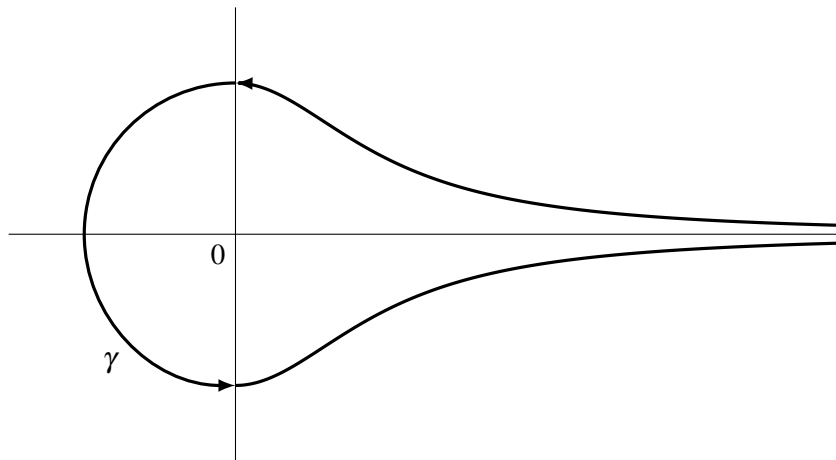
donde σ es un *contorno de Hankel*, es decir, un camino como en la siguiente figura que “empieza” en $-\infty$, rodea el origen en sentido positivo y “vuelve” a $-\infty$ sin cortar el eje real negativo. Se utiliza para evaluar diferentes integrales como la función gamma, la función zeta de Riemman o las funciones de Hankel vistas en (1.15).



Aplicando un cambio de variable y por prolongación analítica, se llega a

$$\int_{\gamma} e^{-zt} t^{2v-2r-1} dt = \frac{2\pi i e^{2v\pi i} z^{2r-2v}}{\Gamma(-2v+2r+1)} \quad \text{cuando } |\arg z| < \frac{1}{2}\pi, \quad (2.5)$$

donde ahora γ es como en la figura



Aprovechando el desarrollo en serie de Laurent

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-v\right) (t^2-1)^{v-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-v+r\right)}{r!} t^{2v-2r-1},$$

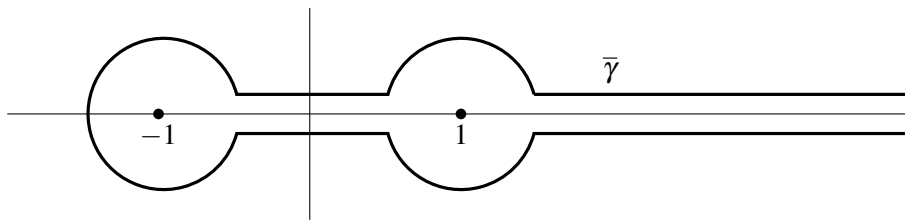
aplicamos (2.5) e integrando término a término, se obtiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-v\right) \int_{\gamma} (t^2-1)^{v-\frac{1}{2}} e^{-zt} dt = 2\pi i e^{2v\pi i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-v+r\right) z^{2r-2v}}{r! \Gamma(-2v+2r+1)}.$$

Usando la identidad $\Gamma(-2v+2r+1) = 2^{-2v+2r} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(-v+r+\frac{1}{2}) \Gamma(-v+r+1)$, así como la representación en forma de serie de $I_{\nu}(z)$ en (1.17), esto se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-v\right) \int_{\gamma} (t^2-1)^{v-\frac{1}{2}} e^{-zt} dt = 2\pi^{\frac{3}{2}} i e^{2v\pi i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2r-2v}}{r! \Gamma(-v+r+1)} = 2\pi^{\frac{3}{2}} i e^{2v\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^{-v} I_{-v}(z).$$

El camino γ se puede deformar, por el teorema de Cauchy, a un camino de la forma



De ahí, por un paso al límite (no trivial), se llega a que

$$I_{-\nu}(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} \operatorname{sen}(\nu\pi) \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-zt} dt + I_\nu(z).$$

En términos de $K_\nu(z)$, esto se escribe como

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right) K_\nu(z) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-zt} dt.$$

Por último, aplicando la transformación $t = 1 + \frac{\xi}{z}$, llegamos a la expresión que queríamos (2.4).

2.4. Expansión asintótica de $K_\nu(z)$

A partir de las representaciones integrales anteriores es posible deducir otras fórmulas integrales para el resto de funciones de Bessel. Particularmente, a partir de la representación integral (2.4) de la función de Bessel modificada de tercera especie $K_\nu(z)$, podemos calcular estimaciones asintóticas de estas funciones. Asumiendo que podemos expandir $(1 + \xi/2z)^{\nu - \frac{1}{2}}$ mediante el binomio de Newton e intercambiar la integral con el sumatorio,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right) K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{s=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{s! \Gamma(\nu + \frac{1}{2} - s)} \cdot \frac{1}{(2z)^s} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{s + \nu - \frac{1}{2}} d\xi.$$

Por la definición de la función gamma, $\int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{s + \nu - \frac{1}{2}} d\xi = \Gamma(\nu + \frac{1}{2} + s)$. Entonces,

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{s=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2} + s)}{s! \Gamma(\nu + \frac{1}{2} - s)} \cdot \frac{1}{(2z)^s}.$$

Estos cálculos son formales, ya que en realidad esta serie no converge. No obstante, se puede probar que, fijado m , la diferencia

$$K_\nu(z) - \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{s=0}^m \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2} + s)}{s! \Gamma(\nu + \frac{1}{2} - s)} \cdot \frac{1}{(2z)^s} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0.$$

Entonces, tomando $|z| \rightarrow \infty$, ya tenemos la expansión asintótica de $K_\nu(z)$, válida para todo valor de ν cuando $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$:

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{s=0}^\infty \frac{(\nu, s)}{(2z)^s}, \tag{2.6}$$

donde hemos denotado como (ν, s) el símbolo de Hankel: definimos $(\nu, 0) = 1$ y en general, para $s \in \mathbb{N}$,

$$(\nu, s) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2} + s)}{s! \Gamma(\nu + \frac{1}{2} - s)}.$$

Es importante mencionar que el símbolo \sim indica que no se trata de una igualdad, sino de una aproximación asintótica para $|z|$ suficientemente grande.

2.5. Expansiones asintóticas de las funciones de Bessel

A partir de la expansión asintótica de $K_\nu(z)$ podemos obtener el resto. Por ejemplo, aplicando (1.19) y el cambio de variable $z \mapsto -iz$, obtenemos

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{2i}{\pi} e^{-\frac{1}{2}v\pi i} K_\nu(-iz).$$

Empleando (2.6), es fácil obtener las expansiones asintóticas de $H_\nu^{(1)}(z)$ y de $H_\nu^{(2)}(z)$ si $|\arg z| < \pi$.

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(v, s)}{(-2iz)^s},$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(v, s)}{(2iz)^s}.$$

Aplicando las relaciones $H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z)$ y $H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z)$ obtenemos:

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (v, 2s)}{(2z)^{2s}}$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (v, 2s+1)}{(2z)^{2s+1}} \quad \text{cuando } |\arg z| < \pi$$

y

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (v, 2s)}{(2z)^{2s}}$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (v, 2s+1)}{(2z)^{2s+1}} \quad \text{cuando } |\arg z| < \pi.$$

Por último, las expansiones de $I_\nu(z)$ se pueden obtener de las relaciones $I_\nu(z) = e^{-\frac{1}{2}v\pi i} J_\nu\left(ze^{\frac{1}{2}\pi i}\right)$ cuando $\arg z \in (-\pi, \frac{\pi}{2}]$, $I_\nu(z) = e^{\frac{1}{2}v\pi i} J_\nu\left(ze^{-\frac{1}{2}\pi i}\right)$ cuando $\arg z \in [-\frac{\pi}{2}, \pi)$ y $2J_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)$.

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(v, s)}{(-2z)^s} + \frac{e^{-z - (v + \frac{1}{2})\pi i}}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(v, s)}{(2z)^s} \quad \text{cuando } \arg z \in \left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right),$$

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(v, s)}{(-2z)^s} + \frac{e^{-z + (v + \frac{1}{2})\pi i}}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(v, s)}{(2z)^s} \quad \text{cuando } \arg z \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right).$$

Vemos que hay una aparente discrepancia en estas dos últimas fórmulas cuando $\arg z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Esto es un ejemplo del fenómeno descubierto en 1857 por Stokes de *discontinuidad de las constantes*². Realmente lo que ocurre es que el factor que aparece diferente en cada expresión tiene un orden de magnitud más pequeño (cuando $|\arg z| \rightarrow \infty$) que el error cometido por truncar la serie en algún $s = m$.

²Resultados publicados por George G. Stokes en *Trans. Camb. Phil. Soc.* X (1864), p.106-128; XI (1871), p.412-425; *Acta Math.* XXVI (1902), p.393-397.

Capítulo 3

Ceros de funciones de Bessel

En muchos problemas físicos se requiere conocer los valores de z para los cuales las funciones de Bessel se anulan. Sin embargo, no existe una fórmula que nos permita calcularlos, sino que únicamente podremos aspirar a calcular valores numéricos aproximados a dichos ceros. Veremos primero algunas propiedades importantes sobre estos ceros, para después poder expresar $J_\nu(z)$ como un producto infinito.

Hemos extraído los resultados más importantes de [12, § 15], simplificando lo máximo posible las demostraciones. Las mismas ideas o muy similares están recogidas en [1, § 4,7 – § 4,9], [2, § 4 – § 5], [6, § 5,2 – § 5,3] y [8].

3.1. El teorema de Bessel-Lommel sobre los ceros de $J_\nu(z)$

Este resultado fue originalmente propuesto por Bernoulli y Fourier, aunque la demostración formal fue realizada por Bessel a partir de la definición de Lommel.

Si dibujamos algunas funciones de Bessel sencillas, como $J_n(x)$, vemos intuitivamente que van a tener infinitos valores en los que la función se anula.

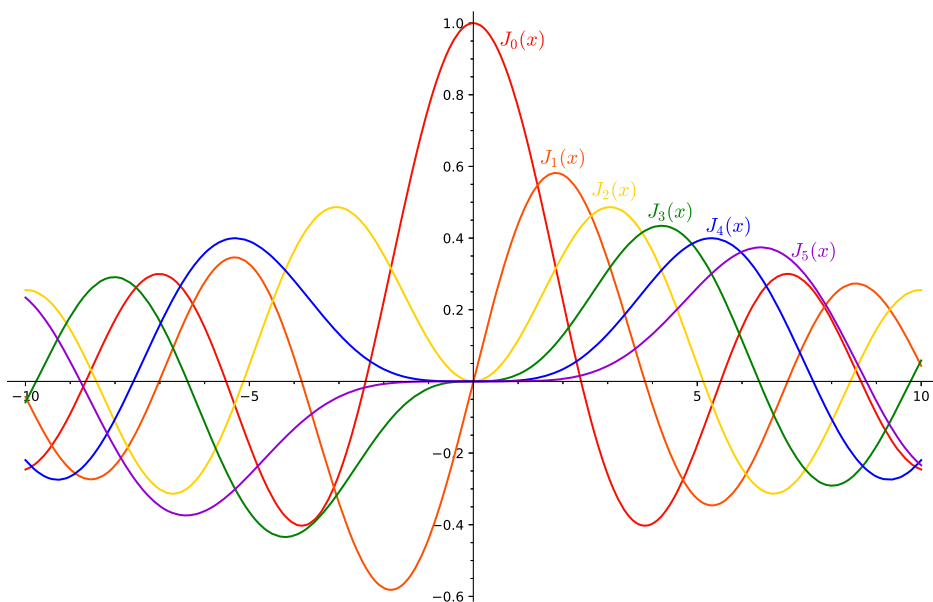


Figura 3.1: Representación gráfica de $J_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Teorema 3.1. Las funciones de Bessel $J_\nu(z)$ tienen infinitos ceros reales cuando $\nu \in \mathbb{R}$.

Demostración. Tomamos la definición de Lommel vista en (2.2) cuando $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$ y aplicamos los siguientes cambios de variables: $t = (2m+1)\cos\theta$ y $z = (m + \frac{1}{2})\pi$, con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$J_\nu\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\left[\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi\right]^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{2m+1} \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right) \left[1 - \frac{t^2}{(2m+1)^2}\right]^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{dt}{2m+1}.$$

Podemos escribir la integral definida como la suma $\frac{1}{2}u_0 - u_1 + u_2 - \dots + (-1)^m u_m$, donde hemos definido u_r como

$$\begin{aligned} u_r &= (-1)^r \int_{2r-1}^{2r+1} \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right) \left[1 - \frac{t^2}{(2m+1)^2}\right]^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{dt}{2m+1} \\ &= \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{1}{2}\pi t\right) \left[1 - \left(\frac{2r+t}{2m+1}\right)^2\right]^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{dt}{2m+1}. \end{aligned}$$

Debido a la positividad del integrando para dichos valores de t y de r , sabemos que la función u_r será positiva. Además, $u_r < u_{r+1}$, por lo que el signo de $J_\nu\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ será positivo o negativo según m sea par o impar. Por tanto, la función $J_\nu(z)$ cambia de signo para algún valor de $z \in \left(m\pi - \frac{\pi}{2}, m\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Es decir, por el teorema de Bolzano, existe algún cero en ese intervalo. Hemos demostrado por tanto, que $J_\nu(z)$ tiene infinitos ceros reales cuando $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$; y por (1.12) y (1.11), también se cumple para $\nu = \pm\frac{1}{2}$.

Ahora bien, para demostrar el resto de casos, utilizamos las propiedades de recurrencia

$$\frac{d}{dz} (z^{-\nu} J_\nu(z)) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z), \quad (3.1a)$$

$$\frac{d}{dz} (z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z). \quad (3.1b)$$

que provienen de (1.9). Por un lado, ya que ambas $z^{-\nu} J_\nu(z)$ y $z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$ son funciones derivables, por el teorema de Rolle hay al menos un cero real de $z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$ entre cada par de ceros reales de $z^{-\nu} J_\nu(z)$. Análogamente, hay al menos un cero real de $z^\nu J_{\nu-1}(z)$ entre cada par de ceros reales de $z^\nu J_\nu(z)$. Gracias a esto, queda probado el teorema para cualquier valor de $\nu \in \mathbb{R}$. Por otro lado, podemos destacar que debido a la paridad de $z^{-\nu} J_\nu(z)$, si j es un cero real, entonces $-j$ también lo es. \square

3.2. Algunas propiedades

Si buscamos ahora ceros complejos, esto ya no se cumple. De hecho, por ejemplo, para $-1 < \nu \in \mathbb{R}$, $J_\nu(z)$ no tiene ningún cero complejo, ni siquiera imaginario puro.

Proposición 3.1. *La función de Bessel $J_\nu(z)$ no tiene ceros repetidos (salvo $z = 0$).*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $j \neq 0$ es un cero con multiplicidad mayor que 1. En este caso, $J_\nu(j) = J'_\nu(j) = 0$. Como son soluciones de la ecuación de Bessel (1.1), obligatoriamente debe cumplirse $J''_\nu(j) = 0$. Iteradamente, todas las derivadas serían 0 y por Taylor, tendríamos $J_\nu(z) \equiv 0$, lo cual no es cierto. \square

Proposición 3.2. *Si tomamos $\nu \in \mathbb{R}^+$, los ceros positivos más pequeños de $J_\nu(z)$ y de $J'_\nu(z)$ son mayores que ν .*

Demostración. De la serie (1.5) se deduce fácilmente que $J_\nu(z)$ y $J'_\nu(z)$ son positivas, y $J_\nu(z)$ es creciente para $z > 0$ suficientemente pequeño. Podemos hablar entonces de sus primeros ceros positivos. Además, el primer cero positivo de $J'_\nu(z)$ es menor que el de $J_\nu(z)$ por el teorema de Rolle. Basta entonces probar que si c es el menor cero positivo de $J'_\nu(z)$, entonces $\nu < c$.

En el intervalo $(0, c)$ la función $J_\nu(z)$ se mantiene positiva, porque no se anula, y la función $zJ'_\nu(z)$ no puede ser creciente, porque es positiva para z pequeño y se anula en c . Entonces la ecuación de Bessel (1.1), escrita en la forma

$$z \frac{d}{dz} (zJ'_\nu(z)) = (\nu^2 - z^2) J_\nu(z),$$

implica que no puede ser $c \leq \nu$. □

Proposición 3.3. *Los ceros de $J_\nu(x)$ están intercalados con los de $J_{\nu+1}(x)$. Es decir, si $j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < \dots$ son los distintos ceros positivos de $J_\nu(x)$, entonces para $\nu > -1$ se cumple*

$$0 < j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < \dots$$

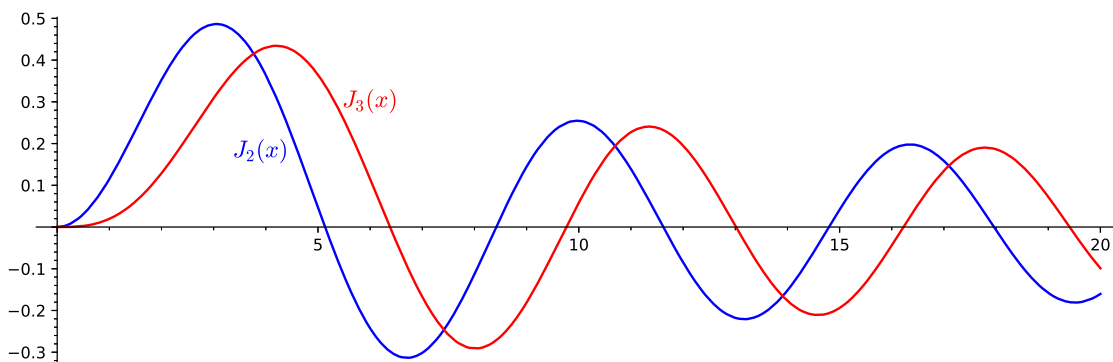


Figura 3.2: Ejemplo de ceros intercalados para $J_2(x)$ y $J_3(x)$.

Demostración. Usamos las fórmulas de recurrencia (3.1) para $z = x \in \mathbb{R}$. Además, de (3.1b) se deduce que antes del primer cero de $J_{\nu-1}(z)$, la función $z^\nu J_\nu(z)$ es creciente, luego no se anula. En las fórmulas de recurrencia vemos entonces que entre cada pareja de ceros consecutivos de $x^{-\nu} J_\nu(x)$ hay al menos un cero de $x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$; y análogamente, entre cada pareja de ceros consecutivos de $x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)$ hay al menos un cero de $x^{\nu+1} J_\nu(x)$. □

Si $\nu \leq -1$, entonces los ceros siguen estando intercalados, pero los ceros más pequeños de $J_{\nu+1}(x)$ están más cerca del origen que los de $J_\nu(x)$.

Un resultado más general (demostrado en 1929) es que $J_\nu(z)$ y $J_{\nu+m}(z)$ no tienen ceros comunes (aparte del origen) para $m = 1, 2$ cuando $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Bourget conjeturó que esto es cierto para cualquier $m \in \mathbb{N}$, pero no ha sido todavía demostrado.

3.3. Ceros de otras funciones de Bessel

Las funciones de Bessel modificadas tienen resultados inmediatos a partir de sus definiciones en forma de serie. $I_\nu(z)$ no tiene ceros reales cuando $-1 < \nu \in \mathbb{R}$, mientras que $K_\nu(z)$ no tiene ceros reales positivos cuando $\nu \in \mathbb{R}$.

Vamos a estudiar una ecuación que tiene cierta importancia en problemas físicos.

Proposición 3.4. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y tomamos valores reales de ν . Entonces la siguiente ecuación no posee ceros complejos:*

$$J_\nu(az) Y_\nu(bz) = J_\nu(bz) Y_\nu(az). \tag{3.2}$$

Demostración. Supongamos que existen ceros complejos z y \bar{z} . Definimos $u(r)$ y $v(r)$ como

$$\begin{cases} u(r) = J_\nu(az) Y_\nu(rz) - J_\nu(rz) Y_\nu(az), \\ v(r) = J_\nu(a\bar{z}) Y_\nu(r\bar{z}) - J_\nu(r\bar{z}) Y_\nu(a\bar{z}), \end{cases}$$

que trivialmente $u(a) = v(a) = 0$. Además, u y v satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} r^2 u'' + ru' + (r^2 z^2 - v^2) u &= 0, \\ r^2 v'' + rv' + (r^2 \bar{z}^2 - v^2) v &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera ecuación por $\frac{v}{r}$, la segunda por $\frac{u}{r}$ y restándolas obtenemos

$$-(z^2 - \bar{z}^2) ruv = r(vu'' - uv'') + vu' - uv' = \frac{d}{dr} (rvu' - ruv').$$

Si z y por tanto también \bar{z} son soluciones de (3.2), entonces $u(b) = v(b) = 0$. Por lo tanto,

$$-(z^2 - \bar{z}^2) \int_a^b ruv dr = r(vu' - uv') \Big|_{r=a}^{r=b} = 0.$$

Como $v = \bar{u}$, lo anterior no puede ser 0 y llegamos a contradicción, es decir, la ecuación (3.2) no tiene ceros complejos, salvo reales o imaginarios puros. \square

3.4. $J_\nu(z)$ como producto infinito

Proposición 3.5. *Sea $\nu \in \mathbb{R}$ tal que $\nu > -1$, se puede expresar $J_\nu(z)$ como un producto de factores simples, cada uno anulándose en uno de los ceros de $J_\nu(z)$. Sean $\{\pm j_s\}$ los ceros reales de $J_\nu(z)$, entonces*

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j_s^2}\right). \quad (3.3)$$

Notamos que basta suponer $z \in \mathbb{R}$ por prolongación analítica.

Demostración. Consideramos la integral de contorno

$$\frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{t}{w(w-t)} \cdot \frac{J_{\nu+1}(w)}{J_\nu(w)} dw =: \frac{1}{2\pi i} \int_D f(w),$$

donde D es un rectángulo que contiene a t y a los distintos ceros $\pm j_s$ para $s = 1, 2, \dots, m$. Los polos del integrando se encuentran para $w = t$ y $w = \pm j_s$. Calculemos sus residuos.

- $w = t$ polo simple. Su residuo viene dado por

$$\text{Res}(f, t) = \lim_{w \rightarrow t} (w-t) \frac{t}{w(w-t)} \cdot \frac{J_{\nu+1}(w)}{J_\nu(w)} = \frac{J_{\nu+1}(t)}{J_\nu(t)}.$$

- $w = \pm j_s$ polo simple. Su residuo viene dado por

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, \pm j_s) &= \lim_{w \rightarrow \pm j_s} (w \mp j_s) \frac{t}{w(w-t)} \cdot \frac{J_{\nu+1}(w)}{J_\nu(w)} \\ &= \frac{t}{\pm j_s(\pm j_s - t)} J_{\nu+1}(\pm j_s) \lim_{w \rightarrow \pm j_s} \left(\frac{w \mp j_s}{J_\nu(w) - J_\nu(\pm j_s)} \right) \\ &= \frac{t}{\pm j_s(\pm j_s - t)} \cdot \frac{J_{\nu+1}(\pm j_s)}{J'_\nu(\pm j_s)} = \frac{\mp t}{j_s(\pm j_s - t)}, \end{aligned}$$

ya que $J_\nu(\pm j_s) = 0$ y $J_{\nu+1}(\pm j_s) = -J'_\nu(\pm j_s)$, como se deduce de (1.10).

Se puede probar que $J_{\nu+1}(w)/J_{\nu}(w)$ está acotado en D y entonces por el teorema de los residuos,

$$\frac{J_{\nu+1}(t)}{J_{\nu}(t)} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{t}{j_s(j_s - t)} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{t}{j_s(j_s + t)} = 0.$$

Por (1.9), $J_{\nu+1}(t) = -t^{\nu} \frac{d}{dt} [t^{-\nu} J_{\nu}(t)]$. Es decir, reescribimos la expresión anterior como

$$\frac{\frac{d}{dt} [t^{-\nu} J_{\nu}(t)]}{t^{-\nu} J_{\nu}(t)} = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t - j_s} + \frac{1}{j_s} \right) + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t + j_s} - \frac{1}{j_s} \right).$$

Por la definición en serie de $J_{\nu}(z)$ en (1.5), vemos que $t^{-\nu} J_{\nu}(t)$ tiende a $\frac{1}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)}$ cuando t tiende a 0. Por tanto, integrando respecto a t entre 0 y z , tenemos

$$\ln [z^{-\nu} J_{\nu}(z)] + \ln [2^{\nu} \Gamma(\nu+1)] = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\ln \left(\frac{z - j_s}{-j_s} \right) + \frac{z}{j_s} \right] + \sum_{s=1}^{\infty} \left[\ln \left(\frac{z + j_s}{j_s} \right) - \frac{z}{j_s} \right].$$

Quitando los logaritmos obtenemos el resultado (3.3). □

Capítulo 4

Series de Fourier-Bessel

Bessel ya explicaba la relación entre las funciones de Bessel y las trigonométricas en su artículo *Abhandlung über die functionen, welche durch die trigonometrischen reihen vorkommen*. En este capítulo hablaremos sobre las series de Fourier, ya que podremos generalizarlas a series de Bessel. De hecho, recordando (1.11) y (1.12), ya habíamos visto que las funciones $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$ son casos particulares de funciones de Bessel.

Para este capítulo hemos utilizado [1, § 2,2], [3, § 4,6] y [9].

4.1. Series de Fourier

Definición (Serie de Fourier de senos y cosenos). Sea $f(x)$ una función integrable y periódica en el intervalo $[-1, 1]$. Entonces, la serie de Fourier de senos y cosenos asociada es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \text{sen}(n\pi x), \quad (4.1)$$

donde los coeficientes a_0 , a_n y b_n se denominan *coeficientes de Fourier* de $f(x)$ con respecto al sistema trigonométrico $\Omega = \{1, \cos(\pi x), \text{sen}(\pi x), \cos(2\pi x), \text{sen}(2\pi x), \dots\}$ y se definen como

$$\begin{cases} a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \int_{-1}^1 f(x) \text{sen}(n\pi x) dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Lema 4.1 (propiedad de ortogonalidad). *Los sistemas trigonométricos $\{\cos(n\pi x)\}_{n \geq 0}$ y $\{\text{sen}(n\pi x)\}_{n > 0}$ son ortogonales.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \cos(n\pi x) \cos(m\pi x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (\cos(n\pi x + m\pi x) + \cos(n\pi x - m\pi x)) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases} \\ \int_{-1}^1 \text{sen}(n\pi x) \text{sen}(m\pi x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (\cos(n\pi x - m\pi x) - \cos(n\pi x + m\pi x)) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\int_{-1}^1 \cos(n\pi x) \text{sen}(m\pi x) dx = 0. \quad \square$$

Proposición 4.1. *Sea $f(x)$ una función integrable y periódica en el intervalo $[-1, 1]$ y \mathcal{C}^1 a trozos. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, su serie de Fourier (4.1) converge puntualmente a*

$$\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

Notamos que si f es continua en x_0 , entonces la serie de Fourier es convergente a $f(x_0)$. Los límites laterales son necesarios únicamente si en x_0 hay un salto.

En el caso de tener una función par o impar, obtenemos las series de Fourier con solo cosenos y solo senos, respectivamente. Esto nos permite trabajar en el intervalo $[0, 1]$, en vez de en $[-1, 1]$.

Sea $f(x) = f(-x)$ función par, integrable en $[-1, 1]$. Entonces,

$$\begin{cases} a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx =: 2\tilde{a}_n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = 0, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Por tanto, su serie de Fourier es

$$\tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x).$$

Análogamente, si $f(x) = -f(-x)$ función impar, integrable en $[-1, 1]$, entonces $a_n = 0$ y obtenemos la serie de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x),$$

donde para $n = 1, 2, 3 \dots$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx.$$

Entonces, dada $f(x)$ definida en el intervalo $[0, 1]$, podemos hacer su extensión par $\tilde{f}(x)$ al intervalo $[-1, 1]$ para obtener su serie de Fourier en cosenos, o bien su extensión impar $\hat{f}(x)$ al intervalo $[-1, 1]$ para obtener su serie de Fourier en senos.

Este es el resultado que buscamos generalizar mediante las *series de Fourier-Bessel*, o también llamadas *series de Bessel*, definidas en el intervalo $[0, 1]$. En algunas ocasiones se utiliza un cambio de escala al intervalo $[0, a]$.

4.2. Series de Fourier-Bessel

Sacamos estos resultados (propiamente escalados al intervalo $[0, 1]$) de [1, §4,8].

Lema 4.2 (propiedad de ortogonalidad). Sea $x \in [0, 1]$ y sean $j_{n,k}, j_{n,q}$ ceros positivos de alguna función de Bessel fija $J_n(x)$, con $n \geq 0$. Entonces, se verifica

$$\int_0^1 x J_n(j_{n,k}x) J_n(j_{n,q}x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq q, \\ \frac{1}{2} J_{n+1}^2(j_{n,k}), & \text{si } k = q. \end{cases}$$

Demostración. Si $k = q$, tenemos la integral $\int_0^1 x J_n^2(j_{n,k}x) dx$. Sabemos que $J_n(j_{n,k}x)$ satisface la ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2 J_n(j_{n,k}x)}{dx^2} + x \frac{dJ_n(j_{n,k}x)}{dx} + (x^2 j_{n,k}^2 - n^2) J_n(j_{n,k}x) = 0.$$

Multiplicando por $2J_n'(j_{n,k}x)$ y reordenando los términos, obtenemos

$$\frac{d}{dx} \left[x^2 \left(\frac{dJ_n(j_{n,k}x)}{dx} \right)^2 \right] + \frac{d}{dx} \left[j_{n,k}^2 x^2 J_n^2(j_{n,k}x) \right] - 2j_{n,k}^2 x J_n^2(j_{n,k}x) - \frac{d}{dx} \left[n^2 J_n^2(j_{n,k}x) \right] = 0.$$

Procedemos a calcular la integral:

$$\int_0^1 x J_n^2(j_{n,k}x) dx = \frac{1}{2j_{n,k}^2} \left[x^2 \left(\frac{dJ_n(j_{n,k}x)}{dx} \right)^2 + (j_{n,k}^2 x^2 - n^2) J_n^2(j_{n,k}x) \right] \Bigg|_0^1$$

Vemos que la primitiva se anula para $x = 0$. Por lo tanto, aplicando (1.10):

$$\int_0^1 x J_n^2(j_{n,k}x) dx = \frac{1}{2} [J_n'(j_{n,k})]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{j_{n,k}^2} \right) J_n^2(j_{n,k}) = \frac{1}{2} [J_n'(j_{n,k})]^2 = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(j_{n,k}).$$

Veamos el caso $k \neq q$. Escribimos $w(x) = J_n(j_{n,k}x)$ y volvemos a la ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + x \frac{dw}{dx} + (j_{n,k}^2 x^2 - n^2) w = 0.$$

Podemos reescribirla como

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dw}{dx} \right) = x \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{dw}{dx} = - \frac{(j_{n,k}^2 x^2 - n^2) w}{x}.$$

Como $J_n(j_{n,k}x)$ y $J_n(j_{n,q}x)$ son soluciones de esta ecuación para $j_{n,k}$ y $j_{n,q}$, respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dJ_n(j_{n,k}x)}{dx} \right) &= - \frac{(j_{n,k}^2 x^2 - n^2) J_n(j_{n,k}x)}{x}, \\ \frac{d}{dx} \left(x \frac{dJ_n(j_{n,q}x)}{dx} \right) &= - \frac{(j_{n,q}^2 x^2 - n^2) J_n(j_{n,q}x)}{x}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambas ecuaciones por $J_n(j_{n,q}x)$ y $J_n(j_{n,k}x)$, respectivamente y restándolas, llegamos a

$$\begin{aligned} J_n(j_{n,q}x) \frac{d}{dx} \left(x \frac{dJ_n(j_{n,k}x)}{dx} \right) - J_n(j_{n,k}x) \frac{d}{dx} \left(x \frac{dJ_n(j_{n,q}x)}{dx} \right) \\ = \frac{j_{n,q}^2 x^2 - j_{n,k}^2 x^2 - n^2 + n^2}{x} J_n(j_{n,k}x) J_n(j_{n,q}x) = (j_{n,q}^2 - j_{n,k}^2) x J_n(j_{n,k}x) J_n(j_{n,q}x). \end{aligned}$$

Luego, por Barrow,

$$(j_{n,q}^2 - j_{n,k}^2) \int_0^1 x J_n(j_{n,k}x) J_n(j_{n,q}x) dx = \left(x J_n(j_{n,q}x) \frac{dJ_n(j_{n,k}x)}{dx} - x J_n(j_{n,k}x) \frac{dJ_n(j_{n,q}x)}{dx} \right) \Big|_0^1 = 0,$$

ya que $J_n(j_{n,k}) = J_n(j_{n,q}) = 0$ y $j_{n,k} \neq j_{n,q} \forall k \neq q$. □

El resultado anterior nos dice que, fijado $n \geq 0$, las funciones $\{J_n(j_{n,k}x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ forman un sistema ortogonal sobre el intervalo $[0, 1]$ con la medida $x dx$. De esta manera, podemos hablar de la serie de Fourier asociada a este sistema: para cada función $f \in L^2([0, 1], x dx)$ es una serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_n(j_{n,k}x), \tag{4.2}$$

donde los coeficientes a_k se calculan mediante la fórmula

$$a_k = \frac{1}{\|J_n(j_{n,k}x)\|_2^2} \langle f, J_n(j_{n,k}x) \rangle.$$

En este caso, el producto escalar se define como

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) x dx$$

y la norma es

$$\|g\|_2^2 = \langle g, g \rangle = \int_0^1 g(x)^2 x dx.$$

Es decir, usando la propiedad de ortogonalidad,

$$a_k = \frac{2}{J_{n+1}^2(j_{n,k})} \int_0^1 x f(x) J_n(j_{n,k}x) dx.$$

Con estos coeficientes, (4.2) se llama *serie de Fourier-Bessel de la función f* . Esto no garantiza que, en cada $x \in [0, 1]$, $f(x)$ sea igual a la serie (4.2). Pero, de manera análoga a las series de Fourier trigonométricas, se tiene este resultado de convergencia.

Proposición 4.2 (teorema del desarrollo de Bessel). *Sea $f(x) \in \mathcal{C}^1$ a trozos, es decir, que $f(x)$ y $f'(x)$ tienen a lo sumo un número finito de discontinuidades en el intervalo $[0, 1]$. Si $x \in (0, 1)$, entonces la serie (4.2) converge a $f(x)$ cuando x es un punto de continuidad, y a $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ si en x hay una discontinuidad.*

Bibliografía

- [1] N. H. ASMAR, *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, University of Missouri, 2.^a ed., Pearson Prentice Hall, 2005.
- [2] F. BOWMAN, *Introduction to Bessel functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1958.
- [3] G. BACHMAN, L. NARICI Y E. BECKENSTEIN, *Fourier and wavelet analysis*, Springer-Verlag New York Inc., 2000, § 4.6.
- [4] B. CUARTERO Y F. J. RUIZ, *Teoría de funciones de variable compleja*, Apuntes del área de análisis matemático, Universidad de Zaragoza.
- [5] J. DUTKA, *On the early history of Bessel functions*, *Archive for History of Exact Sciences* **49** (1995) no. 2, 105–134, <https://www.jstor.org/stable/41134001>.
- [6] A. GRAY, G. B. MATHEWS Y T. M. MACROBERT, *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*, Macmillan, 2.^a ed., London, 1922.
- [7] J. J. O'CONNOR Y E. F. ROBERTSON, *Friedrich Wilhelm Bessel*, *Mac Tutor History of Mathematics*, University of Saint Andrews, Scotland, versión de octubre de 1997. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bessel/>.
- [8] F. W. J. OLVER, A. B. OLDE DAALHUIS, D. W. LOZIER, B. I. SCHNEIDER, R. F. BOISVERT, C. W. CLARK, B. R. MILLER, B. V. SAUNDERS, H. S. COHL, Y M. A. MCCLAIN, *Bessel functions*, NIST Digital Library of Mathematical Functions, <https://dlmf.nist.gov/10>, versión 1.1.12 del 15-12-2023.
- [9] E. M. STEIN Y R. SHAKARCHI, *Fourier analysis: an introduction*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2003.
- [10] A. TIKKANEN, *Friedrich Wilhelm Bessel*, *Encyclopedia Britannica*, versión del 18-07-2023, <https://www.britannica.com/biography/Friedrich-Wilhelm-Bessel>.
- [11] C. J. TRANTER, *Bessel functions with some physical applications*, The English Universities Press LTD, London, 1968.
- [12] G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, 2.^a ed., Cambridge, 1966.
- [13] E. T. WHITTAKER Y G. N. WATSON, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, 3.^a ed., London, 1920.