

Análisis y optimización de modelos de gestión de productos perecederos



Laura Bravo Casado
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director: F. Javier López Lorente

Summary

The present work focuses on studying supply and stock management models, specifically as applied to perishable products, with a thorough analysis of their formulas and results.

In Chapter 1 we will establish the fundamental concepts of inventory management, define the terminology employed in this work, as well as the variables that will be used in subsequent chapters. We will categorize the inventory models into two types based on their capacity to forecast the demand, namely deterministic and stochastic models.

In Chapter 2 we delve deeper into the study of stochastic models. A key point will be the differentiation depending on the deal with perishable or non-perishable products. For non-perishable products we introduce two models based on knowledge of the stock level and the timing of order placements, which may be continuous or periodic review models. Precise mathematical formulations will be derived in order to describe these models.

When dealing with perishable products we will have to apply a different policy than the commonly known one, called the EWA policy. We will first describe the underlying principles of this policy, since in this case the form of the optimal policy is not known and a specific study of each problem must be carried out to provide optimal or close to optimal solutions.

Despite the importance of managing this type of products, there is currently a dearth of literature providing approximations for the quantities we are interested in, whose expression and deduction depend greatly on the specific characteristics of the model under consideration.

In Chapter 3 we will deal with a specific case within perishable products, specifically the optimization of platelet concentrate production. This analysis is grounded in the research done in the article [5] where formulas that have been developed allow us to approximate the performance indicators of the models (percentage of outdated, average age of the product sent to hospitals...) based on their characteristics.

Our particular interest in this work centers on the outdated quantity of platelet concentrate. In [5], an approximation of the daily quantity of outdated products appears as a solution to a non-linear system, which lacks an explicit solution. We aim to find an approximation to this solution.

First we will particularize the stationary case in which all days have the same distribution and consequently identical behavior. Subsequently we will work on the general case which will allow us to obtain results of the average amount outdated each day. To conclude, these results will be compared to those achieved in [5].

It is of significance to mention that this is where the novelty of the study resides, since we obtain explicit formulas that give an approximation of the solution of the previous systems, first applying the approximations of [5] followed by those we deduce from the model's underlying assumptions, to finally result in the formulation of a linearized expression for the amount of outdated product. Both the parti-

cularization of the stationary case and the demonstrations carried out are new. Furthermore, to date, the formulas we show to approximate the outdated quantity have not been derived and the closest approximation developed so far has been found in [12].

Índice general

Summary	III
1. Introducción terminología y conceptos base	1
2. Modelos estocásticos de aprovisionamiento	3
2.1. Caso de productos no perecederos	3
2.1.1. Modelo de revisión continua (r, q)	3
2.1.2. Modelo de revisión periódica (R, S)	5
2.2. Caso de productos perecederos: Política EWA	6
3. Modelo de inventario para productos perecederos bajo la política EWA	9
3.1. Introducción al modelo	9
3.2. Caso estacionario	10
3.2.1. Análisis función aproximada de o	14
3.2.2. Relación de k con o	18
3.3. Caso no estacionario	20
3.3.1. Resolución para valores del artículo	22
4. Conclusiones	25
Bibliografía	27
Anexo A	29
A.1. Variables en el modelo de revisión continua en productos no perecederos	29
A.2. Variables en el modelo de revisión periódica en productos no perecederos	29
A.3. Variables en el modelo de revisión periódica en productos perecederos	30
A.3.1. Variables aleatorias	30
A.3.2. Cantidades determinísticas	30
Anexo B	31

Capítulo 1

Introducción terminología y conceptos base

Los modelos de gestión de productos se construyen bajo la base de la importancia de la administración del aprovisionamiento y el inventario de manera óptima y eficiente. La gestión de aprovisionamiento es el conjunto de operaciones que realiza la empresa para abastecerse de los materiales necesarios para la comercialización. Las principales funciones de la gestión de aprovisionamiento son: adquirir los materiales necesarios para la elaboración de los productos, gestionar su almacenaje y controlar los inventarios.

La gestión científica del inventario implica que se debe partir del desarrollo de un modelo matemático que describa el comportamiento del sistema de inventario, formular una estrategia de inventario basada en el tipo de modelo y registrar los niveles de inventario para que, en base a estos registros, se pueda elaborar esa estrategia de inventario óptima para determinar cuándo y cuánto reabastecer.

Para tratar el problema de la gestión de diversos productos, debemos introducir previamente unos conceptos base necesarios para comprender el problema que estamos tratando. Partimos del planteamiento de la situación en la que disponemos de un **cliente** buscando un producto que se encuentra en un **almacén**, desde donde se gestiona la cantidad de la que se dispone. Establecemos la **demand** como la cantidad de producto que el cliente nos está requiriendo. De acuerdo con la posibilidad de pronosticar la demanda, los modelos matemáticos de inventario se pueden dividir en dos categorías: **modelos deterministas** y **modelos estocásticos** [7]. En el caso de la demanda conocida, nos encontramos con los modelos deterministas. Sin embargo cuando no se puede predecir con exactitud, es necesario usar un modelo estocástico, en el cual la demanda en cualquier periodo es una variable aleatoria.

Llamamos **stock** al conjunto de existencias almacenadas hasta su uso o venta. Existen distintos tipos de stocks dependiendo de la función que deban cumplir. Partiremos del **stock de ciclo**, cuya función es atender la demanda de los clientes durante un periodo largo de tiempo. Estará complementado por el **stock de seguridad**, útil para demandas imprevistas o retrasos, impidiendo así que se produzca una **ruptura del stock** donde no se pueda satisfacer la demanda requerida.

Otro concepto fundamental dentro del aprovisionamiento es la forma en la que realizamos los pedidos a nuestro proveedor. En el caso en el que realizamos pedidos de forma continuada podemos establecer un **sistema de revisión continua**, donde los pedidos los realizamos cuando queremos controlando el stock en cada momento, o un **sistema de revisión periódica** donde el inventario será revisado en intervalos de tiempo fijos y el tamaño del pedido variará según el comportamiento de la demanda. En este segundo sistema nos aparece una variable fundamental que será el **lead-time** o tiempo de entrega, que puede ser conocido o aleatorio y nos indica cuanto tiempo transcurrirá entre que realizamos el pedido y lo recibimos.

Por otra parte es de vital importancia conocer el tipo de producto con el que vamos a trabajar, distin-

guiéndolos en función de que sea perecedero, y por tanto con una fecha de caducidad corta, o por el contrario no perecedero, es decir, sin fecha de caducidad o con fecha de caducidad larga. Tal y como veremos, la gestión de los productos perecederos es considerablemente más compleja que la de productos no perecederos.

Uno de los principales componentes a tener en cuenta a la hora de plantear el problema es el **coste** involucrado en el aprovisionamiento. Podemos encontrar múltiples costes, pero con los que trabajaremos en los desarrollos siguientes serán: coste de compra, coste de emisión de pedidos, coste de almacenaje y el coste por las unidades no servidas a tiempo.

Otra de las variables cuyo comportamiento analizaremos será el **nivel de servicio**, que se expresa en porcentaje y representa con cuanta probabilidad vamos a ser capaces de satisfacer la demanda. Dependerá de cuál sea la probabilidad de ruptura del stock.

Por todo esto, el objetivo principal de nuestros modelos siempre va a ser brindar un nivel de servicio lo mejor posible a la par que minimizamos los costes que se puedan generar para obtener el mayor beneficio posible.

Capítulo 2

Modelos estocásticos de aprovisionamiento

La principal característica de estos modelos es que solo dispondremos de las previsiones de cuáles van a ser los valores de cantidades como la demanda y el lead-time, desconociendo su valor exacto. Esto provoca que pueda producirse una ruptura del stock si la previsión supuesta de la demanda se aleja de la realidad. Para modelar las cantidades que no conocemos con exactitud, utilizaremos variables aleatorias de las que conoceremos su distribución de probabilidad. El objetivo será obtener el mejor nivel de servicio con el coste mínimo posible.

Distinguiremos dos casos dependiendo del tipo de producto con el que estemos tratando. Cuando nos refiramos a productos no perecederos, encontraremos dos modelos dependiendo del acceso al stock del que dispongamos. Nuestro objetivo en esta política de aprovisionamiento es obtener un coste mínimo mientras se pueda garantizar el mejor nivel de servicio posible. Después consideramos productos perecederos, donde introducimos una nueva política que trata de manera específica el nuevo problema de la caducidad que aparece para estos casos.

2.1. Caso de productos no perecederos

2.1.1. Modelo de revisión continua (r, q)

En este modelo conocemos el stock en cada momento y los pedidos se realizan en el momento que queramos. La política fijada se denomina (r, q) , puesto que la variable r representa el punto de pedido, y la variable q la cantidad fija que se pedirá una vez la posición del inventario haya llegado a la posición r .

Lo principal en este estudio es poder predecir la ruptura del stock. Cuando nuestro stock es inferior a r es el momento en el que realizamos el pedido, y es cuando el lead-time cobra mayor importancia, puesto que representa el único momento en el que se puede producir la ruptura del stock. Ocurrirá si la demanda durante el lead-time es mayor que r .

Denotaremos la demanda por unidad de tiempo como una variable aleatoria D . Asimismo la variable aleatoria X será la demanda durante el lead-time. Para estudiar estas cantidades aleatorias deberemos tener estimaciones de su valor medio y varianza. En otras ocasiones, cuando la distribución de X es desconocida, se supone que sigue una distribución normal. Tomaremos μ_X como la cantidad media de demanda esperada durante el lead-time, y r como el nivel de stock en el momento de realizar el pedido. El stock de seguridad se puede definir en este caso como $SS = r - \mu_X$. Es común expresarlo como factor de la desviación estándar de X :

$$SS = k\sigma_X \quad (2.1)$$

donde k se denomina factor de seguridad. Para definir el nivel de servicio, podemos estudiar como es la probabilidad de que se produzca la ruptura del stock, expresándola como la probabilidad de que la

demanda durante el lead-time sea mayor que el nivel de stock r , pudiendo estandarizar X de la forma:

$$P(X > r) = P\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} > \frac{r - \mu_X}{\sigma_X}\right) = P(Z > k) \quad (2.2)$$

simplificando al aplicar (2.1) y renombrando a la nueva variable aleatoria Z que será una normal estándar con función de densidad $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$. Vemos que a mayor valor de k , menor es la probabilidad de que se produzca la ruptura del stock, aumentando así el nivel de servicio.

Otra forma de medir el nivel de servicio es calcular el número de unidades que somos capaces de servir a tiempo. El número de unidades que se dejan sin servir en un ciclo de tiempo viene dado por $X - r$ para $X > r$, puesto que si nos encontramos en el caso $X \leq r$, no quedará nada sin servir. Denotando a la función de densidad de X como $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$ puesto que $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, se tiene que el promedio de unidades que se dejan de servir en cada ciclo será:

$$E(X - r)^+ = \int_r^\infty (x - r) f_X(x) dx = \sigma_X \int_k^\infty (z - k) f_Z(z) dz \quad (2.3)$$

donde para reescribirlo hemos utilizado que $z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$ y que (2.2) implica que $F_X(r) = F_Z(k)$. El superíndice $+$ representa la parte positiva de $X - r$. Sabiendo que $P(Z > k) = \int_k^\infty f_Z(z) dz$ y definiendo la función $G(k) = \int_k^\infty (z - k) f_Z(z) dz$, podemos separar las dos integrales y obtener:

$$G(k) = \int_k^\infty z f_Z(z) dz - k \int_k^\infty f_Z(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2}} - k P(Z > k) \quad (2.4)$$

puesto que la primera integral se resuelve de forma directa. Por tanto en cada ciclo la cantidad de unidades que no son servidas a tiempo vendrá dada por $\sigma_X G(k)$ (2.3), que al multiplicarla por el número de ciclos por unidad de tiempo, μ_D/q , nos dará el número de unidades no servidas a tiempo por unidad de tiempo.

Otra de las características que podemos estudiar es el coste. A la hora de realizar el análisis correspondiente, tendremos en cuenta los costes nombrados en el Capítulo 1. Es por ello que los costes en unidades monetarias los podremos expresar como:

- Coste de compra: c u.m. por u. de producto
- Coste de emisión de pedido: a u.m. fijo
- Coste de almacenamiento: h u.m. por u. y u.t. de almacenamiento
- Coste por unidad no servida: c_s u.m. fijo por unidad no satisfecha

Puesto que el stock de seguridad se correspondía con $r - \mu_X$ esta cantidad es una aproximación del valor mínimo del stock, y con q siendo la cantidad fija de pedido tenemos que el máximo stock disponible será $r - \mu_X + q$. La media entre estos dos valores nos da un stock medio de $r - \mu_X + q/2$. Cabe destacar que en el máximo stock no se ha tenido en cuenta la cantidad de unidades insatisfechas ya que se supone que se trata de una cantidad pequeña en comparación con el resto de términos de la ecuación.

Para obtener el coste por ciclo multiplicamos el coste medio obtenido por la longitud del ciclo que es de q/μ_D . Recordando (2.3) las unidades de demanda insatisfecha las expresamos como $\sigma_X G(k)$ y aplicando lo anterior a todos los costes tenemos el coste por ciclo en promedio:

$$\text{coste/ciclo} = a + qc + \left(k\sigma_X + \frac{q}{2}\right) \frac{qh}{\mu_D} + c_s \sigma_X G(k)$$

Luego el coste por unidad de tiempo en promedio será:

$$coste = \frac{a\mu_D}{q} + \mu_{DC} + \left(k\sigma_X + \frac{q}{2}\right)h + \frac{c_s\sigma_X G(k)\mu_D}{q} \quad (2.5)$$

Finalmente buscamos obtener el valor de k que nos daría consecuentemente el valor de r , y el valor de q . Buscaremos establecer estos valores de manera que minimicemos el coste sin preocuparnos del nivel de servicio, pero se pueden establecer otros métodos en caso de que el objetivo a tratar sea distinto. Con nuestro caso seleccionado, el cálculo se lleva a cabo derivando la expresión para el coste (2.5) con respecto r y q , e igualando las derivadas a cero [8]. Si despejamos q en las dos expresiones obtenidas, igualando esos valores obtenemos el valor que k debe cumplir para que se cumpla la condición de mínimo, que en este caso será:

$$P(Z > k) = \frac{c_s\sqrt{\mu_D}}{\sqrt{2h(a + c_s\sigma_X G(k))}}$$

cuya resolución es numérica. Con ese valor de k obtenido se tiene el valor de q al despejar de igualar a cero la derivada del coste con respecto q , obteniendo:

$$q = \sqrt{\frac{2\mu_D(a + c_s\sigma_X G(k))}{h}}$$

2.1.2. Modelo de revisión periódica (R, S)

En este caso, fijaremos cada cuánto tiempo se realiza la revisión del stock, que será en intervalos de R unidades de tiempo. La incógnita se basa en decidir cuánto tenemos que pedir cada día, puesto que en vez de una cantidad fija como en el caso anterior, el pedido dependerá de la cantidad de stock que tengamos en el momento de hacer la revisión.

Se fijará una cantidad S que nos marcará el número de unidades que queremos tener en el inventario. Por tanto si al realizar la revisión el número de unidades en el inventario es g entonces pediremos $S - g$, es decir, el número de unidades que falten para llegar a S .

Si queremos realizar un análisis análogo al previo, partimos de analizar la ruptura del stock en el modelo.

Al realizar un pedido en tiempo M , con dicho pedido deberemos cubrir la demanda que haya entre $M + L$ y $M + L + R$, siendo L el lead-time. La ruptura del stock se producirá cuando en el intervalo de tiempo entre realizar el pedido en M hasta que reciba la cantidad de producto requerida y pueda realizar el próximo pedido, que será en $M + L + R$, tenga una demanda mayor que S .

La variable aleatoria que estudiamos en este modelo es X_{L+R} correspondiente con la demanda que tenemos en $L + R$ unidades de tiempo, siendo la probabilidad de ruptura del stock por tanto de $P(X_{L+R} > S)$

Análogamente a (2.3), el promedio de unidades que se dejan de servir en cada ciclo será:

$$E(X_{L+R} - S)^+ = \int_S^\infty (x - S)f(x)dx = \sigma_{L+R}G\left(\frac{S - \mu_{L+R}}{\sigma_{L+R}}\right)$$

definiendo la función $G\left(\frac{S - \mu_{L+R}}{\sigma_{L+R}}\right)$ de manera análoga a (2.4).

Teniendo en cuenta que tendremos $1/R$ ciclos por unidad de tiempo y el promedio que se pide en cada ciclo es $\mu_D R$, establecemos de nuevo la cantidad mínima de inventario dada por el stock de seguridad $S - E(X_{L+R})$ y la máxima será $S - E(X_{L+R}) + \mu_D R$. Por tanto el inventario medio viene dado por $S - E(X_{L+R}) + \mu_D R/2$.

Considerando los costes definidos en el apartado previo, obtenemos que el coste total será:

$$coste = \frac{a}{R} + \mu_{DC} + \left(S - E(X_{L+R}) + \frac{\mu_D R}{2}\right)h + \frac{c_s}{R}\sigma_{L+R}G\left(\frac{S - \mu_{L+R}}{\sigma_{L+R}}\right) \quad (2.6)$$

Repitiendo el análisis previo en el caso en que busquemos minimizar el coste globalmente, derivamos esta expresión con respecto R y S igualando a cero, y despejando para cada ecuación el valor de R . Igualaremos estos valores consiguiendo una condición para S , y finalmente el valor de R .

Las derivadas correspondientes de (2.6) son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{coste}}{\partial R} &= -\frac{a}{R^2} + \frac{\mu_D}{2}h - \frac{c_s}{R^2}\sigma_{L+R}G\left(\frac{S-\mu_{L+R}}{\sigma_{L+R}}\right) \\ \frac{\partial \text{coste}}{\partial S} &= \left[1 + P\left(Z > \frac{S-\mu_{L+R}}{\sigma_{L+R}}\right)\right]h - \frac{c_s}{R}P\left(Z > \frac{S-\mu_{L+R}}{\sigma_{L+R}}\right)\end{aligned}$$

La condición para S impone que debe cumplirse:

$$\sqrt{\frac{2\left(a + c_s\sigma_{L+R}G\left(\frac{S-\mu_{L+R}}{\sigma_{L+R}}\right)\right)}{h\mu_D}} = \frac{c_s}{h}\left[1 + P\left(Z > \frac{S-\mu_{L+R}}{\sigma_{L+R}}\right)\right] \quad (2.7)$$

El valor de R bajo dicha condición se corresponde con:

$$R = \sqrt{\frac{2\left(a + c_s\sigma_{L+R}G\left(\frac{S-\mu_{L+R}}{\sigma_{L+R}}\right)\right)}{h\mu_D}}$$

En algunas ocasiones, el valor de R nos viene dado por nuestros proveedores, es decir, no es una variable de decisión. En ese caso el valor de S óptimo viene dado por (2.7).

2.2. Caso de productos perecederos: Política EWA

Dentro del desarrollo de los modelos de inventario, al considerar el caso de productos perecederos nos encontramos con que su análisis implica una mayor dificultad. Debido a la gran importancia de estos productos en diversos sectores económicos, su estudio es esencial con el fin de mejorar las estrategias que permitan implementar su uso y distribución.

Una posibilidad a la hora de estudiar los productos perecederos, es hacer como si no fueran perecederos y tratarlos igual, es decir, bajo una política (R, S) como la descrita previamente. Sin embargo, esto conlleva la desventaja de que la caducidad de las unidades va a generar problemas en el inventario, haciendo que el stock disponible se reduzca.

Una forma heurística que ha sido desarrollada para modelos de revisión periódica y tiempos de vida fijos, dando lugar a buenos resultados, es la política EWA (Estimated Withdrawal and Aging) [10]. Principalmente esta política nos va a añadir a la cantidad S lo que esperamos que se vaya a caducar. Por tanto la base es la misma que la de la Sección 2.1, con la diferencia de que le estamos añadiendo al pedido una estimación de la cantidad que va a caducar del stock que tenemos en ese momento.

Con esta deducción sabemos que cada día la cantidad a pedir se va a incrementar en una estimación de lo que va a caducar. Sin embargo, esa estimación de lo que va a caducar depende de la composición del stock, así como de la demanda que haya, que en ese momento será desconocida. Es por ello que bajo la política EWA supondremos que la demanda va a ser igual a la demanda media.

Ya se ha estudiado que la política EWA consigue mejores resultados al aplicarla a productos perecederos con tiempos de vida pequeños [12]. Ha sido diseñada con el principal objetivo de reducir la cantidad de producto caducada, ya que como veremos en el próximo caso que trataremos, la unidades caducadas deben minimizarse al trabajar con productos de difícil accesibilidad. Otra de sus ventajas es que permite aumentar la calidad de las unidades de producto perecedero, que podemos denominar como "freshness"[3], lo cual permite que se utilice el producto con el mayor número posible de días de vida

restantes.

En este caso la complejidad de los cálculos reside en que las estimaciones directas que aplicábamos en el caso de productos no perecederos no las vamos a obtener, puesto que no nos basta con conocer cuántas unidades de producto tenemos en el almacén. En concreto, deberemos saber la edad de las cantidades que tenemos en el inventario. A la hora de realizar el estudio introduciremos una nueva cantidad que nos indicará el tiempo de vida de las unidades de producto desde que se realiza el pedido, que denominaremos m .

Capítulo 3

Modelo de inventario para productos perecederos bajo la política EWA

Una vez hemos visto cómo cambia el modelo cuando pasamos a considerar el caso de productos perecederos y el funcionamiento de la política con la que tenemos que trabajar, nos vamos a centrar en realizar un análisis del estudio desarrollado en el artículo publicado en el *European Journal of Operational Research*, ver [5].

Partiremos de una revisión del artículo que nos permita analizar el modelo que se estudia de forma general. Seguidamente particularizaremos el estudio en el caso estacionario, que como veremos nos simplificará los cálculos y la obtención de resultados que serán finalmente utilizados para analizar el caso no estacionario, de una dificultad superior.

La política EWA ha sido aplicada para productos perecederos de diversos ámbitos económicos, pero una de sus aplicaciones más interesantes es dentro del sistema de distribución de concentrados de plaquetas producidos por un Banco de Sangre.

Las propiedades de las plaquetas han sido estudiadas en múltiples artículos de investigación, ver [4] y se trata de un producto cuyo tiempo de vida es breve y en cuya distribución deberemos garantizar un nivel de servicio alto.

Las plaquetas son células sanguíneas cuya reserva no es simple de controlar debido a que poseen un tiempo de vida muy corto. Es por ello que se han desarrollado estudios con el objetivo de brindar herramientas para ayudar a decidir cuántas unidades de plaquetas producir cada día de la forma más objetiva posible [9]. Para ello hay que tener en cuenta el tiempo de vida de las unidades, que es una cantidad fija, normalmente entre 5 y 7 días.

Todas las variables utilizadas en el siguiente desarrollo y sus significados se recogen en el **Anexo A**.

3.1. Introducción al modelo

En el artículo [5] se toma como modelo la producción de plaquetas en el Centro Vasco de Transfusión y Tejidos Humanos (CVTTH), que pasamos a describir a continuación.

El modelo nos muestra un patrón de revisión semanal, de Lunes a Domingo, donde existe una demanda diaria cuya distribución dependerá del día de la semana en el que nos encontremos.

Los resultados de [5] se desarrollaron para este modelo centrado en la producción de concentrados de plaquetas, aunque las fórmulas obtenidas se podrían adaptar a cualquier modelo de características similares, es decir, con revisión periódica, demanda estocástica, tiempos de vida fijos y patrón semanal.

En el modelo se considera también la política FIFO (First In-First Out) donde el primer lote de producto que entra deberá ser el primero en ser enviado. Esta política posee la desventaja de que, especialmente en este caso donde tratamos con un producto perecedero, entra en juego el factor "freshness" de

las unidades de producto que disponemos, ya definido en la Sección 2.2. Por otro lado, esta política implica que las cantidades de producto caducadas van a ser menores. En el modelo también se define el lead-time, consistente en $L = 1$ para los pedidos de Lunes a Jueves, mientras que para el Viernes tenemos que $L = 3$ puesto que el pedido realizado ese día llegará el Lunes. Sábado y Domingo no se realizan pedidos. De igual forma, $R = 1$ para pedidos de Lunes a Jueves, pero $R = 3$ en el caso del Viernes.

La variable aleatoria que representa la demanda diaria la definiremos como D_t donde el subíndice t nos indica el día de la semana con el que estamos trabajando ($t = 1$ será el Lunes y así respectivamente para $t = 7 + k$ con $k \geq 1$, puesto que asumimos que la demanda es semanalmente estacionaria). Asimismo disponemos de su media $\mu_t = E[D_t]$ y varianza $\sigma_t^2 = Var(D_t)$. También se define F_t como la función de distribución asociada a D_t . De igual forma $F_{t,s}$ con $1 \leq s < t < 7$ será la función de distribución asociada a $D_{t,s+7}$, que nos indica la demanda que hay del día t al $s + 7$, y que tiene la misma distribución que $D_{t,7} + D_{1,s}$.

Esto quiere decir que por ejemplo $D_{2,5}$ nos definiría la demanda que hay de Martes a Viernes, mientras que $D_{5,2}$ sería la demanda existente de Viernes a Martes. Por tanto cada caso abarcaría la demanda de días distintos.

Establecemos también la media $\mu_{t,s} = E[D_{t,7}] + E[D_{1,s}]$ y la varianza $\sigma_{t,s}^2 = Var[D_{t,7}] + Var[D_{1,s}]$ de $F_{t,s}$.

Puesto que el producto perecedero que se considera es la sangre, se supone también que el nivel de servicio es alto y que la demanda que no se cumple no es atrasada, ya que en la práctica supondría la necesidad de pedirla al Banco de Sangre más cercano. Los eventos se desarrollan comenzando por recibir el pedido que se había realizado el día anterior puesto que el lead-time es de un día (exceptuando el Viernes cuyo pedido llegaría el Lunes). Seguidamente se realiza el pedido teniendo en cuenta el inventario disponible en ese momento y el número de unidades que llegan, pero sin conocer la demanda de ese día. Estos dos pasos no ocurren los fines de semana, en cuyo caso ni se reciben ni se hacen pedidos. Por último, puesto que las unidades tienen m días de vida desde el momento en que son pedidas, sabemos que para el m -ésimo día se considerarán como unidades caducadas, luego el último paso consistirá en desecharlas. Como los pedidos son realizados al principio del día siguiente, en el artículo se consideran los días $t, \dots, t + L + R - 2$ (en este caso, el valor de L se refiere al correspondiente al día $t + R$).

En el artículo se trata el caso previamente descrito donde cada día es diferente y se obtienen diversas fórmulas y resultados. Puesto que se trata de un caso muy complejo, partiremos de suponer que todos los días son idénticos y la demanda tiene la misma distribución. Esto quiere decir que todos los días se hacen pedidos y el pedido de un día llega al día siguiente, puesto que consideramos $L = R = 1$ para todos los días. También el tiempo de vida de las unidades de producto desde que se realiza el pedido, que denominábamos m , debe ser mayor que uno, puesto que en caso contrario las unidades nos llegarían caducadas.

Con esta asunción realizaremos el desarrollo para obtener las fórmulas adaptadas a dicha condición.

3.2. Caso estacionario

En este desarrollo aplicaremos la política EWA descrita en la Sección 2.2 para el caso en el que los días sean iguales. A lo largo del desarrollo utilizaremos las letras mayúsculas para denotar las cantidades aleatorias y las minúsculas para su valor esperado. Consideramos que el comportamiento de todos los días es igual. La demanda D_t tiene la misma distribución para cada día. Por tanto la demanda durante un intervalo de tiempo $[t, t + i]$ para $i \geq 1$ viene dada por:

$$D_{t, t+i} = \sum_{j=0}^i D_{t+j}$$

Como en este modelo estacionario se realiza pedido todos los días, con un día de tiempo entre que se

realiza el pedido y éste llega y además hemos eliminado la condición de que en los fines de semana no se recibiera ni enviara un pedido, tenemos $L = R = 1$.

Como veíamos en el Capítulo 2, el stock de seguridad vendrá definido de forma similar a (2.1) donde se considera la desviación estándar entre dos días consecutivos:

$$SS_t = \sqrt{2}k\sigma \quad (3.1)$$

con k el factor de seguridad, cuyo valor consideraremos entre 1,5 y 3,5.

También definimos la cantidad hasta la que se pide en el día:

$$S_t = SS_t + 2\mu$$

que como podemos ver será el stock de seguridad junto con la media de la demanda entre dos días.

El objetivo a continuación va a ser estimar las cantidades de interés en el modelo, al igual que se hacía en la Sección 2.1. En este caso nos vamos a centrar en encontrar una aproximación para la cantidad caducada.

La cantidad caducada en el día t dada por O_t , es el resultante de la diferencia entre la demanda D_t que hayamos tenido ese día y la cantidad que tenemos en mano para ser enviada que tenga un solo día de vida restante, definida como B_t^1 . Lo que no se haya enviado pasará a ser obsoleto. Así, tenemos:

$$O_t = (B_t^1 - D_t)^+ \quad (3.2)$$

El valor esperado de esta variable aleatoria se expresará como o , donde no distinguimos días ya que todos tienen el mismo comportamiento, y representa el valor aproximado de la cantidad caducada en un día:

$$O_t \sim o \quad (3.3)$$

Asimismo \hat{O}_t será la estimación de la cantidad caducada el día t . Al aplicar la política EWA aproximamos la demanda:

$$D_t \sim \mu \quad (3.4)$$

lo cual permite expresar la estimación \hat{O}_t de la forma $\hat{O}_t = (B_t^1 - \mu)^+$ y definir la cantidad hasta la que se pide el día t como:

$$S_t = SS_t + 2\mu + \hat{O}_t \quad (3.5)$$

que ya tiene en cuenta la cantidad prevista de producto caducada en ese día, tal y como explicaba la política EWA.

Sustituyendo (3.1) y tomando la aproximación (3.3), tenemos la aproximación de (3.5). Puesto que el valor esperado de S_t será la suma de los valores esperados de las variables que aparecen en su expresión (3.5), obtenemos:

$$s' \sim \sqrt{2}k\sigma + 2\mu + o \quad (3.6)$$

A continuación se llevan a cabo dos suposiciones clave que ayudan a simplificar el problema. La primera es que el número de unidades que tenemos disponibles en el almacén una vez ha llegado el pedido hecho el día anterior, es mayor o igual con alta probabilidad que la demanda del día, lo cual hace muy pequeña la posibilidad de que se produzca una ruptura del stock. Como hemos comentado, debido a que en la práctica es muy importante que se realicen las entregas de las unidades requeridas, implica que el nivel de servicio es muy alto y es por ello que incluso si existiera una cantidad de demanda insatisfecha, ésta sería muy pequeña [11]. Principalmente buscamos que la cantidad que quede sin servir sea comparablemente muy pequeña con la cantidad que tenemos en realidad en stock.

En segundo lugar, suponemos que la cantidad hasta la que se pide en el día es mayor o igual que el número de unidades que tenemos disponibles en el almacén una vez ha llegado el pedido hecho el día

anterior, ya que sino tendríamos que Q_t , cantidad de pedido que se realiza en el día, sería nula ya que el stock del que dispondríamos sería demasiado grande, sin tener así necesidad de pedir más producto.

Asimismo aproximamos B_t , el número de unidades que tenemos en stock al principio del día t una vez ha llegado el pedido, que aplicando estos razonamientos tendríamos que se puede expresar como:

$$B_t \sim S_{t-1} - D_{t-1} - O_{t-1} \quad (3.7)$$

puesto que el número de unidades que tendríamos en stock el día t dependerá de la cantidad que se haya pedido, la demanda, y la cantidad caducada, todo ello del día anterior. La aproximación se obtiene al aplicar (3.3), (3.4) y (3.6) de manera que:

$$b \sim \sqrt{2k}\sigma + 2\mu + o - \mu - o$$

donde simplificando nos queda la expresión final:

$$b \sim \sqrt{2k}\sigma + \mu \quad (3.8)$$

Podemos utilizar (3.8) para obtener también el valor aproximado de Q_t , siendo su expresión:

$$Q_t = (S_t - B_t)^+ \quad (3.9)$$

y aplicando las correspondientes aproximaciones (3.6) y (3.8):

$$q \sim \sqrt{2k}\sigma + 2\mu + o - \sqrt{2k}\sigma - \mu$$

Obteniendo en nuestro caso de días iguales:

$$q \sim \mu + o$$

A continuación consideraremos la variable V_t^i con $i = 1, \dots, m$ como el número de unidades pedidas el día t que tenemos en el stock al final del día $t + i$, antes de descartar las unidades caducadas. Con el siguiente desarrollo buscamos obtener una expresión que nos permita estimar la cantidad media caducada o . Es por ello que vamos a relacionar las dos variables aleatorias de manera que

$$O_t = V_{t-m}^m \quad (3.10)$$

que es el número de unidades pedidas el día $t - m$ que siguen en stock al final del día t , y que seguidamente deberán ser desechadas al final de ese día ya que han caducado.

Recordando (3.9) y puesto que la posición del inventario después de haber realizado el pedido del día t se corresponde con S_t , la cantidad de pedido que se haga el día $t + i$ estará relacionada con lo que haya disminuido S_t en función de cuál haya sido la demanda y las cantidades caducadas en el intervalo de tiempo $[t, t + i]$. Teniendo en cuenta que esa cantidad de pedido será el valor de S_t menos lo que haya disminuido el inventario en el intervalo de tiempo considerado, con un límite de la cantidad pedida en t , es decir, Q_t (3.9). De aplicar la política FIFO, aproximamos:

$$V_t^i \sim \min\{(S_t - D_{t,t+i} - (O_t + \dots + O_{t+i-1}))^+, (S_t - B_t)^+\} \quad (3.11)$$

No se tiene en cuenta la cantidad caducada el día i -ésimo puesto que el pedido se realiza antes de descartar las unidades caducadas del día. Para simplificar la notación introducimos la variable que une la demanda con la cantidad caducada en el periodo de tiempo seleccionado, de forma que sea

$\tilde{D}_{t, t+i} = D_{t, t+i} + O_t + \dots + O_{t+i-1}$. Para el cálculo se considera que S_t es una cantidad determinística, no siendo esto cierto bajo la política EWA ya que dependerá de la antigüedad del stock almacenado.

Recordemos que hemos supuesto que $B_t < S_t$. El objetivo es deducir cual será el valor esperado $E[V_t^i]$, para posteriormente por (3.10) aplicarlo para obtener la cantidad esperada o . Para ello lo calculamos condicionando en B_t . Deberemos distinguir dos casos según el valor que tome V_t^i . Notemos que si $B_t < \tilde{D}_{t, t+i} < S_t$, entonces el mínimo en (3.11) se corresponde con $S_t - \tilde{D}_{t, t+i}$ mientras que en caso contrario sería $S_t - B_t$. Así tenemos:

$$E[V_t^i|B_t] = (S_t - B_t) \int_0^{B_t} f_{\tilde{D}_{t, t+i}}(x)dx + \int_{B_t}^{S_t} (S_t - x)f_{\tilde{D}_{t, t+i}}(x)dx$$

Podemos simplificar la expresión previa escribiéndola en forma de una integral doble:

$$E[V_t^i|B_t] = \int_{B_t}^{S_t} \left(\int_0^y f_{\tilde{D}_{t, t+i}}(x)dx \right) dy \quad (3.12)$$

La integral de la función de densidad de $\tilde{D}_{t, t+i}$ representa su función de distribución, llegando a la expresión final:

$$E[V_t^i|B_t] = \int_{B_t}^{S_t} F_{\tilde{D}_{t, t+i}}(y)dy$$

Aplicando las propiedades de la esperanza condicional ($E[X] = E[E[X|Y]]$) [6] tenemos:

$$E[V_t^i] = \int_0^{S_t} E[V_t^i|B_t]f_{B_t}(x)dx$$

que sustituyendo la esperanza condicionada quedaría:

$$E[V_t^i] = \int_0^{S_t} \left(\int_y^{S_t} F_{\tilde{D}_{t, t+i}}(x)dx \right) f_{B_t}(y)dy$$

Intercambiando integrales reescribimos:

$$E[V_t^i] = \int_0^{S_t} \left(\int_0^x f_{B_t}(y)dy \right) F_{\tilde{D}_{t, t+i}}(x)dx$$

Finalmente la integral de la función de densidad de B_t se corresponde con su función de distribución, concluyendo:

$$E[V_t^i] = \int_0^{S_t} F_{B_t}(x)F_{\tilde{D}_{t, t+i}}(x)dx \quad (3.13)$$

El siguiente paso consiste en aproximar las funciones de distribución de (3.13). Comenzamos desarrollando $F_{\tilde{D}_{t, t+i}}(x)$:

$$F_{\tilde{D}_{t, t+i}} = P(D_{t, t+i} + O_t + \dots + O_{t+i-1} \leq x)$$

Habíamos tomado la aproximación para O_t en (3.6), que será igual para cada día luego tenemos:

$$F_{\tilde{D}_{t, t+i}}(x) \sim P(D_{t, t+i} + io \leq x) = P(D_{t, t+i} \leq x - io) = F_{t, t+i}(x - io) \quad (3.14)$$

Para desarrollar la segunda función $F_{B_t}(x)$, recordamos la expresión (3.7):

$$F_{B_t}(x) = P(B_t \leq x) \sim P(S_{t-1} - D_{t-1} - O_{t-1} \leq x) = P(D_{t-1} \geq S_{t-1} - O_{t-1} - x)$$

A continuación aproximamos S_{t-1} por (3.6) y O_{t-1} de nuevo como en (3.3), eliminando sus contribuciones y quedando:

$$P(D_{t-1} \geq S_{t-1} - O_{t-1} - x) \sim P(D_{t-1} \geq 2\mu + \sqrt{2k}\sigma - x)$$

Si renombramos $2\mu + \sqrt{2}k\sigma - x = z$ podemos reescribir:

$$P(D_{t-1} \geq z) = 1 - P(D_{t-1} \leq z) = 1 - F_{t-1}(z) = \bar{F}_{t-1}(z)$$

donde \bar{F} representa la función de supervivencia ($\bar{F}(x) = 1 - F(x)$). Finalmente tendremos:

$$F_{B_t}(x) \sim \bar{F}_{t-1}(2\mu + \sqrt{2}k\sigma - x)$$

Denominaremos $s = 2\mu + \sqrt{2}k\sigma$. A diferencia de (3.14) esta función de distribución no va a depender de o .

Para obtener la aproximación de O_t , recordamos (3.10). Su valor medio o se corresponderá por tanto con $E[V_{t-m}^m]$ obtenido en (3.13).

$$o \sim \int_0^{S_t} \bar{F}_{t-1}(s-x) F_{t,t+m}(x-mo) dx$$

Finalmente aproximaremos el límite superior de la integral mediante (3.6) llegando a la expresión final con la que vamos a trabajar:

$$o \sim \int_0^{s+o} \bar{F}_{t-1}(s-x) F_{t,t+m}(x-mo) dx \quad (3.15)$$

Esta expresión da una aproximación de o , pero no de forma explícita sino a través de una ecuación. Por lo tanto para encontrar una aproximación de la cantidad caducada deberíamos resolver (3.15) con el signo de igualdad. Sin embargo esta ecuación no se puede resolver analíticamente. En la siguiente sección vamos a estudiar esta ecuación y dar una aproximación de su solución.

3.2.1. Análisis función aproximada de o

En este apartado buscamos demostrar que la ecuación:

$$\phi(o) = \int_0^{s+o} \bar{F}_{t-1}(s-x) F_{t,t+m}(x-mo) dx \quad (3.16)$$

tiene solución y que ésta es única. Para ello, comenzaremos simplificando la integral que aparece en el lado derecho de la ecuación. Partiremos escribiendo la función de densidad de la normal estándar $N(0, 1)$ como $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ y su correspondiente función de distribución $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz$.

Lema 1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\bar{F}_{t-1}(s-x) F_{t,t+m}(x-mo) = \left(1 - \Phi\left(\frac{s-x-\mu}{\sigma}\right)\right) \Phi\left(\frac{x-mo-(m+1)\mu}{\sqrt{m+1}\sigma}\right)$$

Demostración. Desarrollando las funciones de distribución de las normales correspondientes, podemos estandarizarlas de manera que tenemos:

$$\bar{F}_{t-1}(s-x) = P(D_{t-1} > s-x) = P\left(\frac{D_{t-1}-\mu}{\sigma} > \frac{s-x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{s-x-\mu}{\sigma}\right)$$

ya que la distribución de la variable aleatoria D_{t-1} es $N(\mu, \sigma)$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned} F_{t,t+m}(x-mo) &= P(D_{t,t+m} \leq x-mo) = P\left(\frac{D_{t,t+m}-(m+1)\mu}{\sqrt{m+1}\sigma} \leq \frac{x-mo-(m+1)\mu}{\sqrt{m+1}\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x-mo-(m+1)\mu}{\sqrt{m+1}\sigma}\right) \end{aligned}$$

donde la distribución de la variable aleatoria $D_{t,t+m}$ es $N((m+1)\mu, \sqrt{m+1}\sigma)$.

□

Proposición 1. La ecuación (3.16) tiene una única solución $o > 0$.

Demostración. Definimos las siguientes funciones, primero para $o, x > 0$:

$$g(o, x) = \left(1 - \Phi\left(\frac{s - x - \mu}{\sigma}\right)\right) \Phi\left(\frac{x - mo - (m+1)\mu}{\sqrt{m+1}\sigma}\right) \quad (3.17)$$

y para $o \geq 0$:

$$\varphi(o) = \int_0^{s+o} g(o, x) dx - o \quad (3.18)$$

Tenemos que ver que existe una única solución de $\varphi(o) = 0$. En primer lugar demostramos la existencia. Notemos que $\varphi(o)$ es C^∞ ya que $g(o, x)$ lo es, y en particular es continua. También tenemos que $\varphi(0) > 0$. Veamos cuánto vale $\lim_{o \rightarrow \infty} \varphi(o)$. Comenzamos acotando $g(o, x)$. Como el valor de la función de distribución está acotado por 1, podemos acotar la expresión (3.17):

$$g(o, x) < \Phi\left(\frac{x - mo - (m+1)\mu}{\sqrt{m+1}\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{mo + (m+1)\mu - x}{\sqrt{m+1}\sigma}\right) \quad (3.19)$$

A continuación definimos la tasa de fallo como el cociente de la función de densidad entre la función de supervivencia de la normal estándar. Su recíproco se denomina radio de Mill [2], y su expresión es:

$$r(x) = \frac{1 - \Phi(x)}{f(x)}$$

Utilizando la segunda parte de la conocida desigualdad probada en [1] y dada por:

$$\frac{x}{x^2 + 1} < r(x) < \frac{1}{x}$$

para todo $x > 0$, tendremos que se cumple que $\frac{f(x)}{1 - \Phi(x)} > x$ para todo $x > 0$. Aplicando a (3.18), tenemos la acotación:

$$\Phi\left(\frac{x - mo - (m+1)\mu}{\sqrt{m+1}\sigma}\right) < \frac{f\left(\frac{mo + (m+1)\mu - x}{\sqrt{m+1}\sigma}\right)}{\frac{mo + (m+1)\mu - x}{\sqrt{m+1}\sigma}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{mo + (m+1)\mu - x}{\sqrt{m+1}\sigma}\right)^2}}}{\frac{mo + (m+1)\mu - x}{\sqrt{m+1}\sigma}} \quad (3.20)$$

para $x < mo + (m+1)\mu$. Utilizando (3.19) se tiene la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} \int_0^{s+o} g(o, x) dx &= \int_0^s g(o, x) dx + \int_s^{s+o} g(o, x) dx \\ &< \int_0^s \Phi\left(\frac{x - mo - (m+1)\mu}{\sqrt{m+1}\sigma}\right) dx + \int_s^{s+o} \Phi\left(\frac{x - mo - (m+1)\mu}{\sqrt{m+1}\sigma}\right) dx \end{aligned}$$

Como la función de distribución es creciente en x , podemos darle el valor máximo, en el caso de la primera integral para s , y de la segunda para $s + o$. Luego tendríamos la integral de una constante que es un cálculo trivial. De esta manera, la integral inicial quedaría acotada de la forma:

$$\int_0^{s+o} g(o, x) dx < s \cdot \Phi\left(\frac{s - mo - (m+1)\mu}{\sqrt{m+1}\sigma}\right) + o \cdot \Phi\left(\frac{s + o - mo - (m+1)\mu}{\sqrt{m+1}\sigma}\right) \quad (3.21)$$

Para el primer término de (3.21) tenemos que cuando o tiende a infinito, el argumento de la función de distribución tiende a menos infinito, obteniendo la convergencia a cero.

En cuanto al segundo término, podemos aplicar (3.20) ya que $s + o < mo + (m + 1)\mu$ para o suficientemente grande, puesto que $m > 1$. Por tanto tenemos que:

$$o \cdot \Phi\left(\frac{s + o - mo - (m + 1)\mu}{\sqrt{m + 1}\sigma}\right) < o \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{(m-1)o + (m+1)\mu - s}{\sqrt{m+1}\sigma}\right)^2}{2}}}{\frac{(m-1)o + (m+1)\mu - s}{\sqrt{m+1}\sigma}}$$

que converge a cero cuando o tiende a infinito. Por tanto hemos obtenido que $\int_0^{s+o} g(o, x)dx \rightarrow 0$ cuando o tiende a infinito. Luego tenemos que $\lim_{o \rightarrow \infty} \varphi(o) = -\infty$.

Puesto que φ es continua y $\varphi(0) > 0$ queda demostrada la existencia de la solución de (3.16).

A continuación demostramos la unicidad de la solución. Vamos a probar que (3.18) es decreciente en o . Para ello utilizamos la regla de Leibniz por derivación bajo signo integral:

$$\frac{d\varphi(o)}{do} = \int_0^{h(o)} \frac{\partial g(o, x)}{\partial o} dx + \frac{dh(o)}{do} \cdot g(o, h(o)) - 1$$

donde $h(o) = s + o$. Reescribiendo tenemos:

$$\frac{d\varphi(o)}{do} = \int_0^{s+o} \frac{\partial g(o, x)}{\partial o} dx + g(o, s + o) - 1 \quad (3.22)$$

Al ser la función (3.17) decreciente en o , su derivada parcial con respecto o es negativa luego el primer sumando de (3.22) también lo es. Respecto al segundo sumando, recordando (3.17) la función es un producto de dos probabilidades, cuyo valor no puede ser mayor que uno. Luego junto al tercer sumando nos dará también una cantidad negativa.

La derivada (3.22) es negativa y φ es decreciente, concluyendo así la demostración. \square

La **Proposición 1** prueba que existe una única solución para (3.16). Si queremos obtener (3.16) analíticamente, nos encontramos con una expresión muy difícil de resolver. Aunque ya sabemos que mediante algoritmos numéricos se puede obtener la solución con la precisión buscada, lo que queremos es encontrar una aproximación a la solución que sea explícita. Una de las principales ventajas que nos va a suponer es que vamos a poder ver el papel de cada uno de los parámetros de una forma más directa, ya que dar una aproximación a la solución nos permite tener una mejor comprensión de la dependencia de los parámetros que con la ecuación original, y poder ver dónde reside la importancia de los términos involucrados.

Para aproximar la solución de (3.16), supondremos que la cantidad que se va a caducar o , es pequeña en relación a la demanda y producción diaria. Vamos a realizar un desarrollo en primer orden. Comenzamos separando la integral (3.16) en dos sumandos:

$$\int_0^s \bar{F}_{t-1}(s-x)F_{t,t+m}(x-mo)dx + \int_s^{s+o} \bar{F}_{t-1}(s-x)F_{t,t+m}(x-mo)dx \quad (3.23)$$

Como o es pequeña, hacemos el desarrollo en primer orden en torno a $o = 0$ para la función de distribución cuyo valor depende de o , obteniendo:

$$F_{t,t+m}(x-mo) \sim F_{t,t+m}(x) - mo \cdot f_{t,t+m}(x) \quad (3.24)$$

Por tanto podemos aproximar la primera integral de (3.23) resultando:

$$\int_0^s \bar{F}_{t-1}(s-x)F_{t,t+m}(x-mo)dx \sim I_1 - mo \cdot I_2$$

con

$$I_1 = \int_0^s \bar{F}_{t-1}(s-x) F_{t,t+m}(x) dx$$

$$I_2 = \int_0^s \bar{F}_{t-1}(s-x) f_{t,t+m}(x) dx$$

donde $f_{t,t+m}$ es la función de densidad de la distribución normal correspondiente a $D_{t,t+m}$.

Por otra parte, para la segunda integral de (3.23) notamos que para $x \in (s, s+o)$ tenemos que

$\bar{F}_{t-1}(s-x) \in (\bar{F}(0), \bar{F}(o))$. Ambos límites son muy cercanos a uno, puesto que o es pequeño y $\bar{F}(o)$ representa la probabilidad de que la demanda diaria sea mayor que o , algo que ocurre con una altísima probabilidad. Por tanto, aproximamos la segunda integral de (3.23) por $\int_s^{s+o} F_{t,t+m}(x-mo) dx$.

Como o es pequeño, de aplicar el Teorema del Valor Medio a esta última integral, tendremos la aproximación $o \cdot F_{t,t+m}(s-mo)$. Aplicando (3.24) en este caso obtendríamos:

$$o \cdot F_{t,t+m}(s-mo) \sim o \cdot F_{t,t+m}(s) - mo^2 \cdot f_{t,t+m}(s)$$

Quedándonos solamente con los términos de primer orden, la aproximación resultaría en $o \cdot F_{t,t+m}(s)$. Con todo esto tenemos que:

$$\phi(o) \sim I_1 - mo \cdot I_2 + o \cdot F_{t,t+m}(s)$$

Puesto que por la **Proposición 1** tenemos que la única solución es $\phi(o) = o$, podemos obtener la aproximación final para o , y por tanto una solución aproximada de la ecuación (3.16) que será:

$$o \sim \frac{I_1}{mI_2 + \bar{F}_{t,t+m}(s)} \quad (3.25)$$

Hemos obtenido que (3.25) da una aproximación de la cantidad caducada en un modelo estacionario. Se ha deducido a partir de las ideas de [5], particularizándolas al caso estacionario, y el desarrollo original anterior.

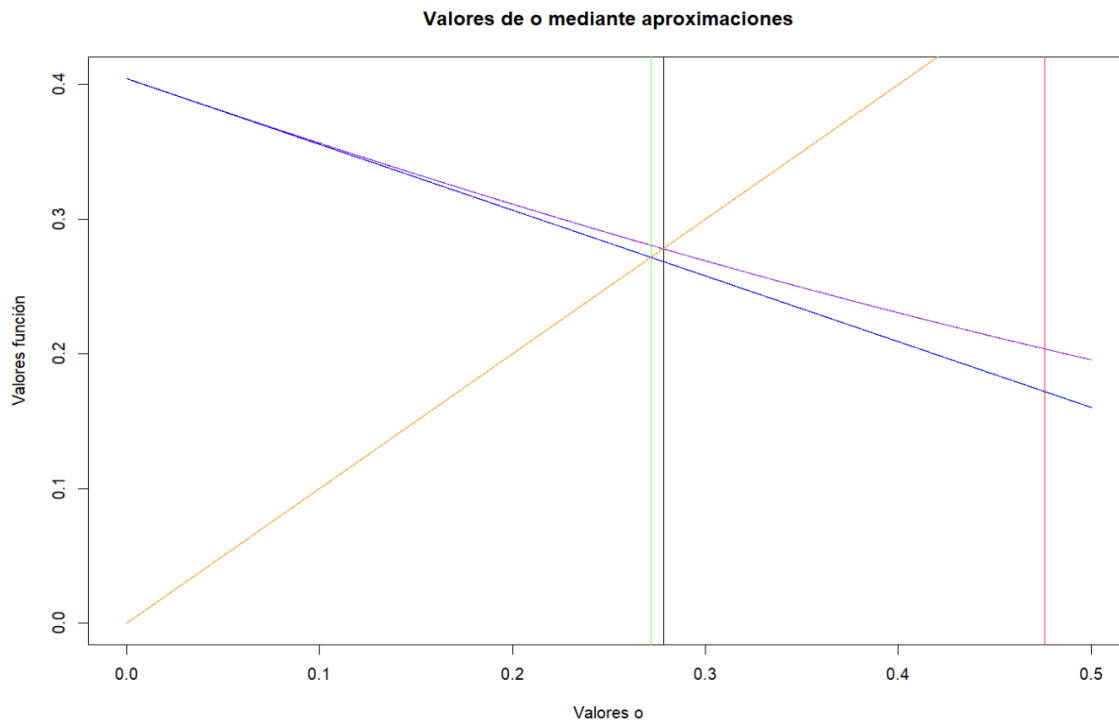
Para la política EWA, en el caso estacionario, la única aproximación que ha aparecido en la literatura es [12]:

$$o \sim \int_0^s F_{t,t+m}(x) dx \quad (3.26)$$

Nos da una aproximación sencilla pero cuyo resultado es mucho peor que la obtenida mediante los dos pasos de aproximaciones, las de las dos Secciones de este Capítulo 3.

A continuación mostramos gráficamente cómo la aproximación que hacemos a la solución se ajusta mucho mejor a la solución analítica, y por ello a la cantidad real de producto caducado, que la del artículo [12]. Es por ello que cabe destacar que hemos mencionado esta aproximación (3.26) por el hecho de ser la única expresión explícita disponible hasta el momento.

En la gráfica que se muestra a continuación, podemos observar distintas rectas. La recta de color azul es la expresión para o (3.25) que hemos obtenido con las aproximaciones de este Capítulo. La curva morada indica la ecuación inicial (3.16) que obteníamos en el caso estacionario aplicando las aproximaciones del artículo [5]. La recta naranja se corresponde con la bisectriz del primer cuadrante. En los puntos donde esta recta corta con las fórmulas previas, es donde encontramos el valor de o para cada caso. Para el caso de la expresión (3.25), el valor de o nos lo indica la recta verde, mientras que para (3.16) viene dado por la recta negra. Hemos añadido el valor de o obtenido mediante la expresión (3.26) brindada en [12] que sería la recta roja. Por uniformizar se ha tomado $\sigma = 1$, y para la representación de este caso se han considerado los valores $m = 3$, $\mu = 2,5$, $k = 3$.

Figura 3.1: Comparación resultados para o

Mediante este resultado, podemos verificar cómo de bien se ajusta nuestra aproximación (3.25) con el valor explícito de la integral (3.16), y compararlo además con el único resultado disponible (3.26). Notar que (3.16) no da el valor real de la caducidad, sino una aproximación la cual se prueba en el artículo [5] por simulación, confirmando que es un muy buen resultado. Los valores de o obtenidos son:

Aproximación de o	(3.16)	(3.25)	(3.26)
Valor de o	$2,78 \times 10^{-1}$	$2,72 \times 10^{-1}$	$4,76 \times 10^{-1}$

Cuadro 3.1: Fórmula para o y valor obtenido

Tanto con estos resultados como gráficamente, se observa fácilmente que el valor con la aproximación desarrollada a lo largo de este Capítulo ofrece un resultado mucho más ajustado al valor buscado, con un error relativo tan solo del 2,33 %, mientras que el otro valor se aleja en gran medida.

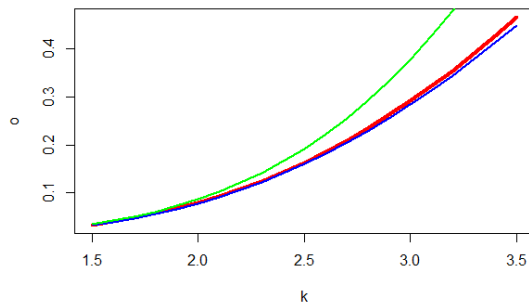
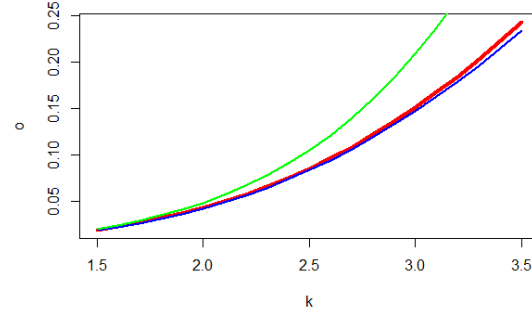
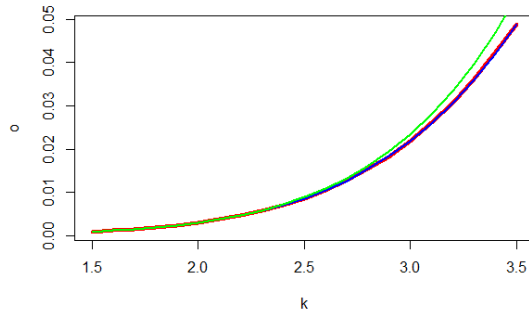
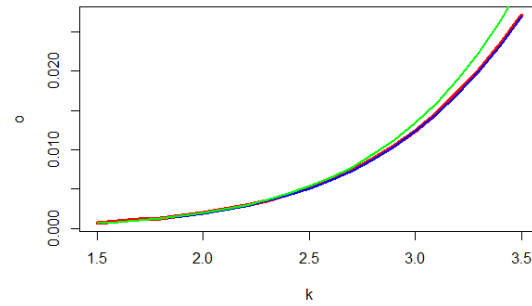
3.2.2. Relación de k con o

Tal y como hemos explicado anteriormente, una de las ventajas de obtener la fórmula aproximada para o es que nos permite observar la dependencia de los distintos parámetros implicados y su influencia en la ecuación de o .

De nuevo consideramos las tres aproximaciones previas de las que disponemos. Hemos representado gráficamente la evolución del resultado de o obtenido en los tres casos que disponemos: verde para (3.26), rojo para (3.16) y azul para (3.25), en función de valores del factor de seguridad k .

Se han considerado valores de $m = 2, 3, 4$ y el rango de valores de k entre 1,5 y 3,5. Seleccionamos estos datos porque buscamos evitar que haya valores de caducidad extremadamente pequeños, puesto que en estos modelos en la práctica se consideraría que no hay cantidad que caduque. Cuando el tiempo

de vida m es muy grande (mucho mayor que L y R), la vida del producto es tan larga que se puede considerar como no perecedero. Es por ello que no merece la pena considerar un producto perecedero cuando tiene una vida muy larga en comparación con la escala de tiempo en la que estamos trabajando.

(a) $m = 2, \mu = 5$ (b) $m = 3, \mu = 3$ (c) $m = 3, \mu = 4$ (d) $m = 4, \mu = 3$ Figura 3.2: Crecimiento de o con k para valores de m y μ

Las cantidades caducadas aumentan a menor valor de m , puesto que las unidades tienen menor tiempo de vida y ya para valores de m cercanos a 5, la cantidad caducada será prácticamente nula, como se observa en el gráfico (d). Asimismo el valor de m debe ser mayor que 1 puesto que el lead-time considerado es de un día, y sino las unidades de producto ya nos llegarían caducadas.

Aumentar el valor de k evita que se produzca una ruptura del stock pero esto también hace que aumente la cantidad de producto caducada.

A la hora de comparar resultados para un mismo valor de m como es el caso de las gráficas (b) y (c), hemos tomado dos valores de la media μ . Considerar que el valor de la media es por ejemplo para el caso (b) de $\mu = 3$, quiere decir que la media es tres veces la desviación típica, ya que tomamos $\sigma = 1$. Conforme aumentemos μ tendremos menos desviación típica, esto es, menos incertidumbre, luego nuestros valores de caducidad también se verán reducidos.

Vemos una vez más que nuestra aproximación (3.25) se ajusta de forma mucho más precisa que la de la disponible en la literatura (3.26) ya que representa casi de forma idéntica el crecimiento de o con k que tiene (3.16).

3.3. Caso no estacionario

Partiendo de la expresión obtenida para o en el caso de que todos los días fueran idénticos, ahora apelamos al caso en el que los días de la semana tienen comportamiento distinto. Para ello, retomamos el problema original de [5] donde se trabaja con los días que tienen distintas distribuciones y en los que no hay producción el fin de semana, haciendo que L y R pase de 1 a 3 los Viernes. Vamos a ver si podemos obtener una aproximación de la solución en ese caso.

Tal como se puede ver en la Sección 3.4 de [5], lo que tenemos que calcular en este momento son los valores aproximados de O_t dados por o_t que verifiquen esta ecuación:

$$o_t \sim \int_0^{s_t} F_{B_t'}(x) F_{D_{t',t'+i}}(x) dx$$

donde $t' = t - m$, mientras que los valores de t serán $t = 1, \dots, 7$. Consideraremos $m = 5$ lo que nos va a llevar a que no haya cantidad caducada ni Jueves ni Viernes, luego $o_4 = o_5 = 0$. Además, $s_t = \mu_{t',t'+1} + k\sigma_{t',t'+1} + o_{t'}$, excepto para el Martes y Miércoles donde se tiene $s_2 = \mu_{t',t'+1} + k\sigma_{t',t'+1} + o_6$ y $s_3 = \mu_{t',t'+1} + k\sigma_{t',t'+1} + o_6 + o_7$ respectivamente, al tener en cuenta que $o_4 = o_5 = 0$.

La obtención de las ecuaciones se desarrolla en detalle en [5], obteniendo las expresiones para o_t con $t = 1, 2, 3, 6, 7$ tras las aproximaciones, que son:

$$o_1 \sim \int_0^{s_1+o_3} \bar{F}_2(s_7-x) \cdot F_{3,1}(x-o_3-o_6-o_7) dx \quad (3.27)$$

$$o_2 \sim \int_0^{s_2+o_6} \bar{F}_3(s_1-x) \cdot F_{4,2}(x-o_6-o_7-o_1) dx \quad (3.28)$$

$$o_3 \sim \int_0^{s_3+o_6+o_7} \bar{F}_4(s_2+o_6-x) \cdot F_{5,3}(x-o_6-o_7-o_1-o_2) dx \quad (3.29)$$

$$o_6 \sim \int_0^{s_6+o_1} \bar{F}_{5,7}(s_3-x) \cdot F_{1,6}(x-o_1-o_2-o_3) dx \quad (3.30)$$

$$o_7 \sim \int_0^{s_7+o_2} \bar{F}_1(s_6-x) \cdot F_{2,7}(x-o_2-o_3-o_6) dx \quad (3.31)$$

donde además:

$$s_1 = \mu_{3,4} + k\sigma_{3,4}$$

$$s_2 = \mu_{4,7} + k\sigma_{4,7}$$

$$s_3 = \mu_{5,1} + k\sigma_{5,1}$$

$$s_6 = \mu_{1,2} + k\sigma_{1,2}$$

$$s_7 = \mu_{2,3} + k\sigma_{2,3}$$

Por tanto tratamos de simplificar las expresiones (3.27)-(3.31) haciéndolas lineales en o y obteniendo así un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas que podremos resolver. Para ello, repetiremos los pasos realizados en la demostración de la **Proposición 1** donde abordábamos el caso de días iguales.

Comenzamos para el caso de $t = 1$, es decir, la caducidad del Lunes. Separaremos la integral (3.27) en dos para trabajar con cada una individualmente:

$$\int_0^{s_1} \bar{F}_2(s_7-x) \cdot F_{3,1}(x-o_3-o_6-o_7) dx + \int_{s_1}^{s_1+o_3} \bar{F}_2(s_7-x) \cdot F_{3,1}(x-o_3-o_6-o_7) dx \quad (3.32)$$

Con la suposición de que el valor de o es pequeño, desarrollamos en primer orden, en torno a $(o_3, o_6, o_7) = (0, 0, 0)$:

$$F_{3,1}(x-o_3-o_6-o_7) \sim F_{3,1}(x) - (o_3+o_6+o_7)f_{3,1}(x)$$

Por tanto la primera integral de (3.32) quedaría:

$$\begin{aligned} \int_0^{s_1} \bar{F}_2(s_7 - x) F_{3,1}(x - o_3 - o_6 - o_7) dx &\sim \int_0^{s_1} \bar{F}_2(s_7 - x) F_{3,1}(x) dx - (o_3 + o_6 + o_7) \cdot \int_0^{s_1} \bar{F}_2(s_7 - x) f_{3,1}(x) dx \\ &= I_{1,1} - (o_3 + o_6 + o_7) \cdot I_{2,1} \end{aligned}$$

Con la misma justificación que en la **Proposición 1**, mediante la aproximación de la integral, la aplicación del Teorema del Valor Medio, y el desarrollo en serie considerando solamente los términos de primer orden, se tiene que la segunda integral de (3.32) se aproximará a:

$$\int_{s_1}^{s_1+o_3} \bar{F}_2(s_7 - x) \cdot F_{3,1}(x - o_3 - o_6 - o_7) dx \sim o_3 \cdot F_{3,1}(s_1) = o_3 \cdot I_{3,1}$$

La expresión final para o_1 quedaría:

$$o_1 \sim I_{1,1} - (o_3 + o_6 + o_7) I_{2,1} + o_3 \cdot I_{3,1} \quad (3.33)$$

El desarrollo sería similar para el caso de $t = 2, 6, 7$ puesto que las ecuaciones para o_t son análogas, obteniendo así:

$$o_2 \sim I_{1,2} - (o_6 + o_7 + o_1) I_{2,2} + o_6 \cdot I_{3,2} \quad (3.34)$$

$$o_6 \sim I_{1,6} - (o_1 + o_2 + o_3) I_{2,6} + o_1 \cdot I_{3,6} \quad (3.35)$$

$$o_7 \sim I_{1,7} - (o_2 + o_3 + o_6) I_{2,7} + o_2 \cdot I_{3,7} \quad (3.36)$$

Para el caso de o_3 , cabe destacar que si observamos (3.29), la primera función de distribución también depende del valor de o_6 . De nuevo separaremos la integral (3.29) en dos:

$$\int_0^{s_3} \bar{F}_4(s_2 + o_6 - x) \cdot F_{5,3}(x - o_6 - o_7 - o_1 - o_2) dx + \int_{s_3}^{s_3+o_6+o_7} \bar{F}_4(s_2 + o_6 - x) \cdot F_{5,3}(x - o_6 - o_7 - o_1 - o_2) dx$$

Comenzamos trabajando con la primera integral. Como seguimos considerando que el valor de los o_i va a ser pequeño, expresamos la función en forma de desarrollo en serie. Para la primera función, en torno a $o_6 = 0$, y para la segunda $(o_6, o_7, o_1, o_2) = (0, 0, 0, 0)$, de manera que para cada caso quedaría:

$$\bar{F}_4(s_2 + o_6 - x) = 1 - F_4(s_2 + o_6 - x) \sim 1 - F_4(s_2 - x) - o_6 \cdot f_4(s_2 - x)$$

$$F_{5,3}(x - o_6 - o_7 - o_1 - o_2) \sim F_{5,3}(x) - (o_6 + o_7 + o_1 + o_2) \cdot f_{5,3}(x)$$

Luego tendremos seis integrales que no van a depender de o en los integrandos:

$$\begin{aligned} \int_0^{s_3} \bar{F}_4(s_2 + o_6 - x) F_{5,3}(x - o_6 - o_7 - o_1 - o_2) dx &\sim \int_0^{s_3} F_{5,3}(x) dx - (o_6 + o_7 + o_1 + o_2) \cdot \int_0^{s_3} f_{5,3}(x) dx \\ &\quad - \int_0^{s_3} F_4(s_2 - x) F_{5,3}(x) dx \\ &\quad + (o_6 + o_7 + o_1 + o_2) \cdot \int_0^{s_3} F_4(s_2 - x) f_{5,3}(x) dx \\ &\quad - o_6 \cdot \int_0^{s_3} F_{5,3}(x) f_4(s_2 - x) dx \end{aligned}$$

Consideramos solo los términos de primer orden, despreciando así el de o cuadrático, consistente en:

$$(o_6 + o_7 + o_1 + o_2) \cdot o_6 \int_0^{s_3} f_{5,3}(x) f_4(s_2 - x) dx$$

Asimismo agrupamos el segundo y cuarto términos del desarrollo para simplificar la notación, puesto que:

$$\int_0^{s_3} F_4(s_2 - x) f_{5,3}(x) dx - \int_0^{s_3} f_{5,3}(x) dx = - \int_0^{s_3} \bar{F}_4(s_2 - x) f_{5,3}(x) dx$$

Ahora para la segunda integral, razonando de forma análoga al caso estacionario, aproximamos la integral a $\int_{s_3}^{s_3+o_6+o_7} F_{5,3}(x - o_6 - o_7 - o_1 - o_2)$. Aplicando el Teorema del Valor Medio tenemos la aproximación de la integral a $(o_6 + o_7)F_{5,3}(s_3 - o_6 - o_7 - o_1 - o_2)$. Finalmente con el desarrollo en primer orden en torno a $(o_6, o_7, o_1, o_2) = (0, 0, 0, 0)$ tendríamos:

$$(o_6 + o_7)F_{5,3}(s_3 - o_6 - o_7 - o_1 - o_2) \sim (o_6 + o_7)F_{5,3}(s_3) - (o_6 + o_7 + o_1 + o_2) \cdot (o_6 + o_7)f_{5,3}(s_3)$$

donde tomaremos solamente el primer término.

Por tanto para o_3 nos va a quedar:

$$o_3 \sim I_{1,3} - (o_6 + o_7 + o_1 + o_2)I_{2,3} - I_{3,3} - o_6 \cdot I_{4,3} + (o_6 + o_7)I_{5,3} \quad (3.37)$$

Recapitulando (3.33)-(3.37), podemos construir el sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas con el que vamos a trabajar:

$$o_1 = I_{1,1} - (o_3 + o_6 + o_7)I_{2,1} + o_3 \cdot I_{3,1} \quad (3.38)$$

$$o_2 = I_{1,2} - (o_6 + o_7 + o_1)I_{2,2} + o_6 \cdot I_{3,2} \quad (3.39)$$

$$o_3 = I_{1,3} - (o_6 + o_7 + o_1 + o_2)I_{2,3} - I_{3,3} - o_6 \cdot I_{4,3} + (o_6 + o_7)I_{5,3} \quad (3.40)$$

$$o_6 = I_{1,6} - (o_1 + o_2 + o_3)I_{2,6} + o_1 \cdot I_{3,6} \quad (3.41)$$

$$o_7 = I_{1,7} - (o_2 + o_3 + o_6)I_{2,7} + o_2 \cdot I_{3,7} \quad (3.42)$$

La forma de todas las integrales que aparecen en este sistema ha sido detallada en el **Anexo B**.

3.3.1. Resolución para valores del artículo

Para resolver el sistema, partimos de los valores utilizados en el artículo para las medias y desviaciones estándar de cada día de la semana dados en [5]:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
$\mu_1 = 27,75$	$\mu_2 = 23,71$	$\mu_3 = 24,57$	$\mu_4 = 22,16$	$\mu_5 = 29,39$	$\mu_6 = 13,29$	$\mu_7 = 11,82$
$\sigma_1 = 6,85$	$\sigma_2 = 5,65$	$\sigma_3 = 7,86$	$\sigma_4 = 6,90$	$\sigma_5 = 7,81$	$\sigma_6 = 4,89$	$\sigma_7 = 4,38$

Cuadro 3.2: Medias y desviación estándar de la demanda diaria de concentrados de plaquetas en CVTTH en 2012.

Sustituyendo estos valores podemos obtener el valor exacto de s al tomar distintos valores de k , y con ello calcular los valores de las integrales. Esto nos va a permitir obtener la cantidad de producto caducada en cada día de la semana. A continuación pasamos a calcular las integrales numéricamente y a resolver el sistema, comparando los resultados obtenidos para dos valores de k , con los que se muestran en [5].

Los valores obtenidos para las integrales han sido resumidos en las siguientes tablas. El índice $j = 1, 2, 3, 6, 7$ indica el día de la semana considerado: Lunes, Martes, Miércoles, Sábado y Domingo respectivamente. Se ha separado el Miércoles puesto que su expresión para o_3 (3.40) contiene más integrales a resolver que el resto.

j	$I_{1,j}$	$I_{2,j}$	$I_{3,j}$
1	$6,53 \times 10^{-5}$	$1,84 \times 10^{-5}$	$1,85 \times 10^{-5}$
2	$7,98 \times 10^{-2}$	$1,49 \times 10^{-2}$	$1,49 \times 10^{-2}$
6	$3,69 \times 10^{-6}$	$1,14 \times 10^{-6}$	$1,14 \times 10^{-6}$
7	$1,28 \times 10^{-5}$	$3,59 \times 10^{-5}$	$3,61 \times 10^{-5}$

Cuadro 3.3: Valores de las integrales de o_1, o_2, o_6, o_7 para $k = 1, 5$

j	$I_{1,j}$	$I_{2,j}$	$I_{3,j}$	$I_{4,j}$	$I_{5,j}$
3	$1,69 \times 10^{-1}$	$-2,77 \times 10^{-2}$	$1,67 \times 10^{-3}$	$3,78 \times 10^{-4}$	$2,81 \times 10^{-2}$

Cuadro 3.4: Valores de las integrales de o_3 para $k = 1, 5$

j	$I_{1,j}$	$I_{2,j}$	$I_{3,j}$
1	$3,52 \times 10^{-3}$	$8,01 \times 10^{-4}$	$8,04 \times 10^{-5}$
2	1,37	$1,69 \times 10^{-1}$	$1,69 \times 10^{-1}$
6	$2,29 \times 10^{-4}$	$5,85 \times 10^{-5}$	$7,19 \times 10^{-5}$
7	$5,12 \times 10^{-3}$	$1,17 \times 10^{-3}$	$1,17 \times 10^{-3}$

Cuadro 3.5: Valores de las integrales de o_1, o_2, o_6, o_7 para $k = 3$

j	$I_{1,j}$	$I_{2,j}$	$I_{3,j}$	$I_{4,j}$	$I_{5,j}$
3	2,12	$-2,21 \times 10^{-1}$	$6,49 \times 10^{-2}$	$1,11 \times 10^{-2}$	$2,32 \times 10^{-1}$

Cuadro 3.6: Valores de las integrales de o_3 para $k = 3$

Ahora resolvemos el sistema de cinco incógnitas y cinco ecuaciones dadas por (3.38)-(3.42), que podemos expresar en forma matricial para su posterior resolución de la forma:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & I_{3,1} - I_{2,1} & -I_{2,1} & -I_{2,1} \\ -I_{2,2} & -1 & 0 & I_{3,2} - I_{2,2} & -I_{2,2} \\ -I_{2,3} & -I_{2,3} & -1 & (I_{5,3} - I_{2,3} - I_{4,3}) & I_{5,3} - I_{2,3} \\ I_{3,6} - I_{2,6} & -I_{2,6} & -I_{2,6} & -1 & 0 \\ 0 & I_{3,7} - I_{2,7} & -I_{2,7} & -I_{2,7} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \\ o_6 \\ o_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{1,1} \\ -I_{1,2} \\ I_{3,3} - I_{1,3} \\ -I_{1,6} \\ -I_{1,7} \end{pmatrix}$$

A continuación resumimos los resultados obtenidos en dos tablas para cada valor de k seleccionado:

	Resultado	Artículo
o_1	$6,53 \times 10^{-5}$	0,00
o_2	$7,99 \times 10^{-2}$	$8,00 \times 10^{-2}$
o_3	$1,65 \times 10^{-1}$	$1,70 \times 10^{-1}$
o_6	$3,41 \times 10^{-5}$	0,00
o_7	$6,86 \times 10^{-6}$	0,00

Cuadro 3.7: Comparación resultados con los del artículo para $k = 1,5$

	Resultado	Artículo
o_1	$3,53 \times 10^{-3}$	0,00
o_2	1,37	1,37
o_3	1,75	1,77
o_6	$4,63 \times 10^{-5}$	0,00
o_7	$3,09 \times 10^{-3}$	0,00

Cuadro 3.8: Comparación resultados con los del artículo para $k = 3$

Como se puede observar, en ambos casos los resultados obtenidos son muy buenos, con unos errores relativos inferiores al 3%. Con las ecuaciones ya aplicadas a datos reales podemos confirmar que la aproximación desarrollada evalúa correctamente los datos presentando un valor muy cercano al que se obtendría mediante simulación.

Capítulo 4

Conclusiones

Tras el aprendizaje de los modelos estocásticos de inventario, hemos visto que el análisis del inventario de productos perecederos es más complicado que el de productos no perecederos, puesto que tenemos que considerar nuevas variables y aplicar la política EWA diferente a la política base.

En el modelo estacionario utilizando la política EWA, la expresión para la caducidad aparece como solución de una ecuación no lineal. Hemos demostrado que la solución de la ecuación existe y es única y hemos obtenido una aproximación suya en términos de integrales. Esta aproximación tiene, para valores usuales de los parámetros del sistema, un error muy pequeño. Es una aproximación explícita alternativa a la conocida en la literatura y que da valores mucho mas cercanos a la realidad.

En el caso no estacionario la aproximación para la caducidad diaria se da en [5] como solución de un sistema no lineal que no tiene solución explícita. Hemos visto cómo linealizar las ecuaciones de forma que la solución se pueda aproximar por la solución de un sistema lineal. Finalmente hemos comparado los resultados obtenidos, confirmando que las aproximaciones obtenidas son muy similares a las encontradas en [5] mediante métodos numéricos iterativos.

Bibliografía

- [1] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A., *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, US Government printing office, 1968.
- [2] BARICZ, Á., *Mills' ratio: Monotonicity patterns and functional inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 340(2), 2008, 1362-1370.
- [3] BROEKMEULEN, R. A., VAN DONSELAAR, K. H., *Quantifying the potential to improve on food waste, freshness and sales for perishables in supermarkets*, International Journal of Production Economics, 209, 2019, 265-273.
- [4] GORRIA, C., LABATA, G., LEZAUN, M., LÓPEZ, F. J., PÉREZ ALIAGA, A. I., PÉREZ VAQUERO, M. Á. , *Impact of implementing pathogen reduction technologies for platelets on reducing outdates.*, Vox sanguinis, 115(2), 2020, 167-173.
- [5] GORRIA, C., LEZAUN, M., LÓPEZ, F. J., *Performance measures of nonstationary inventory models for perishable products under the EWA policy*. European Journal of Operational Research 303(3), 2022, 1137-1150.
- [6] GRIMMETT, G., WELSH, D. J. , *Probability: An Introduction*, Oxford University Press, 2014.
- [7] HILLIER, FREDERICK S. GERALD J. LIEBERMAN Y MARCIA A. GONZALEZ OSUNA, *Introducción a la Investigación de Operaciones*, McGraw-Hill, 1997.
- [8] LÓPEZ F.J., *Modelos matemáticos de aprovisionamiento*, Asignatura Modelos de logística del Máster en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación.
- [9] PÉREZ VAQUERO, M. Á., GORRIA, C., LEZAUN, M., LÓPEZ, F. J., MONGE, J., EGUIZABAL, C., VESGA, M. A. , *Optimization of the management of platelet concentrate stocks in the Basque Country using mathematical simulation.* , Vox sanguinis, 110(4), 2016, 369-375.
- [10] ROB A.C.M. BROEKMEULEN, KAREL H. VAN DONSELAAR, *A heuristic to manage perishable inventory with batch ordering, positive lead-times, and time-varying demand*. Computers and Operations Research 36, 2009, 3013-3018.
- [11] SILVER, E. A., PYKE, D. F., PETERSON, R., *Inventory management and production, planning and scheduling*, New York: Wiley, 1998.
- [12] VAN DONSELAAR, K. H., BROEKMEULEN, R. A., *Approximations for the relative outdating of perishable products by combining stochastic modeling, simulation and regression modeling*. International Journal of Production Economics 140(2), 2012, 660-669.

Anexo A

A continuación introducimos un índice de las variables utilizadas en las secciones 2.1.1 y 2.1.2 del Capítulo 2, así como de las variables utilizadas en el desarrollo del Capítulo 3.

A.1. Variables en el modelo de revisión continua en productos no perecederos

- r : punto fijo de pedido.
- q : cantidad fija que se pide cuando el inventario llega a la posición r .
- D : demanda.
- X : variable aleatoria que representa la demanda durante el lead-time.
- Z : variable aleatoria X estandarizada.
- SS : stock de seguridad.
- k : factor de seguridad.
- c : coste de compra por u. de producto.
- a : coste de emisión de pedido.
- h : coste de almacenamiento por u. de producto. y u. de tiempo.
- c_s : coste por u. de producto no satisfecha.

A.2. Variables en el modelo de revisión periódica en productos no perecederos

- R : intervalo de tiempo que marca cada cuanto se revisa el stock y se hace el pedido.
- S : número de unidades que debemos tener en el inventario.
- g : número de unidades que hay en el inventario al realizar la revisión.
- M : tiempo en el que se realiza el pedido.
- L : lead-time o tiempo que tarda en llegar el pedido una vez se ha realizado.
- X_{L+R} : variable aleatoria que representa la demanda que tenemos en $L + R$ unidades de tiempo.
- c : coste de compra por u. de producto.
- a : coste de emisión de pedido.
- h : coste de almacenamiento por u. de producto. y u. de tiempo.
- c_s : coste por u. de producto no satisfecha.

A.3. Variables en el modelo de revisión periódica en productos perecederos

A.3.1. Variables aleatorias

- D_t : demanda del día t .
- Q_t : cantidad hasta la que se pide el día t .
- O_t : cantidad caducada el día t .
- S_t : pedido hasta la cantidad del día t .
- B_t : nº de unidades que tenemos en stock al principio del día t una vez ha llegado el pedido.
- B_t^r : nº de unidades que tenemos en stock al principio del día t con r días de vida restante.
- V_r^i : unidades pedidas el día t que están en stock al final del día $t + i$, antes de eliminar las unidades caducadas.

A.3.2. Cantidades determinísticas

- SS_t : stock de seguridad del día t .
- R : tiempo hasta que se hace el siguiente pedido.
- L : tiempo entre que se pide el pedido y éste llega.
- m : tiempo de vida de las unidades desde que se piden.

Anexo B

Desarrollamos la forma que tienen las integrales de la Sección 3.3 cuyos valores para dos casos se han obtenido en la Sección 3.3.1.:

Lunes:

$$I_{1,1} = \int_0^{s_1} \bar{F}_2(s_7 - x) F_{3,1}(x) dx \quad (1)$$

$$I_{2,1} = \int_0^{s_1} \bar{F}_2(s_7 - x) f_{3,1}(x) dx \quad (2)$$

$$I_{3,1} = F_{3,1}(s_1) \quad (3)$$

Martes:

$$I_{1,2} = \int_0^{s_2} \bar{F}_3(s_1 - x) F_{4,2}(x) dx \quad (4)$$

$$I_{2,2} = \int_0^{s_2} \bar{F}_3(s_1 - x) f_{4,2}(x) dx \quad (5)$$

$$I_{3,2} = F_{4,2}(s_2) \quad (6)$$

Miércoles:

$$I_{1,3} = \int_0^{s_3} F_{5,3}(x) dx \quad (7)$$

$$I_{2,3} = \int_0^{s_3} \bar{F}_4(s_2 - x) f_{5,3}(x) dx \quad (8)$$

$$I_{3,3} = \int_0^{s_3} F_4(s_2 - x) F_{5,3}(x) dx \quad (9)$$

$$I_{4,3} = \int_0^{s_3} F_{5,3}(x) f_4(s_2 - x) dx \quad (10)$$

$$I_{5,3} = F_{5,3}(s_3) \quad (11)$$

Sábado:

$$I_{1,6} = \int_0^{s_6} \bar{F}_{5,7}(s_3 - x) F_{1,6}(x) dx \quad (12)$$

$$I_{2,6} = \int_0^{s_6} \bar{F}_{5,7}(s_3 - x) f_{1,6}(x) dx \quad (13)$$

$$I_{3,6} = F_{1,6}(s_6) \quad (14)$$

Domingo:

$$I_{1,7} = \int_0^{s_7} \bar{F}_1(s_6 - x) F_{2,7}(x) dx \quad (15)$$

$$I_{2,7} = \int_0^{s_7} \bar{F}_1(s_6 - x) f_{2,7}(x) dx \quad (16)$$

$$I_{3,7} = F_{2,7}(s_7) \quad (17)$$