

Estudio geométrico de las hipocicloides



Alberto Cabrejas Baztán
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Diciembre de 2023

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Resumen | 5 |
| 2. Preámbulo | 7 |
| 2.1. Polinomios en varias variables | 7 |
| 2.2. Curvas | 8 |
| 2.3. Polinomios de Chebyshev | 9 |
| 2.3.1. Polinomios de Chebyshev de primer tipo | 10 |
| 2.3.2. Polinomios de Chebyshev de segundo tipo | 11 |
| 2.4. Geometría proyectiva | 13 |
| 2.4.1. Polinomios homogéneos | 15 |
| 2.4.2. Parametrizaciones proyectivas | 16 |
| 2.4.3. Parametrizaciones racionales | 17 |
| 2.4.4. Intersecciones de curvas | 18 |
| 3. Estructura geométrica de la hipocicloide | 21 |
| 3.1. Motivación | 21 |
| 3.2. Construcción general | 21 |
| 3.3. Parametrización trigonométrica | 22 |
| 3.4. Propiedades afines | 22 |
| 3.5. Parametrización racional | 24 |
| 3.6. Parametrización proyectiva | 25 |
| 3.7. Singularidades, nodos y cúspides | 25 |
| 4. Conclusiones | 31 |
| 4.1. Aplicaciones de las hipocicloides | 31 |
| 4.2. Futuras investigaciones | 31 |
| 5. Bibliografía | 33 |

Capítulo 1

Resumen

Las hipocicloides, intrigantes curvas geométricas generadas por el movimiento de un círculo más pequeño dentro de otro de mayor tamaño, han sido objeto de fascinación y estudio a lo largo de la historia de las matemáticas. Su belleza y su complejidad ha inspirado a matemáticos, físicos, ingenieros y artistas a explorar las propiedades de estas curvas, resultando indispensables en campos tan diversos como la ingeniería mecánica, la física, la relojería y el diseño gráfico.

El objetivo principal de este trabajo es analizar y entender la hipocicloide desde múltiples perspectivas, desde su definición matemática hasta sus aplicaciones prácticas. A lo largo del trabajo, se abordarán cuestiones fundamentales, como la parametrización de la curva, las ecuaciones que la describen y las propiedades geométricas que la hacen única.

Más adelante, estableceremos la conexión entre las hipocicloides cerradas, que se desarrollan en el plano euclidiano, y sus contrapartes en el espacio proyectivo. Así como su parametrización racional y la relación que tiene con el espacio proyectivo.

A lo largo de este trabajo, utilizaremos herramientas matemáticas avanzadas para abordar estas preguntas, presentando ejemplos concretos y casos especiales que ilustren los conceptos teóricos. También se explorarán problemas abiertos y posibles direcciones para futuras investigaciones, contribuyendo así al avance del conocimiento en esta área específica de la geometría y la matemática avanzada.

La novedad de este trabajo, respecto a cuando se estudian dichas curvas de forma tradicional, es el uso del espacio proyectivo y parametrizaciones racionales, entre otras cosas.

Finalmente, se explorarán posibles extensiones de la investigación y preguntas abiertas que podrían motivar futuras investigaciones en este campo.

Capítulo 2

Preámbulo

2.1. Polinomios en varias variables

Comencemos introduciendo algunos resultados sobre polinomios en varias variables.

Definición-Proposición 2.1. Sea A un anillo, \mathbb{N}_0 el conjunto de los enteros positivos incluyendo el cero. Se define el anillo de polinomios en n variables $A[x_1, \dots, x_n]$ como el conjunto de todas las funciones $f: \mathbb{N}_0^n \rightarrow A$ tales que $f(\mathbf{v}) = 0$ salvo para un cantidad finita de elementos $\mathbf{v} \in \mathbb{N}_0^n$. Las operaciones en $A[x_1, \dots, x_n]$ vienen dadas por la suma y el producto de funciones.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n . Si $n = 1$ es claro que $A[x_1]$ es anillo. Supongamos cierto que $A[x_1, \dots, x_{n-1}]$ es anillo, entonces notar

$$A[x_1, \dots, x_n] = A[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]. \quad \square$$

Notación 2.2. Sea $f \in A[x_1, \dots, x_n]$ y el conjunto finito $F_f = \{\mathbf{v} \in \mathbb{N}_0^n \mid f(\mathbf{v}) \neq 0\}$. Denotando $a_{\mathbf{v}} = f(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in F_f$ y estableciendo que $x^{\mathbf{v}} = x_1^{v_1} \cdots x_n^{v_n}$ consideramos la siguiente notación

$$f(x) = \sum_{\mathbf{v} \in F_f} a_{\mathbf{v}} x^{\mathbf{v}}, \text{ que abreviamos } f = \sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} x^{\mathbf{v}}.$$

Los valores $a_{\mathbf{v}} \in A$ son los *coeficientes de f* dado que

$$\sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} x^{\mathbf{v}} = \sum_{\mathbf{v}} b_{\mathbf{v}} x^{\mathbf{v}} \iff a_{\mathbf{v}} = b_{\mathbf{v}} \quad \forall \mathbf{v}.$$

En particular, un polinomio de la forma $a_{\mathbf{v}} x^{\mathbf{v}}$ para algún $\mathbf{v} \in \mathbb{N}_0^n$ recibe el nombre de *monomio*.

Como consecuencia de la definición de $A[x_1, \dots, x_n]$, se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.3. Sean A, B anillos tales que A es subanillo de B y sea $b = (b_1, \dots, b_n) \in B^n$ entonces se tiene un homomorfismo evaluación descrito por

$$\begin{aligned} ev_b : \quad A[x_1, \dots, x_n] &\rightarrow B \\ f(x) = \sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} x^{\mathbf{v}} &\mapsto f(b) = \sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} b^{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Definición 2.4. Dado un polinomio no nulo $f = \sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} x^{\mathbf{v}} \in A[x_1, \dots, x_n]$ se define el *grado de f* como

$$\text{gr}(f) = \max\{\|\mathbf{v}\| \mid a_{\mathbf{v}} \neq 0\}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sum_{i=1}^n |v_i|.$$

Si f es el polinomio nulo, por convenio establecemos que $\text{gr}(f) = -\infty$.

Nota 2.5. En adelante consideraremos $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}).

Las siguientes propiedades del grado son inmediatas y serán utilizadas en adelante.

Proposición 2.6. Sean $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ entonces se verifica

$$1) \text{ gr}(fg) = \text{gr}(f) + \text{gr}(g)$$

$$2) \text{ gr}(f + g) \leq \text{máx}\{\text{gr}(f), \text{gr}(g)\}$$

Nota 2.7. Obsérvese que dado $f \in \mathbb{K}[x_1]$ podemos definir el concepto de *coeficiente director de f* , que denotaremos por $\text{CD}(f)$. Sin embargo, dicho concepto no se puede extender de forma natural a un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], n \geq 2$. En efecto, como veremos a continuación, se puede dar el caso de que al menos dos monomios tengan grado máximo pero distintos coeficientes.

Ejemplo 2.8. Sea $f(x, y, z) = 3x^2y^3 - 2z^2 + x^2yz^2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$, notar

$$\text{gr}(f) = \text{máx}\{5, 2, 5\} = 5.$$

Definición 2.9. Sea un polinomio $f = \sum_v a_v x^v \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ entonces se dice que $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{K}^n$ es *solución de f* si $f(r_1, \dots, r_n) = 0$. Denotamos $Z(f)$ al conjunto de todas las soluciones de f .

2.2. Curvas

Con el objetivo de poder describir analíticamente una hipocicloide, vamos a recordar algunos resultados sobre curvas.

Definición 2.10. Sea $n \in \mathbb{N}, I$ un abierto conexo de un cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C})$ y $\underline{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ una aplicación infinitamente diferenciable. La función \underline{x} se denomina *curva (en \mathbb{K}^n)*. En particular, si $n = 2$ diremos simplemente *curva plana*.

Nota 2.11. Por abuso del lenguaje, a veces se confunde la curva con su imagen,

$$\text{Img}(\underline{x}) = \{\underline{x}(t) \in \mathbb{K}^n \mid t \in I\}.$$

También hablaremos de curva si la aplicación \underline{x} está bien definida sobre I excepto un número finito de puntos.

Definición 2.12. Sea $\underline{x} : I \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^n$ una curva, la aplicación que define $\underline{x}(t)$ se denomina *parametrización (afín) de la curva*.

Nota 2.13. En particular, si todas las componentes de $\underline{x}(t)$, en adelante $\underline{x}^i(t)$ o simplemente \underline{x}^i , son funciones trigonométricas diremos *parametrización trigonométrica*.

Definición 2.14. Sean $p_i, q_i \in \mathbb{K}[t]$ y sea una curva $\underline{x} : I \setminus \{t \in I \mid q_i(t) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{K}^n$ tal que

$$\underline{x}(t) = \left(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \right).$$

En este caso, nos referimos a $\underline{x}(t)$ como *parametrización racional*.

Definición 2.15. Sea $\underline{x} : I \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^n$ una curva tal que $\underline{x}^i \in \mathbb{K}[t]$ para todo i , entonces se define el *grado de $\underline{x}(t)$* como

$$\text{gr}(\underline{x}(t)) = \text{máx}_i \{\text{gr}(\underline{x}^i)\}.$$

A continuación, un ejemplo sobre el concepto que acabamos de ver.

Ejemplo 2.16. Obsérvese que

$$\text{Img}(\underline{\mathbf{u}}) = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \& \quad \text{Img}(\underline{\mathbf{v}}) = \{(t^3, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

definen el mismo subconjunto en \mathbb{R}^2 , pero tienen distintas parametrizaciones. De hecho, también lo son sus grados dado que

$$\text{gr}\{(t, 0)\} = 1, \quad \text{gr}\{(t^3, 0)\} = 3.$$

Definición 2.17. Una curva $\underline{\mathbf{x}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice *cerrada* si existe un periodo $T > 0$ tal que $\underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{x}}(t + T)$.

Definición 2.18. Sea $\underline{\mathbf{x}}: I \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^n$ una curva, entonces se dice que $t = t_0$ es un *punto singular* de la parametrización si

$$d\underline{\mathbf{x}}(t_0) = \underline{\mathbf{x}}'(t_0) = \vec{0}.$$

Definición 2.19. Sea $\underline{\mathbf{x}}: I \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^2$ una curva plana, se dice que $\underline{\mathbf{x}}$ tiene una *cúspide* en $t = t_0$ si t_0 es un punto singular y tras un cambio de coordenadas en \mathbb{K}^2 se tiene que

$$\underline{\mathbf{x}}''(t_0) = (\alpha, 0), \quad \underline{\mathbf{x}}'''(t_0) = (*, \beta)$$

con $\alpha\beta \neq 0$.

Nota 2.20. Equivalentemente, aunque de una forma menos rigurosa, se dice que $\underline{\mathbf{x}}$ tiene una cúspide en $t_0 \in I$ si en un entorno de $\underline{\mathbf{x}}(t_0)$ la curva empieza a retroceder. En adelante, si no hay confusión, llamaremos cúspide tanto a t_0 como a $\underline{\mathbf{x}}(t_0)$. Seguidamente, procedemos a poner un ejemplo de una cúspide.

Ejemplo 2.21. Obsérvese que la curva $\underline{\mathbf{x}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\underline{\mathbf{x}}(t) = (t^2, t^3)$ tiene una única cúspide en $t = 0$ dado que

$$\underline{\mathbf{x}}'(0) = (0, 0), \quad \underline{\mathbf{x}}''(0) = (2, 0), \quad \underline{\mathbf{x}}'''(0) = (0, 6).$$

Además, si dibujamos la curva, podemos observar como ésta comienza a retroceder en un entorno del punto $(0, 0)$.

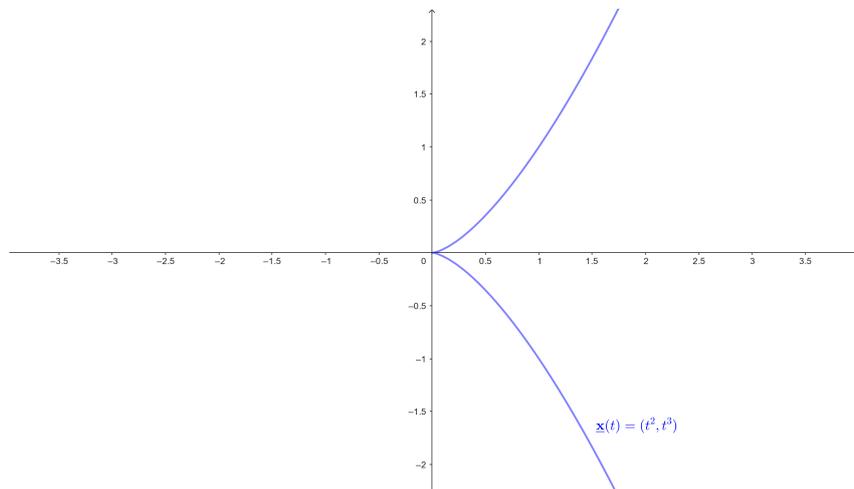


Figura 2.1: Ejemplo de cúspide.

2.3. Polinomios de Chebyshev

Como veremos más adelante, podemos parametrizar una hipocicloide usando polinomios de Chebyshev. Es por eso, que usaremos esta sección para introducir dichos polinomios y enunciar algunas de sus propiedades.

2.3.1. Polinomios de Chebyshev de primer tipo

Definición-Proposición 2.22. Sea $n \in \mathbb{Z}$, los polinomios de Chebyshev de primer tipo se definen como los polinomios $T_n \in \mathbb{Z}[x]$ tales que

$$T_n(\cos(n\theta)) = \cos(n\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Nota 2.23. La prueba de este resultado se verá más adelante, hasta entonces supondremos cierto el resultado. En adelante, si no se indica lo contrario, consideraremos $T_n, n \geq 0$.

Dado que el coseno es una función par se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.24. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se verifica

$$T_n = T_{-n}.$$

Antes de probar la Definición-Proposición 2.22, es necesario introducir el siguiente resultado.

Lema 2.25. Se verifica la siguiente relación de recurrencia

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Obérvase que las dos primeras igualdades se deducen de (2.1). Por otro lado, notar que $\forall \theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\begin{cases} \cos(\theta(n+1)) = \cos(\theta n) \cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta n) \operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\theta(n-1)) = \cos(\theta n) \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta n) \operatorname{sen}(\theta) \end{cases} \implies T_{n+1} + T_{n-1} = 2xT_n. \quad \square$$

Proposición 2.26. Se tiene que

$$T_n \in \mathbb{Z}[x], \quad \operatorname{gr}(T_n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. El hecho de que $T_n(x)$ sean polinomios con coeficientes enteros es consecuencia de la anterior relación de recurrencia. Para ver que T_n tiene grado n , basta aplicar el proceso de inducción sobre su grado. En efecto, notar que $\operatorname{gr}(T_0) = 0$. Supongamos cierto que $\operatorname{gr}(T_n) = n$, entonces aplicando la hipótesis de inducción en la anterior relación de recurrencia se tiene que

$$\operatorname{gr}(T_{n+1}) = \operatorname{gr}(2xT_n - T_{n-1}) = n + 1. \quad \square$$

Nota 2.27. En resumen,

$$T_j(x) = \sum_{i=0}^j a_{j,i} x^i \quad \forall a_{j,i} \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

A continuación, estudiaremos algunas propiedades que involucran a T_n .

Proposición 2.28. El polinomio T_n tiene n raíces reales distintas. Si $n > 0$, éstas son

$$\cos\left(\frac{\pi(1+2m)}{2n}\right), \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Demostración. Se tiene que si $x = \cos(\theta)$:

$$T_n(\cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2}(1+2m), \quad \forall m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{(1+2m)\pi}{2n}\right).$$

Ahora bien, tomando $m = 0, \dots, n-1$ se obtienen n valores distintos para $\cos\left(\frac{(1+2m)\pi}{2n}\right)$. En efecto notar que

$$\frac{(1+2m)\pi}{2n} + \frac{(1+2m')\pi}{2n} = 2\pi \Leftrightarrow m + m' = 2n - 1.$$

Contradicción. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, dado que T_n tiene grado n , se tiene que éstas son todas las raíces de T_n . \square

Nota 2.29. Observar que T_{n_1} y T_{n_2} pueden tener raíces comunes. Por ejemplo, T_2 y T_6 tienen en común la raíz $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{3\pi}{4})$ para $n_1 = 2$ y $m_1 = 1$ en el primer caso y $n_2 = 6$ y $m_2 = 4$ en el segundo.

Sin embargo, si n_1 y n_2 son primos entre sí, entonces T_{n_1} y T_{n_2} no tienen raíces comunes.

Proposición 2.30. Considerando T_n como un polinomio de grado n se verifica

$$T_n(1) = 1 \quad \& \quad \text{CD}(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. Las dos primeras igualdades son consecuencia de (2.1) dado que

$$T_n(1) = \cos(n \cdot (2m\pi)) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \& \quad T_0 = 1.$$

Para la otra parte, razónese de forma similar a lo visto en Proposición 2.26. □

2.3.2. Polinomios de Chebyshev de segundo tipo

Definición-Proposición 2.31. Sea $n \in \mathbb{Z}$, los polinomios de Chebyshev de segundo tipo se definen como los polinomios $U_n \in \mathbb{Z}[x]$ tales que

$$U_n(\cos(\theta)) = \text{sen}(\theta(n+1)) \text{sen}^{-1}(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Nota 2.32. Observar que lo mencionado en *Nota 2.23* es extrapolable a U_n .

Dado que el seno es una función impar se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.33. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ se verifica,

$$U_{-n} = -U_{n-2}.$$

Al igual que T_n , los polinomios de Chebyshev de segundo tipo también se pueden definir recursivamente. Antes de verlo, necesitamos introducir el siguiente resultado.

Lema 2.34. Se verifica

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(y) = 2 \text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Notar que

$$\begin{cases} \text{sen}(a+b) = \text{sen}(a) \cos(b) + \cos(a) \text{sen}(b) \\ \text{sen}(a-b) = \text{sen}(a) \cos(b) - \cos(a) \text{sen}(b) \end{cases} \implies \text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2 \text{sen}(a) \cos(b).$$

El resultado se tiene aplicando el cambio de variable

$$x = a+b, \quad y = a-b. \tag{2.4}$$

Lema 2.35. Se verifica la siguiente relación de recurrencia

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 2x, \quad U_{n+1} = 2xU_n - U_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Obérvase que las dos primeras igualdades se deducen inmediatamente de (2.3). Por otro lado, aplicando el lema anterior tenemos que $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$ se verifica

$$\frac{\text{sen}(\theta(n+2)) + \text{sen}(\theta n)}{\text{sen}(\theta)} = \frac{2 \text{sen}(\theta(n+1)) \cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \iff U_{n+1} + U_{n-1} = 2xU_n. \tag{2.5} \quad \square$$

Teniendo en cuenta el resultado anterior y razonando de forma similar a lo visto en Proposición 2.26 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.36. *Se tiene que*

$$U_n \in \mathbb{Z}[x], \quad \text{gr}(U_n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Nota 2.37. En resumen,

$$U_j(x) = \sum_{i=0}^j b_{j,i} x^i \quad \forall b_{j,i} \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

A continuación, estudiaremos algunas propiedades que involucran a U_n .

Proposición 2.38. *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se verifican las siguientes igualdades:*

- 1) $T_{n+1} = xU_n - U_{n-1}$.
- 2) $T_n = \frac{1}{2}(U_n - U_{n-2})$.
- 3) $T'_n = nU_{n-1}$.
- 4) $T_{n+1} = xT_n - (1 - x^2)U_{n-1} \quad \& \quad T_n = U_n - xU_{n-1}$.
- 5) $U'_n = \frac{(n+1)T_{n+1} - xU_n}{x^2 - 1}$.

Demostración. Para probar estos resultados vamos a necesitar las definiciones de los polinomios de Chebyshev y sus respectivas relaciones de recurrencia, vistas anteriormente.

- 1) Procedemos a aplicar el proceso de inducción sobre n . Si $n = 0$ notar que $T_1 = xU_0 - U_{-1} = x$. Supongamos cierto que $T_{n+1} = xU_n - U_{n-1}$, entonces

$$\begin{aligned} T_{n+2} &= 2xT_{n+1} - T_n = 2x(xU_n - U_{n-1}) - T_n = 2x^2U_n - 2xU_{n-1} - T_n \\ &= 2x^2 \left(\frac{U_{n+1} + U_{n-1}}{2x} \right) - 2xU_{n-1} - T_n = xU_{n+1} - xU_{n-1} - T_n \\ &= xU_{n+1} - xU_{n-1} - (xU_{n-1} - U_{n-2}) = xU_{n+1} - 2xU_{n-1} + U_{n-2} = xU_{n+1} - U_n. \end{aligned}$$

- 2) Es consecuencia del apartado anterior. En efecto, notar que

$$U_n = 2xU_{n-1} - U_{n-2} = 2(T_n + U_{n-2}) - U_{n-2} = 2T_n + U_{n-2}.$$

- 3) Basta aplicar inducción sobre n y el apartado 2). En efecto, si $n = 0$ se notar que $T'_0 = 0$. Supongamos cierto que $T'_n = nU_{n-1}$, entonces

$$\begin{aligned} T'_{n+1} &= (2xT_n - T_{n-1})' = 2T_n + 2xT'_n - T'_{n-1} = 2T_n + 2x(nU_{n-1}) - (n-1)U_{n-2} \\ &= 2T_n + n(2xU_{n-1} - U_{n-2}) + U_{n-2} = 2T_n + nU_n + U_{n-2} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}(U_n - U_{n-2}) \right) + nU_n + U_{n-2} = (n+1)U_n. \end{aligned}$$

- 4) Para la primera igualdad, notar que

$$xT_n - (1 - x^2)U_{n-1} = \cos(\theta) \cos(n\theta) - (1 - \cos^2(\theta)) \cdot \frac{\text{sen}(n\theta)}{\text{sen}(\theta)} = \cos(\theta(n+1)) = T_{n+1}.$$

La segunda igualdad es consecuencia 1) dado que

$$T_n = xU_{n-1} - U_{n-2} = xU_{n-1} - (2xU_{n-1} - U_n) = U_n - xU_{n-1}.$$

5) El resultado es consecuencia de 3) y 4). En efecto,

$$\begin{aligned}
 T_{n+1} = xT_n - (1-x^2)U_{n-1} &\implies T'_{n+1} = T_n + xT'_n - U'_{n-1} + 2xU_{n-1} - (1-x^2)U'_{n-1} \\
 &\iff (n+1)U_n = T_n + x(nU_{n-1}) + 2xU_{n-1} + (x^2-1)U'_{n+1} \\
 &\iff (n+1)(U_n - xU_{n-1}) = T_n + xU_{n-1} + (x^2-1)U'_{n-1} \\
 &\iff (n+1)T_n - T_n - xU_{n-1} = (x^2-1)U'_{n-1} \iff U'_{n-1} = \frac{nT_n - xU_{n-1}}{x^2-1}.
 \end{aligned}$$

□

Proposición 2.39. *El polinomio U_n tiene n raíces reales distintas. Si $n > 0$, éstas son*

$$\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right), \quad m = 1, \dots, n.$$

Demostración.

$$U_n = 0 \iff \theta(n+1) = m\pi, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \iff x = \cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right).$$

Si tomamos $m = 0, \dots, n+1$, como en la demostración de la Proposición 2.28, obtenemos $n+2$ valores distintos de x . Por la definición de U_n , debemos eliminar los valores $m = 0$ y $m = n+1$ dado que $\theta = \frac{m}{n+1}\pi$ es un múltiplo entero de π . Por el Teorema Fundamental del Álgebra y puesto que U_n tiene grado n , hemos encontrado las n raíces de U_n . □

Teniendo en cuenta la relación de recurrencia de U_n y razonando de forma similar a lo visto en Proposición 2.30 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.40. *Se tiene que*

$$\text{CD}(U_n) = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

2.4. Geometría proyectiva

El objetivo de este capítulo es darle otro enfoque a las parametrizaciones racionales y probar un caso particular del teorema de Bézout ya que, como veremos más adelante, estos conceptos juegan un papel fundamental en las propiedades de las hipocicloides.

Definición 2.41. Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y un cuerpo $\mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$. Se define el *espacio proyectivo* (n -dimensional), en adelante $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ o simplemente \mathbb{P}^n , como el conjunto de todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas en \mathbb{K}^{n+1} .

Definición 2.42. Dos puntos

$$X = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad Y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$$

se dicen *equivalentes* si verifican la siguiente relación de equivalencia

$$X \mathfrak{R} Y \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ tal que } y_i = \lambda x_i \quad \forall i. \tag{2.5}$$

La definición anterior está bien definida en el sentido que \mathfrak{R} es efectivamente una relación de equivalencia. En efecto, sean $X, Y, Z \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ entonces

$$\begin{cases}
 X \mathfrak{R} X. \text{ Inmediato tomando } \lambda = 1, \\
 X \mathfrak{R} Y \iff y_i = \lambda x_i \iff x_i = \frac{1}{\lambda} y_i \iff Y \mathfrak{R} X, \\
 X \mathfrak{R} Y, Y \mathfrak{R} Z \iff y_i = \lambda_1 x_i, y_i = \lambda_2 z_i \Rightarrow z_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_i \iff X \mathfrak{R} Z.
 \end{cases}$$

A continuación, estudiaremos algunas propiedades sobre el espacio proyectivo.

Lema 2.43. *Se tiene la siguiente identificación,*

$$\mathbb{P}^n \equiv (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathfrak{R}.$$

Demostración. Sea un punto $X = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, entonces basta identificar X con la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene vector director \vec{X} , es decir,

$$X \equiv X + \langle \vec{X} \rangle = [x_1 : \dots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n.$$

El recíproco se prueba de forma similar. □

Nota 2.44. En consecuencia, llamaremos *puntos (proyectivos)* a los elementos de \mathbb{P}^n . Las coordenadas del punto $[x_1 : \dots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n$ se denominan *coordenadas homogéneas*. El significado de las coordenadas homogéneas lo veremos en el siguiente resultado.

El siguiente resultado es consecuencia de la relación de equivalencia vista en (2.5).

Lema 2.45. *Sea $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ entonces*

$$[x_1 : \dots : x_{n+1}] = [\lambda x_1 : \dots : \lambda x_{n+1}] \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^*. \quad (2.6)$$

Proposición 2.46. *Sea $U_i = \{[u_1 : \dots : u_{n+1}] \in \mathbb{P}^n \mid u_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$, cualquier $P \in U_i$ se puede escribir como $P = [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_{n+1}]$. De hecho, existe una biyección natural $\mathbb{K}^n \cong U_i$ dada por*

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad \mathbb{K}^n &\rightarrow U_i \subset \mathbb{P}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_i : \dots : x_n] \end{aligned}$$

Demostración. Sea $[p_1 : \dots : p_{n+1}] \in U_i$, obsérvese que por definición U_i se tiene que $p_i \neq 0$. El resultado se tiene aplicando el lema anterior tomando $\lambda = 1/p_i$ puesto que

$$[p_1 : \dots : p_{n+1}] = [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_{n+1}], \quad x_k = \frac{p_k}{p_i}.$$

La biyección descrita es inmediata. □

Nota 2.47. Las coordenadas $[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}]$ descritas anteriormente se denominan *coordenadas no homogéneas* de P respecto de U_i .

Lema 2.48. *En las condiciones de la proposición anterior,*

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i.$$

Demostración. Sea $X = [x_1 : \dots : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n$ entonces $x_i \neq 0$ para algún i . Aplicando (2.6) con $\lambda = 1/x_i$ tenemos que

$$X = [p_1 : \dots : p_{i-1} : 1 : p_{i+1} : \dots : p_n] \in \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i, \quad p_k = \frac{x_k}{x_i}.$$

El otro contenido es inmediato. □

Definición 2.49. Definimos el *hiperplano del infinito* como

$$H_\infty = \mathbb{P}^n \setminus U_{n+1} = \{[x_1 : \dots : x_n : 0]\} \cong \mathbb{P}^{n-1}.$$

2.4.1. Polinomios homogéneos

El objetivo de esta parte es estudiar la relación que existe entre los polinomios homogéneos y el espacio proyectivo. Comencemos introduciendo algunos conceptos sobre polinomios homogéneos.

Definición 2.50. Un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ se dice *homogéneo de grado* $d \in \mathbb{N}$ si

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n).$$

Lema 2.51. Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio homogéneo de grado d tal que (r_1, \dots, r_n) es raíz de f entonces

$$\lambda(r_1, \dots, r_n) \in Z(f) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

Demostración. Notar que

$$f(r_1, \dots, r_n) = 0 \iff \lambda^d f(r_1, \dots, r_n) = 0 \iff f(\lambda r_1, \dots, \lambda r_n) = 0. \quad \square$$

Definición 2.52. Dado $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio de grado $d \geq 0$, podemos definir una operación denominada *homogeneización de f* , que consiste en definir un nuevo polinomio $\bar{f} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$ en una nueva variable y , de manera que

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n, 1) = f(x_1, \dots, x_n),$$

donde \bar{f} es homogéneo de grado d .

El siguiente resultado nos asegura la existencia de homogeneización para todo polinomio no nulo.

Lema 2.53. En las condiciones de la definición anterior,

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n, y) = y^\delta f\left(\frac{x_1}{y}, \dots, \frac{x_n}{y}\right)$$

es una homogeneización de f , $\delta \geq d$.

Demostración. En primer lugar, veamos que $\bar{f} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$.

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n, y) = y^\delta \sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} \left(\frac{x}{y}\right)^{\mathbf{v}} = \sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} x^{\mathbf{v}} y^{\delta - \|\mathbf{v}\|} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y],$$

ya que $\delta - \|\mathbf{v}\| \geq 0$. Notar que $\bar{f}(x_1, \dots, x_n, 1) = f(x_1, \dots, x_n)$. Por otro lado, obsérvese que \bar{f} es homogéneo de grado δ dado que

$$\bar{f}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \lambda y) = \lambda^\delta y^\delta f\left(\frac{x_1}{y}, \dots, \frac{x_n}{y}\right) = \lambda^\delta \bar{f}(x_1, \dots, x_n, y). \quad \square$$

Como veremos a continuación, vamos a relacionar los polinomios homogéneos con el espacio proyectivo.

Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio homogéneo de grado d y $p = [p_1 : \dots : p_n] \in \mathbb{P}^{n-1}$. En general, no está bien definido $f(p_1, \dots, p_n)$ si $(p_1, \dots, p_n) \notin Z(f)$. En efecto, por hipótesis tenemos que $f(\lambda p) = \lambda^d f(p)$ y por tanto, si $f(p) \neq 0$ y $\lambda^d \neq 1$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que $f(\lambda p) \neq f(p)$. Sin embargo, si $f(p) = 0$ podemos reescribir el resultado anterior en términos del espacio proyectivo, es decir, tiene sentido decir que el punto p es solución de f dado que

$$f(\lambda p) = f(p) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

Procedemos a poner un ejemplo de lo que acabamos de ver.

Ejemplo 2.54. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ tal que $f(x, y) = x + y$. Notar que f es homogéneo de grado 1 y

$$Z(f) = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Consideremos el punto proyectivo $[a : b] \in \mathbb{P}^1$ tal que $(a, b) \notin Z(f)$. Ahora bien, por lo visto en (2.6), tenemos que

$$[a : b] = [\lambda a : \lambda b] \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Sin embargo, notar que

$$f(a, b) = a + b, \quad f(\lambda a, \lambda b) = \lambda(a + b).$$

Así pues, $f(a, b)$ no está bien definido dado que, en general,

$$\lambda(a + b) \neq a + b.$$

Por otro lado, si consideramos $[a : -a] \in \mathbb{P}^1$, notar que $(a, -a) \in Z(f)$, entonces tenemos que

$$f(a, -a) = f(\lambda a, -\lambda a) = 0 \quad \forall \lambda, a \in \mathbb{R}^*.$$

Observar que no admitimos el caso $a = 0$ dado que $[0 : 0] \notin \mathbb{P}^1$, tal y como hemos visto en Lema 2.43.

2.4.2. Parametrizaciones proyectivas

A continuación, expondremos brevemente el concepto de parametrización proyectiva que nos será de gran utilidad más adelante.

Sean $n, s \in \mathbb{N}_0$. Recordamos que una *parametrización* es simplemente una aplicación

$$\begin{aligned} \delta : \quad \mathbb{K}^{s+1} &\rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ \bar{t} = (t_1, \dots, t_{s+1}) &\mapsto (\delta_1(\bar{t}), \dots, \delta_{n+1}(\bar{t})) \end{aligned}$$

Podemos definir un concepto similar de parametrización entre espacios proyectivos. En general, las parametrizaciones de curvas en las que se hace uso del espacio proyectivo se conocen como *parametrizaciones proyectivas*.

Proposición 2.55. En el contexto anterior, sean $\delta_i(\bar{t})$ son $n + 1$ polinomios homogéneos de grado d en $s + 1$ variables y sea $U = \cap_i Z(\delta_i)$, entonces se tiene el siguiente morfismo

$$\begin{aligned} \bar{\delta} : \quad \mathbb{P}^s \setminus U &\rightarrow \text{Img}(\bar{\delta}) \subset \mathbb{P}^n \\ \bar{t} = [t_1 : \dots : t_{s+1}] &\mapsto [\delta_1(\bar{t}) : \dots : \delta_{n+1}(\bar{t})] \end{aligned}$$

Demostración. Sea $V = \{\bar{t} \in \mathbb{K}^{s+1} \mid \delta_i(\bar{t}) = 0\}$ y P_i la proyección canónica. Basta ver que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{s+1} \setminus V & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \downarrow P_1 & \searrow \delta' & \downarrow P_2 \\ \mathbb{P}^s \setminus U & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Por como hemos definido V , tenemos que δ está bien definida puesto que $\delta(\bar{t}) \neq 0$ y en consecuencia tenemos que $\delta' = P_2 \circ \delta$ está bien definido. Todavía más, dado que δ_i son polinomios homogéneos del mismo grado se tiene

$$\delta(\lambda \bar{t}) = \lambda^d \delta(\bar{t}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^{s+1} \setminus V.$$

En consecuencia, δ' verifica

$$\delta'(\lambda \bar{t}) = \lambda^d \delta'(\bar{t}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^{s+1} \setminus V. \quad \square$$

2.4.3. Parametrizaciones racionales

A continuación vamos a exponer un proceso que nos va a permitir relacionar las parametrizaciones racionales con el espacio proyectivo.

Sean dos polinomios $p_i, q_i \in \mathbb{K}[t]$ y sea $\underline{x} : I \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^n$ una curva tal que

$$\underline{x}(t) = \left(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \right), \quad (2.7)$$

con p_i/q_i son fracciones irreducibles, es decir, p_i y q_i no tienen factores comunes. Notar que en esta situación se producen lugares de indefinición en aquellos valores $t \in I$ tales que $q_i(t) = 0$. A priori, esto es un gran problema, pero como veremos a continuación, lo podemos solucionar usando el espacio proyectivo. Sea q el mínimo común múltiplo de los q_i , el cual existe dado que $\mathbb{K}[t]$ es un dominio euclídeo. Sea $h_i \in \mathbb{K}[t]$ tal que $h_i q_i = q$, entonces notar que

$$\underline{x}(t) = \left(\frac{p_1 h_1}{q}, \dots, \frac{p_n h_n}{q} \right).$$

Para ver (2.7) como un elemento del espacio proyectivo, basta considerar la inclusión φ_{n+1} descrita en la Proposición 2.46 y entonces se tiene

$$\varphi_{n+1} \circ \underline{x} = \varphi_{n+1} \left(\frac{p_1 h_1}{q}, \dots, \frac{p_n h_n}{q} \right) = [p_1 h_1 : \dots : p_n h_n : q] \in \mathbb{P}^n.$$

Notar que la anterior expresión está bien definida dado que no hay raíces comunes de las $n + 1$ componentes por hipótesis. Todavía más, dado que las componentes de la parametrización proyectiva son polinomios en una variable, podemos homogeneizar dicha parametrización de forma que todas las componentes sean polinomios homogéneos de grado $\delta_1 = \max\{\text{gr}(p_i h_i), \text{gr}(q)\}$. Para ello, basta aplicar Lema 2.53 tomando $\delta_1 = \delta$.

A continuación, vamos a exponer mediante un ejemplo esta construcción, pero antes vamos a introducir un resultado.

Lema 2.56. Para todo $x \in (-\pi, \pi)$ se tiene

$$\text{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \text{cos}(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (2.8)$$

donde $t = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Demostración. Notar que

$$\begin{cases} \text{sen}(2u) = \frac{2 \frac{\text{sen}(u)\text{cos}(u)}{\text{cos}^2(u)}}{\frac{\text{cos}^2(u)+\text{sen}^2(u)}{\text{cos}^2(u)}} = \frac{2 \text{tg}(u)}{1+\text{tg}^2(u)}, \\ \text{cos}(2u) = \frac{\frac{\text{cos}^2(u)-\text{sen}^2(u)}{\text{cos}^2(u)}}{\frac{\text{cos}^2(u)+\text{sen}^2(u)}{\text{cos}^2(u)}} = \frac{1-\text{tg}^2(u)}{1+\text{tg}^2(u)}. \end{cases}$$

El resultado es consecuencia de hacer el cambio de variable $u = \frac{x}{2}$. □

Ejemplo 2.57. Consideremos la circunferencia unidad centrada en el origen de coordenadas. Es bien sabido, que podemos parametrizar dicha curva como

$$\underline{x}(u) = (\text{cos}(u), \text{sen}(u)) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Aplicando el lema anterior, obtenemos la siguiente parametrización racional

$$\underline{x}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right).$$

Si permitimos que $t \in \mathbb{C}$, nuestra parametrización no está bien definida en $t = \pm i$. Ahora bien, homogeneizando la parametrización racional y aplicando Proposición 2.46 notar que

$$\psi(t, s) = (\varphi_3 \circ \underline{x}) \left(\frac{t}{s} \right) = \left[\frac{s^2 - t^2}{s^2 + t^2} : \frac{2ts}{s^2 + t^2} : 1 \right] = [s^2 - t^2 : 2ts : s^2 + t^2].$$

Obsérvese que usando la identificación $\mathbb{C} = \{(t, 1) \mid t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{P}^1$ (como visto en la sección 2.4) y dado que ψ^i son polinomios homogéneos de grado 2 en dos variables, se tiene que $\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es la parametrización proyectiva de una curva compleja en \mathbb{P}^2 (ver sección 2.4.2) que extiende a \underline{x} en el sentido de que $\text{Img}(\psi) \cap \mathbb{C}^2 = \text{Img}(\underline{x})$, donde $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$.

2.4.4. Intersecciones de curvas

El objetivo de esta parte es probar un caso particular del teorema de Bézout, pero previamente es necesario introducir algunos resultados.

Definición 2.58. Sea $f = \sum_v a_v x^v \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, se define el *orden* de f como

$$\text{ord}_x(f) = \min\{\text{gr}(x^v) \mid a_v \neq 0\}.$$

Definición 2.59. Sean $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$ tales que

$$f(0, 0) = g(0, 0), \quad f_x(0, 0) \neq 0.$$

Por el Teorema de la Función Implícita podemos encontrar una función h de forma que $f(t, h(t)) = 0$. Se define la *multiplicidad de intersección* de f y g en el punto $(0, 0)$ como

$$m_{(0,0)}(f, g) = \text{ord}_t(g(t, h(t))).$$

Nota 2.60. En particular, si $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ y existen dos funciones h_1, h_2 tales que $f(h_1(t), h_2(t)) = 0$ entonces

$$m_{(0,0)}(f, g) = \text{ord}_t(g(h_1(t), h_2(t))).$$

Obsérvese que para estudiar la multiplicidad de intersección en un punto $P \neq (0, 0)$ basta hacer un cambio de coordenadas.

A continuación expondremos algunos ejemplos sobre el concepto que acabamos de ver.

Ejemplo 2.61. Sean $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$ tales que

$$f(x, y) = y^2 - x, \quad g(x, y) = x^2 + 2x + 3y^2.$$

Notar que se cumplen las hipótesis de la definición anterior, puesto que

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0, \quad f_x(0, 0) = 1, \quad f_y(0, 0) = 0.$$

Por tanto, tomando $h(t) = t^2$ tenemos que

$$m_{(0,0)}(f, g) = \text{ord}_t(g(h(t), t)) = \text{ord}_t(t^4 + 5t^2) = 2.$$

Ejemplo 2.62. Sean $F \in \mathbb{R}[x, y, z], G \in \mathbb{R}[x, y]$ tales que

$$F(x, y, z) = x, \quad G(x, y) = y - x^2.$$

Razonando de forma análoga al ejemplo anterior se puede comprobar que

$$m_{(0,0)}(x, y - x^2) = 1.$$

Antes de probar ver el teorema de Bézout, necesitamos introducir un resultado.

Lema 2.63. *Sea un polinomio homogéneo $f \in \mathbb{C}[t, s]$ tal que $\text{gr}(f) = d$, entonces f tiene d raíces (contadas con multiplicidad).*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f(t, s) = t^m s^n f_1(t, s)$ tal que

$$f_1(0, s), f_1(t, 0) \neq 0.$$

Puesto que f es homogéneo, entonces f_1 es homogéneo de grado $\text{gr}(f_1) = d - m - n = \delta_1$ y en consecuencia tenemos que

$$f_1(t, s) = \sum_{i+j=\delta_1} a_{i,j} t^i s^j.$$

Por tanto, $f_1(t, 1) \in \mathbb{C}[t]$ y $\text{gr}(f_1(t, 1)) = \delta_1$. En efecto, suponer que $\text{gr}(f_1(t, 1)) < \delta_1$ entonces $\text{gr}(f_1(t, 1)) < \delta_1 \iff a_{\delta_1,0} = 0 \implies f_1(t, 0) = 0$ que contradice la hipótesis sobre $f_1(t, 0)$. Aplicando el Teorema Fundamental del Álgebra se tiene que

$$f_1(t, 1) = a_{\delta_1,0} \prod (t - \alpha_i)^{m_i}$$

donde $\sum m_i = \delta_1$. De este modo, homogeneizando, se tiene que

$$f(t, s) = a_{\delta_1,0} t^m s^n \prod (t - \alpha_i s)^{m_i}$$

donde $m + n + \sum m_i = m + n + \delta_1 = d$ como queríamos demostrar. \square

Teorema 2.64. *Sean $F_1, F_2 \in \mathbb{K}[x, y, z]$ homogéneos tales que no tienen factores en común y $\text{deg}(F_i) > 0$ entonces*

$$\sum_{p \in Z(F_1) \cap Z(F_2)} m_p(F_1, F_2) = \text{gr}(F_1) \text{gr}(F_2).$$

Demostración. Vamos a probar el resultado en el caso que $F_1(x, y, z) = ax + by + cz$ ya que es lo que vamos a necesitar con las hipocicloides, probarlo en general escapa de los objetivos de este trabajo. Notar que siempre podemos encontrar una parametrización proyectiva homogénea de F_1

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ [t : s] &\mapsto [\varphi_1(t, s) : \varphi_2(t, s) : \varphi_3(t, s)] \end{aligned}$$

con φ_i lineales de grado 1 tales que $F_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$. Entonces, notar que $F_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ es un polinomio homogéneo, en dos variables (s y t) tal que

$$\text{gr}(F_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \text{gr}(F_2) \text{gr}(\varphi_i) = \text{gr}(F_2).$$

De hecho, $F_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ es no nulo por hipótesis, por tanto aplicando el lema anterior tenemos que F_2 tiene $\text{gr}(F_2)$ raíces contadas con su multiplicidad. \square

A continuación pondremos un ejemplo de la aplicación de este teorema.

Ejemplo 2.65. Sean F, G como en el Ejemplo 2.62. Entonces notar que para estar en las condiciones del teorema de Bezout, basta homogeneizar G . Por tanto, consideramos

$$\tilde{G}(x, y, z) = yz - x^2$$

que es una homogeneización de G puesto que \tilde{G} es homogéneo de grado 2 tal que $\tilde{G}(x, y, 1) = G(x, y)$. Por otro lado, notar que

$$Z(F) \cap Z(\tilde{G}) = \left\{ \begin{array}{l} (0, y, 0), \text{ si } z = 0 \\ (0, 0, z), \text{ si } z \neq 0 \end{array} \right. \equiv \{[0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\} \cup \{(0, 0, 0)\}.$$

Ahora, deshomogeneizando \tilde{G} y razonando de forma similar a lo visto en Ejemplo 2.61, se puede comprobar que

$$m_{(0,0)}(x, y - x^2) = m_{(0,0)}(x, z - x^2) = 1.$$

Por tanto, se verifica el Teorema de Bézout en el sentido que

$$\sum_{p \in Z(F) \cap Z(\tilde{G})} m_p(F, \tilde{G}) = 1 + 1 = \text{gr}(F) \text{gr}(\tilde{G}).$$

Capítulo 3

Estructura geométrica de la hipocicloide

3.1. Motivación

En objetivo de este capítulo es definir y estudiar algunas propiedades más importantes de las hipocicloides.

3.2. Construcción general

A continuación, procedemos a construir una hipocicloide en el plano. Sean $R, r \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $R > r$. Fijemos un punto en el plano $(x_{0,R}, y_{0,R})$ y construimos la circunferencia

$$C_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_{0,R})^2 + (y - y_{0,R})^2 = R^2\}.$$

Ahora, tomemos un punto $(x_R, y_R) \in C_R$ y sea S el segmento que se crea al unir los puntos $(x_{0,R}, y_{0,R})$ y (x_R, y_R) , entonces construimos el punto

$$(x_{0,r}, y_{0,r}) := S \cap \{(x - x_R)^2 + (y - y_R)^2 = r^2\}.$$

Por último, construimos la circunferencia

$$C_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_{0,r})^2 + (y - y_{0,r})^2 = r^2\}.$$

Se llama *hipocicloide* al rastro que deja el punto (x_R, y_R) cuando hacemos rodar sin deslizamiento C_r sobre C_R , en una dirección fija. Veámoslo gráficamente.

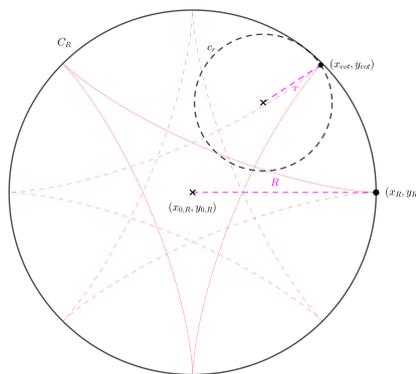


Figura 3.1: Dibujo de una hipocicloide tomando $r = 3$, $R = 8$.

Nota 3.1. En adelante, suponemos que

$$(x_{0,R}, y_{0,R}) = (0, 0), \quad (x_R, y_R) = (R, 0).$$

Definición 3.2. Los puntos de auto-intersección de una hipocicloide se denominan *nodos*.

3.3. Parametrización trigonométrica

Una vez definido el concepto de hipocicloide, veamos que relación tiene con lo visto en la sección 2.2. Todo parece indicar que cualquier hipocicloide va a coincidir con la imagen de alguna curva plana, y eso es justo lo que vamos a ver a continuación.

Proposición 3.3. *Sea H una hipocicloide, entonces existe una curva plana $\underline{x}_{R,r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que*

$$\text{Img}(\underline{x}_{R,r}) = H.$$

Demostración. Notar que al girar sin deslizamiento C_r sobre C_R un ángulo θ hasta llegar a la posición x obtenemos la siguiente situación.

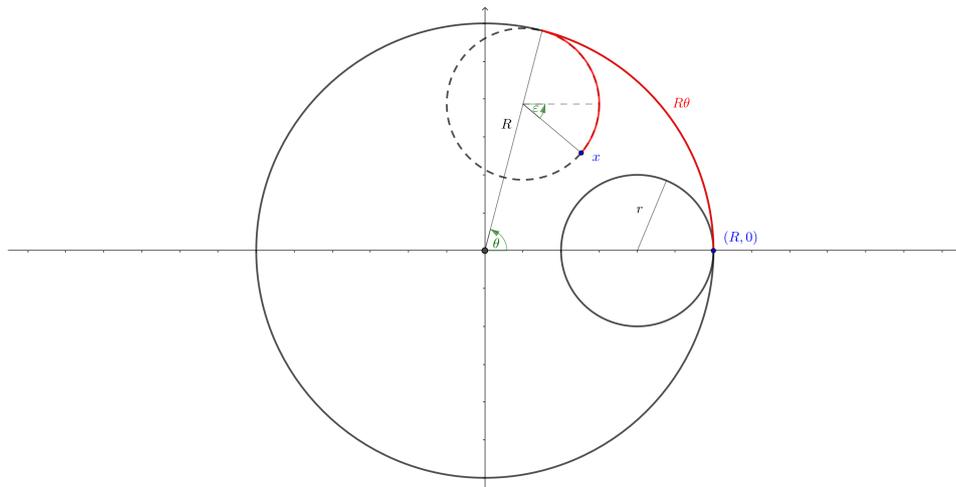


Figura 3.2: Parametrización de la hipocicloide.

Notar que al no tener deslizamiento los arcos de color rojo son iguales. Por tanto podemos descomponer el arco recorrido por C_r de forma que

$$R\theta = r\theta + \lambda \iff \lambda = (R - r)\theta.$$

Así pues, se tiene que

$$\varepsilon = \left(\frac{R - r}{r} \right) \theta.$$

En consecuencia, acabamos de encontrar $\underline{x}_{R,r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que para todo $\theta \in \mathbb{R}$

$$\underline{x}_{R,r}(\theta) = (R - r)e^{i\theta} + re^{i\theta[1 - \frac{R}{r}]} = H. \quad (3.1)$$

□

Nota 3.4. En adelante, siempre que no haya confusión, llamaremos hipocicloide tanto a la curva $\underline{x}_{R,r}$ como a su imagen.

3.4. Propiedades afines

A continuación, vamos a estudiar algunas propiedades de las hipocicloides.

Proposición 3.5. *Una hipocicloide $\underline{x}_{R,r}$ es cerrada si y solo si $\frac{R}{r} \in \mathbb{Q}_{>0}$. Además su periodo es 2π .*

Demostración. Notar que

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_{R,r} \text{ es cerrada} &\implies \exists \theta \in \mathbb{R}_{>0} \text{ t.q. } \underline{\mathbf{x}}_{R,r}(\theta) = \underline{\mathbf{x}}_{R,r}(0) = R \Leftrightarrow e^{i\theta} = e^{i\theta[1-\frac{R}{r}]} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2k_1\pi = \frac{2k_2\pi}{1-\frac{R}{r}}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{k_2}{k_1} = 1 - \frac{R}{r} \Leftrightarrow \frac{R}{r} \in \mathbb{Q}_{>0}. \end{aligned}$$

Por otro lado, se puede comprobar que $\underline{\mathbf{x}}_{R,r}(\theta) = \underline{\mathbf{x}}_{R,r}(\theta + 2\pi)$. □

Nota 3.6. En adelante, suponemos que $\underline{\mathbf{x}}_{R,r}$ es cerrada.

Por cuestiones que se tratarán más adelante, véase Nota 3.17, es conveniente introducir una nueva notación para referirnos a las hipocicloides.

Notación 3.7. Sean

$$\rho := \frac{r}{R} = \frac{\ell}{N} \quad \& \quad k := N - \ell \tag{3.2}$$

tales que $\frac{\ell}{N}$ es fracción irreducible, es decir, N, ℓ son enteros positivos coprimos.

Nota 3.8. Obsévese que si x es el giro de ángulo $2\pi/N$ y (G, \circ) es el grupo de los giros de la hipocicloide entonces se tiene, $G = \langle x^\ell \rangle$ puesto que N, ℓ son coprimos

Con esta notación, que nos sera muy útil más adelante, podemos reparametrizar la hipocicloide como vamos a ver en el próximo resultado.

Lema 3.9. *Sea una hipocicloide $\underline{\mathbf{x}}_{R,r}$ con $\frac{r}{R} \in \mathbb{Q}$ entonces*

$$\underline{\mathbf{x}}_{R,r}(\theta) = \underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}(\theta) = \frac{R}{N} \cdot (k \cos(\ell\theta) + \ell \cos(k\theta), k \sin(\ell\theta) - \ell \sin(k\theta)) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

De hecho, podemos pensar en $\frac{R}{N}$ como el coeficiente de dilatación.

Demostración. El resultado es consecuencia de aplicar la notación introducida en (3.2) en la parametrización vista en (3.1). En efecto, notar que

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_{R,r}(\theta) &= \left((R-r) \cos(\theta) + r \cos\left(\theta \left[1 - \frac{R}{r}\right]\right), (R-r) \sin(\theta) + r \sin\left(\theta \left[1 - \frac{R}{r}\right]\right) \right) \\ &= RN^{-1} (k \cos(\theta) + \ell \cos(k\theta/\ell), k \sin(\theta) - \ell \sin(k\theta/\ell)). \end{aligned}$$

El resultado se tiene haciendo el cambio de parámetro $\theta \mapsto \ell\theta$. □

Nota 3.10. En adelante supondremos que $k > \ell$. En efecto, obsévese que en (3.3) se verifica que

$$\underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}(\theta) = \underline{\mathbf{x}}_{\ell,k}(-\theta),$$

y por tanto podemos suponer que $k \geq \ell$. Si $k = \ell$ como son coprimos entonces son iguales a 1 y $N = 2$. En tal caso, sustituyendo nuevamente en (3.3) se tiene que $\underline{\mathbf{x}}_{1,1}$ es en realidad el segmento $[-R, R] \times \{0\}$. En consecuencia, podemos asumir que $k > \ell$.

Proposición 3.11. *Una hipocicloide cerrada $\underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}$ se mantiene invariante si aplicamos cualquiera de los siguientes movimientos,*

1) una simetría respecto al eje de abscisas.

2) una rotación de ángulo $\frac{2\pi}{N}$.

Demostración.

- 1) El resultado se deduce de la parametrización vista en (3.3). En efecto, tomemos un punto $(x, y) \in \text{Img}(\underline{\mathbf{x}}_{k,\ell})$, equivalentemente,

$$(x, y) = \underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}(\theta) \text{ para algún } \theta \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, se tiene

$$\underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}(-\theta) = (x, -y) \in \text{Img}(\underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}).$$

- 2) En primer lugar, probaremos que la curva es invariante por una rotación de ángulo $\frac{2k\pi}{N}$. Como $k = N - \ell$, se tiene que

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{N} + \ell\theta\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{N} + \frac{2\ell\pi}{N} - \frac{2\ell\pi}{N} + \ell\theta\right) = \cos\left(\ell\left[\frac{2\pi}{N} - \theta\right]\right).$$

Aplicando la anterior igualdad se puede comprobar que

$$\begin{aligned} \frac{R}{N} \cdot \begin{bmatrix} \cos(2k\pi/N) & -\sin(2k\pi/N) \\ \sin(2k\pi/N) & \cos(2k\pi/N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1(\theta) \\ \underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}^2(\theta) \end{bmatrix} &= \frac{R}{N} \cdot \begin{bmatrix} k \cos\left(\ell\left[\frac{2\pi}{N} - \theta\right]\right) + \ell \cos\left(k\left[\frac{2\pi}{N} - \theta\right]\right) \\ k \sin\left(\ell\left[\frac{2\pi}{N} - \theta\right]\right) + \ell \sin\left(k\left[\frac{2\pi}{N} - \theta\right]\right) \end{bmatrix} \\ &= \underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}\left(\frac{2\pi}{N} - \theta\right). \end{aligned}$$

Veamos por último que es invariante por un giro de ángulo $2\pi/N$. Dado que k y N son enteros coprimos, podemos aplicar la Identidad de Bézout, para encontrar $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que $ku + Nv = 1$. El ángulo $\frac{2\pi}{N}$ se obtiene aplicando u veces el giro de ángulo $\frac{2k\pi}{N}$ dado que

$$\frac{2k\pi}{N}u = \frac{2\pi \cdot (ku + Nv)}{N} - 2\pi v = \frac{2\pi}{N} - 2\pi v \equiv \frac{2\pi}{N}. \quad \square$$

3.5. Parametrización racional

A continuación, daremos una parametrización racional de $\underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}$ usando los polinomios de Chebyshev.

Proposición 3.12. *Sea una hipocicloide cerrada $\underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}$ entonces*

$$\underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}(t) = \frac{R}{N} \left(kT_\ell(\gamma) + \ell T_k(\gamma), \frac{2t}{1+t^2} [kU_{\ell-1}(\gamma) - \ell U_{k-1}(\gamma)] \right), \quad \gamma = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Demostración. El resultado es consecuencia de aplicar (2.1),(2.3),(2.8) en la parametrización vista en (3.3). En efecto, notar que

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}(\theta) &= RN^{-1} (k \cos(\ell\theta) + \ell \cos(k\theta), k \sin(\ell\theta) - \ell \sin(k\theta)) \\ &= RN^{-1} (kT_\ell(\cos(\theta)) + \ell T_k(\cos(\theta)), k \sin(\theta)U_{\ell-1}(\cos(\theta)) - \ell \sin(\theta)U_{k-1}(\cos(\theta))) \\ &= RN^{-1} (kT_\ell(\gamma) + \ell T_k(\gamma), 2t(1+t^2)^{-1} [kU_{\ell-1}(\gamma) - \ell U_{k-1}(\gamma)]). \end{aligned}$$

□

En adelante, para simplificar los cálculos es conveniente considerar $R = 1$, en consecuencia trabajaremos con la siguiente parametrización racional

$$\underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}(t) = \frac{1}{N} \left(kT_\ell(\gamma) + \ell T_k(\gamma), \frac{2t}{1+t^2} [kU_{\ell-1}(\gamma) - \ell U_{k-1}(\gamma)] \right), \quad \gamma = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (3.4)$$

3.6. Parametrización proyectiva

El objetivo de esta parte es dar una parametrización proyectiva de una hipocicloide cerrada. Notar que si permitimos que $t \in \mathbb{C}$ en (3.4), obtenemos una curva cerrada compleja, que llamamos *hipocicloide compleja*, que no está bien definida en $t = \pm i$. Sin embargo, esto no es un problema, puesto que repitiendo el argumento usando en Ejemplo 2.57, tenemos que $\underline{\mathbf{x}}_{k,\ell}$ se puede extender a una curva proyectiva $\tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell} \subseteq \mathbb{P}^2$ cuya parametrización proyectiva viene dada por

$$\tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}(t, s) = \left[\eta^k (kT_\ell(\xi) + \ell T_k(\xi)) : 2ts\eta^{k-1} (kU_{\ell-1}(\xi) - \ell U_{k-1}(\xi)) : N\eta^k \right]$$

donde $\xi = \frac{s^2-t^2}{s^2+t^2}$ $\eta = s^2 + t^2$.

Nota 3.13. Obsérvese que los puntos que no estaban definidos en la parametrización racional si que están definidos en la parametrización proyectiva por tanto $\tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}$ está bien definida. Notar que sus componentes son polinomios homogéneos en dos variables de grado $2k$ y en consecuencia

$$\text{gr}(\tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}(t, s)) = 2k.$$

Gracias a esta parametrización proyectiva tenemos el el siguiente resultado.

Lema 3.14. *Sea $\tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}$ una hipocicloide cerrada compleja,*

$$\tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}(1, \pm i) = [1 : \pm i : 0].$$

Demostración. Notar que usando la notación polinómica introducida en (2.2),(2.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}^1(t, s) &= (s^2 + t^2)^k \left[k \sum_{i=0}^{\ell} a_{\ell,i} \xi^i + \ell \sum_{i=0}^k a_{k,i} \xi^i \right] \\ &= k \sum_{i=0}^{\ell} a_{\ell,i} (s^2 + t^2)^{k-i} (s^2 - t^2)^i + \ell \sum_{i=0}^k a_{k,i} (s^2 + t^2)^{k-i} (s^2 - t^2)^i. \end{aligned}$$

Razónese de forma similar para $\tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}^2$. Por tanto, podemos reescribir la parametrización proyectiva de $\tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}$ de forma que

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}^1(t, s) = k \sum_{i=0}^{\ell} a_{\ell,i} (s^2 + t^2)^{k-i} (s^2 - t^2)^i + \ell \sum_{i=0}^k a_{k,i} (s^2 + t^2)^{k-i} (s^2 - t^2)^i, \\ \tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}^2(t, s) = 2st \left(k \sum_{i=0}^{\ell-1} b_{\ell-1,i} (s^2 + t^2)^{k-(i+1)} (s^2 - t^2)^i - \ell \sum_{i=0}^{k-1} b_{k-1,i} (s^2 + t^2)^{k-(i+1)} (s^2 - t^2)^i \right), \\ \tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}^3(t, s) = N (s^2 + t^2)^k. \end{array} \right.$$

El resultado se tiene sin más que evaluar el sistema anterior en el punto $(1, \pm i)$. En efecto, notar

$$\tilde{\underline{\mathbf{x}}}_{k,\ell}(1, \pm i) = [(-2)^k \ell \text{CD}(T_k) : \pm i (-2)^k \ell \text{CD}(U_{k-1}) : 0] = [1 : \pm i : 0]. \quad \square$$

3.7. Singularidades, nodos y cúspides

Por último, vamos a usar todo lo visto hasta ahora para probar un resultado acerca de los nodos de una hipocicloide cerrada. Pero antes eso necesitamos introducir un resultado

Lema 3.15. *En las condiciones vistas en (3.2), tal que $k > \ell$ y N es par se tiene que*

$$U_{k-1} + U_{\ell-1} = 2T_{\frac{k-\ell}{2}} U_{\frac{N}{2}-1} \quad \& \quad T_k - T_\ell + x(U_{k-1} + U_{\ell-1}) = U_k + U_{\ell-2}.$$

Demostración. Probaremos que $4T_{\frac{k-\ell}{2}}^2 U_{\frac{N}{2}-1}^2 = (U_{k-1} + U_{\ell-1})^2$. Si esto es cierto para todo θ , entonces para valores positivos $\theta > 0$ muy próximos a cero, ambos lados de la igualdad son positivos, y por tanto se sigue el resultado.

$$4T_{\frac{k-\ell}{2}}^2 U_{\frac{N}{2}-1}^2 \sin^2(\theta) = 4 \left(\frac{1 - \cos((k-\ell)\theta)}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos((k-\ell)\theta)}{2} \right)$$

$$(1 + \cos(k\theta) \cos(\ell\theta) + \sin(k\theta) \sin(\ell\theta))(1 - \cos(k\theta) \cos(\ell\theta) + \sin(k\theta) \sin(\ell\theta))$$

$$(1 - \sin(k\theta) \sin(\ell\theta))^2 - \cos^2(k\theta) \cos^2(\ell\theta) = (\sin(k\theta) + \sin(\ell\theta))^2.$$

En segundo lugar, notar que la segunda ecuación está bien definida salvo en el caso $\ell = 1$ dado que estamos considerando U_{-1} , pero esto no supone un problema dado que U_{-1} está bien definido como hemos visto en (2.3). Por tanto, la segunda igualdad está bien definida. En consecuencia,

$$T_k - T_\ell + x(U_{k-1} + U_{\ell-1}) = \cos(k\theta) - \cos(\ell\theta) + \cos(\theta) \left(\frac{\sin(k\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{\sin(\ell\theta)}{\sin(\theta)} \right)$$

$$= \frac{\sin(\theta(1+k))}{\sin(\theta)} + \frac{\sin(\theta(-1+\ell))}{\sin(\theta)} = U_k + U_{\ell-2}.$$

□

A continuación, el teorema fundamental de este trabajo.

Teorema 3.16. *La hipocicloide cerrada compleja $\tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}$ verifica las siguientes propiedades:*

- 1) *El grupo diédrico de orden $2N$ actúa por simetrías sobre la hipocicloide.*
- 2) *Tiene N cúspides distintas todas ellas reales sobre la circunferencia unidad.*
- 3) *Tiene $N(k-2)$ nodos, de los cuales $N(\ell-1)$ son nodos reales y $N(k-\ell-1)$ nodos complejos no reales.*
- 4) *Su parametrización proyectiva es inyectiva fuera de los $N(k-2)$ nodos.*

Demostración.

- 1) Se sigue de lo visto en Proposición 3.11.
- 2) En primer lugar, vamos a estudiar los puntos singulares en la parte afín. Para ello, utilizamos la siguiente parametrización que se obtiene inmediatamente a partir de la parametrización proyectiva, vista en la sección 3.6.

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}(t, s) = \frac{1}{N} \left(kT_\ell(\xi) + \ell T_k(\xi), \frac{2ts}{s^2 + t^2} [kU_{\ell-1}(\xi) - \ell U_{k-1}(\xi)] \right), \quad \xi = \frac{s^2 - t^2}{s^2 + t^2}.$$

Aplicando únicamente la regla de la cadena y la Proposición 2.38 (apartados 3 y 5) se puede comprobar que

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1}{\partial t} = \frac{-4s^2 t k \ell}{N(s^2 + t^2)^2} [U_{\ell-1}(\xi) + U_{k-1}(\xi)], \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^2}{\partial t} = \frac{2s k \ell}{N(s^2 + t^2)} [T_\ell(\xi) - T_k(\xi)]. \end{cases}$$

En consecuencia, se tiene el siguiente sistema.

$$S_1 := \begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^2}{\partial t} = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{-4s^2 t k \ell}{N(s^2 + t^2)^2} [U_{\ell-1}(\xi) + U_{k-1}(\xi)] = 0, \\ \frac{2s k \ell}{N(s^2 + t^2)} [T_\ell(\xi) - T_k(\xi)] = 0. \end{cases}$$

Obsérvese que $(0, 1)$ es claramente solución de S_1 dado que

$$T_\ell(1) = T_k(1) = 1.$$

Por ende, $(0, 1)$ es un punto singular.

Ahora supongamos que $ts \neq 0$. Aplicando Lema 3.15 se tienen las siguientes propiedades

1. $\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1}{\partial t} = \frac{-8s^2tk\ell}{N(s^2+t^2)^2} T_{\frac{k-\ell}{2}}(\xi) U_{\frac{N}{2}-1}(\xi).$
2. $2ts \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^2}{\partial t} - (s^2 - t^2) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1}{\partial t} = \frac{8s^2tk\ell}{N(s^2+t^2)} T_{\frac{k-\ell}{2}-1}(\xi) U_{\frac{N}{2}-1}(\xi).$

La primera igualdad es inmediata. Para la segunda igualdad notar que

$$\begin{aligned} 2ts \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^2}{\partial t} - (s^2 - t^2) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1}{\partial t} &= \frac{4s^2tk\ell}{N(s^2+t^2)^2} (T_\ell(\xi) - T_k(\xi) + \xi[U_{\ell-1}(\xi) + U_{k-1}(\xi)]) \\ &= \frac{4s^2tk\ell}{N(s^2+t^2)^2} (U_\ell(\xi) + U_{k-2}(\xi)) \\ &= \frac{8s^2tk\ell}{N(s^2+t^2)} T_{\frac{k-\ell}{2}-1}(\xi) U_{\frac{N}{2}-1}(\xi). \end{aligned}$$

En consecuencia podemos considerar el siguiente sistema

$$S_2 := \begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1}{\partial t} = \frac{-8s^2tk\ell}{N(s^2+t^2)^2} T_{\frac{k-\ell}{2}}(\xi) U_{\frac{N}{2}-1}(\xi), \\ 2ts \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^2}{\partial t} - (s^2 - t^2) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1}{\partial t} = \frac{8s^2tk\ell}{N(s^2+t^2)} T_{\frac{k-\ell}{2}-1}(\xi) U_{\frac{N}{2}-1}(\xi). \end{cases}$$

Puesto que $ts \neq 0$, entonces notar que

$$(t, s) \text{ es solución de } S_1 \iff (t, s) \text{ es solución de } S_2 = 0.$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} S_2 = 0 &\iff \begin{cases} ts^2 T_{\frac{k-\ell}{2}}(\xi) U_{\frac{N}{2}-1}(\xi) = 0, \\ ts^2 T_{\frac{k-\ell}{2}-1}(\xi) U_{\frac{N}{2}-1}(\xi) = 0. \end{cases} \\ &\iff \{s = 0\} \cup \{t = 0\} \cup \{U_{\frac{N}{2}-1}(\xi) = 0\}. \end{aligned}$$

La última equivalencia se obtiene dado que $\frac{k-\ell}{2}$ y $\frac{k-\ell}{2} - 1$ son primos entre sí (ver Nota 2.29). Puesto que podemos calcular explícitamente las raíces de $U_{\frac{N}{2}-1}$ aplicando Proposición 2.39, se tiene que (t, s) es solución de S_1 si y solo si

$$(t, s) \in \{s = 0\} \cup \{t = 0\} \cup \left\{ \frac{s^2 - t^2}{s^2 + t^2} = \cos\left(\frac{2m\pi}{N}\right) \in \mathbb{R}, m = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right\}.$$

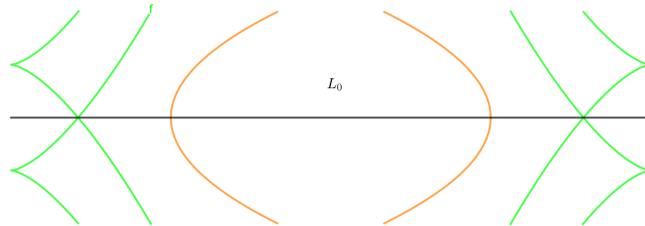
Con lo que tenemos un total de $2\left(\frac{N}{2} - 1\right) + 2 = N$ puntos singulares. A continuación veamos que dichas singularidades son efectivamente cúspides. Tomemos el punto singular $(0, 1)$, entonces se puede comprobar que

$$\tilde{\mathbf{x}}'_{k,\ell}(0, 1) = (0, 0), \quad \tilde{\mathbf{x}}''_{k,\ell}(0, 1) = \left(\frac{-8k\ell}{N}, 0\right), \quad \tilde{\mathbf{x}}'''_{k,\ell}(0, 1) = \left(*, \frac{k\ell}{N}(k^2 - \ell^2)\right).$$

Por tanto, de acuerdo con lo visto en Definición 2.19 tenemos que $(0, 1)$ es una cúspide. Puesto que la hipocicloide se mantiene invariante al aplicar un giro de ángulo $2\pi/N$, como hemos visto en Proposición 3.11, entonces aplicamos los N posibles giros al punto $\tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}(0, 1) = (1, 0)$ y en consecuencia se tiene el resultado.

Para el caso impar, la principal hay que considerar $(2k, 2\ell)$ en lugar de (k, ℓ) y en ese caso todo aparece por duplicado y hay que dividir por 2 ya que estamos recorriendo la curva dos veces.

- 3) De momento hacemos el caso N par. En primer lugar, puesto que tenemos un número par de cúspides notar que hay exactamente dos cúspides sobre la recta $L_0 = \{y = 0\}$. En efecto, por el apartado anterior sabemos que $(0,1)$ es una cúspide y aplicando sobre $\tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}(0,1) = (1,0)$ un giro de ángulo $N/2 \cdot 2\pi/N = \pi$ tenemos que $(-1,0)$ es otra cúspide. En resumen, sobre L_0 hay dos cúspides y en muchas ocasiones nodos, notar que si $\ell = 1, N = 8$ no hay nodos sobre L_0 . En segundo lugar, en caso de que existan, veamos cómo pueden ser dichos nodos sobre L_0 . Puesto que existe una simetría respecto de la recta L_0 tenemos los siguientes casos



Sin embargo, los casos con forma de parábola no son posibles puesto que

$$\{\tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^2 = 0\} \cap \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1}{\partial t} = 0 \right\} = \emptyset.$$

En efecto, por 2) se tiene que

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1}{dt}(t,s) = 0 \iff \{s = 0\} \cup \{t = 0\} \cup \{T_{\frac{k-\ell}{2}}(\xi) = 0\} \cup \{U_{\frac{N}{2}-1}(\xi) = 0\}.$$

No obstante, como estamos interesados exclusivamente en los nodos interiores debemos desechar los casos $t = s = 0$ ya que son cúspides, como hemos visto anteriormente. Por tanto, aplicando las proposiciones 2.28, 2.39 respectivamente tenemos que

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1}{dt}(t,s) = 0 \iff \begin{cases} \{\xi_1 = \cos\left(\frac{\pi(1+2m)}{k-\ell}\right), m = 0, \dots, \frac{k-\ell}{2} - 1\}, \\ \vee \\ \{\xi_2 = \cos\left(\frac{2m\pi}{N}\right), m = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\}. \end{cases}$$

Sin embargo, se puede comprobar que al sustituir ξ_i en $\tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^2(t,s)$ no hay raíces, salvo las descartadas $s = t = 0$.

En resumen, hemos visto que sobre L_0 tenemos dos cúspides ubicadas en $(1,0), (-1,0)$ y, en el caso que existan nodos, intersecan a L_0 en forma de cúspide.

En tercer lugar, notar que sin pérdida de generalidad podemos suponer que las cúspides son de la forma (t^2, t^3) y aplicando el teorema de Bézout tenemos que

$$L_0(\tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}(t,s)) = 2k \quad \& \quad L_0(t^2, t^3) = 3 \quad \& \quad L_0(\alpha) = 2$$

donde α es un nodo. Por tanto, sobre L_0 tenemos que

$$2k = 3 \cdot 2 + 2 \cdot \#nodos \iff \#nodos = k - 3.$$

Pero notar que tenemos $N/2$ casos como el de L_0 y por tanto tenemos que de momento hay $\frac{N}{2}(k-3)$ nodos. Sin embargo, notar que faltan por contar los nodos que se encuentran sobre la recta \tilde{L}_0 , que es la recta L_0 tras aplicarle un giro de ángulo π/N . Para poder contarlos, vamos a realizar el giro comentado anteriormente, para ello basta hacer el cambio $\theta \ell \mapsto \theta \ell + \pi$ en (3.3). En tal caso, se puede comprobar que

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}(t,s) = \mathbf{x}_{k,\ell}(\theta \ell + \pi) = \frac{1}{N} \left(\ell T_k(\xi) - k T_\ell(\xi), \frac{-2t}{1+t^2} \cdot (k U_{\ell-1}(\xi) + \ell U_{k-1}(\xi)) \right).$$

Notar que ahora tenemos una situación muy similar a la vista anteriormente con L_0 , salvo por el hecho que no hay cúspides sobre \tilde{L}_0 y que

$$\left\{ \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^2 = 0 \right\} \cap \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{k,\ell}^1}{\partial t} = 0 \right\} = 2,$$

Por tanto, sobre \tilde{L}_0 hay

$$2k = 2 \cdot \#nodos + 2 \Leftrightarrow \#nodos = k - 1.$$

De nuevo, notar que tenemos $N/2$ casos y por tanto tenemos $\frac{N}{2}(k-1)$ nodos. Sumando los nodos totales que teníamos en los casos L_0 y \tilde{L}_0 concluimos que hay

$$\frac{N}{2}(k-3) + \frac{N}{2}(k-1) = N(k-2) \text{ nodos.}$$

Para el caso impar, notar que al considerar la recta L_0 tenemos que sobre ésta sólo hay una tangente vertical, una cúspide y al menos un nodo, en consecuencia se tiene

$$2k = 3 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot \#nodos \Leftrightarrow \#nodos = k - 2.$$

Notar que hay N casos como éste, y por tanto hay $N(k-2)$ nodos y estos son todos dado que el caso \tilde{L}_0 coincide con el caso L_0 .

Veamos cuántos nodos son reales, tanto en el caso par como el impar, vamos a numerar las N cúspides en sentido antihorario de forma que

$$C_i = e^{2\pi k i / N}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Sea $L_{C_i, C_{i+\ell}}$ el segmento cuyos extremos son C_i y $C_{i+\ell}$. En particular, si $i = 0$ notar que sobre el arco de L_{C_0, C_ℓ} hay exactamente $\ell - 1$ cúspides y las líneas que forman la cúspide C_j , $0 < j < \ell$ inteseacan a L_{C_0, C_ℓ} en exactamente dos puntos distintos pues de no ser así tendríamos un nodo con multiplicidad 3, lo que contradice que los nodos estén en forma de cúspide. Por tanto, sobre L_{C_0, C_ℓ} tenemos $2(\ell - 1)$ nodos reales. Puesto que tenemos N casos como que acabamos de ver, y en tal caso estaríamos contando cada nodo dos veces, entonces se tiene el resultado.

4) Es inmediato, puesto que todos los puntos singulares son cúspides. □

Nota 3.17. Obsérvese que la notación introducida en (3.2) está completamente justificada dado que al considerar una hipocicloide $\mathbf{x}_{k,\ell}$, sabemos inmediatamente el número de cúspides que tiene y como dibujarla por lo visto en *Nota 3.8* y *Teorema 3.16*.

Capítulo 4

Conclusiones

En el transcurso de esta investigación centrada en las hipocicloides cerradas, hemos explorado con detenimiento las propiedades matemáticas de estas fascinantes curvas geométricas. A lo largo de este estudio, se han revelado aspectos notables en el que destacamos:

1. Complejidad Matemática: Las hipocicloides cerradas han demostrado ser objeto de estudio profundo y desafiante desde el punto de vista geométrico.

4.1. Aplicaciones de las hipocicloides

Las hipocicloides cerradas tienen diversas aplicaciones en la vida real. Algunas de estas aplicaciones incluyen:

1. Diseño de Engranajes y Transmisiones: Las hipocicloides cerradas son fundamentales en el diseño de engranajes y sistemas de transmisión mecánica. Su capacidad para generar movimientos suaves y eficientes es esencial en maquinaria industrial, automóviles y otros dispositivos mecánicos.
2. Diseño de Mecanismos de Relojería: En la relojería, las hipocicloides cerradas son esenciales en el diseño de mecanismos de relojes. Estas curvas contribuyen a la precisión en el movimiento de las manecillas y a la durabilidad de los engranajes.



Figura 4.1: Engranaje planetario.

4.2. Futuras investigaciones

A continuación, dejamos unas líneas de posible investigación en un futuro:

1. La extensión de las fórmulas que involucran a los polinomios Chebyshev a los números enteros y complejos.
2. El estudio de las hipocloides cuando $\frac{R}{r} \notin \mathbb{Q}$.

Capítulo 5

Bibliografía

FULTONM, W. *Algebraic Curves, An Introduction to Algebraic Geometry*, 2008.