Desigualdades

José Miguel Ejarque Peralta
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Julio Bernúes Pardo
Septiembre 2023

Abstract

Inequalities are at the heart of much of mathematics. An inequality is an order relationship that occurs between two expressions when they are different. G.H. Hardy reported that Harald Bohr said «All analysts spend half their time searching the literature for inequalities they want to use but can't prove». Additionally, inequalities appear in other fields such as theoretical physics, e.g., Heisenberg's inequalities, the Bekenstein-Hawking inequality, or thermodynamic inequalities.

Throughout the degree, numerous inequalities have been studied, but there is not enough time to delve into the study of others. Therefore, the objective of this work is to introduce a selection of inequalities that have not been seen so far, using the concepts acquired over these years and introducing others that will help us understand the different results. These inequalities mentioned below share a common thread: they address problems related to real analysis, and more particularly applied to linear analysis problems, in addition to putting them in context and showing how useful they are, indicating their applications in other areas of mathematics. For this reason, we will mostly rely on results from the subjects of Functional Analysis, Lebesgue Integral, and Fourier Analysis.

This project is based on the book *Inequalities: A Journey into Linear Analysis* by D.J.H. Garling. We will follow most of his proofs, though in some cases, we will modify them to provide a simpler and more concise demonstration.

We begin with an initial chapter in which we use basic concepts of arithmetic and Euclidean geometry to demonstrate the *arithmetic mean–geometric mean inequality*. It will serve as a way to introduce inequalities, besides that it can be proven in different ways and graphically interpreted to facilitate the reader.

Next, throughout the two following chapters, we delve into the study of L_p spaces, making use of measure theory and results such as *Hölder's inequality*. With this, we will carry out the demonstration of the *generalized Minkowski inequality*, or the *Liapounov and Littlewood inequalities*.

If in these L_p spaces we consider the dimension of space as a factor, we can understand how the volumes of sets in different dimensions are related. In this context, we will prove the *Loomis-Whitney inequality*. On the other hand, we will apply this result in the study of inequalities within *Sobolev spaces*.

We continue studying different results related to interpolation, specifically, *Schur's inequality* and its application to *Hilbert's inequality*. In addition, we will focus on the study of real interpolation with the two *theorems of Marcinkiewicz*; concluding with a final chapter where *Littlewood's* $4/3$ *inequality* is demonstrated, based on inequalities between norms in the space of $m \times n$ real or complex matrices.

Índice general

Capítulo 1

Desigualdad Aritmético - Geométrica

1.1. Introducción y contexto

Retrocedemos más de 2000 años para estudiar el *teorema de la media geométrica*. En él se expone la relación entre la altitud de la hipotenusa en un triángulo rectángulo y los dos segmentos de recta que crea en la hipotenusa, es decir:

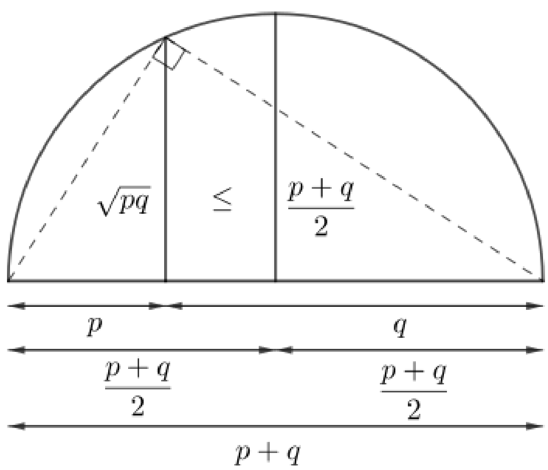
Teorema 1.1. *Si h denota la altitud en un triángulo rectángulo y p y q los segmentos de la hipotenusa, entonces*

$$h = \sqrt{pq}, \ \ h^2 = pq$$

El teorema suele atribuirse a Euclides *(ca. 360-280 a. C.)*, y forma parte de uno de los trece libros que conforman su obra *Elementos*.

1.2. Desigualdad Aritmético - Geométrica

Una de las aplicaciones del teorema proporciona una prueba geométrica de la *desigualdad AM-GM* en el caso de dos números. Para los números p y q se construye un semicírculo con diámetro $p+q$. Ahora la altitud representa la media geométrica y el radio la media aritmética de los dos números. Como la altitud siempre es menor o igual que el radio, esto produce la desigualdad: $\sqrt{pq} \leq {}^{(p+q)}/_{2}$



De manera rigurosa, para un $n \in \mathbb{N}$ cualquiera podemos enunciar el resultado como:

Teorema 1.2 (Desigualdad aritmético-geométrica). *Suponer que $a_1, \ldots, a_n$ son números positivos. Entonces*

$$(a_1 \ldots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Se cumple la igualdad si y solo si $a_1 = \ldots = a_n$.

Demostración. Este resultado se puede probar de diferentes formas, aunque nos centraremos en dos principales.

- La primera se basa en la aplicación de la *desigualdad de Jensen*, la cual establece que el valor de una función cóncava de una media aritmética es mayor o igual a la media aritmética de los valores de la función. Como la función logaritmo es cóncava, tenemos:

  $$\log\left(\frac{\sum_i x_i}{n}\right) \geq \sum_i \frac{1}{n} \log x_i = \sum_i \left(\log x_i^{1/n}\right) = \log\left(\prod_i x_i^{1/n}\right)$$

  Tomando la inversa del logaritmo en ambos extremos llegamos al resultado.

- La segunda se le atribuye a *Cauchy*, y se basa en reglas aritméticas ya conocidas aplicadas al método de inducción.

  Comenzamos probando que $n = 2^k$ haciendo inducción sobre k. Sea $k = 1$, tenemos que $n = 2$. Como

  $$(a_1 + a_2)^2 - 4a_1a_2 = (a_1 - a_2)^2 \geq 0,$$

  nos queda que

  $$\frac{(a_1 + a_2)^2}{4} \geq a_1a_2 \implies \frac{a_1 + a_2}{2} \geq (a_1a_2)^{1/2}$$

  demostrando el resultado. Además, la igualdad se tiene si y solo si $a_1 = a_2$.

  Suponemos cierto el resultado para $k = 2^{k-1}$. Por tanto,

  $$a_1 \ldots a_{2^{k-1}} \leq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}} \qquad a_{2^{k-1}+1} \ldots a_{2^k} \leq \left(\frac{a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}$$

  Haciendo el producto de ambas expresiones:

  $$a_1 \ldots a_{2^k} \leq \left(\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\right)\left(\frac{a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}}{2^{k-1}}\right)\right)^{2^{k-1}}$$

  Por lo probado para el caso $k = 1$: $a_1a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$, tenemos que:

  $$(a_1 + \ldots + a_{2^{k-1}})(a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \leq \frac{1}{4}(a_1 + \ldots + a_{2^k})^2$$

  Combinando las dos desigualdades, obtenemos la desigualdad buscada:

  $$a_1 \ldots a_{2^k} \leq \left[\frac{1}{4}(a_1 + \ldots + a_{2^k})^2 \frac{1}{2^{2k-2}}\right]^{2^{k-1}} = \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}$$

Además, la igualdad se da si y solo si se cumple en las dos desigualdades expuestas, y esto pasa si y solo si

$$a_1 = \ldots = a_{2^{k-1}} \qquad a_{2^{k-1}+1} = \ldots = a_{2^k},$$

y

$$a_1 + \ldots + a_{2^{k-1}} = a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k},$$

lo que a su vez pasa si y solo si $a_1 = \ldots = a_{2^k}$. Probamos ahora el resultado para un n general. Elegimos k que cumpla que $2^k > n$, y establecemos a_j igual a la media aritmética a para $n < j < 2^k$. Entonces, aplicando el resultado probado para $n = 2^k$, obtenemos

$$a_1 \ldots a_n a^{2^k - n} \leq a^{2^k}$$

Multiplicando por a^{n-2^k}, nos queda la desigualdad buscada. La igualdad se da si y solo si $a_i = a$ para todo i.

□

1.3. Desigualdad de Carleman

Torsten Carleman fue un matemático sueco conocido por sus aportaciones al análisis clásico durante la primera mitad del siglo XX. Enunció una importante desigualdad empleada en el estudio de funciones quasi-analíticas. En 1926, *George Pólya* dio la siguiente demostración, en la cual utiliza la *desigualdad aritmético-geométrica*.

Teorema 1.3 (Desigualdad de Carleman). *Suponer que (a_j) es una sucesión de números positivos que cumplen que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \ldots a_n)^{1/n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_j.$$

Demostración. Sea $m_i = i(1+1/i)^i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, por lo que tenemos que $m_1 \ldots m_n = (n+1)^n$. Sea ahora $b_n = m_n a_n$. Entonces

$$(n+1)(a_1 \ldots a_n)^{1/n} = (b_1 \ldots b_n)^{1/n} \leq \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n},$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \ldots a_n)^{1/n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j a_j < e \sum_{j=1}^{\infty} a_j
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Desigualdad de Minkowski generalizada

2.1. Consideraciones previas

Nuestro interés en la convexidad nos impulsa a considerar espacios normados. Vamos a estudiar desigualdades entre secuencias y funciones, lo que nos sugiere comenzar con los espacios L^p.

Suponemos el espacio de medida (Ω, Σ, μ), y $0 < p < \infty$. Definimos $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ como la colección de esas funciones medibles que cumplen además

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty$$

Consideramos por otra parte q como el conjugado de p, es decir, se cumple

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

El estudio de los espacios L_p nos lleva a desarrollar algunos resultados ya vistos a lo largo del grado, como por ejemplo la *desigualdad de Hölder*:

Teorema 2.1 (Desigualdad de Hölder). *Suponer que $1 < p < \infty$, $f \in L_p$ y $g \in L_q$. Entonces $fg \in L_1$ y*

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

2.2. Desigualdad de Minkowski generalizada

A partir de ella podemos llevar a cabo la demostración de otros resultados importantes. Nosotros nos centraremos en la *desigualdad de Minkowski generalizada*. Para probarla, precisamos de un resultado previo.

Teorema 2.2. *Si $f \in L_p$, entonces:*

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int |fg| d\mu : ||g||_q \leq 1 \right\} = \sup \left\{ \left| \int fg d\mu \right| : ||g||_q \leq 1 \right\},$$

y el supremo se alcanza.

Ahora sí, ya podemos dar paso al enunciado y demostración de la desigualdad.

Teorema 2.3 (Desigualdad de Minkowski generalizada). *Suponer que f es una función no negativa medible en $(\Omega_1,\Sigma_1,\mu_1)\times(\Omega_2,\Sigma_2,\mu_2)$ y tal que $1\le p\le q<\infty$. Entonces*

$$\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x,y)^p d\mu_2(y)\right)^{q/p} d\mu_1(x)\right)^{1/q} \le \left(\int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x,y)^q d\mu_1(x)\right)^{p/q} d\mu_2(y)\right)^{1/p}$$

Demostración. Sea $r={}^q/_p$. Entonces tenemos:

$$\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x,y)^p d\mu_2(y)\right)^{q/p} d\mu_1(x)\right)^{1/q} = \left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x,y)^p d\mu_2(y)\right)^{r} d\mu_1(x)\right)^{1/rp}$$
$$= \left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x,y)^p d\mu_2(y)\right) g(x) d\mu_1(x)\right)^{1/p}$$

donde g es una función que cumple $\|g\|_r=1$. Así pues, aplicando el *teorema de Fubini*:

$$\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x,y)^p d\mu_2(y)\right) g(x) d\mu_1(x)\right)^{1/p} = \left(\int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x,y)^p g(x) d\mu_1(x)\right) d\mu_2(y)\right)^{1/p} \le$$
$$\le \left(\int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x,y)^{pr} d\mu_1(x)\right)^{1/r} d\mu_2(y)\right)^{1/p} = \left(\int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x,y)^q d\mu_1(x)\right)^{p/q} d\mu_2(y)\right)^{1/p}$$

donde en la desigualdad hemos aplicado el resultado anterior. Así pues, queda probado el teorema. □

En el caso donde $p=1$ y μ_2 sea la medida de contar, se tiene que

$$\|f(1,y)+f(2,y)\|_q \le \|f(1,y)\|_q + \|f(2,y)\|_q$$

Es decir, nos encontramos en el caso particular de la *desigualdad de Minkowski clásica*.

Procediendo igual que en teorema ahora demostrado, podemos conseguir una generalización de la *desigualdad de Hölder*.

Proposición 2.1. *Suponer que $1/p_1+\ldots+1/p_n=1$ y que $f_i\in L_{p_i}$ para $1\le i\le n$. Entonces $f_1\ldots f_n\in L_1$ y*

$$\int |f_1\ldots f_n|\, d\mu \le \|f_1\|_{p_1}\ldots\|f_n\|_{p_n}$$

Se tiene la igualdad sí y solo sí cualquiera de los términos de la parte derecha son cero, o si existe $\lambda_{ij}>0$ tal que $|f_i|^{p_i}=\lambda_{ij}|f_j|^{p_j}$ para $1\le i,\ j\le n$.

Capítulo 3

Liapounov y Littlewood

3.1. Desigualdad de Liapounov y Littlewood

Continuando en la línea del anterior capítulo, tenemos que la *desigualdad de Hölder* muestra que para los espacios L_p de medida finita existe una serie de relaciones de inclusión.

De manera general, para espacios de medida, si $p \neq q$ entonces L_p no incluye ni está incluido en L_q. Por otra parte, si $0 < p_0 < p < p_1 \leq \infty$ entonces

$$L_{p_0} \cap L_{p_1} \subseteq L_p \subseteq L_{p_0} + L_{p_1}$$

De manera más precisa, los matemáticos *Aleksandr Liapounov* y *John Edensor Littlewood* demostraron los siguientes resultados.

Teorema 3.1 (Desigualdad de Liapounov). *Suponer que* $0 < p_0 < p_1 < \infty$ *con* $0 < \theta < 1$. *Sea* $p = (1-\theta)p_0 + \theta p_1$. *Si* $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$, *entonces* $f \in L^p$ *y*

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_0} \|f\|_{p_1}^{\theta p_1}$$

Demostración. Consideramos la *desigualdad de Hölder* con $1/_{(1-\theta)}$ y $1/_{\theta}$ como exponentes. Así:

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int |f|^p d\mu = \int |f|^{(1-\theta)p_0} |f|^{\theta p_1} d\mu \\ &\leq \left(\int |f|^{p_0} d\mu \right)^{1-\theta} \left(\int |f|^{p_1} d\mu \right)^{\theta} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_0} \|f\|_{p_1}^{\theta p_1}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2 (Desigualdad de Littlewood). *Suponer que* $0 < p_0 < p_1 < \infty$ *con* $0 < \theta < 1$. *Definimos* p *como*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

Si $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$, *entonces* $f \in L^p$ *y*

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}$$

Demostración. Sea $1-\gamma = \frac{(1-\theta)p}{p_0}$, tenemos que $\gamma = \frac{\theta p}{p_1}$. Aplicamos ahora la *desigualdad de Hölder* con exponentes $^1/_{(1-\gamma)}$ y $^1/_{\gamma}$. Así obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int |f|^{(1-\theta)p}|f|^{\theta p} d\mu\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int |f|^{(1-\theta)p/(1-\gamma)} d\mu\right)^{(1-\gamma)/p} \left(\int |f|^{\theta p/\gamma} d\mu\right)^{\gamma/p} \\
&= \left(\int |f|^{p_0} d\mu\right)^{(1-\theta)/p_0} \left(\int |f|^{p_1} d\mu\right)^{\theta/p_1} = \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.
\end{aligned}$$

□

La *desigualdad de Liapounov* dice que $\log \|f\|_p$ es una función convexa de p, y la *desigualdad de Littlewood* dice que $\log \|f\|_{1/t}$ es una función convexa de t.

3.2. Aplicaciones

La *desigualdad de Liapounov* es muy útil en análisis funcional y teoría de espacios de funciones, ya que permite relacionar las propiedades de integrabilidad de una función en diferentes espacios L_p y proporciona una forma de estimar la norma L_p de una función en términos de sus normas L_{p_0} y L_{p_1}. También es fundamental en la teoría de operadores lineales y en la definición y estudio de espacios de Banach y espacios de Hilbert.

Además es útil en análisis de Fourier para caracterizar la convergencia de operadores de convolución; en teoría de probabilidad para el análisis de procesos estocásticos; o en el análisis de regularidad y propiedades de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales.

La *desigualdad de Littlewood* está relacionada con el análisis armónico y propiedades de funciones en series de Fourier, y juega un papel importante en el estudio de operadores de Calderón-Zygmund, además de utilizarse para probar la regularidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales elípticas y parabólicas.

Por otra parte, es fundamental en el análisis de señales y procesamiento de imágenes, y en la construcción de bases ortogonales de funciones llamadas «ondículas» (wavelets). Estas funciones son útiles para analizar señales y datos en diferentes escalas y frecuencias.

Además, ambas desigualdades las emplearemos posteriormente para probar resultados de continuidad y acotación cuando tratemos el concepto de interpolación de operadores y funciones.

Capítulo 4

Desigualdad de Loomis-Whitney

4.1. Notación

Los espacios L_1 y L_∞ son claramente importantes, al igual que L_2, que proporciona un ejemplo clásico de espacio de Hilbert. Ahora nos preguntamos, ¿por qué deberíamos estar interesados en los espacios L_p para otros valores de p?

Primeros debemos describir el entorno en el que trabajamos, y la notación que utilizaremos. Para un mejor entendimiento del estudio, vale la pena escribir los resultados para un d cualquiera, pero a la hora de demostrarlos nos centraremos en $d = 3$.

Así pues, suponer que $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1), \ldots, (\Omega_d, \Sigma_d, \mu_d)$ son espacios de medida. Sea (Ω, Σ, μ) el espacio producto $\prod_{i=1}^{d}(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$. Queremos considerar productos con uno o dos productos omitidos, es decir, tenemos que:

$$(\Omega^j, \Sigma^j, \mu^j) = \prod_{i \neq j}^{d}(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i) \qquad (\Omega^{j,k}, \Sigma^{j,k}, \mu^{j,k}) = \prod_{i \neq j,k}^{d}(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$$

Si $\omega \in \Omega$, escribimos $\omega = (\omega_j, \omega^j)$, con $\omega_j \in \Omega_j$ y $\omega^j \in \Omega^j$, y si $\omega^j \in \Omega^j$, con $j \neq 1$, tenemos que $\omega^j = (\omega_1, \omega^{1,j})$.

4.2. Desigualdad de Loomis-Whitney

Probemos ahora un resultado que nos ayudará posteriormente a enunciar nuestro resultado principal. Como hemos dicho antes, el resultado lo probamos para $d = 3$, que se podrá generalizar para cualquier d.

Teorema 4.1. *Suponer que h_j es una función no negativa en L_{d-1} $(\Omega^j, \Sigma^j, \mu^j)$, para $1 \leq j \leq d$. Sea $g_j(\omega_j, \omega^j) = h_j(\omega^j)$ y sea $g = \prod_{j=1}^{d} g_j$. Entonces se cumple:*

$$\int_\Omega g \, d\mu \leq \prod_{j=1}^{d} ||h_j||_{d-1}$$

Demostración. Lo probamos pues para $d = 3$, es decir, tenemos que ver que

$$\int_\Omega g \, d\mu \leq \prod_{j=1}^{3} ||h_j||_2$$

Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Como podemos escribir $g = g_1\ g_2\ g_3$, siguiendo las hipótesis del teorema junto a la notación anterior, tenemos que:

$$\int_\Omega g\ d\mu = \int_\Omega g_1\ g_2\ g_3\ d\mu = \int_\Omega h_1(y,z)\ h_2(x,z)\ h_3(x,y)\ dx\ dy\ dz =$$

$$\left(\int_{\Omega^1} h_1\ dy\ dz\right)\left(\int_{\Omega^2} h_2\ dx\ dz\right)\left(\int_{\Omega^3} h_3\ dx\ dy\right) \overset{¿?}{\leq} \|h_1\|_2\ \|h_2\|_2\ \|h_3\|_2$$

Suponiendo que $\omega_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \Omega_1$, definimos la función g_{ω_1} en Ω_1 dada por

$$g_{\omega_1}(\omega^1) = g(\omega_1, \omega^1) = g((x_1,y_1,z_1),(y,z))$$

De manera similar, para $j = 2,3$ podemos definir la función h_{j,ω_1} en $\Omega^{1,j}$ mediante

$$h_{2,\omega_1}(\omega^{1,2}) = h_2(\omega_1, \omega^{1,2}) = h_2((x_1,y_1,z_1),z)$$

$$h_{3,\omega_1}(\omega^{1,3}) = h_3(\omega_1, \omega^{1,3}) = h_3((x_1,y_1,z_1),y)$$

y la función $g_{j,\omega_1}(\omega^1)$

$$g_{2,\omega_1}(\omega^1) = g_2(\omega_1, \omega^1) = g_2((x_1,y_1,z_1),(y,z))$$

$$g_{3,\omega_1}(\omega^1) = g_3(\omega_1, \omega^1) = g_3((x_1,y_1,z_1),(y,z))$$

Entonces aplicando la *desigualdad de Hölder* con índices $2,2$, tenemos que:

$$\int_{\Omega^1} g_{\omega_1}\ dy\ dz = \int_{\Omega^1} h_1(y,z)\left(\prod_{j=2}^{3} g_j((x_1,y_1,z_1),(y,z))\right) dy\ dz$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\Omega^1} |h_1|^2\ dy\ dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega^1} |\prod_{j=2}^{3} g_j((x_1,y_1,z_1),(y,z))|^2\ dy\ dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|h_1\|_2\left(\int_{\Omega^1}\left(\prod_{j=2}^{3} g_j((x_1,y_1,z_1),(y,z))\right)^2 dy\ dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

Desarrollando más esta última parte:

$$\left(\int_{\Omega^1}\left(\prod_{j=2}^{3} g_j((x_1,y_1,z_1),(y,z))\right)^2 dy\ dz\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega^1}\left(\prod_{j=2}^{3} g_j((x_1,y_1,z_1),(y,z))^2\right) dy\ dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\|h_2((x_1,y_1,z_1),z)^2\|_1\ \|h_3((x_1,y_1,z_1),y)^2\|_1\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int h_2((x_1,y_1,z_1),z)^2\ h_3((x_1,y_1,z_1),y)^2\ dy\ dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|h_2((x_1,y_1,z_1),z)\|_2\ \|h_3((x_1,y_1,z_1),y)\|_2$$

En consecuencia, integrando sobre Ω_1, y usando la *desigualdad de Hölder generalizada* con índices $2,2$:

$$\int_\Omega g\ d\mu \leq \|h_1\|_2 \int_{\Omega^1} \left(\|h_2((x_1,y_1,z_1),z)\|_2\ \|h_3((x_1,y_1,z_1),y)\|_2\right)\ d\mu_1((x_1,y_1,z_1))$$

$$\leq \|h_1\|_2\left(\int_{\Omega^1} \|h_2((x_1,y_1,z_1),z)\|_2\ \|h_3((x_1,y_1,z_1),y)\|_2\ d\mu_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|h_1\|_2\left(\int_{\Omega^1}\left(\int_{\Omega^{1,j}} h_{j,\omega_1}^2\ d\mu^{1,j}\right) d\mu_1\right)^{\frac{1}{2}} = \|h_1\|_2 \prod_{j=2}^{3} \|h_j\|_2 = \prod_{j=1}^{3} \|h_j\|_2$$

$\square$

Este teorema nos proporciona como consecuencia el siguiente resultado, tomando d cualquiera:

Corolario 4.2. *Suponer que $h_j \in L^{\alpha_j}(\Omega^j, \Sigma^j, \mu^j)$ para $1 \leq j \leq d$, donde $\alpha_j \geq 1$. Si f es una función medible en Ω cumpliendo que $|f(\omega_j, \omega^j)| \leq |h_j(\omega^j)|$ para todo $\omega = (\omega_j, \omega^j)$, para $1 \leq j \leq d$, entonces teniendo $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$*

$$\|f\|_{\alpha/(d-1)} \leq \left(\prod_{j=1}^{d} \|h_j\|_{\alpha_j}^{\alpha_j} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \|h_j\|_{\alpha_j}$$

Ahora ya tenemos todos los requisitos previos para enunciar la *desigualdad de Loomis-Whitney*.

Teorema 4.3 (Desigualdad de Loomis-Whitney). *Suponer que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$. Sea K_j la imagen de K bajo la proyección ortogonal sobre el subespacio ortogonal al eje de las j's. Entonces*

$$\lambda_d(K) \leq \left(\prod_{j=1}^{d} \lambda_{d-1}(K_j) \right)^{\frac{1}{d-1}}$$

donde λ_d denota la medida Borel d-dimensional, y λ_{d-1} la medida (d-1)-dimensional.

Demostración. Para la demostración, basta con aplicar el anterior corolario a las funciones características de K y de K_j, tomando $\alpha_j = 1$ para cada j. $\square$

4.3. Aplicaciones

La *desigualdad de Loomis-Whitney* es especialmente útil en el análisis armónico, la teoría de la probabilidad, y la teoría de la medida, utilizada para establecer límites superiores en el tamaño de conjuntos en términos de sus proyecciones en dimensiones menores.

Además, es fundamental en la geometría combinatoria, donde ayuda a entender cómo se relacionan los volúmenes de conjuntos en diferentes dimensiones y cómo se distribuye la medida a lo largo de sus proyecciones. Por ejemplo, es utilizada en el estudio de conjuntos de Hausdorff.

Por otra parte, en la compresión de datos y procesamiento de señales, la *desigualdad de Loomis-Whitney* puede ayudar a establecer límites en la información requerida para representar conjuntos o señales.

Capítulo 5

Desigualdad de Sobolev

5.1. Desigualdad de Sobolev

Un espacio de Sobolev es un espacio vectorial de funciones provisto de una norma que es combinación de normas L_p de la función junto con sus derivadas hasta un orden determinado. Intuitivamente, un espacio de Sobolev es un espacio de funciones que posee suficientes derivadas para algún dominio de aplicación, como ecuaciones diferenciales parciales, y está equipado con una norma que mide tanto el tamaño como la regularidad de una función.

Por tanto, las desigualdades que relacionan las normas que incluyen los espacios de Sobolev se denominan *desigualdades de Sobolev*. Llevan el nombre del matemático *Sergei Lvovich Sobolev*.

Vamos a utilizar el *corolario 4.2* para probar el siguiente resultado fundamental.

Teorema 5.1 (Desigualdad de Sobolev). *Suponer que f es una función continua y diferenciable en un soporte compacto de $\mathbb{R}^d$, donde $d > 1$. Si $1 \leq p \leq d$, entonces*

$$\|f\|_{\frac{pd}{d-p}} \leq \frac{p(d-1)}{2(d-p)} \left(\prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p \right)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{p(d-1)}{2d(d-p)} \left(\sum_{j=1}^{d} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Demostración. Consideramos primero el caso $p = 1$. Sea $x = (x_j, x^j)$. Entonces

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_j)\, dt = \int_{x_j}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_j)\, dt$$

Por tanto tenemos

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x_j) \right| dt$$

Ahora bien, aplicando el corolario con $\alpha = d$ y $\alpha_j = 1$ para cada j queda probado para $p = 1$:

$$\|f\|_{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{2} \left(\prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_1 \right)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{2d} \left(\sum_{j=1}^{d} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_1 \right)$$

Suponemos pues que $1 < p < d$, con q su exponente conjugado. Sea $s = \frac{p(d-1)}{d-p}$. Entonces

$$(s-1)q = \frac{sd}{d-1} = \frac{pd}{d-p}$$

Así, tenemos

$$|f(x)|^s = \left| \int_{-\infty}^{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (|f(t,x_j)|^s)\, dt \right| \leq s \int_{-\infty}^{x_j} |f(t,x^j)|^{s-1} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x^j) \right| dt$$

$$|f(x)|^s = \left| \int_{x_j}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} (|f(t,x_j)|^s)\, dt \right| \leq s \int_{x_j}^{\infty} |f(t,x^j)|^{s-1} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x^j) \right| dt$$

Por tanto,

$$|f(x)| \leq \left(\frac{s}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t,x^j)|^{s-1} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x^j) \right| dt \right)^{\frac{1}{s}}$$

Tomando ahora $\alpha_j = s$ para cada j, por el corolario:

$$\|f\|^s_{\frac{sd}{d-1}} \leq \frac{s}{2} \left(\prod_{j=1}^{d} \left\| |f|^{s-1} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \right\|_1 \right)^{\frac{1}{d}}$$

donde

$$\left\| |f|^{s-1} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \right\|_1 \leq \|f^{s-1}\|_q \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p = \|f\|^{s-1}_{(s-1)q} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p$$

Por tanto,

$$\|f\|^s_{\frac{sd}{d-1}} \leq \frac{s}{2} \|f\|^{s-1}_{(s-1)q} \left(\prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_1 \right)^{\frac{1}{d}}$$

Teniendo en cuenta que $(s-1)q = \frac{sd}{d-1} = \frac{pd}{d-p}$,

$$\|f\|_{\frac{pd}{d-p}} \leq \frac{p(d-1)}{2(d-p)} \left(\prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p \right)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{p(d-1)}{2d(d-p)} \left(\sum_{j=1}^{d} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

□

Este teorema nos muestra la manera en la cual los índices y constantes dependen de la dimensión, y nos complica mucho su estudio si consideramos una d muy grande.

Capítulo 6

Desigualdad de interpolación de Schur. Aplicación a la desigualdad de Hilbert.

6.1. Acotación previa

Suponer que (Ω, Σ, μ) y (Φ, T, ν) son espacios medibles σ-finitos, y K una función medible en $\Omega \times \Phi$ para la cual existen constantes M, N tales que

$$\int (ess \sup_{y \in \Phi} |K(x,y)|) \, d\mu(x) \leq M, \quad \int |K(x,y)| \, d\nu(y) \leq N \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega$$

Si $f \in L_1(\nu)$, entonces

$$\left| \int K(x,y) \, f(y) \, d\nu(y) \right| \leq (ess \sup_{y \in \Phi} |K(x,y)|) \int |f(y)| d\nu(y)$$

En esta sección consideramos el operador lineal

$$T(f) = \int K(x,y) \, f(y) \, d\nu(y)$$

Así, se cumple que

$$\|T(f)\|_1 \leq \int (ess \sup_{y \in \Phi} |K(x,y)|) \, d\mu(x) \, \|f\|_1 \leq M \|f\|_1$$

es decir, $T : L_1 \longrightarrow L_1$ y $T : L_\infty \longrightarrow L_\infty$. Por otra parte, si $f \in L_\infty(\nu)$, entonces son continuas:

$$|T(f)(x)| \leq \int |K(x,y)||f(y)| \, d\nu(y) \leq \|f\|_\infty \int |K(x,y)| \, d\nu(y) \leq N \|f\|_\infty$$

6.2. Desigualdad de interpolación de Schur

Por la *desigualdad de Liapounov y Littlewood*, si $1 < p < \infty$, tenemos que $L_p \subseteq L_1 + L_\infty$, y por tanto podemos definir $T(f)$ para $f \in L_p$. Así, con la ayuda de la *desigualdad de Hölder* podemos probar un primer teorema de interpolación.

Teorema 6.1 (Teorema de Schur). *Suponer que (Ω,Σ,μ) y (Φ,T,ν) son medidas σ-finitas, y donde K es una función medible en $\Omega\times\Phi$ para la que existen constantes M y N tal que*

- $\int (ess \sup_{y\in\Phi}|K(x,y)|)\, d\mu(x) \le M.$
- $\int |K(x,y)|\, d\nu(y) \le N$ *c.t.p.* $x\in\Omega$.

Sea $T(f)=\int K(x,y)\, f(y)\, d\nu(y)$, y suponer que $f\in L_p(\nu)$ con $1<p<\infty$. Entonces se cumple:

$$T(f)\in L_p(\mu)$$

$$\|T(f)\|_p \le M^{\frac{1}{p}}N^{\frac{1}{q}}\|f\|_p$$

Demostración. Aplicando la *desigualdad de Hölder*,

$$\begin{aligned}
|T(f)(x)| &\le \int |K(x,y)||f(y)|d\nu(y)\\
&= \int |K(x,y)|^{1/p}|f(y)||K(x,y)|^{1/q}d\nu(y)\\
&\le \left(\int |K(x,y)||f(y)|^p d\nu(y)\right)^{1/p}\left(\int |K(x,y)|d\nu(y)\right)^{1/q}\\
&\le N^{1/q}\left(\int |K(x,y)||f(y)|^p d\nu(y)\right)^{1/p} \quad \text{c.t.p. } x\in\Omega
\end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
\int |T(f)(x)|^p d\mu(x) &\le N^{p/q}\int\left(\int |K(x,y)||f(y)|^p d\nu(y)\right)d\mu(x)\\
&= N^{p/q}\int\left(\int |K(x,y)|d\mu(x)\right)|f(y)|^p d\nu(y)\\
&\le N^{p/q}M\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|T(f)\|_p \le M^{\frac{1}{p}}N^{\frac{1}{q}}\|f\|_p$$

□

El siguiente resultado proporciona una herramienta más potente.

Teorema 6.2 (Test de Schur). *Suponer que $k=k(x,y)$ es una función medible no negativa en un espacio producto $(X,\Sigma,\mu)\times(Y,T,\nu)$, y que $1<p<\infty$ con q su exponente conjugado. Suponer también que existen funciones medibles estrictamente positivas s en (X,Σ,μ) y t en (Y,T,ν), y constantes A y B tales que*

- $\int_Y k(x,y)(t(y))^q\, d\nu(y) \le (A\, s(x))^q$ *c.t.p.* $x\in X$
- $\int_X k(x,y)(s(x))^p\, d\mu(x) \le (B\, t(y))^p$ *c.t.p.* $y\in Y$

Si $f\in L_p(Y)$, $T(f)(x)=\int_Y k(x,y)\, f(y)\, d\nu(y)$ existe c.t.p x, entonces se cumple

$$T(f)\in L_p(X)$$

$$\|T(f)\|_p \le AB\|f\|_p$$

Demostración. La *desigualdad de Hölder* nos muestra que es suficiente probar que si h es una función no negativa en $L_q(X)$ y g es una función no negativa en $L_p(Y)$, entonces

$$\int_X \int_Y h(x)k(x,y)g(y)\ d\nu(y)d\mu(x) \leq AB\|h\|_q\|g\|_p$$

Así pues, utilizando la *desigualdad de Hölder*:

$$\begin{aligned}
&\int_Y k(x,y)g(y)\ d\nu(y)\\
&\quad= \int_Y (k(x,y))^{1/q}t(y)\frac{(k(x,y))^{1/p}g(y)}{t(y)}d\nu(y)\\
&\quad\leq \left(\int_Y k(x,y)(t(y))^q d\nu(y)\right)^{1/q}\left(\int_Y \frac{k(x,y)(g(y))^p}{(t(y))^p}d\nu(y)\right)^{1/p}\\
&\quad\leq As(x)\left(\int_Y \frac{k(x,y)(g(y))^p}{(t(y))^p}d\nu(y)\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

En consecuencia, usando otra vez la *desigualdad de Hölder*,

$$\begin{aligned}
&\int_X \int_Y h(x)k(x,y)g(y)\ d\nu(y)d\mu(x)\\
&\quad\leq A\int_X h(x)s(x)\left(\int_Y \frac{k(x,y)(g(y))^p}{(t(y))^p}d\nu(y)\right)^{1/p}d\mu(x)\\
&\quad\leq A\|h\|_q\left(\int_X (s(x))^p\left(\int_Y \frac{k(x,y)(g(y))^p}{(t(y))^p}d\nu(y)\right)d\mu(x)\right)^{1/p}\\
&\quad= A\|h\|_q\left(\int_Y\left(\int_X (s(x))^p k(x,y)d\mu(x)\right)\frac{(g(y))^p}{(t(y))^p}d\nu(y)\right)^{1/p}\\
&\quad\leq AB\|h\|_q\left(\int_Y (g(y))^p d\nu(y)\right)^{1/p} = AB\|h\|_q\|g\|_p
\end{aligned}$$

□

6.3. Aplicación a la desigualdad de Hilbert

Vamos a aplicar el *test de Schur* al kernel $k(x,y) = \frac{1}{x+y}$ en $[0,\infty)\times[0,\infty)$. Tomamos $s(x) = t(x) = \frac{1}{x^{pq}}$. Utilizando que

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)y^\alpha}\ dy = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\ \text{ para } 0<\alpha<1,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (s(x))^p k(x,y)\ dx = \int_0^\infty \frac{1}{x+y}\frac{1}{x^{1/q}}\ dx = \frac{1}{y}\int_0^\infty \frac{1}{(1+\frac{x}{y})x^{1/q}}\ dx\\
&\stackrel{u=\frac{x}{y}}{=} \frac{1}{y^{1/q}}\int_0^\infty \frac{1}{(1+u)u^{1/q}}\ dx = \frac{\pi}{\sin(\pi/q)}\frac{1}{y^{1/q}} = \frac{\pi}{\sin(\pi/q)}(t(y))^p
\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\int_0^\infty (t(y))^q k(x,y)\, dy = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \frac{1}{x^{1/p}} = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} (s(x))^q$$

De este modo, tenemos la siguiente versión de la *desigualdad de Hilbert* para $k(x,y) = \frac{1}{x+y}$.

Teorema 6.3 (Desigualdad absoluta de Hilbert. Caso continuo). *Si $f \in L_p[0,\infty)$ y $g \in L_q[0,\infty)$, con $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado, entonces*

$$\int_o^\infty \int_o^\infty \frac{|f(x)g(y)|}{x+y}\, dx\, dy \geq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \|f\|_p \|g\|_q$$

y la constante $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ es la mejor posible.

Demostración. Vamos a ver que $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ es la mejor posible. Suponer que $1 < \lambda < 1 + \frac{1}{2q}$. Sean además

$$f_\lambda(x) = (\lambda-1)^{1/p} x^{-\lambda/p} \chi_{[1,\infty)}(x), \quad g_\lambda(y) = (\lambda-1)^{1/q} y^{-\lambda/q} \chi_{[1,\infty)}(y)$$

con $\|f_\lambda\|_p = \|g_\lambda\|_q = 1$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f_\lambda(x) g_\lambda(y)}{x+y} dx\, dy &= (\lambda-1) \int_1^\infty \left(\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\lambda/p}(x+y)} \right) \frac{dy}{y^{\lambda/q}} \\
&= (\lambda-1) \int_1^\infty \left(\int_{1/y}^\infty \frac{du}{u^{\lambda/p}(1+u)} \right) \frac{dy}{y^\lambda} \\
&= (\lambda-1) \int_1^\infty \left(\int_0^\infty \frac{du}{u^{\lambda/p}(1+u)} \right) \frac{dy}{y^\lambda} \\
&\quad - (\lambda-1) \int_1^\infty \left(\int_0^{1/y} \frac{du}{u^{\lambda/p}(1+u)} \right) \frac{dy}{y^\lambda} \\
&\geq \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi/p)} - (\lambda-1) \int_1^\infty \left(\int_0^{1/y} \frac{du}{u^{\lambda/p}} \right) \frac{dy}{y^\lambda}
\end{aligned}$$

Ahora bien, tomando

$$\int_0^{1/y} u^{-\lambda/p} du = \frac{1}{\beta y^\beta}, \text{ donde } \beta = 1 - \frac{\lambda}{p} = \frac{1}{q} - \frac{\lambda-1}{p} \geq \frac{1}{2q}$$

y por tanto

$$\int_1^\infty \left(\int_0^{1/y} \frac{du}{u^{\lambda/p}} \right) \frac{dy}{y^\lambda} = \frac{1}{\beta} \int_1^\infty \frac{dy}{y^{\beta+\lambda}} = \frac{1}{\beta(\beta+\lambda-1)} \leq 4q^2.$$

En consecuencia,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f_\lambda(x) g_\lambda(y)}{x+y} dxdy \geq \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi/p)} - 4q^2(\lambda-1).$$

Haciendo $\lambda \to 1$, obtenemos el resultado. □

De manera similar podemos enunciar el caso discreto.

Teorema 6.4 (Desigualdad absoluta de Hilbert. Caso discreto). *Si $a \in l_p(\mathbb{Z}^+)$ y $b \in l_p(\mathbb{Z}^+)$, con $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado, entonces*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_m b_n|}{m+n+1} \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|a\|_p\|b\|_q$$

y la constante $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ es la mejor posible.

Por otra parte, podemos aplicarlo a la teoría de funciones analíticas. El espacio de Hardy $H^1(\mathbf{D})$ es el espacio de funciones analíticas f del disco unidad $\mathbf{D} = \{z : |z| < 1\}$ que satisface

$$\|f\|_{H^1} = \sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta < \infty$$

Con ello, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 6.5 (Hardy). *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^1$, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{n+1} < \pi\|f\|_{H^1}$$

Capítulo 7

Método de Marcinkiewicz

7.1. Primer teorema de Marcinkiewicz

Nos centramos en el estudio de la interpolación real, en particular, en el *teorema de Marcinkiewicz*. *Marcinkiewicz* murió en la Segunda Guerra Mundial, y no pudo publicar la demostración del resultado, la cuál fue desarrollada por *Zygmund Wilhelm Birnbaum* en 1956.

Comenzamos dando una demostración al caso más simple. Para esta y la posterior demostración, introducimos el concepto de espacio de tipo fuerte y tipo débil. Así, suponiendo que E es un espacio normado, con $0 < q < \infty$, y donde $T : E \longrightarrow M(\Omega, \Sigma, \mu)$ es lineal, tenemos que:

- T es de *tipo fuerte* (E,q) si $\exists\, M < \infty$ tal que si $f \in E$, entonces $T(f) \in L_q$ y $\|T(f)\|_q \leq M\|f\|_E$.
- T es de *tipo débil* (E,q) si $\exists\, L < \infty$ tal que si $f \in E$, $\alpha > 0$, se cumple que $\mu\{\omega : |T(f)(\omega)| > \alpha\} \leq L^q \frac{\|f\|_E^q}{\alpha^q}$.

Así pues, ya podemos demostrar este primer resultado.

Teorema 7.1 (Teorema I de interpolación de Marcinkiewicz). *Suponer que* $0 < p_0 < p < p_1 \leq \infty$*, y que* $T : L_{p_0}(\Omega, \Sigma, \mu) + L_{p_1}(\Omega, \Sigma, \mu) \longrightarrow L_0(\Phi, T, \nu)$ *es lineal.*

Si T *es de tipo débil* (p_0, p_0) *con constante* c_0 *y de tipo débil* (p_1, p_1) *con constante* c_1*, entonces* T *es de tipo fuerte* (p,p) *con constante dependiente de* c_0, c_1, p_0, p_1, p*.*

Demostración. Comenzamos probando el caso donde $p_1 < \infty$. Suponer que $f \in L_p$. La idea es descomponer f en dos partes, una en L_{p_0} y otra en L_{p_1}.

Así pues, para $\alpha > 0$, definimos $E_\alpha = \{x : |f(x)| > \alpha\}$. A partir de esto, sea $f = g_\alpha + h_\alpha$, con

$$g_\alpha = f(x)\chi_{E_\alpha} = f(x)\chi_{\{|f|>\alpha\}}, \;\; h_\alpha = f - g_\alpha = f(x)\chi_{\{|f|\leq\alpha\}}$$

Entonces se cumple que:

- $g_\alpha \in L_{p_0}$, ya que aplicando *Hölder* tenemos que $\|g_\alpha\|_{p_0} \leq \mu(E_\alpha)^{1/p - 1/p_0}\|f\|_p$.
- $h_\alpha \in L_{p_1}$, ya que $\int \left(\frac{|h_\alpha|}{\alpha}\right)^{p_1} d\mu \leq \int \left(\frac{|h_\alpha|}{\alpha}\right)^{p} d\mu$.

Como $f = g_\alpha + h_\alpha$, tenemos que

$$|T(f)| \leq |T(g_\alpha)| + |T(h_\alpha)|$$

Entonces

$$(|T(f)| > \alpha) \subseteq (|T(g_\alpha)| > \alpha/2) \cup (|T(h_\alpha)| > \alpha/2)$$

y

$$\nu(|T(f)| > \alpha) \leq \nu(|T(g_\alpha)| > \alpha/2) + \nu(|T(h_\alpha)| > \alpha/2).$$

De modo que:

$$\begin{aligned}\int |T(f)|^p d\nu =& p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\nu(|T(f)| > \alpha)d\alpha \\ \leq& p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\nu(|T(g_\alpha)| > \alpha/2)\,d\alpha \\ &+ p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\nu(|T(h_\alpha)| > \alpha/2)\,d\alpha \\ =& I_0 + I_1.\end{aligned}$$

Como T es de tipo débil (p_0, p_0),

$$\begin{aligned}I_0 &\leq c_0 p\int_0^\infty \frac{\alpha^{p-1}}{(\alpha/2)^{p_0}}\left(\int |g_\alpha(x)|^{p_0}\,d\mu(x)\right)d\alpha \\ &= 2^{p_0}c_0 p\int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1}\left(\int_{(|f|>\alpha)}|f(x)|^{p_0}d\mu(x)\right)d\alpha \\ &= 2^{p_0}c_0 p\int_\Omega |f(x)|^{p_0}\left(\int_0^{|f(x)|}\alpha^{p-p_0-1}d\alpha\right)d\mu(x) \\ &= \frac{2^{p_0}c_0 p}{p-p_0}\int_\Omega |f(x)|^{p_0}|f(x)|^{p-p_0}d\mu(x) = \frac{2^{p_0}c_0 p}{p-p_0}\|f\|_p^p\end{aligned}$$

De la misma manera, como T es de tipo débil (p_1, p_1),

$$\begin{aligned}I_1 &\leq c_1 p\int_0^\infty \frac{\alpha^{p-1}}{(\alpha/2)^{p_1}}\left(\int |h_\alpha(x)|^{p_1}\,d\mu(x)\right)d\alpha \\ &= 2^{p_1}c_1 p\int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1}\left(\int_{(|f|\leq\alpha)}|f(x)|^{p_1}d\mu(x)\right)d\alpha \\ &= 2^{p_1}c_1 p\int_\Omega |f(x)|^{p_1}\left(\int_{|f(x)|}^\infty \alpha^{p-p_1-1}d\alpha\right)d\mu(x) \\ &= \frac{2^{p_1}c_1 p}{p_1-p}\int_\Omega |f(x)|^{p_1}|f(x)|^{p-p_1}d\mu(x) = \frac{2^{p_1}c_1 p}{p_1-p}\|f\|_p^p\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\|T(f)\|_p^p = \int |T(f)|^p d\nu \leq \frac{2^{p_0}c_0 p}{p-p_0}\|f\|_p^p + \frac{2^{p_1}c_1 p}{p_1-p}\|f\|_p^p = M\,\|f\|_p^p$$

Es decir, T es de tipo fuerte (p, p).

En segundo lugar, consideramos el caso donde $p_1 = \infty$ y $f \in L_p$. Sea $f = g_\alpha + h_\alpha$ como antes, entonces $\|T(h_\alpha)\|_\infty \leq c_1\alpha$. Por coniguiente, si $|T(f)(x)| > 2c_1\alpha$, se cumple que

$$|T(g_\alpha)(x)| > c_1\alpha$$

Argumentando como para el I_0 anterior:

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_p^p &= \int |T(f)|^p d\nu \\
&= p\int_0^\infty t^{p-1}\nu(|T(f)|>t)dt \\
&= p\,(2c_1)^p \int_0^\infty \alpha^{p-1}\nu\,(|T(f)|>2c_1\alpha)\,d\alpha \\
&\le p\,(2c_1)^p \int_0^\infty \alpha^{p-1}\nu\,(|T\,(g_\alpha)|>c_1\alpha)\,d\alpha \\
&\le p\,(2c_1)^p\,c_0 \int_0^\infty \frac{\alpha^{p-1}}{(c_1\alpha)^{p_0}}\left(\int_\Omega |g_\alpha|^{p_o}\,d\mu\right)d\alpha \\
&= 2^p p c_1^{p-p_0} c_0 \int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1}\left(\int_{(|f|>\alpha)} |f|^{p_0} d\mu\right)d\alpha \\
&= \frac{2^p p c_1^{p-p_0} c_0}{p-p_0}\|f\|_p^p = M\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Por tanto, T es de tipo fuerte (p,p), y queda probado el teorema. □

7.2. Segundo teorema de Marcinkiewicz

Para continuar con el estudio de la interpolación real es necesario introducir el concepto de dos funciones nuevas.

- La *función de distribución* $f^*(u) = \{|f| > u\}$ es una función continua decreciente en $[0,\infty)$ con la misma distribución que $|f|$.
- *Función maximal de Muirhead*: $f^\dagger(t) = \sup\{\frac{1}{t}\int_E |f| d\mu : \mu(E) \le t\}$, donde $f \in M_1$, siendo $M_1 = \{\text{f medibles tal que } \mu\{|f| > u\} < \infty\}$ para $u > 0$.

Por otra parte, definimos el espacio débil L_p del espacio de Lorentz $L_{p,\infty}$ como:

$$L_{p,\infty} = \{f \in L_1 + L_\infty : \|f\|_{p,\infty} := \sup_{\alpha>0} \alpha(\mu(|f| > \alpha))^{1/p} < \infty\}$$

y el espacio $L_{p,q}$ $(0 < p < \infty, 0 < q < \infty)$ como

$$L_{p,q} = \{f : \|f\|_{p,q} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty t^{p/q} f^*(t)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty\}$$

donde en general $\|\cdot\|_{p,q}$ no es una norma. Sin embargo, $\|f\|_{p,q}$ es la L_q norma de f^* con respecto a la medida $(q/p)t^{q/p-1}dt = d(t^{q/p})$.
Notar además que se cumple que $L_{p,p} = L_p$ con la equivalencia de normas, ya que:

$$\|f\|_{p,p} = \left(\frac{p}{p}\int_0^\infty t^{p/p} f^*(t)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} = \|f^*\|_p = \|f\|_p$$

Por otra parte, recordamos la *desigualdad de Chebyshev*: para todo $t \in \mathbb{R} > 0$ y $0 < p < \infty$ se cumple que:

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) \leq \frac{1}{t^p} \int_{|f| \geq t} |f|^p dt$$

Es decir, tenemos que:

$$\{|f| > t\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{t^p} \implies t(\{|f| > t\})^{1/p} \leq \|f\|_p$$

Luego f cumple $L_p \subseteq L_{p,\infty}$.

Veamos las relaciones entre los espacios $L_{p,q}$. Fijamos p y variamos q. Así tenemos el siguiente teorema.

Teorema 7.2. *Si* $0 < p < \infty$ *y* $1 \leq q < r \leq \infty$*, entonces* $L_{p,q} \subseteq L_{p,r}$ *y* $\|f\|_{p,r} \leq \|f\|_{p,q}$.

Demostración. Comenzamos probando el caso $L_{p,q} \subseteq L_{q,\infty}$ $(\|\dot{|}\|_{p,\infty} \leq \|\dot{|}\|_{p,q})$. Suponemos $f \in L_{p,q}$, así:

$$\begin{aligned} f^*(t)\, t^{1/p} = f^*(t) \left(\frac{q}{p} \int_0^t s^{q/p-1} ds \right)^{1/q} &= \left(\frac{q}{p} \int_0^t (s^{1/p} f^*(t))^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \\ \leq \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty (s^{1/p} f^*(t))^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} &= \|f\|_{p,q} \end{aligned}$$

Tomando el supremo en t, tenemos que: $t^{1/p} f^\dagger(t) = \|f\|_{p,q}^\dagger$, por tanto $L_{p,q} \subseteq L_{p,\infty}$.

Suponemos ahora que $1 \leq r < \infty$. Probamos que $\|f\|_{p,r} \leq \|f\|_{p,q}$. Como

$$\frac{q}{p} \int_0^\infty (t^{1/p} h(t))^q \frac{dt}{t} \underset{u=t^{1/p}}{=} q \int_0^\infty (u\, h(u^p))^q \frac{du}{u}$$

siendo h una función medible no negativa, solo necesitamos probar que si g es una función decreciente en $[0,\infty)$, entonces

$$\left(g \int_0^\infty t^q g(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

es una función decreciente de q.

- Caso $q = 1$ $(< r)$. Podemos tomar g de la siguiente manera:

$$g = \sum_{j=1}^{J} a_j \chi_{[0,t_j]}, \quad a_j > 0,\ t_j > 0$$

Aplicando la *desigualdad de Minkowski*:

$$\left(r \int_0^\infty t^r (g(t))^r\, \frac{dt}{t} \right)^{1/r} \leq \sum_{j=1}^{J} \left(r\, a_j^r \int_0^{t_j} t^r t^{r-1}\, dt \right)^{1/r} = \sum_{j=1}^{J} a_j\, t_j = \int_0^\infty t\, g(t)\, \frac{dt}{t}$$

- Caso $1 < q < r$. Sean $\lambda = r/q$, $h(t) = (g(t^{1/q}))^q$ y $u = t^q$, por lo que $h(u) = (g(t))^q$. Haciendo un cambio de variable y utilizando el resultado anterior tenemos:

$$\begin{aligned}\left(r\int_0^\infty t^r(g(t))^r\,\frac{dt}{t}\right)^{1/r} &= \left(\lambda q\int_0^\infty t^{\lambda q}(g(t))^{\lambda q}\,\frac{dt}{t}\right)^{1/\lambda q}\\ &\underset{u=t^p}{=} \left(\lambda q\int_0^\infty u^{\lambda}(g(u^{1/q}))^{\lambda q}\,\frac{1}{q(u^{1/q})^{q-1}}\frac{du}{u^{1/q}}\right)^{1/\lambda q}\\ &= \left(\lambda\int_0^\infty u^{\lambda}(h(u))^{\lambda}\,\frac{du}{u}\right)^{1/\lambda q} \leq \left(\lambda\int_0^\infty u\,h(u)\,\frac{du}{u}\right)^{1/q}\\ &\underset{u=t^q}{=} \left(\lambda q\int_0^\infty t^q h(t^q)\,\frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \left(r\int_0^\infty t^q(g(t))^q\,\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\end{aligned}$$

□

Con todo esto, vamos a dar una versión más general del *Teorema de interpolación de Marcinkiewicz.*

Teorema 7.3 (**Teorema II de interpolación de Marcinkiewicz**). *Suponer que* $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$ *y* $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$*, con* $q_0 \neq q_1$*, y que* T *es un operador lineal*

$$T : L_{p_0,1}(\Omega',\Sigma',\mu') + L_{p_1,1}(\Omega',\Sigma',\mu') \longrightarrow M_1(\Omega,\Sigma,\mu)$$

con tipos débiles $(L_{p_0,1,q_0}), (L_{p_1,1,q_1})$*. Suponer* $0 < \theta < 1$ *y*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Entonces si $1 \leq r \leq \infty$*,* $\exists\, B$ *constante, dependiente de* $p_, p_1, q_0, q_1, \theta, r$ *y de las constantes de tipo débil, de manera que*

$$\|T(f)\|_{q,r} \leq B\,\|f\|_{p,r}$$

para $f \in L_{p,r}$*.*

Tenemos el siguiente *corolario* aplicando el resultado del teorema.

Corolario 7.4. *Si* $q \geq p$*, entonces existe una constante B tal que* $\|T(f)\|_q \leq B\|f\|_p$*.*

Demostración. Consideramos $r = q$. Así:

$$\|T(f)\|_q = \|T(f)\|_{q,q} = \|T(f)\|_{q,r} \leq B\|f\|_{q,p} \leq B'\|f\|_{p,p} = B\|f\|_p$$

□

Capítulo 8

Desigualdad $4/3$ de Littlewood

8.1. Desigualdad $4/3$ de Littlewood

En 1930, *Littlewood* resolvió una desigualdad hoy en día a veces citada como la *desigualdad 4/3 de Littlewood*. Esta es una desigualdad clásica de análisis funcional que involucra la norma $L_{4/3}$ de una función.

Comenzamos enunciando una desigualdad necesaria posteriormente.

Teorema 8.1 (Desigualdad de Khintchine). *Existen constantes positivas A_p y B_p, con $0 < p < \infty$, tal que si $a_1, \dots, a_N$ son números reales y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ son variables aleatorias de tipo Bernoulli, entonces*

$$A_p \, \|s_N\|_p \leq \sigma \leq B_p \, \|s_N\|_p$$

con $s_N = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n$ y $\sigma^2 = \|s_N\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N} a_n^2$.

Así, ya podemos demostrar el siguiente resultado.

Proposición 8.1. *Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, entonces*

- $\sum_{i=1}^{m} \|a_i\|_2 \leq \sqrt{2}\|A\|$ *(Littlewood)*
- $\left(\sum_{i=1}^{m} \|a_i\|_1^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\|A\|$ *(Orlicz)*

Demostración. Usando la *desigualdad de Khintchine*, previamente mostrada, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} \|a_i\|_2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{E} \left(|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{ij}| \right) = \sqrt{2}\, \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{m} |\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{ij}| \right) \leq \sqrt{2}\|A\|$$

De la misma manera podemos probar que

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\|A\|$$

Aplicando la *desigualdad de Minkowski generalizada* se sigue la *desigualdad de Orlicz.* □

Una vez estudiado este resultado, lo utilizamos para probar la *desigualdad de Littlewood*.

Corolario 8.2 (Desigualdad 4/3 de Littlewood). *Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, entonces*

$$\left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^{4/3}\right)^{3/4} \leq \sqrt{2}\|A\|$$

Demostración. Utilizamos dos veces la *desigualdad de Hölder* y aplicaremos la proposición anterior.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} |a_{ij}|^{4/3} &= \sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^{2/3} |a_{ij}|^{2/3}\right) \\
&\leq \sum_i \left(\left(\sum_j |a_{ij}|^2\right)^{1/3} \left(\sum_j |a_{ij}|\right)^{2/3}\right) \\
&\leq \left(\sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^2\right)^{1/2}\right)^{2/3} \left(\sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|\right)^2\right)^{1/3} \\
&= \left(\sum_i \|a_i\|_2\right)^{2/3} \left(\sum_i \|a_i\|_1^2\right)^{1/3} \leq (\sqrt{2}\|A\|)^{4/3}.
\end{aligned}$$

□