Propiedades de distintas distribuciones de escaños en sistemas electorales

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad Zaragoza
1542

Daniel Mur Castro
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Paz Jiménez Seral
4 de septiembre de 2023

Summary

In a huge number of countries we live in representative democracies, which means that people do not make decisions directly but they select political representatives that do it for them. This is done by holding elections whose aim is to achieve a proportional representation of the citizens. The way these representatives are elected is portrayed in the different electoral systems. It is very common to divide the electorate into several electoral districts and then, people vote in each of them to decide who wins the seats that are distributed.

The first idea that comes to mind in order to allocate the seats is that each party receives the number of votes it has got divided by the sum of the votes of all the political parties and multiplied by the number of seats to distribute. This value is known as a party quote i, which obviously does not have to be an integer number. This is the main problem concerning the apportionment, the fact that when you try to find an integer number of seats, the exact proportionality is lost. This is why we must be more flexible concerning the properties required to an apportionment.

The first chapter deals with the problem of how to allocate the seats among the different parties that stand for elections taking into account, as it could not be otherwise, the votes each party gets. In order to be done, the concept of apportionment rule must be defined, which is a function that assigns one or several vectors of seats (vectors of natural numbers) whose components sum the house size h, to a vector of any votes (vector of positive numbers).

A list of basic properties that any apportionment rule must satisfy in order to be considered an apportionment method is given. One of them is anonymity, which means that if the components of the vote vector are permuted, the vector of seats you get is also permuted. This property along with the completeness forces you to allocate more than one possible apportion for some vote vectors. Each electoral system, logically, uses a process to choose a specific vector of seats.

However, these properties are not sufficient to reach a certain level of proportionality in order to faithfully convey the voters' preferences. The idea of proportionality is an intuitive one but, after thinking about it, has some difficulties. Thus, more properties related with proportionality that meet the apportionment method are introduced. Precision refers to keeping the proportions when the house size is reduced. I present the concept of closeness. It means that parties cannot modify the number of seats in more than one when the house size increases in one seat and I demonstrate the implications of proportionality when the number of seats to be distributed tends to infinity.

Several types of monotonicity are named when the number of party votes varies. Moreover, one monotonicity is referred to when the number of seats increases. Denying the last one is known as the Alabama paradox.

We finish the first chapter presenting coherent methods and it is proved that they satisfy the monotonicity of seats and the weak monotonicity in votes.

The Hamilton method is introduced in the second chapter. It is the oldest one as well as the easiest to make. It is close and precise. It is proved that it minimizes the sum of the seats' distances to the quotes, which shows that somehow it is the most proportional. However, it is neither weak monotonous in votes nor seat monotonous, which means that the Alabama paradox may occur. Therefore, it has been deleted from many electoral systems.

In the third chapter jumppoint and signposts sequences are defined and a rounding rule from them is made. Signposts sequences (k_n) satisfy that $k_n \in [n-1,n]$ and that an $x \in [n-1,n]$ is rounded to $n-1$ or n depending on where it is placed before k_n or afterwards. Rounding to a sequence that is not a signpost sequence is made in an analogous way, always allowing two different possibilities of rounding in cases such as $x = k_n$.

Rounding rules induce a divisor rule. An apportionment using this type of rules is achieved dividing the votes vector by a suitable divisor in a way that as we round according to the rounding rule, we get the number of seats we want to distribute. The divisor rules are almost apportionment methods. The only property that they may not satisfy is exactness. It is proved that two jumppoint sequences induce the same divisor rule providing that they are proportional and that there is an apportionment method if the divisor rule can be made from a signpost sequence.

The classical divisor the Jefferson, the Webster, the Adams, the Hill and the Dean methods are introduced. The Webster method is described just as it appears in the Electoral German Law. A necessary condition and a sufficient one is provided so that a divisor rule is precise and it is shown that the classical divisor methods are precise.

The D'Hondt method used in Spain is not described in the Spanish electoral law as a divisor method. In the fourth and last chapter an alternative definition of the divisor rules is given and it is proved that they are equivalent.

An example of apportionment according to the D'Hondt method just as it appears in the Spanish Electoral Law and according to Jefferson method are included and it is proved that they coincide. Another example of apportionment according to the Sainte-Laguë method is given and it is compared to the D'Hondt method.

To conclude the fourth chapter, it is demonstrated that an apportionment method is coherent and complete if and only if it is a divisor method.

The demonstration of this theorem does not appear until the second edition of [1]. However, we have completed and clarified some steps of this demonstration. It can also be found in [2] but it is very confusing and difficult to follow.

Resumen

En una gran cantidad de países vivimos en democracias representativas. Eso significa que la población general no toma las decisiones directamente sino que elige a unos representantes políticos para que las tomen en su lugar. Esto se hace a través de elecciones en las que se pretende que haya una representación más o menos proporcional de la población. La manera de seleccionar a los representantes se describe en los diferentes sistemas electorales. Lo más habitual es dividir al electorado en varias circunscripciones y después, en cada una de ellas, se vota para decidir quién consigue los escaños que se reparten.

La primera idea que podemos tener para hacer un reparto es que a cada partido le corresponde el número de votos que ha obtenido dividido por la suma total de votos a candidaturas y multiplicada por el número de escaños a repartir. Este valor se conoce como *cuota del partido i* y, claramente, no tiene por qué ser entero. Este es el problema fundamental de los repartos, que al buscar un número entero de escaños perdemos una proporcionalidad exacta. Por ello tenemos que ser más flexibles en las propiedades que podemos exigir a un reparto.

En el primer capítulo se aborda el problema de cómo repartir los escaños entre los diferentes partidos que se presentan a unas elecciones, teniendo en cuenta, como no puede ser de otra manera, los votos que obtiene cada uno. Para ello definimos el concepto de regla de reparto, que es una función que asigna uno o varios vectores de escaños (vectores de números naturales), cuyas componentes sumen el tamaño h de la circunscripción, a un vector de votos cualquiera (vectores de números positivos).

Damos una lista de propiedades mínimas que deben cumplir cualquier regla de reparto para ser considerada un método de reparto. Entre ellas está el anonimato. El anonimato significa que si permutamos las componentes del vector de votos, el vector de escaños que se obtiene, también se permuta. Esta propiedad junto con la completitud obligan a asignar más de un posible reparto a algunos vectores de votos. Lógicamente, luego cada sistema electoral tiene un procedimiento para elegir un vector de escaños concreto.

Sin embargo, estas propiedades no son suficientes para alcanzar un cierto grado de proporcionalidad, es decir, que refleje fielmente las preferencias de los votantes. La idea de proporcionalidad es intuitiva pero resulta tener varias aristas cuando reflexionas sobre ella. Por eso se plantean más propiedades relacionadas con la proporcionalidad que pueden cumplir los métodos de reparto y que parecen razonables. La precisión habla de mantener proporciones al reducir los escaños a repartir. Introduzco el concepto de cercanía, en el que al aumentar en un escaño el tamaño de la circunscripción ningún partido puede variar en más de uno su número de escaños, y demuestro que implica la proporcionalidad cuando el número de escaños a repartir tiende a infinito.

Comentamos varios tipos de monotonía al variar el número de votos de los partidos. Y también una monotonía al aumentar el número de escaños. La negación de esta última se la conoce como paradoja de Alabama.

Finalizamos el primer capítulo presentando los métodos coherentes y vemos que cumplen la monotonía en escaños y la monotonía débil en votos.

En el segundo capítulo presentamos el método de Hamilton. Este es el más antiguo y también el más fácil de construir. Vemos que es cercano y preciso. Demostramos que minimiza la suma de las distancias de los escaños a las cuotas y esto visualiza que, de algún modo es el más proporcional. Pero no es monótono débil en votos ni monótono en escaños, es decir, se puede producir la paradoja de Alabama y por tanto se ha eliminado de muchos sistemas electorales.

En el tercer capítulo definimos las sucesiones de pivotes y de guías y construimos una regla de redondeo a partir de ellas. Las guías son sucesiones (k_n) tales que $k_n \in [n-1,n]$ y un $x \in [n-1,n]$ se redondea a $n-1$ o a n según esté antes de k_n o después. El redondeo con una sucesión que no sea guía se hace de manera análoga, siempre dejando dos posibilidades de redondeo para los casos de $x = k_n$.

Las reglas de redondeo inducen una regla de divisor. Un reparto con este tipo de reglas se obtiene dividiendo el vector de votos por un divisor adecuado de tal forma que al redondear según la regla de redondeo obtenemos el número de escaños que queremos repartir. Las reglas de divisor son casi métodos de reparto, solamente pueden no cumplir la exactitud. Se demuestra que dos sucesiones de pivotes inducen la misma regla de divisor si son proporcionales y que tenemos un método de reparto si la regla de divisor se puede construir a partir de una sucesión de guías.

Se presentan los métodos de divisor clásicos, que son: el de Jefferson, el de Webster, el de Adams, el de Hill y el de Dean. Se describe el método de Webster tal y como aparece en la ley electoral alemana. Damos una condición necesaria y otra suficiente para que una regla de divisor sea precisa y se ve que los métodos de divisor clásicos son precisos.

El método D'Hondt, usado en España, no se describe en la ley electoral española como método de divisor. En el cuarto y último capítulo se da una definición alternativa de las reglas de divisor y se ve que son equivalentes.

Se pone un ejemplo de reparto según el método D'Hondt, tal y como se describe en la ley electoral española, y según el método de Jefferson y se ve que coinciden. Se pone otro ejemplo de reparto según el método Sainte-Laguë y se compara con el método D'Hondt.

Finalizamos el cuarto capítulo demostrando que un método de reparto es coherente y completo si y solo si es un método de divisor.

La demostración de este teorema no aparece hasta la segunda edición de [1]. Aún así hemos completado y aclarado algunos pasos de la misma. También se puede encontrar en [2] pero es muy confusa y difícil de seguir.

Índice general

Capítulo 1

Métodos de reparto y propiedades

En una gran cantidad de países vivimos en democracias representativas. Eso significa que la población general no toma las decisiones directamente sino que elige a unos representantes políticos para que las tomen en su lugar. Esto se hace a través de elecciones en las que se pretende que haya una representación más o menos proporcional de la población. La manera de seleccionar a los representantes se describe en los diferentes sistemas electorales. Lo más habitual es dividir al electorado en varias circunscripciones y después, en cada una de ellas, se vota para decidir quién consigue los escaños que se reparten. En ambas situaciones se suelen usar métodos de reparto de diferentes tipos.

Para estudiar las propiedades y que no se produzcan situaciones indeseadas hay que afinar las notaciones. En general la mayoría de las definiciones y propiedades estudiadas están en [1]. Hemos estudiado la segunda edición que mejora y aclara conceptos que en la anterior edición quedaban confusos. Cuando lo hemos considerado necesario, concretamos y simplificamos o clarificamos conceptos y propiedades que nos conducen al objetivo de valorar los principales tipos de repartos usados en la actualidad. Sea h el tamaño de la circunscripción (el número de escaños a repartir) y s el número de partidos, con $h, s \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cada uno de estos partidos obtiene v_i votos, con $v_i \in \mathrm{P} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$[1] tal que $\overline{v} := (v_1, \ldots, v_s) \in \mathrm{P}^s$. A cada partido se le asigna un número de escaños que depende del número de votos. El vector de escaños resultante será $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{N}^s$ con $a := \sum_{i=1}^{s} a_i = h$.

Construyamos ahora una función con la que hacer el reparto. Su dominio tiene que tener en cuenta el número de escaños a repartir $h \in \mathbb{N}^*$ y un vector de votos $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$ sea cual sea el número de partidos $s \in \mathbb{N}^*$, por tanto consideramos la unión de los P^s

$$V := \bigcup_{s=1}^{\infty} \mathrm{P}^s.$$

Su recorrido debe tener como elementos conjuntos de vectores de $\mathbb{N}^s$ para permitir la opción de que haya más de un reparto posible.

Denotamos $\mathrm{N}^s(h) := \{(a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{N}^s \mid a = h\}$ y $M^s(h) := \{C \subset \mathrm{N}^s(h) \mid C \neq \emptyset\}$ (observemos que C tiene un número finito de elementos) y ahora podemos definir el recorrido de la futura función:

$$G := \bigcup_{s,h=1}^{\infty} M^s(h).$$

Definición 1.1. [1, pág. 74] *Se llama regla de reparto a una aplicación $A : \mathbb{N}^* \times V \longrightarrow G$ tal que si $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$ y $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$ entonces $\overline{a} \in \mathrm{N}^s(h)$. Al vector $\overline{a}$ se le denota posible reparto de h escaños y $\overline{v}$ votos ($\overline{a}$ vector de escaños).*

Ejemplo 1. Sea A la regla de reparto tal que asigna todos los escaños al último partido de la lista. Entonces $A(h, (v_1, \ldots, v_s)) = \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1}, h)\}$ para todo $h, s \in \mathbb{N}^*$ y todo $(v_1, \ldots, v_s) \in \mathrm{P}^s$.

[1] En un principio podría parecer que basta considerar los naturales pero enseguida se verá la necesidad de usar los racionales positivos y la completitud de $\mathbb{R}$ puede resultar de utilidad más adelante.

Hay tres parámetros que afectan a un reparto: el número de escaños a repartir, el número de partidos y el número de votos de cada partido. Vamos a estudiar varias condiciones que puede cumplir una regla y maneras en las que puede afectar a un posible reparto variaciones de h y de $\overline{v}$.

Definición 1.2. [1, págs. 75–77] *Un* método *de reparto es una regla de reparto que cumple las siguientes propiedades:*

- **Anonimato.** *Cualquier permutación de un vector de votos se corresponde con la misma permutación de sus vectores de escaños.*
- **Equilibrio.** *Dos partidos igual de fuertes difieren como mucho en un escaño. Es decir, para* $(a_1,\ldots,a_s) \in A(h,(v_1,\ldots,v_s))$ *entonces se cumple:*
$$v_i = v_j \Longrightarrow |a_i - a_j| \leqslant 1 \quad \forall i,j = 1,\ldots,s.$$
- **Armonía.** *Un partido con más votos no puede tener menos escaños que un partido con menos votos. Es decir, para* $(a_1,\ldots,a_s) \in A(h,(v_1,\ldots,v_s))$ *entonces se cumple:*
$$v_i > v_j \Longrightarrow a_i \geqslant a_j \quad \forall i,j = 1,\ldots,s.$$
- **Decencia.** *Los posibles repartos de h escaños de los vectores de votos $(pv_1,\ldots,pv_s)$ son los mismos para todo $p > 0$.*
- **Exactitud.** *Cuando h coincide con el número de votos a los partidos entonces el único reparto posible es que cada partido tenga tantos escaños como votos. Es decir, si $\overline{v} \in \mathbb{N}^s$ y $v = h$ entonces se cumple:*
$$A(h,\overline{v}) = \{\overline{v}\}.$$

Hemos tomado una definición de exactitud más débil que la que aparece en [1, pág.76]. Esta incluye una condición de completitud como se describe en 1.3 pero solo para los $\overline{v}$ con componentes enteras. Estas propiedades dan una base sobre la que construir diferentes distribuciones de escaños pero no dan una noción de proporcionalidad puesto que permiten repartos extremos.

Ejemplo 2. Construimos una regla de reparto A en la que todos los escaños vayan al partido más votado salvo en situaciones que hay que tener en cuenta. Si nuestro vector de votos $\overline{v}$ es de tal forma que existe un p tal que $p\overline{v} \in \mathbb{N}^s$ y $pv = h$ entonces $A(h,\overline{v}) = \{p\overline{v}\}$. Si no se da esta situación y hay k partidos empatados a votos en la primera posición calculamos la división euclídea $h = kn + r$ y repartimos los escaños de tal forma que r partidos tengan $n+1$ escaños y $k-r$ tengan n escaños (todas las posibilidades deben pertenecer a $A(h,\overline{v})$). En cualquier otra situación el partido más votado se lleva los h escaños. Un reparto así cumple armonía y equilibrio, es anónimo y se cumple la exactitud y la decencia.

Un reparto proporcional perfecto sería aquel en el que para todo $\overline{v} \in V$ existe una constante $p > 0$ tal que $p\overline{a} = \overline{v}$ con $\{\overline{a}\} = A(h,\overline{v})$. Sin embargo esto es claramente imposible por lo que la idea de proporcionalidad debe ser menos restrictiva.

Definición 1.3. *Propiedades adicionales que puede cumplir un método de reparto:*

- **Precisión.** [2, pág. 97] *Conserva las proporciones en las distribuciones de escaños al reducir el tamaño de la circunscripción. Es decir, sea $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$, $\overline{a} \in A(h,\overline{v})$ si existe $\overline{b} \in \mathbb{N}^s$ y $1 < n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{a} = n\overline{b}$ entonces:*
$$A(mb,\overline{v}) = \{m\overline{b}\} \quad \forall m = 1,\ldots,n-1.$$
- **Cercanía.** *Sea $(a_1,\ldots,a_s) \in A(h,\overline{v})$ y sea $(b_1,\ldots,b_s) \in A(h+1,\overline{v})$ entonces:*
$$|a_i - b_i| \leqslant 1 \quad \forall i = 1,\ldots,s.$$

- **Completitud.** [1, pág. 161] [2, pág. 98] *Sea* $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$ *y* $(\overline{w}_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{P}^s$ *entonces:*

$$\lim_{k\to\infty} \overline{w}_k = \overline{v} \text{ y } \overline{a} \in A(h,\overline{w}_k) \ \forall k \implies \overline{a} \in A(h,\overline{v}).$$

El ejemplo anterior es preciso pero no cercano ni completo.

Ejemplo 3. Sea A un método de reparto preciso tal que para $h=30$ y un vector de votos $\overline{v}$ tenemos que $\overline{a} = (12\ 9\ 6\ 3) \in A(30,\overline{v})$. Como $\overline{a} = 3(4\ 3\ 2\ 1)$ podemos afirmar que $A(10,\overline{v}) = \{(4\ 3\ 2\ 1)\}$ y también que $A(20,\overline{v}) = \{(8\ 6\ 4\ 2)\}$.

En el capítulo 3 veremos que se pueden construir repartos que no son precisos. La siguiente proposición nos da una idea de la cierta proporcionalidad que cumplen los repartos cercanos.

Proposición 1.4. *Sea A un método de reparto cercano, sea* $\overline{v} \in \mathbb{Q}^s \cap \mathrm{P}^s$ *y sea* $\overline{a}_h \in A(h,\overline{v})$ *entonces:*

$$\lim_{h\to\infty} \frac{a_{h,i}}{h} = \frac{v_i}{v}.$$

Demostración. Sea $\overline{w} \in \mathbb{Q}^s \cap \mathrm{P}^s$ entonces existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $p\overline{w} = \overline{v} \in \mathbb{N}^s$ con $v_i > 0$. Por decencia $A(h,\overline{w}) = A(h,\overline{v})$ para todo $h \in \mathbb{N}^*$. Por exactitud y por decencia sabemos que $A(qv,\overline{v}) = \{q\overline{v}\}$ para todo $q \in \mathbb{N}^*$. Por división euclídea tenemos que $h = qv + r$ con $q, r \in \mathbb{N}$ y $0 \leqslant r < v$. Podemos poner $a_{h,i} = a_{qv+r,i}$ y por exactitud $a_{qv,i} = qv_i$ y por cercanía $qv_i - r \leqslant a_{qv+r,i} \leqslant qv_i + r$. Deducimos que

$$\frac{qv_i - v}{qv+v} \leqslant \frac{qv_i - r}{qv+r} \leqslant \frac{a_{qv+r,i}}{qv+r} = \frac{a_{h,i}}{h} \leqslant \frac{qv_i + r}{qv+r} \leqslant \frac{qv_i + v}{qv}.$$

Es decir, para todo h existe q de tal forma que $\frac{qv_i - v}{qv+v} \leqslant \frac{a_{h,i}}{h} \leqslant \frac{qv_i + v}{qv}$ y h tiende a infinito si q también lo hace. Y puesto que

$$\lim_{q\to\infty} \frac{qv_i - v}{qv+v} = \lim_{q\to\infty} \frac{qv_i + v}{qv} = \frac{v_i}{v}$$

por la regla del sándwich llegamos a

$$\lim_{h\to\infty} \frac{a_{h,i}}{h} = \frac{v_i}{v} = \frac{w_i}{w}.$$

□

Como estamos considerando solamente métodos de reparto, por tanto decentes, se tiene $A(h,\overline{v}) = A\left(h, \frac{\overline{v}}{v}\right)$ y podemos considerar solamente $\overline{v} \in V$ tal que $v = 1$.

También es habitual considerar las llamadas *cuotas* [3, pág. 305]. Dados h y $\overline{v}$ al valor $\frac{v}{h}$ se le conoce como cuota de $(h,\overline{v})$ y se interpreta como el número de votos que «debería» costar un escaño. Al valor $q_i := \frac{hv_i}{v}$ se le llama cuota del partido i y $\overline{q}$ es el vector de cuotas. También, por decencia, $A(h,\overline{v}) = A(h,\overline{q})$.

Así, según nos interese, podremos considerar solo los $\overline{v}$ tal que $v=1$ o tal que $v=h$. Un primer intento para definir la proporcionalidad pasa por considerar que cada $\overline{a} \in A(h,\overline{v})$ debe cumplir el criterio de las cuotas [5, pág. 108], que $|a_i - q_i| < 1$ o equivalentemente

$$\lfloor q_i \rfloor \leqslant a_i \leqslant \lceil q_i \rceil \quad \forall i = 1,\ldots,s. \tag{1.1}$$

$\lfloor\cdot\rfloor$ y $\lceil\cdot\rceil$ son la función suelo, parte entera hacia abajo, y la función techo, parte entera hacia arriba. Aquí aparece el método de Hamilton o de restos mayores en la que su forma de realizar el reparto garantiza que se cumpla (1.1). Estudiaremos este método en detalle en el capítulo 2.

Fijémonos que en el criterio de las cuotas estamos teniendo en cuenta el número total de votos v, así que podemos relajarlo si permitimos variar libremente al divisor.

Definición 1.5. *Se dice que un método de reparto A cumple el* criterio de proporcionalidad *si para todo* $h \in \mathbb{N}^*$, $\overline{v} \in V$ *existe un* $d > 0$ *tal que para todo* $\overline{a} \in A(h,\overline{v})$ *se cumple*

$$\left\lfloor \frac{v_i}{d} \right\rfloor \leqslant a_i \leqslant \left\lceil \frac{v_i}{d} \right\rceil \quad \forall i = 1,\ldots,s. \tag{1.2}$$

Cualquier método de reparto debe cumplir el criterio de proporcionalidad para ser considerado proporcional. El criterio de proporcionalidad transmite claramente que la manera de repartir escaños depende de dos factores: de cómo se escoja el divisor d y de la forma de redondear. Es más, formas muy elegantes de elegir d y el criterio de redondeo nos llevan a los métodos de reparto más comunes en los que casi todas las definiciones que estamos viendo se cumplen y que veremos en el capítulo 3. Dicho esto, es fundamental tener en cuenta las demás propiedades para dotar de una estructura a las reglas de reparto, sobre todo si intentamos plantear métodos alternativos para repartir los escaños.

Proposición 1.6. *Sea A un método de reparto que cumpla el criterio de proporcionalidad, sea $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$ y sea $\overline{a}_h \in A(h,\overline{v})$ entonces:*

$$\lim_{h\to\infty} \frac{a_{h,i}}{h} = \frac{v_i}{v}.$$

Demostración. Observemos que para cada h tendremos un d distinto. Primero cambiemos nuestra cadena de desigualdades:

$$\left\lfloor \frac{v_i}{d_h} \right\rfloor \leqslant a_{h,i} \leqslant \left\lceil \frac{v_i}{d_h} \right\rceil \Longrightarrow a_{h,i} - 1 < \frac{v_i}{d_h} < a_{h,i} + 1.$$

Al sumar ahora todas las componentes $\sum(a_{h,i}-1) < \sum \frac{v_i}{d_h} < \sum(a_{h,i}+1)$ tenemos:

$$h - s < \frac{v}{d_h} < h + s.$$

Tenemos que $\frac{v}{h+s} < d_h < \frac{v}{h-s} \longrightarrow 0$ cuando $h \to \infty$. Y ahora podemos volver a la primera desigualdad, dividiendo por v y multiplicando por d_h, y añadir dos más:

$$\frac{a_{h,i}-1}{h+s} < \frac{d_h(a_{h,i}-1)}{v} < \frac{v_i}{v} < \frac{d_h(a_{h,i}+1)}{v} < \frac{a_{h,i}+1}{h-s}.$$

Restando $\frac{a_{h,i}}{h}$ (que es menor que 1) llegamos a

$$\frac{-sa_{h,i}}{h(h+s)} - \frac{1}{h+s} < \frac{v_i}{v} - \frac{a_{h,i}}{h} < \frac{sa_{h,i}}{h(h-s)} + \frac{1}{h-s}.$$

Tanto el lado izquierdo como el derecho de las desigualdades tienden a 0 cuando $h \to +\infty$. Un límite tiende a 0 si y solo si su valor absoluto tiende a 0.

$$\left| \frac{-sa_{h,i}}{h(h+s)} - \frac{1}{h+s} \right| = \frac{sa_{h,i}}{h(h+s)} + \frac{1}{h+s} \leqslant \frac{s}{h+s} + \frac{1}{h+s} \longrightarrow 0 \text{ si } h \to +\infty.$$

Con el lado derecho de la desigualdad el razonamiento es análogo.

Así concluimos finalmente que

$$\lim_{h\to\infty} \frac{a_{h,i}}{h} = \frac{v_i}{v}.$$

□

Como hemos comentado al principio, el número de escaños, el número de partidos y los votos de cada partido afectan a un reparto. Veamos como puede afectar a este una variación de dichos parámetros.

Definición 1.7. [2, pág. 106] *Una regla de reparto A es semimonótona en votos si para todo $\overline{v},\overline{w} \in \mathrm{P}^s$*

$$v_i < w_i \text{ y } v_j = w_j \ \forall j \neq i \implies a_i \leqslant b_i \text{ con } \overline{a} \in A(h,\overline{v}) \text{ y } \overline{b} \in A(h,\overline{w}).$$

La semimonotonía en votos parece poco relevante en la práctica ya que este tipo comparaciones son poco probables en la vida real pero es algo básico que se debe cumplir.

Una definición a primera vista más atractiva puesto que tiene en cuenta dos vectores de votos cualesquiera es la siguiente.

Definición 1.8. [2, pág. 106] *Sea $\overline{v}, \overline{w} \in \mathrm{P}^s$ con $v = w = 1$ y sea $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$ y $\overline{b} \in A(h, \overline{w})$. Un método de reparto se dice que es fuertemente monótono en votos si:*

$$v_i < w_i \Longrightarrow a_i \leqslant b_i.$$

Proposición 1.9. [2, pág. 107] *Ningún método de reparto es fuertemente monótono en votos.*

Demostración. Sea $s \geqslant 3$, si $h = 1$ tenemos que $(1, 0, \ldots, 0)$ es un reparto de $\overline{v} = (1/s, 1/s, \ldots, 1/s)$. Sea $\varepsilon > 0$, $\overline{w} = (\frac{1+\varepsilon}{s}, \frac{1+2\varepsilon}{s}, \frac{1-3\varepsilon}{s}, \frac{1}{s}, \ldots, \frac{1}{s})$ entonces $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ es un reparto de $\overline{w}$. Así pues tenemos que $v = w = 1$ y $v_i < w_i \not\Rightarrow a_i \leqslant b_i$. □

Definición 1.10. [2, págs. 108, 117] *Sea A un método de reparto, sean $\overline{v}, \overline{w} \in \mathrm{R}^s$ y sean $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$ y $\overline{b} \in A(h, \overline{w})$. A se dice* monótono en votos *si para todo $i < j$*

$$\frac{w_i}{w_j} \leqslant \frac{v_i}{v_j} \Longrightarrow \begin{cases} b_i \leqslant a_i \;\; o \;\; a_j \leqslant b_j \\ o \\ \dfrac{w_i}{w_j} = \dfrac{v_i}{v_j} \;\; y \;\; (b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \ldots, b_{j-1}, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_s) \in A(h, \overline{w}) \end{cases}$$

En el caso en el que se cumpla la condición solamente para una desigualdad estricta diremos que es monótono débil en votos [1, pág. 166].

Definimos el concepto de región para una mayor comprensión del concepto de reparto.

Definición 1.11. [2, pág. 109] *Sea $\overline{a} \in \mathbb{N}^s(h)$ llamaremos región del reparto $\overline{a}$ al conjunto*

$$\mathrm{P}(\overline{a}) := \{\overline{v} \in \mathrm{P}^s \mid \overline{a} \in A(h, \overline{v})\}.$$

Un método de reparto A se dice convexo si $\mathrm{P}(\overline{a})$ es convexo para todo $\overline{a} \in \mathbb{N}^s(h)$, $h, s \in \mathbb{N}$.

Fijémonos que si s y h están fijos hay un número finito de regiones y a cada vector $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$ le corresponde al menos una región.

Proposición 1.12. [2, pág. 110] *Si A es un método de reparto monótono en votos entonces es convexo.*

Demostración. Sea A un método de reparto que no es convexo. Es decir, existe $\overline{a} \in \mathbb{N}^s(h)$ y $\overline{v}, \overline{w} \in \mathrm{P}(\overline{a})$ tal que $\overline{u} := \lambda \overline{v} + (1 - \lambda)\overline{w} \notin \mathrm{P}(\overline{a})$ para algún $0 < \lambda < 1$. Sea $\overline{b} = A(h, \overline{u})$ tal que la diferencia con $\overline{a}$ sea lo menor posible. Como $\overline{a} \neq \overline{b}$ existen $i, j = 1, \ldots, s$ tal que $a_i < b_i$ y $a_j > b_j$. Por construcción de $\overline{u}$ tenemos que sucede sin pérdida de generalidad una de las siguientes relaciones.

$$\frac{v_i}{v_j} < \frac{u_i}{u_j} < \frac{w_i}{w_j} \;\; o \;\; \frac{v_i}{v_j} = \frac{u_i}{u_j} = \frac{w_i}{w_j}.$$

En el primer caso $\dfrac{u_i}{u_j} < \dfrac{w_i}{w_j}$ y $a_i < b_i$ y $a_j > b_j$ implican que A no es monótono en votos. Para el segundo caso no podemos intercambiar b_i, b_j por a_i, a_j porque si fuera posible sería más cercano a $\overline{a}$ que $\overline{b}$ contradiciendo la minimalidad de la distancia de $\overline{b}$ a $\overline{a}$ y por tanto A tampoco es monótono en este caso. □

Definición 1.13. [1, pág. 163] *Un método de reparto se dice* monótono en escaños *cuando para todo h y todo vector de votos $v \in \mathrm{P}^n$ se cumple:*

$$\forall \, \overline{a} \in A(h, \overline{v}) \;\; existe \;\; \overline{b} \in A(h+1, \overline{v}) \;\; tal \;\; que \;\; \overline{a} \leqslant \overline{b}$$

$$\forall \, \overline{b} \in A(h+1, \overline{v}) \;\; existe \;\; \overline{a} \in A(h, \overline{v}) \;\; tal \;\; que \;\; \overline{a} \leqslant \overline{b}.$$

Para el caso $s = 2$ y si nuestro método es cercano, se deduce que si $(a_1, a_2) \in A(h, \overline{v})$ implica que $(a_1 + 1, a_2)$ o $(a_1, a_2 + 1)$ pertenecen a $A(h+1, \overline{v})$, además $(a_1 + 2, a_2 - 1)$ y $(a_1 - 1, a_2 + 2)$ no son repartos válidos. Es decir, concluimos que si $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$ y $\overline{b} \in A(h+1, \overline{v})$ entonces $\overline{a} \leqslant \overline{b}$.

Definición 1.14. [1, pág. 162] *Un método de reparto A se dice coherente si para todo $s \in \mathbb{N}^*$, para todo $0 < m < s$, para todo $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$ y $\overline{a} \in A(h,\overline{v})$ cumple las dos siguientes propiedades:*

- Coherencia al restringir: $(a_i)_{i\leqslant m} \in A(\sum_{i\leqslant m} a_i, (v_i)_{i\leqslant m})$.
- Coherencia al concatenar: *Si $\overline{b} \in A(\sum_{i\leqslant m} a_i, (v_i)_{i\leqslant m})$ y $\overline{c} \in A(\sum_{m<i\leqslant s} a_i, (v_i)_{m<i\leqslant s})$ entonces* $(\overline{b},\overline{c}) \in A(h,\overline{v})$.

Nota: por anonimato son equivalentes las diferentes elecciones de conjuntos de subíndices cualesquiera.

Teorema 1.15. [1, págs. 163–165] *Todo método coherente es monótono en escaños.*

Demostración. Primero lo demostraremos para dos partidos y circunscripciones con tamaño h y $h+1$.

Sea un vector de votos $\overline{v} = (v_1, v_2)$ tal que $t = v_1/v_2$, por decencia el vector $(t,1)$ tendrá los mismos repartos. Sean $\overline{a} \in A(h,(t,1))$ y $\overline{b} \in A(h+1,(t,1))$, necesitamos ver que

$$\overline{a} \leqslant \overline{b}.$$

Para ello consideramos el reparto de $2h+1$ escaños entre cuatro partidos con el vector de votos $(t,1,t,1)$. Veamos que para todo vector de escaños $\overline{c} \in A(2h+1,(t,1,t,1))$ las dos primeras componentes suman h o $h+1$. Como A es equilibrado tenemos que

$$c_1 - 1 \leqslant c_3 \leqslant c_1 + 1 \quad \text{y} \quad c_2 - 1 \leqslant c_4 \leqslant c_2 + 1.$$

Si las dos primeras componentes suman $h-1$ entonces

$$c \leqslant (h-1) + (c_1+1) + (c_2+1) \leqslant 2(h-1) + 2 = 2h.$$

Si $c_1 + c_2 = h+2$ entonces

$$c \geqslant (h+2) + (c_1-1) + (c_2-1) \geqslant 2(h+2) - 2 = 2h+2.$$

Por tanto, $c_1 + c_2 = h$ o $c_1 + c_2 = h+1$. Las dos opciones son posibles por anonimato.

Supongamos sin pérdida de generalidad $c_1 + c_2 = h$. Por coherencia al restringir $(c_1,c_2) \in A(h,(t,1))$ de la misma forma que lo hace $\overline{a}$. Así que por coherencia al concatenar

$$(a_1,a_2,c_3,c_4) \in A(2h+1,(t,1,t,1)).$$

Por otra parte, por coherencia al restringir tenemos $(c_3,c_4) \in A(h+1,(t,1))$, así como, $\overline{b} \in A(h+1,(t,1))$. y de nuevo por coherencia al concatenar

$$(a_1,a_2,b_1,b_2) \in A(2h+1,(t,1,t,1)).$$

Si $b_2 = a_2 - 1$ entonces

$$b_1 + b_2 \leqslant (a_1+1) + (a_2-1) = h \neq h+1.$$

Si $b_1 = a_1 - 1$ entonces

$$b_1 + b_2 \leqslant (a_1-1) + (a_2+1) = h \neq h+1.$$

Por tanto $a_1 \leqslant b_1$ y $a_2 \leqslant b_2$.

Ahora lo demostraremos para más partidos utilizando inducción completa sobre el número de partidos. Sea $\overline{a} \in A(h,\overline{v})$ y $\overline{b} \in A(h+1,\overline{v})$, entonces pueden ocurrir dos cosas, o bien $\overline{a} \leqslant \overline{b}$ o bien existe un indice i tal que $b_i < a_i$.

En el primer caso hemos acabado. En el segundo , tenemos que ver que existen $\overline{c} \in A(h,\overline{v})$ y $\overline{d} \in A(h+1,\overline{v})$ tal que

$$\overline{a} \leqslant \overline{d} \quad \text{y} \quad \overline{c} \leqslant \overline{b}.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $a_1 > b_1$ y que $a_2 < b_2$ (podemos hacerlo por anonimato). Por coherencia al restringir se tiene $(a_1,a_2) \in A(a_1+a_2,(v_1,v_2))$ y $(b_1,b_2) \in A(b_1+b_2,(v_1,v_2))$. Como A es monótono para 2 escaños por la primera parte de la demostración y

$$(a_1,a_2) \nleqslant (b_1,b_2) \quad \text{y} \quad (a_1,a_2) \ngeqslant (b_1,b_2)$$

tenemos que

$$a_1+a_2 = b_1+b_2.$$

Sea $n = h-(a_1+a_2)$, por coherencia al restringir,

$$(a_3,\dots,a_s) \in A(n,(v_3,\dots,v_s)) \quad \text{y} \quad (b_3,\dots,b_s) \in A(n+1,(v_3,\dots,v_s)).$$

Por hipótesis de inducción completa, existe $(d_3,\dots,d_s) \in A(n+1,(v_3,\dots,v_s))$ tal que

$$(a_3,\dots,a_s) \leqslant (d_3,\dots,d_s)$$

y por coherencia al concatenar, $\overline{d} = (a_1,a_2,d_3,\dots,d_s) \in A(h+1,\overline{v})$ cumple

$$\overline{a} \leqslant \overline{d}.$$

Con un razonamiento similar, podemos formar un vector $\overline{c} = (b_1,b_2,c_1,\dots,c_s) \in A(h,\overline{v})$ con

$$\overline{c} \leqslant \overline{b}.$$

□

Teorema 1.16. [1, págs. 166, 167] *Todo método coherente es monótono débil en votos.*

Demostración. Comenzamos la demostración para dos partidos. Sean $(a_1,a_2) \in A(h,\overline{v})$ y $(b_1,b_2) \in A(h,\overline{w})$. Veamos que $\frac{v_1}{v_2} < \frac{w_1}{w_2}$ implica $a_1 \leqslant b_1$ o $a_2 \geqslant b_2$.

Sea $r = \frac{v_1}{v_2}$ y $t = \frac{w_1}{w_2}$, por decencia $\overline{b} \in A(h,(t,1))$ y $\overline{a} \in A(h,(r,1))$. Sea $\overline{c} \in A(2h,(t,1,r,1))$, por anonimato podemos suponer que $c_2 \leqslant c_4$, veamos que

$$c_1+c_2 \geqslant h.$$

La afirmación se demuestra estableciendo la desigualdad $c_1+c_2 \geqslant c_3+c_4$. Como $t > r$, por armonía, $c_1 \geqslant c_3$. Si $c_2 = c_4$ la desigualdad se cumple. En otro caso, como por equilibrio, $|c_2-c_4| \leqslant 1$ se tiene que

$$c_2 = c_4 - 1,$$

y también que $c_2+c_4 = 2c_2+1$ es impar y c_1+c_3 también lo es. Se sigue que $c_1 > c_3$ y $c_1 \geqslant c_3+1$. Resumiendo, $c_1+c_2 \geqslant (c_3+1)+(c_4-1) = c_3+c_4$. Es decir,

$$c_1+c_2 \geqslant h \quad \forall\, \overline{c} \in A(2h,(t,1,r,1)).$$

Supongamos que $c_1+c_2 = c_3+c_4 = h$, como $c_1 \geqslant c_3$ tememos que $c_2 \leqslant c_4$. Por coherencia al restringir $(c_1,c_2) \in A(h,(t,1))$ y $(c_3,c_4) \in A(h,(r,1))$ y por coherencia al concatenar $(b_1,b_2,a_1,a_2) \in A(2h,(t,1,r,1))$ y por armonía,

$$b_1 \geqslant a_1.$$

Para el caso $c_1+c_2 > h$, por coherencia, por un lado $(c_1,c_2) \in A(c_1+c_2,(t,1))$ y por monotonía en escaños, $c_2 \geqslant b_2$. Por otro lado, $(c_3,c_4) \in A(c_3+c_4,(r,1))$ con $c_3+c_4 < h$. Por monotonía en escaños, $c_4 \leqslant a_2$, ahora podemos concatenar las desigualdades

$$b_2 \leqslant c_2 \leqslant c_4 \leqslant a_2,$$

por lo que la primera parte de la prueba está completada.

Para repartos con $s \geqslant 3$, el argumento es por reducción al absurdo. Supongamos que un reparto coherente no es monótono débil en votos, entonces, existen vectores de escaños $\overline{a} \in A(h,\overline{v})$ y $\overline{b} \in A(h,\overline{w})$ tal que dos partidos con indices (i,k) (supongamos $i=1,k=2$ sin perdida de generalidad) satisfacen $\dfrac{v_1}{v_2} < \dfrac{w_1}{w_2}$ y también

$$a_1 > b_1 \quad \text{y} \quad a_2 < b_2.$$

Con $r = \dfrac{v_1}{v_2}$ y $t = \dfrac{w_1}{w_2}$, la decencia y la coherencia al restringir nos dice que $(a_1,a_2) \in A(a_1+a_2,(r,1))$ y $(b_1,b_2) \in A(b_1+b_2,(t,1))$.

En el caso que $a_1+a_2 = b_1+b_2$ tenemos contradicción con la monotonía en votos para el caso $s=2$.

En caso de que $a_1+a_2 < b_1+b_2$ consideramos $(c_1,c_2) \in A(b_1+b_2,(r,1))$. Por monotonía en escaños,

$$a_1 \leqslant c_1 \quad \text{y} \quad a_2 \leqslant c_2.$$

Como $(b_1,b_2) \in A(b_1+b_2,(t,1))$ la monotonía en el caso $s=2$ nos dice que

$$c_1 \leqslant b_1 \quad \text{o} \quad c_2 \geqslant b_2.$$

Por tanto si $c_1 > b_1$ tenemos que $c_1+c_2 > b_1+b_2$ que no puede ser. Así que

$$c_1 \leqslant b_1 \quad \text{y} \quad a_1 \leqslant c_1 \leqslant b_1$$

contradiciendo nuestra hipótesis.

El caso $a_1+a_2 > b_1+b_2$ se realiza de forma análoga. $\square$

Capítulo 2

El método de Hamilton

El método de Hamilton surge en 1792 cuando en Estados Unidos se plantean el problema de cuántos representantes deben asignarse a cada estado en el Congreso. Es el más antiguo de todos junto con el método de Jefferson y es muy útil e intuitivo. Dada su sencillez se usa en varios sistemas electorales. Por ejemplo, es el que se usa para repartir 248 escaños entre todas las provincias de España [6, artículo, 162]. También se utiliza en la elección de representantes al claustro en la Universidad de Zaragoza [7, artículos 10 y 17].

Definición 2.1. [2, pág. 17] [1, pág. 96] *El método de Hamilton o de restos mayores se realiza en dos partes:*

Primero se asigna a cada partido la parte entera de sus cuotas.

Segundo se asignan los escaños restantes añadiendo 1 *escaño a aquellos partidos con mayor parte decimal.*

$\overline{a} \in H(h, \overline{v})$ *si y solo si* $|a_i - q_i| < 1$ *para todo* i *y además si* $q_k = a_k + f_k$ *con* $0 \leqslant f_k < 1$ *y* $q_j = a_j - g_j$ *con* $0 < g_j < 1$ *tenemos que* $f_k \leqslant 1 - g_j$*.*

Ejemplo 4. Supongamos que tenemos 4 partidos que se reparten 12 escaños con un vector de votos $(23\ 18\ 13\ 6)$. El vector de cuotas es $(4{,}6\ 3{,}6\ 2{,}6\ 1{,}2)$. La parte entera de las cuotas es $(4\ 3\ 2\ 1)$ por lo que quedan dos escaños por repartir. Como hay tres partidos con la misma parte decimal, es decir, hay empates, hay varios repartos posibles:

$$A(12, (23\ 18\ 13\ 6)) = \{(5\ 4\ 2\ 1), (4\ 4\ 3\ 1), (5\ 3\ 3\ 1)\}.$$

Claramente el método de Hamilton es anónimo, equilibrado, armónico, decente y exacto, por lo que efectivamente es un método de reparto.

Por construcción garantiza que se cumpla (1.1), además minimiza la diferencia entre los escaños de cada partido y sus cuotas.

Proposición 2.2. [1, págs. 195–197] *El método de Hamilton es el que minimiza la función*

$$f(\overline{b}) = \sum_{i=1}^{s} |b_i - q_i|.$$

Es decir, $\overline{a} \in H(h, \overline{q})$*,* $(q = h)$ *si y solo si* $f(\overline{a}) \leqslant f(\overline{b})$ *para todo* $\overline{b} \in \mathrm{N}^s(h)$*.*

Demostración. Sea $\overline{b} \in \mathrm{N}^s(h)$, si $b_i < \lfloor q_i \rfloor$ para algún i entonces

$$b_i + \sum_{j \neq i} \lfloor q_j \rfloor < h.$$

Por lo que para algún j se tiene que $b_j \geqslant \lfloor q_j \rfloor + 1$. Sea $c_i = b_i + 1$, $c_j = b_j - 1$ y $c_k = b_k$ si $k \neq i$, $k \neq j$ entonces

$$\sum_{k=1}^{s} |c_k - q_k| < \sum_{k=1}^{s} |b_k - q_k|.$$

Así pues, si $\overline{a}$ minimiza la función $a_i \geqslant \lfloor q_i \rfloor$ $\forall i$ y con un razonamiento análogo $a_i \leqslant \lceil q_i \rceil$.

Sea $\overline{a}$ un posible reparto de Hamilton y sea $\overline{b}$ tal que $|b_i - q_i| < 1$ para todo i. Se tiene que $a_i = b_i$ o que $|a_i - b_i| = 1$. Si existe i tal que $a_i = b_i + 1$, existe j tal que $a_j = b_j - 1$. La proposición quedará probada si

$$|a_i - q_i| + |a_j - q_j| \leqslant |b_i - q_i| + |b_j - q_j|.$$

Por ser $a_i = \lfloor q_i \rfloor + 1$ y $a_j = \lfloor q_i \rfloor$ tenemos que la parte decimal de q_i es mayor o igual que la parte decimal de q_j, es decir, $|b_i - q_i| \geqslant |a_j - q_j|$ y por tanto

$$|a_i - q_i| + |a_j - q_j| = 1 - (q_i - b_i) + |a_j - q_j| \leqslant 1$$

$$|b_i - q_i| + |b_j - q_j| = q_i - b_i + b_j - q_j \geqslant q_j - a_j + 1 - (q_j - a_j) = 1$$

□

Veamos ahora que es preciso y cercano.

Proposición 2.3. *El método de Hamilton es cercano.*

Demostración. Sea $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_s)$ con $v = 1$, sea $\overline{a}$ un vector de reparto de h escaños y sea $\overline{b}$ un vector de reparto de $h+1$ escaños. Entonces $\lfloor hv_i \rfloor \leqslant a_i, b_i \leqslant \lceil (h+1)v_i \rceil$ para todo $i = 1, \ldots, s$.

Si $s = 1$ todo es trivial y si $s \geqslant 2$ entonces $v_i < 1$ y $\lceil hv_i \rceil \geqslant \lfloor (h+1)v_i \rfloor$ y $\lceil (h+1)v_i \rceil - \lfloor hv_i \rfloor \leqslant 2$. Así se tiene que $|a_i - b_i| \leqslant 2$.

Supongamos que existe i para el que se tiene la igualdad. En este caso se tiene:

$$\lfloor hv_i \rfloor = a_i < \lceil hv_i \rceil = \lfloor (h+1)v_i \rfloor < \lceil (h+1)v_i \rceil = b_i.$$

Pero para este i tenemos que

$$hv_i - \lfloor hv_i \rfloor = hv_i - (\lfloor (h+1)v_i \rfloor - 1) = hv_i + 1 - \lfloor (h+1)v_i \rfloor > (h+1)v_i - \lfloor (h+1)v_i \rfloor.$$

Por otra parte, para que el partido i gane dos escaños, algún partido j debe perder uno (con lo anterior es claro que ningún partido puede perder más de un escaño). Para que esto suceda debemos tener que

$$hv_i - \lfloor hv_i \rfloor \leqslant hv_j - \lfloor hv_j \rfloor,$$

es decir, debe tener mayor parte decimal que i para asignarle antes un escaño adicional cuando se reparten h escaños. Además debe cumplir que $\lfloor hv_j \rfloor = \lfloor (h+1)v_j \rfloor$ ya que de otra forma j no podría perder un escaño. En tal caso $hv_j - \lfloor hv_j \rfloor < (h+1)v_j - \lfloor (h+1)v_j \rfloor$ y, por tanto,

$$(h+1)v_i - \lfloor (h+1)v_i \rfloor < (h+1)v_j - \lfloor (h+1)v_j \rfloor.$$

Es decir, cuando se reparten $h+1$ escaños, el partido j tiene mayor resto que el i y se le asignaría antes un escaño adicional. Así $a_i \geqslant b_i - 1$ y

$$|a_i - b_i| \leqslant 1.$$

□

Proposición 2.4. *El método de Hamilton es preciso.*

Demostración. Sean $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$ y $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$ tal que existe un $\overline{b} \in \mathbb{N}^s$ y $1 < n \in \mathbb{N}$ con $\overline{a} = n\overline{b}$, debemos comprobar que $m\overline{b}$ es el único reparto de mb escaños y $\overline{v}$ votos.

Veamos que $|mb_i - mbu_i| < 1$. Claramente $\frac{m}{n}\overline{a} = m\overline{b} \in \mathbb{N}^s$ para todo $m = 1, \ldots, n-1$. Así tenemos que

$$|mb_i - mbu_i| = \frac{m}{n} |a_i - hu_i| < |a_i - hu_i| < 1 \;\; \forall i = 1, \ldots, s.$$

Si $hu_i = a_i + f_i$ con $0 \leqslant f_i < 1$ y $hu_j = a_j - g_j$ con $0 < g_j < 1$ (los $i \in I$ son los partidos que se redondean hacia abajo y los $j \in J$ los que se redondean hacia arriba) tenemos que $f_i \leqslant 1 - g_j$. Si cambiamos el tamaño de la circunscripción tenemos $\frac{m}{n}hu_i = mb_i + \frac{m}{n}f_i$ y $\frac{m}{n}hu_j = mb_j - \frac{m}{n}g_j$. Como

$$\sum_{k=1}^{s} mb_k = \frac{m}{n}h \ \text{ y } \ \frac{m}{n}f_i < 1 - \frac{m}{n}g_j \ \ \forall i \in I, \forall j \in J$$

entonces $A\left(\frac{m}{n}h, \overline{v}\right) = \{m\overline{b}\}$. □

Sabemos que los escaños asignados a un partido difieren con el valor teóricamente proporcional en un número menor que 1. Pero consideremos el siguiente caso.

Ejemplo 5. Sea un vector de votos $\overline{v} = (60\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10)$. Si se reparten 6 escaños su vector de cuotas será $\overline{q} = 6\overline{u} = (3\ 0{,}5\ 0{,}5\ 0{,}5\ 0{,}5\ 0{,}5\ 0{,}5)$. Si A es un método de reparto que cumple el criterio de la cuota tenemos que $(3\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0) \in A(6, \overline{v})$. Este reparto tiene sentido desde el punto de vista que al partido más votado tiene exactamente la proporción de escaños del total que le corresponden según su cuota. Pero también hay tres partidos a los que le estás dando el doble de representación de la que se merecen según su cuota.

De este ejemplo podemos sacar la conclusión de que hacer los repartos teniendo en cuenta solo las cuotas no tiene por qué ser deseable si nuestro propósito es no perjudicar a los grandes partidos. Pero su principal crítica es que no es monótono en escaños ni tampoco es monótono en votos.

Cuando se da la situación en la que un partido perdería un representante al aumentar el tamaño de la circunscripción se dice que ocurre la *paradoja de Alabama.*

Ejemplo 6. Supongamos que tenemos una circunscripción en la que se reparten 10 escaños con el vector de votos $(521\ 238\ 140\ 101)$. Entonces el vector de cuotas será $(5{,}21\ 2{,}38\ 1{,}40\ 1{,}01)$ y el vector de escaños $(5\ 2\ 2\ 1)$. Sin embargo si se reparten 11 escaños entonces el vector de cuotas es $(5{,}73\ 2{,}62\ 1{,}54\ 1{,}11)$ y por tanto el vector de votos es $(6\ 3\ 1\ 1)$ donde el tercer partido ha perdido un escaño al aumentar la representación.

Veamos ahora que el método de Hamilton no es monótono en votos

Ejemplo 7. Supongamos que tenemos una circunscripción en la que se reparten 9 escaños. El vector de votos $\overline{w} = (49\ 28\ 17)$ tiene como vector de cuotas $(4{,}69\ 2{,}68\ 1{,}63)$ y, por tanto el vector de escaños es $\overline{b} = (5\ 3\ 1)$. El vector de votos $\overline{v} = (65\ 29\ 17)$ tiene como vector de cuotas $(5{,}27\ 2{,}35\ 1{,}38)$ y, por tanto el vector de escaños es $\overline{a} = (5\ 2\ 2)$.

Se da la situación de que

$$\frac{w_2}{w_3} = \frac{28}{17} < \frac{29}{17} = \frac{v_2}{v_3}$$

y, sin embargo,

$$b_2 = 3 > 2 = a_2 \quad \text{y} \quad a_2 = 2 > 1 = b_1.$$

Por este tipo de situaciones en muchas leyes electorales no se usa el método de Hamilton sino que se prefieren los métodos de divisor. Éstos se estudiarán en los siguientes capítulos.

Capítulo 3

Métodos de divisor

Los métodos de divisor son muy comunes en los sistemas electorales por su sencillez pero sobre todo por su buen comportamiento. A la hora de hacer un reparto una función de los números reales positivos a los naturales puede ser útil. Una vez se tiene una tal función f, dado un tamaño de circunscripción h y un vector de votos $\overline{v}$ se puede usar f para hacer un reparto de h escaños si existe un $t > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{s} f(tv_i) = h.$$

Sin embargo no siempre existe un t así como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8. Sea $s = 2$ y $v_1 = v_2$, y sea f una función de los positivos a los naturales. Tenemos entonces que para todo $t > 0$ $f(tv_1) + f(tv_2)$ es par y por tanto no existe un reparto posible cuando h es impar.

Este problema se soluciona permitiendo redondear hacia arriba o hacia abajo en los puntos de discontinuidad.

Definición 3.1. [1, págs. 65, 66] *Una* regla de redondeo *es una función* $[\![\cdot]\!] : [0, +\infty) \longrightarrow \wp(\mathbb{N})$ *construida a partir de una* sucesión de pivotes $k_0 = 0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots$, $k_i \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$[\![x]\!] = \begin{cases} \{0\} & si \;\; x = 0, \\ \{n\} & si \;\; x \in (k_n, k_{n+1}), \\ \{n-1, n\} & si \;\; x = k_n > 0. \end{cases}$$

Si en una regla de redondeo $k_1 = 0$ *el único número real que se redondea a* 0 *es el* 0.

Serán especialmente interesantes las reglas de redondeo construidas a partir de sucesiones de guías. *Estas son sucesiones de pivotes que cumplen estas dos propiedades adicionales.*

- Localización. *Todas la guías siguientes pertenecen a intervalos consecutivos con extremos enteros,*

$$k_n \in [n-1, n] \;\; \forall\, n \geqslant 1.$$

- Repulsión de extremos. *Si existe alguna guía en el extremo izquierdo de su intervalo de localización entonces no existe ninguna guía situada en el extremo derecho y viceversa.*

$$\exists m > 1 \;\; tal\ que \;\; k_m = m - 1 \implies k_n < n \;\; \forall n \geqslant 1,$$

$$\exists m \geqslant 1 \;\; tal\ que \;\; k_m = m \implies k_n > n - 1 \;\; \forall n > 1.$$

Ejemplo 9. Sea $r \in [0, 1]$, se define una *sucesión de guías fijas* con $k_0^r := 0$ y que para todo $n \geqslant 1$ $k_n^r := n - 1 + r$.

Tres de las guías clásicas que se usan son de este tipo.

- Con $r = 1$ el redondeo es hacia abajo.

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

- Con $r = 0{,}5$ el redondeo es el estándar.

$$0,\ 0{,}5,\ 1{,}5,\ 2{,}5,\ \ldots$$

- Con $r = 0$ el redondeo es hacia arriba.

$$0,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Ejemplo 10. Otros dos redondeos clásicos con sucesiones de guías que no son fijas son:
Con la media geométrica

$$0,\ 0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{6},\ \ldots,\ k_n = \sqrt{n(n-1)},\ \ldots$$

Con la media armónica

$$0,\ 0,\ \frac{4}{3},\ \frac{12}{5},\ \ldots,\ k_n = \frac{2n(n-1)}{2n-1},\ \ldots$$

La ley alemana para las elecciones al *Bundestag*, traducida al español en [4], describe el *método de Webster* básicamente de la siguiente forma: El número de escaños atribuidos a cada lista se determina dividiendo el total de votos emitidos a la lista por un divisor adecuado de manera que la suma de los cocientes obtenidos, una vez redondeados de la forma estándar, coincide con el número de escaños a repartir.

Además en dicho párrafo se incluye un procedimiento por aproximaciones sucesivas para encontrar un divisor adecuado, a saber:

- Se divide el número total de votos por el número de escaños. Se obtiene así un primer divisor.

- Se dividen los números de votos de cada partido por ese primer divisor. Los números resultantes se redondean al número entero más cercano de la forma estándar; los números con parte decimal igual a 0,5 se redondearán hacia arriba o hacia abajo según convenga. Si la suma de todos ellos coincide con el número de escaños a repartir, esos números son los escaños de cada partido.

- Si en el paso 2 no se da la coincidencia citada, se vuelve a repetir ese paso pero con un divisor mayor o menor, según corresponda, hasta que la suma de los cocientes redondeados coincida con el de escaños a repartir.

Definición 3.2. [1, pág. 77] *Una* regla de divisor *A inducida por una regla de redondeo $[\![\cdot]\!]$, o equivalentemente por una sucesión de pivotes (k_n), se define del siguiente modo: para un tamaño de circunscripción $h \in \mathbb{N}^*$ y un vector de votos $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$*

$$A(h,\overline{v}) := \left\{ \overline{a} \in \mathrm{N}^s(h) \;\middle|\; a_1 \in \left[\!\!\left[\frac{v_i}{D}\right]\!\!\right], \ldots, a_s \in \left[\!\!\left[\frac{v_s}{D}\right]\!\!\right] \text{ para un } D > 0 \right\}.$$

Un tal D se denomina divisor adecuado.

Lema 3.3. [1, págs. 80, 81] *Si para una regla de redondeo construida con la sucesión de pivotes (k_n) se tiene que $A(h,\overline{v}) \neq \emptyset$, entonces D es divisor adecuado si y solo si verifica: $D \in [d_1, d_2]$ siendo $d_1 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant s} \dfrac{v_i}{k_{a_i+1}}$ y $d_2 = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant s} \dfrac{v_i}{k_{a_i}}$ (entendiendo que $\dfrac{v_i}{0} = \infty$).*

Demostración. Por definición de regla de redondeo $\frac{v_i}{D} \in [k_{a_i}, k_{a_i+1}]$ para todo i. Además $k_{a_i} \leqslant \frac{v_i}{D} \leqslant k_{a_i+1}$ si y solo si

$$\frac{v_i}{k_{a_i+1}} \leqslant D \leqslant \frac{v_i}{k_{a_i}}$$

(observemos que si $A(h, \overline{v}) \neq \emptyset$, se tiene forzosamente que $k_{a_i+1} \neq 0$) Así D es divisor adecuado si y solo si $D \in [d_1, d_2]$. En el caso que $d_1 = d_2 = D$ tenemos que hay más de un reparto posible puesto que existen i, j tales que $\frac{v_i}{k_{a_i+1}} = \frac{v_j}{k_{a_j}} = D$ y, por tanto $\left[\!\left[\frac{v_i}{D}\right]\!\right] = \{a_i+1, a_i\}$ y $\left[\!\left[\frac{v_j}{D}\right]\!\right] = \{a_j, a_j - 1\}$. Y se le puede dar a i un escaño más quitándoselo al j. □

Proposición 3.4. [1, págs. 78–80] *Cualquier regla de redondeo con $k_1 \neq 0$ proporciona una regla de divisor. En el caso de $k_1 = 0$ tendremos reparto para cuando $h \geqslant s$ (3.2 está bien definida).*

Demostración. Vamos a probarlo por inducción sobre h, comenzamos con $k_1 > 0$ y $h = 1$ o con $k_1 = 0$ y $s = h$. En el primer caso $D = \text{máx} \frac{v_i}{k_1}$ es un divisor adecuado. Tenemos que $D \geqslant \frac{v_i}{k_1}$ para todo i y por tanto $0 < \frac{v_i}{D} \leqslant k_1$. Así, por la regla de redondeo, los partidos recibirán 0 escaños si $\frac{v_i}{D} \in (k_0, k_1)$ y 0 ó 1 escaño si $\frac{v_i}{D} = k_1$. Un posible reparto para $h = 1$ será aquel en el que se dé 1 escaño a algún partido j tal que $\frac{v_j}{D} = k_1$ y 0 escaños al resto de partidos y, por tanto, D es un divisor adecuado. Si $k_1 = 0$ y $s = h$ tomamos $D = \text{máx} \frac{v_i}{k_2}$, para este D tenemos que $0 = k_1 < \frac{v_i}{D} \leqslant k_2$ y por la regla de redondeo todos reciben 1 escaño.

Supongamos que existe un posible reparto $\overline{a}$ para h, es decir, $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$; veamos que existe un posible reparto para $h+1$. Por el lema anterior, $D \in [d_1, d_2]$. Sea j un partido para el que $v_j / k_{a_j+1} = d_1$. Su cociente $v_j / d_1 = k_{a_j+1}$ puede ser redondeado a a_j y a $a_j + 1$. Como queremos aumentar el número de escaños de h a $h+1$ el vector $\overline{b}$ con componentes $b_j = a_j + 1$ y $b_i = a_i$ para $i \neq j$ es un posible reparto de $A(h+1, \overline{v})$ con divisor adecuado d y la prueba para $k_1 > 0$ queda completa. □

Proposición 3.5. *Dos reglas de redondeo construidas con las sucesiones (k_n) y (k'_n) inducen la misma regla de divisor si y solo si, existe $\alpha \in$ P tal que $\alpha k_n = k'_n$ para todo n.*

Demostración. Sea $\alpha k_n = k'_n$ para todo n. Sea $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$, y D un divisor adecuado. Sea $D' = \frac{D}{\alpha}$. Como se tiene

$$k_{a_i} \leqslant \frac{v_i}{D} \leqslant k_{a_i+1},$$

multiplicando por α

$$k'_{a_i} \leqslant \frac{v_i}{D'} \leqslant k'_{a_i+1}$$

y como $a = h$ se tiene que D' es un divisor adecuado y $\overline{a} \in A'(h, \overline{v})$.

Recíprocamente, sean (k_n) y (k'_n) tales que proporcionan el mismo reparto con $k_1 > 0$ entonces

$$A(n, (k_1, k_n)) = \{(0, n), (1, n-1)\} = A'(n, (k_1, k_n)).$$

Por tanto existe un único D tal que

$$\{0, 1\} = \left[\!\left[\frac{k_1}{D}\right]\!\right]' \text{ y } \{n-1, n\} = \left[\!\left[\frac{k_n}{D}\right]\!\right]'.$$

De aquí se deduce que $k_1/D = k'_1$ y que $k_n/D = k'_n$. Además, el D es el mismo para todo n, así con $\alpha = 1/D$ tenemos que $k'_n = \alpha k_n$. Si $k_1 = 0$ entonces debe darse que $k'_1 = 0$ para que haya reparto en los mismos casos. Hacemos un razonamiento análogo tomando k_2 en vez de k_1.

□

Teorema 3.6. [1, págs. 78–80] *Una regla de divisor A es anónima, equilibrada, armónica, decente y completa.*

Demostración. Es claro que intercambiar los votos de dos partidos hace que los escaños también se intercambien sin afectar al reparto de los demás partidos, por tanto es anónima.

Por construcción de una regla de redondeo se tiene que si $v_i = v_j$, $D > 0$ entonces

$$\frac{v_i}{D} = \frac{v_j}{D} \in [k_n, k_{n+1})$$

para algún n. Por tanto, $\left[\!\left[\frac{v_i}{D}\right]\!\right], \left[\!\left[\frac{v_j}{D}\right]\!\right] \subseteq \{n-1, n\}$, y como $a_i \in \left[\!\left[\frac{v_i}{D}\right]\!\right]$ y $a_j \in \left[\!\left[\frac{v_j}{D}\right]\!\right]$ entonces

$$|a_i - a_j| \leqslant 1.$$

Con un razonamiento similar, si $v_i < v_j$, $D > 0$ entonces

$$\frac{v_i}{D} \in [k_n, k_{n+1}) \quad \text{y} \quad \frac{v_j}{D} \in [k_m, k_{m+1}) \quad \text{ó} \quad \frac{v_j}{D} \in (k_n, k_{n+1})$$

con $n < m$. Por lo que $\left[\!\left[\frac{v_i}{D}\right]\!\right] \subseteq \{n-1, n\}$ y $\left[\!\left[\frac{v_j}{D}\right]\!\right] \subseteq \{n, m-1, m\}$, es decir,

$$a_i \leqslant a_j.$$

Sea $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$ entonces existe $D > 0$ tal que $a_i \in \left[\!\left[\frac{v_i}{D}\right]\!\right]$ para todo $i = 1, \dots, s$. Es claro entonces que para $p\overline{v}$ con $p > 0$ se tiene que $\overline{a} \in A(h, p\overline{v})$ pues se puede usar D/p como divisor para tener el mismo reparto.

Para demostrar la completitud, sea $(\overline{v}^n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores $\overline{v}^n \in \mathrm{P}^s$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{v}^n = \overline{v}$ y tal que $\overline{a} \in A(h, \overline{v}^n)$ para todo n. Sea $d_{1n} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant s} \frac{v_i^n}{k_{a_i+1}}$ y $d_{2n} = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant s} \frac{v_i^n}{k_{a_i}}$

Notemos que $d_{1n} \leqslant d_{2n}$ para todo n. Estas dos sucesiones convergen y

$$\lim_{n\to\infty} d_{1n} \leqslant \lim_{n\to\infty} d_{2n}.$$

Por ser máx y mín funciones continuas de $\mathbb{R}^s$ podemos intercambiar límites y entonces

$$\max_{1\leqslant i\leqslant s} \lim_{n\to+\infty} \frac{v_i^n}{k_{a_i+1}} = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \frac{v_i}{k_{a_i+1}} \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant s} \frac{v_i}{k_{a_i}} = \min_{1\leqslant i\leqslant s} \lim_{n\to\infty} \frac{v_i^n}{k_{a_i}}.$$

Sea $D \in \left[\max\limits_{1\leqslant j\leqslant s} \frac{v_j}{k_{a_j+1}}, \min\limits_{1\leqslant j\leqslant s} \frac{v_j}{k_{a_j}}\right]$, se tiene para todo i que $\frac{v_i}{k_{a_i+1}} \leqslant D \leqslant \frac{v_i}{k_{a_i}}$, luego $k_{a_i} \leqslant \frac{v_i}{D} \leqslant k_{a_i+1}$. O sea $\frac{v_i}{D} \in [k_{a_i}, k_{a_i+1}]$, dicho de otra manera, $a_i \in \left[\!\left[\frac{v_i}{D}\right]\!\right]$ para $i = 1, \dots, s$ y por tanto $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$. □

Proposición 3.7. *Una regla de divisor inducida por una regla de redondeo es un método de reparto (método de divisor) si y solo si la regla de redondeo se puede construir a partir de una sucesión de guías.*

Demostración. Por el teorema 3.6 es suficiente probar la exactitud. Sea A una regla de divisor exacta $\overline{v} = (1, 2, \dots, s)$ entonces por exactitud $A(v, \overline{v}) = \{\overline{v}\}$, es decir, para todo s existe D tal que $\frac{n}{D} \in (k_n, k_{n-1})$ con $n = 1, \dots, s$. Por el lema 3.3 verifican lo anterior los $D \in [d_{1s}, d_{2s}] = I_s$ con $d_{1s} = \max\limits_{1\leqslant n\leqslant s} \frac{n}{k_{n+1}}$ y $d_{2s} = \min\limits_{1\leqslant n\leqslant s} \frac{n}{k_n}$. Claramente, $I_{s+1} \subseteq I_s$ y por tanto

$$I := \bigcap_{s=1}^{\infty} I_s \neq \emptyset.$$

Sea $D \in I$, tenemos $\frac{n}{k_{n+1}} \leqslant D \leqslant \frac{n}{k_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, es decir, $n \leqslant Dk_{n+1}$ y $Dk_n \leqslant n$. Por tanto $Dk_n \in [n-1, n]$ y la sucesión (Dk_n) cumple la propiedad de localización y proporciona el mismo reparto que la sucesión (k_n) por la proposición 3.5. Para concluir veamos que si $Dk_n = n-1$ y $Dk_m = m$ para algún $n > 1$ y algún $m > 0$ entonces A no es exacta puesto que

$$A(n+m-1,(n-1,m)) = \{(n-1,m),(n,m-1)\}.$$

Recíprocamente, sea A una regla de reparto inducida por una sucesión de guías (k_n), sea $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$ con $v_i \in \mathbb{N}$ para todo $i = 1,\dots,s$. Por localización tenemos que $k_{v_i} \leqslant v_i \leqslant k_{v_i+1}$ para todo $i = 1,\dots,s$. Además, por repulsión de extremos

$$k_{v_i} \leqslant v_i < k_{v_i+1} \quad \text{ó} \quad k_{v_i} < v_i \leqslant k_{v_i+1} \quad \forall\, i = 1,\dots,s.$$

Para el primer caso existe $0 < D_1 < 1$ tal que $\dfrac{v_i}{D_1} \in (k_i,k_{i+1})$. Para el segundo, $\dfrac{v_i}{D_2} \in (k_i,k_{i+1})$ con algún $D_2 > 1$. En cualquiera de las dos situaciones $A(v,\overline{v}) = \{\overline{v}\}$. □

Ejemplo 11. Las sucesiones de guías de los ejemplos 9 y 10 proporcionan los cinco métodos de divisor clásicos:

- El redondeo hacia abajo se corresponde con el método de *Jefferson*.
- El redondeo estándar se corresponde con el método de *Webster*.
- El redondeo hacia arriba se corresponde con el método de *Adams*.
- El redondeo según la media geométrica se corresponde con el método de *Hill*.
  Un x tal que $n-1 \leqslant x \leqslant n$ redondea a $n-1$ o a n según

  $$n-1 \leqslant x \leqslant \sqrt{(n-1)n} \quad \text{ó} \quad \sqrt{(n-1)n} \leqslant x \leqslant n.$$

- El redondeo según la media armónica se corresponde con el método de *Dean*.

Proposición 3.8. *Dos sucesiones de guías distintas inducen metodos de divisor distintos.*

Demostración. Sea (k_n) una sucesión de guías. Por la proposición 3.5 basta con ver que (αk_n) no es sucesión de guías cuando $\alpha \neq 1$.

Si (k_n) y (αk_n) son sucesiones de guías entonces $n-1 \leqslant k_n \leqslant n$ y $n-1 \leqslant \alpha k_n \leqslant n$. Se tiene

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{\alpha k_n}{k_n} \leqslant \frac{n}{n-1} \ \forall n.$$

Y por tanto, α debe ser igual a 1 y por lo que las sucesiones de guías son la misma. □

Proposición 3.9. *Si regla de divisor es precisa entonces* $\left(\frac{k_n}{k_{n+1}}\right)$ *es monótona estrictamente creciente.*

Demostración. Sea $\overline{v} = (k_n,k_{n+1})$ se tiene que $(n,n) \in A(2n,\overline{v})$. Por precisión, $A(2m,\overline{v}) = \{(m,m)\}$ para todo $m = 1,\dots,n-1$.Para el caso $n-1$ existe D tal que $\frac{v_i}{D} \in (k_{n-1},k_n)$. Es decir, $k_{n-1} \leqslant \dfrac{k_n}{D}, \dfrac{k_{n+1}}{D} \leqslant k_n$. Por tanto,

$$\frac{k_{n-1}}{k_n} < \frac{1}{D} < \frac{k_n}{k_{n+1}}.$$

□

Proposición 3.10. *Si existe $r > 0$ tal que* $\left(\frac{k_n}{n^r}\right)$ *monótona no decreciente y* $\left(\frac{k_{n+1}}{n^r}\right)$ *monótona no creciente, siendo una de las dos monotonía estricta entonces A es precisa.*

Demostración. sea $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$, $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$ tal que existe $\overline{b} \in \mathbb{N}^s$ y $1 < n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{a} = n\overline{b}$ queremos ver

$$A(mb, \overline{v}) = \{m\overline{b}\} \ \ \forall m = 1, \ldots, n-1.$$

Sabemos que existe $r > 0$ tal que para todo n $\frac{k_{n-1}}{(n-1)^r} < \frac{k_n}{n^r}$ y $\frac{k_n}{(n-1)^r} \geqslant \frac{k_{n+1}}{n^r}$ (Si la desigualdad estricta fuera la segunda todo sería análogo). Es decir

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^r \cdot [k_n, k_{n+1}] \subseteq (k_{n-1}, k_n].$$

Tenemos que existe D tal que $\frac{v_i}{D} \in [k_{a_i}, k_{a_i+1}]$ y $a_i > mb_i \in \mathbb{N}$. Reiterando lo anterior se tiene

$$\left(\frac{mb_i}{mb_i+1}\right)^r \cdots \left(\frac{a_i-2}{a_i-1}\right)^r \left(\frac{a_i-1}{a_i}\right)^r \frac{v_i}{D} \in (k_{mb_i}, k_{mb_i+1}].$$

Simplificando llegamos a $\left(\frac{mb_i}{a_i}\right)^r \frac{v_i}{D} = \left(\frac{m}{n}\right)^r \frac{v_i}{D} \in (k_{mb_i}, k_{mb_i+1}]$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Tomamos ahora $D' = D\left(\frac{n}{m}\right)^r$, se tiene que $k_{mb_i} < \frac{v_i}{D'} \leqslant k_{mb_i+1}$. Entonces $D' < \frac{v_i}{k_{mb_i}}$ para todo i y podemos tomar un D'' tal que $D' < D'' < \frac{v_i}{k_{mb_i}}$. Así se cumple $k_{mb_i} < \frac{v_i}{D''} < \frac{v_i}{D'} \leqslant k_{mb_i+1}$ para todo i y D'' es un divisor adecuado del único reparto $A(mb, \overline{v}) = \{m\overline{b}\}$. □

Ejemplo 12. Veamos que los métodos de divisor clásicos son precisos. Para ello podemos tomar $r = 1$

En el método de Webster las sucesiones a comprobar son

$$\left(\frac{(2n-1)/2}{n}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{(2n+1)/2}{n}\right),$$

que se pueden reescribir como $\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)$ y $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)$ y apreciamos que la primera es estrictamente creciente y la segunda estrictamente decreciente.

En el método de Jefferson las sucesiones a comprobar son

$$\left(\frac{n}{n}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{n+1}{n}\right),$$

la primera es constante, por tanto, monótona no decreciente, y la segunda es estrictamente decreciente.

En el método de Adams las sucesiones a comprobar son

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{n}{n}\right),$$

la primera es estrictamente creciente y la segunda es constante, por tanto, monótona no creciente.

En el método de Hill las sucesiones a comprobar son

$$\left(\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\sqrt{(n+1)n}}{n}\right).$$

Estas se pueden reescribir como $\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$. Estrictamente creciente y decreciente respectivamente.

En el método de Dean debemos comprobar las sucesiones

$$\left(\frac{2n(n-1)}{n(2n-1)}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{2(n+1)n}{n(2n+1)}\right).$$

Y éstas se pueden reescribir como $\left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right)$ y $\left(1 + \dfrac{1}{2n+1}\right)$, estrictamente creciente y decreciente respectivamente.

Capítulo 4

Propiedades de los métodos de divisor

El método D'Hondt es bien conocido en España por ser el procedimiento de reparto proporcional que se utiliza para transformar votos en escaños en las elecciones generales, autonómicas y municipales. Este método, tal y como se describe en la Ley del Régimen Electoral General [6, artículo 163], consiste en «dividir el número de votos obtenidos por cada candidatura por 1, 2, 3, etcétera, hasta un número igual al de escaños correspondientes a la circunscripción; los escaños se atribuyen a las candidaturas que obtengan los cocientes mayores, atendiendo a un orden decreciente. Cuando en la relación de cocientes coincidan dos correspondientes a distintas candidaturas, el escaño se atribuirá a la que mayor número total de votos hubiese obtenido. Si hubiera dos candidaturas con igual número total de votos, el primer empate se resolverá por sorteo y los sucesivos de forma alternativa.»

El método de Webster se define de un modo similar dividiendo por los números impares 1, 3, 5... Con este algoritmo se le conoce como método Sainte-Laguë. En general tenemos los siguientes repartos.

Definición 4.1. [3, pág. 311] *Sea (k_i) una sucesión de pivotes, sea $\overline{v} \in \mathrm{P}^s$ y $h \in \mathbb{N}^*$y sea*

$$S = \left\{ \frac{v_i}{k_j} \;\mid\; i = 1, \ldots, s \text{ y } j = 1, \ldots, h \right\}.$$

Sea T un subconjunto de S con h elementos de tal forma que $t \geqslant t'$ para todo $t \in T$ y todo $t' \in S \setminus T$ (T puede no ser único). Se tiene la siguiente regla de reparto: $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$ si y solo si $a_i = |\{ j \mid v_i/k_j \in T \}|$.

Proposición 4.2. [3, pág. 312] *En el caso en el que $k_1 > 0$ o $h > s$ el reparto anterior coincide con la regla de divisor inducida por la misma sucesión de pivotes.*

Demostración. Para cada i (v_i/k_j) es una sucesión decreciente en j. Si $\overline{a}$ es un reparto de divisor de $\overline{v}$ y h, por el lema 3.3 se tiene que

$$\frac{v_i}{k_{a_i}} \geqslant \frac{v_j}{k_{a_j+1}} \quad \forall i, j = 1, \ldots, s.$$

Y, por tanto, se tiene que

$$T = \left\{ \frac{v_1}{k_1}, \ldots, \frac{v_1}{k_{a_1}}, \ldots, \frac{v_i}{k_1}, \ldots, \frac{v_i}{k_{a_i}}, \ldots \right\}$$

verifica las condiciones de la definición anterior y $\overline{a}$ es un reparto.

Recíprocamente, sea $\overline{a}$ un reparto según la definición anterior, para cada i tenemos que a_i es el máximo tal que $\frac{v_i}{k_{a_i}} \in T$ por tanto, para todo i, j $\frac{v_i}{k_{a_i+1}} \leqslant \frac{v_j}{k_{a_j}}$ luego máx $\frac{v_i}{k_{a_i+1}} \leqslant$ mín $\frac{v_i}{k_{a_i}}$. Tomando D tal que máx $\frac{v_i}{k_{a_i+1}} \leqslant D \leqslant$ mín $\frac{v_i}{k_{a_i}}$ tenemos que $\frac{v_i}{k_{a_i+1}} \leqslant D \leqslant \frac{v_i}{k_{a_i}}$ $\forall i = 1, \ldots, s$. Y con este divisor D se tiene que $\overline{a}$ es un reparto de la regla de divisor inducida por los (k_i). □

Nota. Para un reparto con la sucesión de pivotes (k_i), $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$ si y solo si $a = h$ y

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant s} \frac{v_i}{k_{a_i+1}} \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant s} \frac{v_i}{k_{a_i}}.$$

Ejemplo 13. Vamos a realizar el reparto de escaños en la provincia de Albacete en las elecciones generales de 2023. El escrutinio definitivo todavía no está disponible por lo que he utilizado los resultados provisionales que se encuentran en [8]. Tenemos que usar el método D'Hondt y por tanto tenemos que dividir los votos de cada partido por 1, 2, 3 y 4 (Albacete reparte 4 escaños) y asignar los escaños a las candidaturas con los cocientes más altos hasta repartir 4.

Partido	$v_i/1$	$v_i/2$	$v_i/3$	$v_i/4$	Escaños
PP	88 144	44 072,00	29 381,33	22 036,00	2
PSOE	75 969	37 984,50	25 323,00	18 992,25	2
VOX	36 698	18 349,00	12 232,67	9 174,50	0
SUMAR	15 677	7 838,50	5 225,67	3 919,25	0

Vemos que tanto el PP como el PSOE consiguen dos escaños mientras que VOX y SUMAR no obtienen representación. Si realizamos el reparto por el método Sainte-Laguë los divisores en este caso son: 1, 3, 5 y 7. Y realizamos el siguiente cuadro:

Partido	$v_i/1$	$v_i/3$	$v_i/5$	$v_i/7$	Escaños
PP	88 144	29 381,33	17 628,80	12 592,00	2
PSOE	75 969	25 323,00	15 193,80	10 852,71	1
VOX	36 698	12 232,67	7 339,60	5 242,57	1
SUMAR	15 677	5 225,67	3 135,40	2 239,57	0

En este caso el PP consigue dos escaños mientras que el PSOE y VOX se quedan con uno y SUMAR sigue sin representación. Comparando ambos métodos el PSOE pierde un escaño en favor de VOX. El método D'Hondt tiene un sesgo a favor de los grandes partidos mientras que el método Sainte-Laguë no.

Aunque el estudio de los sesgos no se ha tratado en este trabajo, también está estudiado matemáticamente y se puede encontrar una introduccíon al problema en [2, págs, 71–78]. En [2, págs, 118–128] se comparan los cinco métodos de divisor clásicos, y en [1, págs, 127–157] se estudian los sesgos de los métodos de reparto con mayor profundidad.

Ejemplo 14. Veamos ahora que tanto el método D'Hondt como el método de Jefferson realizan el mismo reparto. Tomamos los datos, en [8], de la provincia de Zaragoza para las elecciones generales de 2023. En esta circunscripción se reparten 7 escaños, por lo que realizamos la tabla correspondiente.

Partido	$v_i/1$	$v_i/2$	$v_i/3$	$v_i/4$	$v_i/5$	$v_i/6$	$v_i/7$	Escaños
PP	185 613	92 806,5	61 871,0	46 403,3	37 122,6	30 935,5	26 516,1	3
PSOE	158 517	79 258,5	52 839,0	39 629,3	31 703,4	26 419,5	22 645,3	2
VOX	78 915	39 457,5	26 305,0	19 728,8	15 783,0	13 152,5	11 273,6	1
SUMAR	69 239	34 619,5	23 079,7	17 309,8	13 847,8	11 539,8	9 891,3	1

En este caso el PP consigue tres escaños, el PSOE dos y VOX y SUMAR un escaño cada uno. Para realizar el reparto según el método de Jefferson tenemos que encontrar un divisor adecuado. Este se busca por prueba y error.

Partido	votos	cociente 1	reparto	cociente 2	reparto
PP	185 613	2,64	2	3,09	3
PSOE	158 517	2,25	2	2,64	2
VOX	78 915	1,12	1	1,32	1
SUMAR	69 239	0,98	0	1,15	1
total	492 284		5		7
divisor		70 326		60 000	

Vemos que 60 000 es un divisor adecuado para el reparto (3 2 1 1) y que esta distribución de escaños coincide, como no puede ser de otra manera, con el método D'Hondt.

Teorema 4.3. [1, pág. 161] *Los métodos de divisor son coherentes y completos.*

Demostración. La completitud esta probada en la proposición 3.7.

Sea $\overline{a} \in A(h,\overline{v})$ un reparto del método de divisor A. Entonces la coherencia al restringir se cumple puesto que un divisor apropiado D para $\overline{a}$ también lo será para $(a_i)_{i\in I}$ puesto que las desigualdades son las mismas.

De la misma manera, D también es un divisor apropiado para $(b_i)_{i\in I}$ y para $(c_j)_{j\in J}$. Por tanto lo será para la yuxtaposición de ambos. $\square$

Teorema 4.4. [1, págs. 168–172] *Todo método coherente y completo es un método del divisor.*

Demostración. Dividiremos la demostración en cinco partes.

i) Sea $\overline{v} = (v_1, v_2)$ con $v_1 = v_2$. Si h es par, por exactitud y equilibrio, tenemos que $A(h,\overline{v}) = \{\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\}$. Si h es impar, por anonimato y equilibrio tenemos que $A(h,\overline{v}) = \{(\frac{h+1}{2}, \frac{h-1}{2}), (\frac{h-1}{2}, \frac{h+1}{2})\}$.

ii) Sea $\overline{v} = (t,1)$. Para todo $n \geqslant 1$ definimos

$$T_n := \{t > 0 \ | \ (n,1) \in A(n+1,(t,1))\}.$$

La exactitud implica que $n \in T_n$. Veamos que T_n es un intervalo. Sea $t_1 < x < t_2$ con $(n,1) \in A(n+1,(t_1,1)$ y $(n,1) \in A(n+1,(t_2,1)$. Sea $(a_1,a_2) \in A(n+1,(x,1)$ se tiene que $a_1 + a_2 = n+1$ y por monotonía débil $a_1 \leqslant n$ o $a_2 \geqslant 1$ y $a_1 \geqslant n$ o $a_2 \leqslant 1$ de donde se deduce que $a_1 = n$ y $a_2 = 1$ y

$$\{(n,1)\} = A(n+1,(x,1)).$$

En particular $x \in< T_1$.

Sea $t(n)$ el ínfino de T_n con $t(n) \in [0,n]$. Vamos a ver que se tiene que $t(2) = 1$. Es claro que $(2,1) \in A(3,(1,1)) = \{(2,1),(1,2)\}$ (por anonimato y equilibrio). Además si $t < 1$ por armonia $(2,1) \notin A(3,(t,1))$. Por tanto $t(2) = 1$.

Veamos qué ocurre para $n \geqslant 3$. Por decencia y exactitud $A(n+1,(\frac{n-1}{2},1)) = A(n+1,(n-1,2)) = \{(n-1,2)\}$ luego $\frac{n-1}{2} \notin T_n$ y por ser T_n un intervalo que contiene a n se tiene que

$$t(n) \geqslant \frac{n-1}{2}$$

y, por tanto, $t(n) \neq 0$ para todo $n \neq 1,0$.

Veamos que si $t > t(n)$ h cualquiera y $\overline{a} \in A(h,(t,1))$ entonces se tiene que $a_1 \geq n$ o bien $a_2 \leq 1$.

Partimos de $(n,1) \in (n+1,(t(n),1)$ y $(a_1,a_2) \in A(h,(t,1))$. Usamos un $(b_1,b_2) \in A(n+1,(t,1))$. Por monotonía débil en votos se tiene que $b_1 \geqslant n$ o bien $b_2 \leqslant 1$ pero como $n+1 = b_1 + b_2$, cualquiera de las dos opciones implica la otra y por tanto se cumplen las dos. Por 1.15 se tiene monotonía en escaños y para el caso $s = 2$ si $h > n+1$, $a_1 \geqslant b_1$ y $a_2 \geqslant b_2$. Así que $a_1 \geqslant b_1 \geqslant n$. Si $h < n+1$, otra vez por monotonía en escaños, $a_2 \leqslant b_2 \leqslant 1$. Por tanto, para todo h y todo vector de escaños $\overline{a} \in A(h,(t,1))$ se tiene

$$t > t(n) \Longrightarrow a_1 \geqslant n \quad \text{o} \quad a_2 \leqslant 1 \tag{4.1}$$

para $0 < r < t(n)$ y $a \in A(h,(r,1))$. Con un razonamiento análogo al anterior y usando que $r \notin T_n$ se prueba

$$r < t(n) \Longrightarrow a_1 \leqslant n-1 \quad \text{o} \quad a_2 \geqslant 2. \tag{4.2}$$

iii) En este apartado vamos a probar lo siguiente: Sean (v_1, v_2) cualesquiera y $n,\ m \geqslant 1$ tal que

$$\frac{t(n)}{v_1} < \frac{t(m)}{v_2},$$

entonces para todo h y todo $\overline{a} \in A(h, \overline{v})$ se tiene

$$a_1 \geqslant n \quad \text{o} \quad a_2 \leqslant m-1.$$

Para demostrarlo tomamos p tal que

$$\frac{t(n)}{v_1} < p < \frac{t(m)}{v_2}$$

(por ejemplo la media). Sea $(t, r) = (pv_1, pv_2))$, se tiene que $t(n) < t$ y $r < t(m)$. Por decencia se tiene que $\overline{a} \in A(h, (t, r))$ y ahora consideramos de manera auxiliar

$$\overline{b} \in A(n+m, (t, r, 1)).$$

Vamos a probar que $b_1 \geqslant n$ y $b_2 \leqslant m-1$. Supongamos que $b_3 \geqslant 2$, por coherencia al restringir tenemos que

$$(b_1, b_3) \in A(b_1 + b_3, (t, 1)),$$

y por el apartado anterior se tiene

$$b_1 \geqslant n \quad \text{o} \quad b_3 \leqslant 1.$$

Por la hipótesis no puedes ser lo segundo, luego tenemos tenemos $b_1 \geqslant n$. Y, además,

$$b_2 = n + m - b_1 - b_3 \leqslant n + m - n - 2 = m - 2.$$

Supongamos que $b_3 \leqslant 1$, por coherencia al restringir, tenemos que

$$(b_2, b_3) \in A(b_2 + b_3, (r, 1)),$$

y por el apartado anterior se tiene

$$b_2 \leqslant m-1 \quad \text{o} \quad b_3 \geqslant 2.$$

Por la hipótesis no puede ser lo segundo, luego tenemos tenemos $b_2 \leqslant m-1$ y

$$b_1 = n + m - b_2 - b_3 \geqslant n + m - (m-1) - 1 = n$$

Por lo que concluimos que $(b_1, b_2) \in A(b_1 + b_2, (t, r))$.

Volvemos a nuestro $\overline{a} \in A(h, (t, r))$. Si $h = b_1 + b_2$ por coherencia al concatenar

$$(a_1, a_2, b_3) \in A(n+m, (t, r, 1)),$$

así que $a_1 \geqslant n$ y $a_2 \leqslant m-1$.

Si $h > b_1 + b_2$ por monotonía en escaños $a_1 \geqslant b_1 \geqslant n$.

Si $h < b_1 + b_2$ también por monotonía en escaños $a_2 \leqslant b_2 \leqslant m-1$.

iv) En este apartado comprobaremos la desigualdad para todo $n \geqslant 1$ y $m > 1$,

$$\frac{n}{m-1} > \frac{t(n)}{t(m)}.$$

Supongamos que existe n, m tales que

$$\frac{n}{m-1} \leqslant \frac{t(n)}{t(m)}.$$

La primera observación es que $t(n) > 0$ y por tanto tenemos

$$\frac{m-1}{n} \geqslant \frac{t(m)}{t(n)}.$$

Consideramos $(v_1, v_2) = (m-1+\varepsilon, n)$ y se tiene que

$$\frac{v_1}{v_2} > \frac{m-1}{n} \geqslant \frac{t(m)}{t(n)}.$$

Y por el apartado iii) si $\overline{a} \in A(h,(v_1,v_2))$,

$$a_1 \geqslant m \quad \text{o} \quad a_2 \leqslant n-1.$$

Sea $h = m+n-1$ entonces $\{(m-1,n)\} = A(m-1+n,(m-1,n))$. Por monotonía en votos $a_1 \geqslant m-1$. Si $a_1 = m-1$ entonces $a_2 = n$ y no se cumple la condición, luego $a_1 \geqslant m$.

Si denotamos $\overline{v}_k = (m-1+\frac{1}{k}, n)$ con $k \in \mathbb{N}^*$ y $\overline{a}_k \in A(h,\overline{v}_k)$ $a_{k,1} \geqslant m$ para todo k y $a_{k,1} \geqslant a_{k+1,1}$ entonces existe un k_0 tal que $a_{k+1,1} = b \geqslant m$ para todo $k > k_0$.

Así, $(b, m-1+n-b) \in A(m-1+n,\overline{v}_k)$ para todo $k > k_0$. Como $\overline{v}_k$ converge a $(m-1,n)$, por ser A completa, se tiene que

$$(b, m-1+n-b) \in A(m-1+n,(m-1,n)) = \{(m-1,n)\}$$

y $b = m-1$ llegando a una contradicción.

v) Consideramos B la regla de divisor construida con los pivotes $t(n)$, veremos que $A = B$. Primero vemos que podemos tener una sucesión de guías para B.

Por el apartado anterior, para todo $n \geqslant 1$ se tiene que $t(n+1) > t(n)$. En efecto, tomando $m = n+1$ en iv),

$$\frac{n}{n} > \frac{t(n)}{t(n+1)},$$

y con $t(0) := 0$ se tiene que

$$0 = t(0) \leqslant t(1) < t(2), \ldots$$

Ya tenemos una sucesión de pivotes y una regla de redondeo. Ahora veamos que podemos tener una sucesión de guías para inducir B. Por el apartado iv),

$$\frac{t(m)}{m-1} > \frac{t(m)}{n} \quad \forall m > 1, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Considerando el $\inf\limits_{m>1} \dfrac{t(m)}{m-1}$ y el $\sup\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{t(n)}{n}$, existe $0 < l \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{t(m)}{m-1} \geqslant l \geqslant \frac{t(m)}{n} \quad \forall m > 1, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Sea

$$k_n = \frac{t(n)}{l}$$

por las desigualdades anteriores con $m = n$ tenemos que $n-1 \leqslant k_n \leqslant n$ para todo $n > 1$ (para $n = 1$ tener en cuenta que $\frac{1}{2} \leqslant l \leqslant 1$ y que $0 \leqslant t(1) \leqslant 1$).

Sea h y $\overline{v}$ cualesquiera. Sea ahora $\overline{a} \in A(h,\overline{v})$, veamos que $\overline{a} \in B(h,\overline{v})$. Por el apartado iii) tenemos que si $a_i < n$ y $a_j > m-1$ entonces

$$\frac{t(n)}{v_i} \geqslant \frac{t(m)}{v_j}.$$

Tomando $n = a_i + 1$ y $m = a_j$ y llegamos a

$$\frac{v_i}{t(a_i+1)} \leqslant \frac{v_j}{t(a_j)} \quad \forall i, j = 1, \ldots, s.$$

Es decir, $\overline{a} \in B(h, \overline{v})$.

Para el reciproco tenemos que ver que

$$b \in B(h, \overline{v}) \quad \Longrightarrow \quad \overline{b} \in A(h, \overline{v}).$$

Sea $\overline{a} \in A(h, \overline{v}) \subseteq B(h, \overline{v})$. Si $B(h, \overline{v})$ solo tiene un elemento entonces $\overline{a} = \overline{b}$. En otro caso tomamos d un divisor adecuado para $B(h, \overline{v})$. Tenemos que $t(b_i) \leqslant v_i/d \leqslant t(b_i+1)$ y $t(b_j) \leqslant v_j/d \leqslant t(b_j+1)$, luego concluimos que

$$\frac{v_i}{v_j} \geqslant \frac{(b_i)}{t(b_j+1)}.$$

Además, por tener $A(h, \overline{v})$ más de un elemento, para algún i, j tenemos la igualdad. Con pequeñas variaciones de $\overline{v}$ podemos construir una sucesión de vectores $\overline{v}_n$ tales que para todo i con $\lim_{n \to \infty} \overline{v}_n = \overline{v}$ se dé que

$$t(b_i) < v_i/d < t(b_i+1).$$

Así $B(h, \overline{v}_n) = \{\overline{b}\}$ y, por tanto, $A(h, \overline{v}_n) = \{\overline{b}\}$. Además, por ser A completo, concluimos que $\overline{b} \in A(h, \overline{v})$, completando la demostración de que $A = B$. $\square$

Bibliografía

[1] Friedich Pukelsheim, *Proportional Representation. Apportionment Methods and Their Applications*, Springer, 2014, 2ed.

[2] M. L. Balinski y H. P. Young, *Fair Representation. Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Yale University Press, New Haven, 1982.

[3] Paz Jiménez Seral y Manuel Vázquez, *Métodos de divisor y su relación con los principales procedimientos de distribución de escaños*, La Gaceta de la RSME, Vol. 18 (2015), Núm. 2, 301–318.

[4] Manuel Vázquez Lapuente y Paz Jiménez Seral, *El nuevo modelo de reparto de escaños en el sistema electoral alemán*, Cuadernos Manuel Giménez Abad, (2014), Núm. 7, 108–125.

[5] Antonio Moreno Verdejo y Adela Mª Villegas Escobar, *Matemáticas electorales*, Catarata, 2017.

[6] *Ley del Régimen Electoral General*,
`https://www.boe.es/buscar/pdf/1985/BOE-A-1985-11672-consolidado.pdf`.

[7] *Normativa elecciones a claustro*, Boletin Oficial de la Universidad de Zaragoza, Núm 26, (2004).

[8] `https://resultados-elecciones.rtve.es/generales/2023/congreso/`.