

Universidad de Zaragoza

ESCUELA DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

ANÁLISIS NUMÉRICO DEL CÁLCULO EN
REDES VASCULARES Y APLICACIÓN A LA
CIRCULACIÓN PULMONAR.

Proyecto Fin de Carrera

Autor:

Carlota Martín Urruchi

Directores:

Javier Murillo Castarlenas

Juan Mairal Ascaso

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

31 de Agosto, 2023

Abstract

La discretización espacio temporal conjuntamente con el modelo utilizado tiene impacto en la simulación del flujo sanguíneo en redes vasculares. En este trabajo se va a analizar, entre otros, el impacto de los numerosos parámetros que participan en la modelización de estructuras vasculares y en la calibración de parámetros que representan los lechos vasculares o microcirculación. Se realizará una comparación sistemática de la hemodinámica computacional en arterias entre una formulación unidimensional y una tridimensional con paredes vasculares deformables.

Las simulaciones incluyen una serie de modelos que representan la arteria carótida común, la aorta torácica, la bifurcación aórtica y la aorta completa desde el arco hasta la bifurcación ilíaca. Se identificará la influencia de la resolución de la malla de calculo, del tamaño del intervalo de tiempo de actualización, de los parámetros mecánicos y geométicos de la pared (rigidez del vaso, presión y área de referencia en los vasos vasculares) y el efecto del modelo de variación del radio de los vasos de la red y de la fricción en la pared. Se analizará su efecto en la presión media, sistólica y diástolica en una red vascular. Así mismo se utilizará SimVascular para extraer la geometría necesaria para la simulación de la circulación pulmonar, permitiendo la visualización de tomografía computarizadas y dando lugar a un modelo sólido complejo de la anatomía vascular.

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción | 4 |
| 1.1 | Objetivo del proyecto | 4 |
| 1.2 | Fisiología del sistema cardiovascular y presión | 5 |
| 1.3 | Formulaciones 1D y 3D | 5 |
| 2 | Modelos matemáticos | 7 |
| 2.1 | Formulación tridimensional | 7 |
| 2.2 | Propiedades Mecánicas Elásticas de los Vasos y Leyes Tubulares | 7 |
| 2.3 | Formulación unidimensional | 8 |
| 3 | Ley de conservación | 8 |
| 3.1 | Condiciones de contorno | 9 |
| 4 | Métodos numéricos | 11 |
| 4.1 | Métodos numéricos unidimensionales | 12 |
| 5 | Análisis de la simulación de la circulación sistémica | 13 |
| 5.1 | Arteria carótida común | 13 |
| 5.1.1 | Resolución de la malla | 16 |
| 5.1.2 | Paso de tiempo | 16 |
| 5.1.3 | Variación del radio $r(x)$ lineal o exponencial | 17 |
| 5.1.4 | Variación de la velocidad de propagación de onda, $c_o(x)$, Olufsen o Reymond | 17 |
| 5.1.5 | Variaciones en $A_o(x)$ | 17 |
| 5.1.6 | Variaciones en $p_d(x)$, constante o variable | 19 |
| 5.1.7 | Variaciones en el factor de fricción, de parabólico a turbulento | 20 |
| 5.1.8 | Presión media, sistólica y diastólica | 20 |
| 5.2 | Aorta Torácica | 22 |
| 5.2.1 | Variación en el área $A_0(x)$ | 23 |
| 5.3 | Carótida con estrechamiento | 23 |
| 5.3.1 | Variación en $A_0(x)$ | 25 |
| 5.3.2 | $r(x)$, forma lineal o exponencial | 25 |
| 5.4 | Aorta con estrechamiento | 25 |
| 5.4.1 | Variación del método de cálculo de $c_o(x)$ | 27 |
| 5.4.2 | Variación de $A_o(x)$ | 27 |
| 5.4.3 | Variación del factor de fricción | 27 |
| 5.5 | Bifurcación aórtica | 27 |
| 5.5.1 | Variación de $A_o(x)$ | 30 |
| 6 | Aorta Completa | 30 |
| 6.1 | Variaciones | 32 |
| 6.1.1 | Variación en el método de cálculo de c_0 | 37 |
| 6.1.2 | Variación de A_0 | 37 |
| 7 | Análisis de la simulación de la circulación pulmonar arterial | 38 |
| 7.0.1 | Resolución de la malla | 40 |
| 7.0.2 | Presión media, sistólica y diastólica | 40 |
| 8 | Análisis de la simulación de la circulación pulmonar arterial y venosa | 43 |
| 8.1 | Comparación modelo arterial pulmonar y venoso | 43 |
| 8.2 | Simulación de la circulación pulmonar venosa | 43 |
| 8.2.1 | Presión media, sistólica y diastólica | 48 |
| 9 | Conclusiones | 48 |

| | |
|---|-----------|
| A Anexo | 51 |
| A.1 Aorta torácica | 51 |
| A.2 Carótida con estrechamiento | 54 |
| A.3 Aorta con estrechamiento | 57 |
| A.4 Bifurcación Aórtica | 59 |
| A.5 Aorta Completa | 64 |
| A.6 arterias pulmonares | 66 |
| A.7 Venas pulmonares | 81 |

1 Introducción

El modelado numérico del flujo 1D en redes de dominios espaciales unidos por uniones ofrece un compromiso satisfactorio entre la calidad de las predicciones numéricas y el coste computacional. Existe una gran variedad de aplicaciones de flujo 1D en la literatura como redes de tuberías industriales, flujo de tráfico, flujos de agua en canales abiertos o flujo sanguíneo en el sistema circulatorio humano [1]. La física del flujo en la bifurcación es compleja en bifurcaciones simétricas o asimétricas y también en uniones arbitrarias. El modelado 1D ha demostrado ser una herramienta precisa en aplicaciones complejas, como la hemodinámica computacional en modelos arteriales deformables bajo flujo pulsátil, conduciendo a resultados competitivos si se comparan con simulaciones tridimensionales (3D) [2, 3]. El flujo en tubos elásticos y colapsables es de gran interés, especialmente en el contexto de la hemodinámica, la fisiología y la medicina, y se ha analizado en numerosos estudios [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] en las últimas décadas.

Debido a la gravedad, los cambios posturales provocan desplazamientos de fluidos que inducen cambios significativos en la presión y, en consecuencia, en la geometría de las venas, lo que puede conducir a un colapso. Las relaciones generales presión-área para vasos colapsables requieren una parametrización compleja que permita modelizar el comportamiento mucho más deformable de las venas. En la modelización 1D, las venas se caracterizan mediante leyes tubulares para vasos de paredes finas. Tienen una forma sigmoidea en la que la presión cae exponencialmente cuando el área tiende a cero.

En la modelización numérica del flujo 1D en redes, un problema desafiante de las interacciones fluido-estructura (FSIs) aparece debido a la flexibilidad de las venas, que al contrario que las arterias, en posiciones sentadas o de pie se colapsan [8]. Para caracterizar el flujo de fluidos en un vaso flexible, es útil definir el índice de velocidad S (la relación entre la velocidad del flujo y la velocidad de la onda de pulso) [12], que describe el flujo subcrítico ($S < 1$), el flujo sónico ($S = 1$) y el flujo supercrítico ($S > 1$). Este parámetro permite explicar las observaciones experimentales relacionadas con la limitación del flujo o el bloqueo sónico.

Pero la modelización numérica del flujo 1D en redes sigue siendo un reto. En el marco 1D, la unión se define como un punto singular y cualquier esquema numérico 1D seleccionado no puede aplicarse directamente. Por lo tanto, las condiciones de contorno internas deben ser prescritas. Una deficiencia de los métodos existentes es su incapacidad para tratar discontinuidades o flujo subcrítico, transcrito y supercrítico elevado a través de uniones, como en las redes de canales 1D, o para tratar condiciones de flujo transónico y supersónico en uniones en flujos fisiológicos, como en el sistema venoso debido a cambios posturales [1, 13].

El efecto hemodinámico de los vasos terminales que representan la circulación periférica, las válvulas venosas, la elastancia variable en el tiempo de la cámara cardiaca y las válvulas cardiacas, entre otros, puede tenerse en cuenta utilizando modelos de parámetros agrupados o modelos 0D, en los que siempre se consideran las condiciones de flujo subsónico en el acoplamiento 1D-0D [14, 15, 16, 3, 17, 11, 9, 10, 18]. Teniendo en cuenta que el flujo sanguíneo en la circulación arterial es subsónico, puede parecer innecesario ampliar la formulación de los modelos agregados que tienen en cuenta la microcirculación para incluir las condiciones de flujo transónico. Pero los modelos 0D pueden utilizarse para representar lechos vasculares que conectan arterias y venas, sistemas venosos portales en los que los lechos vasculares están conectados por venas, válvulas venosas o modelos de oído que acoplan el retorno venoso con las aurículas. En todos estos modelos, las condiciones de flujo están sujetas a cambios rápidos que requieren metodologías numéricas capaces de hacer frente a cualquier flujo transitorio.

Como consecuencia, estas limitaciones tienen impacto incluso en la calibración de los parámetros relacionados con los vasos o los lechos vasculares. Para ellos utilizaremos desarrollos con un enfoque basado en la solución exacta del problema en la unión [19, 20, 21, 22]. Las soluciones exactas se basarán en relaciones de onda para choque y rarefacciones (u ondas de compresión y descompresión) derivadas por un análisis estándar de estructura propia del sistema hiperbólico de ecuaciones para flujo en tubos colapsables en [23] incluyendo condiciones transónicas y supersónicas. El sistema proporcionará las relaciones de onda que enlazan los estados proporcionados por dominios 1D que comparten una unión [24].

1.1 Objetivo del proyecto

Uno de los objetivos de este trabajo es la utilización de modelos hemodinámicos de simulación de diversas secciones de la arteria aorta, comparando las formulaciones unidimensional (1D) y tridimensional (3D) para analizar la influencia de diferentes parámetros en dicha simulación del flujo sanguíneo. Otro de los objetivos es la realización de una simulación del flujo sanguíneo a través de las arterias y vasos pulmonares, extrayendo la anatomía con SimVascular, una plataforma de software de modelado computacional utilizada principal-

mente para simular la fisiología cardiovascular y los procedimientos médicos. SimVascular permite realizar simulaciones de flujo sanguíneo, las cuales necesitan además de la geometría, relaciones de presión-área para los vasos y valores para los parámetros que representan los lechos vasculares. Estos valores no pueden ser definidos garantizando valores de presión y flujo fisiológicos sin una calibración previa. De esta manera, las simulaciones se han llevado a cabo utilizando herramientas propias de simulación desarrolladas en el seno del grupo de investigación GHC perteneciente al Área de Mecánica de Fluidos.

1.2 Fisiología del sistema cardiovascular y presión

El sistema circulatorio, también conocido como sistema cardiovascular, es una parte fundamental del cuerpo humano y de muchos otros organismos. Su función principal es transportar la sangre, que contiene oxígeno, nutrientes, hormonas y otras sustancias necesarias para el funcionamiento adecuado de las células del cuerpo, así como para eliminar productos de desecho y dióxido de carbono. Está formado por tres componentes:

1. Parte Cardíaca: En el corazón, la bomba central del sistema, la sangre experimenta un ciclo constante de contracción y relajación. Durante la contracción, la sangre rica en oxígeno es empujada hacia las arterias principales, mientras que durante la relajación, el corazón se llena nuevamente de sangre.
2. Parte Vasculare: El sistema vascular incluye arterias, venas y capilares que forman una intrincada red de canales por todo el cuerpo. Las arterias, con su estructura resistente y elástica, transportan la sangre oxigenada desde el corazón a los tejidos periféricos. Las venas, por su parte, recogen la sangre desoxigenada y la llevan de vuelta al corazón. Los capilares, los vasos más pequeños, son los sitios de intercambio clave, permitiendo que el oxígeno y los nutrientes cruciales pasen de la sangre a las células, mientras que los productos de desecho son recogidos para su eliminación.
3. Parte Sanguínea: La sangre, un fluido vital, transporta elementos esenciales para el funcionamiento del cuerpo. Podemos decir que la presión en el sistema circulatorio se refiere a la fuerza que ejerce la sangre sobre las paredes de los vasos sanguíneos, como las arterias, venas y capilares. Esta presión es vital para el flujo constante y eficiente de la sangre a través del cuerpo y para asegurar el transporte adecuado de oxígeno, nutrientes y otros compuestos esenciales a las células y tejidos.

La presión en el sistema circulatorio se mide en milímetros de mercurio (mmHg) y se registra generalmente en dos valores: la presión sistólica y la presión diastólica, como en la lectura típica de la presión arterial (por ejemplo, 120/80 mmHg). La presión sistólica es la presión más alta y ocurre cuando el corazón se contrae y bombea sangre a través de las arterias. La presión diastólica es la presión más baja y se produce cuando el corazón está en reposo y llenándose de sangre entre latidos.

La presión arterial es regulada por varios mecanismos, incluyendo el sistema nervioso autónomo y las hormonas. Mantener una presión arterial dentro de un rango saludable es crucial para la salud cardiovascular. La hipertensión (presión arterial alta) y la hipotensión (presión arterial baja) pueden tener efectos negativos en la salud, como aumentar el riesgo de enfermedades cardíacas, accidentes cerebrovasculares entre otros.

1.3 Formulaciones 1D y 3D

Las formulaciones 1D y 3D han sido ampliamente empleadas con el propósito de llevar a cabo una simulación exhaustiva de la hemodinámica arterial.

Los enfoques 1D se han empleado de manera extensa para mejorar nuestro entendimiento teórico de la hemodinámica arterial, especialmente en el análisis de los mecanismos que subyacen en la propagación de las ondas de pulso, así como en su aplicación clínica en el análisis de la intensidad de las ondas. Estos métodos son precisos cuando el flujo sanguíneo es predominantemente unidireccional y no hay cambios bruscos en el área transversal del vaso. Sin embargo, en los modelos 1D, es necesario incorporar leyes empíricas adicionales para considerar la recirculación y las pérdidas de presión en situaciones donde hay curvaturas en los vasos, estenosis y aneurismas, entre otros.

En contraste, los modelos 3D capturan de manera inherente estas complejidades geométricas y se emplean para obtener mediciones hemodinámicas localizadas, como el esfuerzo contante en la pared. Además, la modelación en 3D permite la implementación de leyes constitutivas que tienen en cuenta la estructura, así como las propiedades mecánicas que varían en la circunferencia de la pared arterial. También posibilita la simulación de procesos complejos, como las interacciones entre la pared arterial y dispositivos médicos. No obstante, los modelos 1D, que también incluyen leyes constitutivas para la pared, generalmente involucran

muchos menos grados de libertad en comparación con los modelos 3D, lo que permite realizar simulaciones en cuestión de minutos en un ordenador portátil personal.

De esta forma, la modelización 1d permite analizar las formas de onda de la presión y el flujo sanguíneos en las arterias sistémicas, que aportan información valiosa para el diagnóstico y el tratamiento de las enfermedades cardiovasculares y desempeñan un papel importante en afecciones clínicas como la hipertensión. Las formas de onda son el resultado de una compleja interacción ventrículo-vascular en la que intervienen la contracción cardíaca, la impedancia de las arterias distensibles grandes y medianas y la resistencia de las arterias y arteriolas más pequeñas. La sangre se comporta como un fluido incompresible en las arterias, que se distensionan para acomodar el aumento repentino del volumen sanguíneo producido por la contracción cardíaca. Cuando se libera la energía elástica almacenada en las paredes arteriales distendidas, las arterias se contraen. La expansión y contracción regular de las arterias (el pulso) que sigue a la contracción cardíaca se propaga en forma de ondas de pulso. Éstas producen cambios continuos en la presión y el flujo sanguíneos que pueden estudiarse como frentes de onda de presión y flujo (cambios infinitesimales en la presión y el flujo) que van hacia delante y hacia atrás (alejándose y acercándose al corazón, respectivamente), con frentes de onda hacia atrás originados de frentes de onda hacia delante reflejados en lugares de desajuste de la impedancia vascular.

2 Modelos matemáticos

2.1 Formulación tridimensional

Para establecer este problema de interacción fluido-estructura en tres dimensiones se utiliza el método del momento acoplado. En este enfoque, los grados de libertad para la pared del vaso, representados por desplazamientos \mathbf{v} , se describen en función de las velocidades en la interfaz fluido-pared, Σ . La formulación se establece en una configuración euleriana [3]:

$$\rho(\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_f, \quad \text{en } \Omega^f \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega^f \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s \quad \text{en } \Sigma, \quad (3)$$

$$\rho_s \dot{\mathbf{v}}_s - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s = \frac{1}{h} f_s \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{n}_s = (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_f) \cdot \mathbf{n}_s \quad (5)$$

donde ρ es la densidad del fluido, el símbolo Ω^f es el dominio del fluido, \mathbf{v} es la velocidad del fluido y p es la presión. El término $\boldsymbol{\tau}_f$

$$\boldsymbol{\tau}_f = \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \quad (6)$$

se refiere al tensor de esfuerzos viscosos para un fluido newtoniano. La pared arterial se considera como una membrana delgada con un espesor h y una densidad ρ_s , donde \mathbf{v}_s es la velocidad del sólido, $\boldsymbol{\sigma}_s$ es el tensor de esfuerzos de la membrana y \mathbf{n}_s es la normal exterior en la interfaz entre el fluido y la pared. El valor de $\boldsymbol{\sigma}_s$ se establece como $0.001g/mm^3$ para todos los modelos.

Para tener en cuenta las fuerzas mecánicas que ejercen los tejidos externos sobre las paredes arteriales, se incluyó un término adicional, f_s

$$f_s = (k_s \mathbf{u} + c_s \mathbf{v}) \quad (7)$$

que aproxima el comportamiento mecánico del tejido externo y los parámetros k_s y c_s son coeficientes de rigidez y amortiguamiento. Esta fuerza adicional se emplea para eliminar oscilaciones no fisiológicas en casos específicos en los que la geometría es alargada y la pared del vaso experimenta cargas asimétricas.

2.2 Propiedades Mecánicas Elásticas de los Vasos y Leyes Tubulares

El sistema de ecuaciones se cierra mediante una relación entre presión y área que tiene la forma:

$$p(x, t) - p_e(x, t) = p_{tr} \quad (8)$$

donde p_e es la presión externa y p_{tr} es la presión transmural elástica. La presión transmural elástica, representada como $p_{tr} = p_{tr}(K_o, A, p_d, A_o, x)$, depende de la rigidez del vaso sanguíneo $K_o = K_o(x)$, el área de referencia $A_o = A_o(x)$ y la presión de referencia que en este caso será la diastólica p_d . Se asume que la presión transmural sigue un patrón específico, que cambia dependiendo de si se está considerando una arteria o una vena.

En el modelo 1D, se asume que la pared arterial se deforma de manera axisimétrica, donde cada sección transversal se deforma de forma independiente de las demás. La pared arterial se modela como una membrana elástica delgada, incompresible, homogénea, isotrópica y lineal, caracterizada por un módulo elástico E , una relación de Poisson $\nu = 0.5$ y un grosor h [25]. Esto permite establecer una relación entre el esfuerzo circunferencial de tracción, T_θ , y el desplazamiento radial:

$$T_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{r - r_d}{r_d}, \quad (9)$$

donde r_d es el radio de referencia a la presión diastólica p_d . Mediante la ley de Laplace:

$$T_\theta = (p_{tr} - p_d) \frac{r}{h}. \quad (10)$$

y asumiendo la aproximación $1/r \approx 1/r_d$ e igualando ambas ecuaciones, se obtienen la ley tubular para arterias:

$$p_{tr} = K_a \sigma + p_d, \quad \sigma = \left(\frac{A}{A_0} \right)^{1/2} - 1, \quad (11)$$

donde la rigidez del vaso se ha definido como

$$K_a = \frac{Eh}{(1-v^2)r_d}. \quad (12)$$

Esta ley tubular se puede generalizar a todo tipo de vasos [3] mediante análisis de pequeñas deformaciones y equilibrio estático en la pared, obteniendo:

$$p_{tr} = K_0 \sigma + p_d, \quad \sigma = \left(\frac{A}{A_0} \right)^m - \left(\frac{A}{A_0} \right)^n. \quad (13)$$

Esta expresión sirve tanto para venas como para arterias variando el valor de la rigidez del vaso y los exponentes n y m . Los valores $m > 0$ y $n = 0$ reproducen adecuadamente la ley tubular para arterias. Por otro lado, trabajos como [25] demuestran que la elección de $m > 0$ y $n \in [-2, 0]$ para venas reproducen correctamente las propiedades mecánicas de estos vasos. Adicionalmente, se formula la rigidez del vaso de las venas, K_v :

$$K_v = \frac{E}{12(1-v^2)(h/r_d)^3}, \quad (14)$$

donde $m = 10$ y $n = -3/2$.

2.3 Formulación unidimensional

Los modelos simplificados de 1D en vasos sanguíneos flexibles se emplean para representar las principales características físicas de la propagación de las ondas de presión y flujo. Las ecuaciones diferenciales resultantes, que abordan la conservación de la masa:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

y el equilibrio del momento:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{Q^2}{A} \right) = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{f}{\rho}, \quad (16)$$

conforman un sistema hiperbólico de primer orden y no lineal. Aquí, t representa el tiempo, x denota la coordenada axial a lo largo del vaso, A corresponde al área transversal local, y $Q = Au$ representa la tasa de flujo volumétrico, con u como la velocidad promedio transversal en dirección axial. Además, $p(x, t)$ representa la presión interna promedio en la sección transversal, reflejando la respuesta de la deformación de la pared del vaso a las variaciones de presión. La fuerza de fricción por unidad de longitud, f , actúa en el fluido en dirección axial, y la densidad de la sangre se representa como ρ . Se asume un perfil de velocidad obtuso utilizando el parámetro $k = 1$. La formulación puede expresarse de manera concisa de la siguiente forma:

$$\partial_t (\mathbf{U}) + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{G}_x, \quad (17)$$

con $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t)$ y

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} Q \\ k \frac{Q^2}{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{f}{\rho} \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde \mathbf{U} es el vector de variables conservadas, y \mathbf{F} y \mathbf{G}_x son las funciones de flujo.

3 Ley de conservación

Una característica importante del modelo es que el sistema no puede expresarse en forma de ley de conservación cuando se intenta extender la función de flujo \mathcal{F} para implicar la derivada de la presión transmural en el espacio [23]. Sin embargo, si podemos considerar las propiedades mecánicas del vaso constantes a través de una discontinuidad, A_o , c_o y K_o , encontramos que:

$$\int_{x_L}^{x_R} \frac{A}{\rho} \frac{\partial p_{tr}}{\partial x} dx = \int_{A_L}^{A_R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial A} \right) \frac{\partial A}{\partial x} dx = \varphi(A_R) - \varphi(A_L) \quad (19)$$

con

$$\varphi = D_o \left(\frac{m}{m+1} \alpha^{m+1} - \frac{n}{n+1} \alpha^{n+1} \right), \quad D_o = \frac{A_o c_o^2}{m-n} \quad (20)$$

conde c_o la velocidad de la onda de pulso (VOP) de referencia. En general, VOP puede expresarse como:

$$c = \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{\partial p_{tr}}{\partial A}} = \sqrt{\frac{\partial \varphi}{\partial A}} = \sqrt{\frac{A}{\rho} K_o \sigma_A} = \sqrt{\frac{K_o}{\rho} (m\alpha^m - n\alpha^n)} \quad (21)$$

para una determinada rigidez del vaso K_o , o bien:

$$c^2 = \frac{c_o^2}{(m-n)} (m\alpha^m - n\alpha^n), \quad c_o = \sqrt{\frac{K_o}{\rho} (m-n)}. \quad (22)$$

El sistema de ecuaciones puede expresarse ahora utilizando una forma de ley de conservación con :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}_\varphi(\mathbf{U}) = \mathbf{S}_\chi, \quad (23)$$

donde el vector de flujo y el vector de términos fuente son de la forma:

$$\mathbf{F}_\varphi = \begin{bmatrix} Au \\ Au^2 + \varphi(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_\chi = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{f}{\rho} - gA \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Este sistema puede escribirse en forma cuasilineal como sigue

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}_\chi, \quad (25)$$

donde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde la matriz \mathbf{J} tiene dos valores propios, $\lambda^1 = u - c$ y $\lambda^2 = u + c$, y dos vectores propios reales, $\mathbf{e}^1 = (1, \lambda^1)^T$ y $\mathbf{e}^2 = (1, \lambda^2)^T$, que definen la propagación de las ondas en el sistema.

3.1 Condiciones de contorno

Se han elegido unas condiciones de contorno coherentes entre las formulaciones 3D y 1D. En la entrada de los vasos se ha fijado un flujo con un perfil de velocidad axisimétrico. Se ha utilizado el modelo de WindKessel, comparando la circulación de la sangre a través de los vasos con un circuito eléctrico, como se muestra en la figura 1.

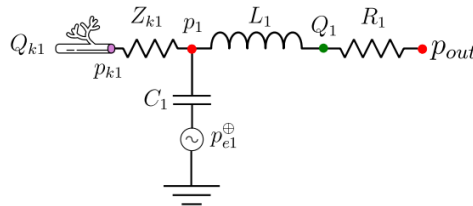


Figure 1: Red de parámetros RCLR del modelo WindKessel

Los modelos Windkessel suponen valores constantes de *resistencia* R , *inertancia* L y *compliance* C para cada compartimento individual, y se combinan para formar lechos periféricos que conectan las arterias con las venas. El proceso iterativo de cálculo de los parámetros en la salida de los vasos, así como una breve explicación de cada uno se describe a continuación.

1. Resistencia (R): Este parámetro simboliza la resistencia que el flujo encuentra debido a las características viscosas de la sangre. Si tenemos unas presiones diastólica y sistólica objetivo, además de un flujo a la entrada, podemos estimar la resistencia total como:

$$R_T = \frac{P_m - P_{out}}{\bar{Q}_{in}}, \quad (27)$$

donde \bar{Q}_{in} es el flujo medio y P_m es la presión media de la sangre, considerada constante en este trabajo. Una vez obtenida la resistencia total, es posible calcular la resistencia $R_1 + R_2$ en la salida de cada vaso como:

$$\frac{1}{R_T} = \sum_{j=2}^M \frac{1}{R_1^j + R_2^j} \quad (28)$$

donde M representa el número de ramas terminales (j=1 se refiere a la entrada, por lo que no está incluido en la suma). Si asumimos que R_1 es igual a la impedancia característica del dominio 1D aguas arriba, podemos expresarla como:

$$R_1 = \frac{\rho c_d}{A_d} \quad (29)$$

siendo A_d y c_d el área y la velocidad de onda a presión diastólica.

2. Complianza (C): Es la habilidad de los vasos sanguíneos para expandirse y contraerse adecuadamente en respuesta a los cambios de volumen y presión. La complianza total puede calcularse de dos formas:

- (a) La constante de tiempo $\tau = 1.79s$ es la que determina la caída exponencial de la presión durante la diástole:

$$C = \frac{\tau}{R_T} \quad (30)$$

- (b) La complianza es el volumen total acumulado en cada región vascular debido a un incremento en la presión:

$$C = \frac{dV}{dp} \quad (31)$$

En este trabajo se utilizará la primera opción ya que se ha comprobado que la calibración de los parámetros necesita menos ciclos para obtener los resultados.

Sabiendo que:

$$C_T = C_c + C_p, \quad C_c = \sum_{i=1}^N C_{0D}^i, \quad C_p = \sum_{j=2}^M \frac{R_2^j C^j}{R_2^j + R_1^j}, \quad (32)$$

siendo C_c la complianza total en los conductos arteriales, C_p la complianza total arterial periférica, N el número total de vasos en el dominio 1D y C_{0D} la complianza de cada vaso, que se calcula como:

$$C_{0D} = \frac{A_d L}{\rho (c_d)^2}, \quad (33)$$

donde L es la longitud del vaso. Una vez obtenido C_T y C_c , puede calcularse la complianza periférica C_p , y con ella, podemos obtener la complianza de cada rama terminal distribuida proporcional al flujo:

$$\tilde{C}^j = C_p \frac{R_T}{R_2^j + R_1^j}, \quad (34)$$

Utilizando un factor de corrección:

$$C^j = \tilde{C}^j \frac{R_2^j + R_1^j}{R_2^j} = C_p \frac{R_T}{R_2^j} \quad (35)$$

Esta expresión se origina a partir de un análisis lineal de las ecuaciones en una red arterial específica en una dimensión (1-D), en la cual cada rama terminal está conectada a un modelo Windkessel de tres elementos. Para obtener la presión de pulso $P_{pulso} = P_s - P_d$ y la presión diastólica P_d deseadas en un vaso, primero se tienen que calcular R_T^0 y C_T^0 . Usando las fórmulas iterativas:

$$R_T^{n+1} = R_T^n + \frac{P_m^n}{Q_i^n}, \quad \Delta P_m^n = P_d - P_d^n, \quad (36)$$

$$C_T^{n+1} = C_T^n + \frac{Q_{max} - Q_{min}}{(P_{pulse}^n)^2} \Delta t \Delta P_{pulse}^n, \quad \Delta P_{pulse}^n = P_{pulse} - P_{pulse}^n, \quad (37)$$

Para llegar a éstas fórmulas se ha utilizado la formulación 1D para llevar a cabo un proceso de estimación de los parámetros del modelo WindKessel. Los valores P_d^n y P_{pulso}^n son la presión diastólica y la presión de pulso al inicio de cada iteración y el superíndice "n" denota el número de iteración. La capacidad total se ajusta mediante la modificación de la capacidad periférica total, C_p , ya que la capacidad total del conducto, C_c , depende de la geometría del vaso y la rigidez de la pared. Este proceso se repite utilizando el modelo 1-D hasta que P_{nd} y P_{pulse} sean menores al 1% de los valores objetivo, P_d y P_{pulse} , respectivamente.

3. Inertancia (L): La sangre aumenta su velocidad durante la sístole y la disminuye durante la diástole en cada ciclo cardiaco, creando una inercia en la sangre. La inertancia describe dicha inercia y se define como la propiedad de los vasos sanguíneos de resistirse a los cambios en su velocidad o flujo debido a su masa y fuerzas en movimiento. En otras palabras, es la tendencia de los vasos sanguíneos a mantener su flujo sanguíneo actual a pesar de las variaciones en la presión o el flujo. Puede expresarse como:

$$L = \frac{l\rho}{A}, \quad \Delta p_L = \frac{dQ}{dt} \quad (38)$$

Siendo Δp_L el gradiente de presión debido a la inertancia, ρ la densidad de la sangre y l la longitud del vaso.

Por otra parte, la presión y el flujo a la salida del dominio se expresa como:

$$Q\left(\frac{1 + R_1}{R_2}\right) + CR_1 \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{P - P_{out}}{R_2} + C \frac{\partial P}{\partial t} \quad (39)$$

Siendo P_{out} la presión en la cual el flujo hacia la microcirculación cesa, la cual es cero en todos los modelos.

Los lechos vasculares pueden ser formados mediante compartimentos dispuestos en serie, que abarcan desde los compartimentos arteriolares hasta los venulares (de derecha a izquierda), tal como se ilustra en la Figura 2. En cada uno de estos compartimentos se determinan la presión y el flujo (p_i, Q_i) al garantizar la conservación de la masa y el momento.

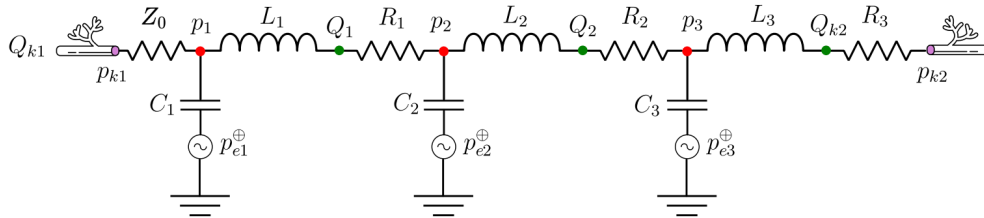


Figure 2: Lecho vascular con compartimentos dispuestos en serie y un vaso colector. Red de elementos de parámetros concentrados.

4 Métodos numéricos

En este apartado se explican los dos métodos numéricos utilizados para obtener los resultados que han sido comparados con los obtenidas de la literatura con el objetivo de comprobar validar los métodos.

4.1 Métodos numéricos unidimensionales

Para resolver el problema unidimensional, se propone un método numérico basado en volúmenes finitos. Se comienza por discretizar los vasos sanguíneos, dividiendo el vaso k en de la red en N_k celdas de tamaño constante Δx . Localmente, cada celda se identificará con el índice $i = 1, \dots, N_k$ de forma que su centro se encontrará en la posición x_i y las paredes con las celdas adyacentes en las posiciones $x_i - \frac{\Delta x}{2}$ y $x_i + \frac{\Delta x}{2}$. En cada una de estas celdas, se asume un valor inicial constante \mathbf{U}_i^0 del vector de variables conservadas \mathbf{U} . Entonces, a tiempo $t = 0$:

$$\mathbf{U}_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} \mathbf{U}(x, t = 0) dx. \quad (40)$$

La dimensión temporal también se discretiza de forma que los cálculos se realizan para instantes discretos t^n separados una distancia Δt^n que es variable en cada iteración. Con el objetivo de que el esquema numérico sea estable, el método elige el paso de tiempo mínimo que asegure la estabilidad mediante la condición de Courant-Fiedrich-Lewy: que se define como

$$CFL = \frac{U \Delta t}{\Delta x}, \quad (41)$$

donde U es una magnitud de velocidad. En este caso, índice adimensional CFL debe ser siempre inferior a la unidad, por lo que el mayor paso de tiempo posible será el mínimo entre todos los calculados en las celdas interiores

$$\Delta t_{min,i} = \min \Delta t_i, \quad \Delta t_i = \frac{\Delta x}{\max(c_i + u_i)} \quad (42)$$

o en los contornos

$$\Delta t_{min,BC} = \min \Delta t_{BC}, \quad \Delta t_{BC} = \frac{\Delta x}{\max C_k} \quad (43)$$

de tal forma que el paso de tiempo final será el más restrictivo de ambos:

$$\Delta t = \min(\Delta t_{min,i}, \Delta t_{min,BC}) CFL, \quad (44)$$

donde $\Delta t_{min,i}$ es el paso de tiempo mínimo entre los de todas las celdas, $\Delta t_{min,BC}$ es el paso de tiempo mínimo entre los definidos para cada celda con condiciones de contorno entrada/salida y C_k es la velocidad de la onda resultante no lineal. En la práctica, y especialmente en cálculos con un alto régimen de transitoriedad, es posible que un CFL cercano a la unidad provoque que la simulación sea inestable y los resultados sean incorrectos. Por ello, se suelen probar distintos valores para asegurar que todos ellos producen resultados satisfactorios.

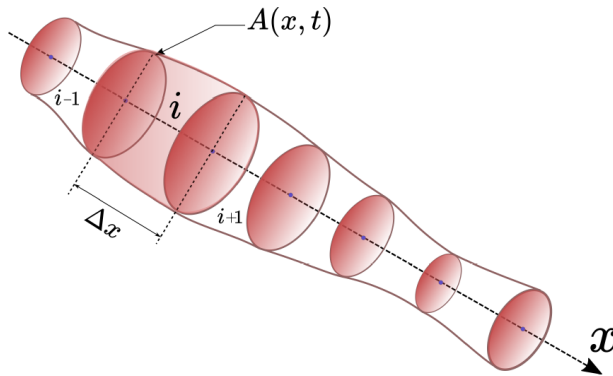


Figure 3: Esquema de un vaso discretizado en celdas.

El esquema numérico particular que se utiliza en este caso es el de Godunov de primer orden [22], un esquema explícito mediante el cual cada celda se actualiza como

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^- - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^+ \right], \quad (45)$$

donde $\mathbf{F}_{i\mp\frac{1}{2}}^\pm$ son los flujos numéricos en cada pared. El cálculo de estos flujos es difícil y requiere resolver en cada pared un problema de valores iniciales denominado Problema de Riemann. Existe una gran variedad de técnicas que resuelven el Problema de Riemann para obtener los flujos numéricos en la pared. El código utilizado en este trabajo se basa en el método HLLS [22].

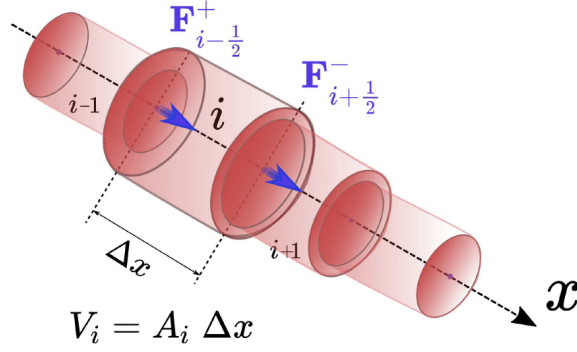


Figure 4: Cada celda es un volumen de control y en sus paredes se definen los flujos numéricos.

5 Análisis de la simulación de la circulación sistémica

A continuación se procederá a realizar variaciones en diversos parámetros para identificar su influencia en los resultados. Se presentarán los gráficos generados a partir de todas las modificaciones efectuadas en el primer caso, que es la carótida común. Luego, se exhibirán únicamente aquellos gráficos correspondientes a las variaciones que tienen un efecto significativo en la resolución de los demás casos.

Se realizarán simulaciones donde se modificará inicialmente la resolución de la malla, utilizando intervalos espaciales de 0.1 cm, 0.5 cm y 1 cm entre las celdas de la malla.

Se variará también el tiempo de paso utilizando la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), dándole valores de 0.1, 0.5 y 0.9. Si el CFL es demasiado grande, es posible que la simulación sea inestable y los resultados sean incorrectos. Por lo tanto, se suele limitar el CFL a un valor máximo aceptable, que depende de la precisión deseada y de la discretización espacial utilizada en la simulación. También se van a realizar alteraciones en el área transversal del vaso y en el método de cálculo de la velocidad de onda entre otros.

Se compararán los resultados de los modelos 3D y 1D proporcionados por Alastruey [3] generados utilizando elementos finitos con los resultados de los esquemas de Godunov en volúmenes finitos desarrollados en [21, 19, 22, 26].

5.1 Arteria carótida común

Consideramos un vaso cilíndrico recto con dimensiones representativas de la arteria carótida común (ACC). La ACC se ha dividido en dos vasos. La resistencia periférica total inicial (R_T) y la compliancia (C_T) se calcularon a partir de las Ecuaciones 27 y 30, respectivamente, utilizando un valor de referencia de la presión arterial media (P_m) medida en un humano de 23 años y una forma de onda de entrada de referencia. Los valores finales de R_T y C_T se calcularon luego como se describe en la Sección 2.4. Los parámetros del modelo de la CCA se detallan en la Tabla 5.1. Se ha realizado la simulación con un tiempo de paso de 0.1ms y un perfil de velocidad de $\gamma = 2$. Se han realizado 10 iteraciones para llegar a los valores objetivo de presión sistólica y diastólica.

Table 1: Propiedades hemodinámicas normales de la arteria carótida común humana.

| Propiedad | Valor |
|--------------------------|--------------|
| Longitud, L | 126 mm |
| Radio r_d | 3 mm |
| Espesor del vaso, h | 0.3 mm |
| Caudal medio Q_{in} | 6.5 ml/s |
| Módulo de Young, E | 5250.43 mmHg |
| Presión sistólica p_s | 125.26 mmHg |
| Presión diastólica p_d | 81.75 mmHg |

La velocidad de propagación de onda resultante a presión media es de $c_m = 6.74 \text{ m/s}$. Los resultados de la simulación para los valores de presión y caudal se muestran en la Figura 5, para los dos vasos, y dentro de cada vaso para la posición inicial x_0 , media x_1 y final x_2 . También se muestran los resultados para la simulación 1D y 3D en [3]. Además, se representa también el caudal y la presión en el lecho vascular, es decir, la red de capilares donde ocurre la transferencia de oxígeno y nutrientes desde la sangre hacia las células, y donde los productos de desecho y dióxido de carbono se eliminan de las células y se transportan de regreso a la sangre para su eliminación. El caudal en el lecho vascular sufre una variación muy pequeña para que puedan llevarse a cabo los procesos fisiológicos necesarios.

En la Figura 5 podemos ver, fijándonos en x_0 en el primer vaso y en x_2 en el segundo, que nuestros resultados se ajustan de manera muy precisa a los de J.Alastruey. Es destacable también que los resultados son los mismos para 1-D y para el 3-D debido a la sencillez del modelo.

A continuación vamos a analizar el impacto en la solución de la resolución de la malla variando Δx y del paso de tiempo variando el parámetro CFL .

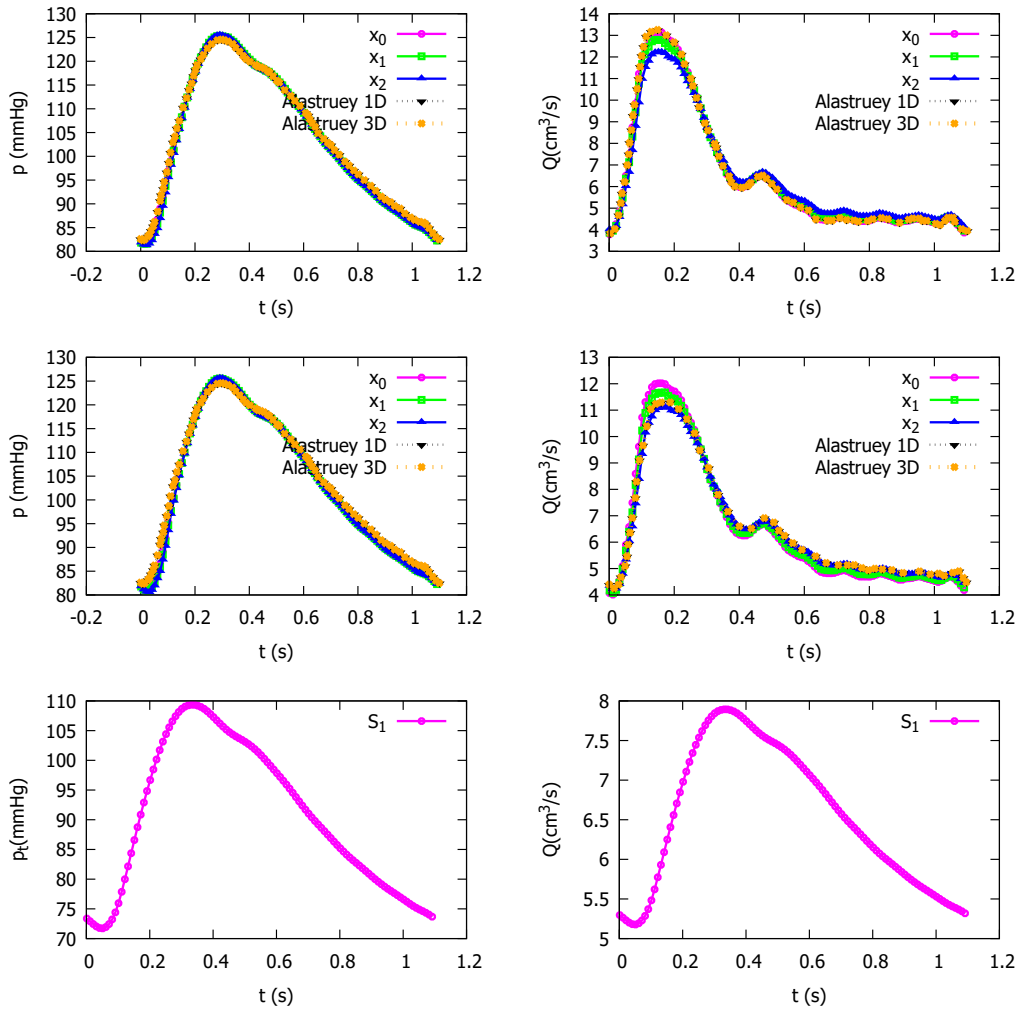


Figure 5: Sección 5.1. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior), el vaso 2 (parte central) y el lecho vascular 1 (parte inferior), utilizando $\Delta x = 1.0$ cm y $CFL = 0.5$.

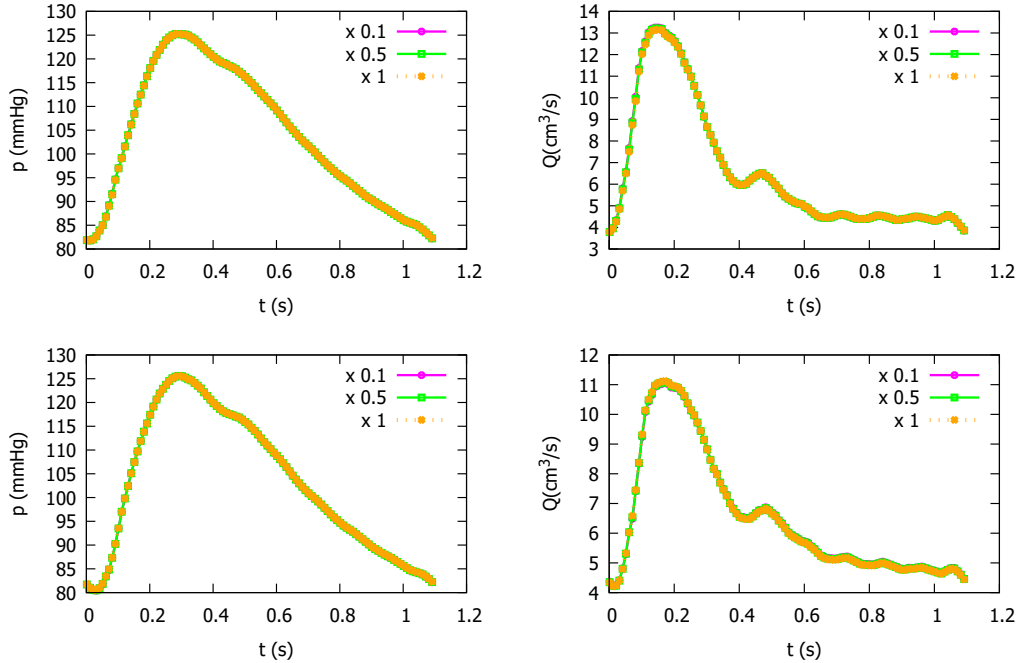


Figure 6: Sección 5.1. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $\Delta x = 1.0, 0.5$ y 0.1 , y $CFL = 0.5$.

5.1.1 Resolución de la malla

Una malla más fina puede capturar con mayor precisión los detalles de la geometría vascular, lo que podría resultar en una representación más precisa del flujo sanguíneo y, por lo tanto, del caudal. Sin embargo, una malla excesivamente fina podría aumentar los requisitos computacionales y ralentizar las simulaciones. Además, la resolución de la malla no es el único factor que influye en la precisión del caudal; también se deben considerar las condiciones de contorno y las propiedades del modelo. Por otra parte, una malla más detallada también puede proporcionar resultados más precisos en términos de variaciones locales de presión, como las que ocurren en estrechamientos o bifurcaciones vasculares. Sin embargo, nuevamente, es esencial equilibrar la resolución de la malla con las capacidades computacionales disponibles y los objetivos de la simulación.

En la Figura 6 podemos observar que no hay una variación significativa de los resultados al aumentar la precisión de la simulación y que se alcanza la convergencia sin importar el tamaño de las celdas. Esto hace que sea suficiente con realizar las simulaciones con $\Delta x = 1\text{cm}$, prescindiendo del esfuerzo computacional que conlleva aumentar la precisión.

5.1.2 Paso de tiempo

Un paso de tiempo más pequeño permite una simulación más detallada del comportamiento del flujo sanguíneo en cada momento. Esto puede ser crucial para capturar cambios rápidos en el flujo, como los que ocurren durante el ciclo cardíaco. Un paso de tiempo más pequeño generalmente permite una mejor resolución temporal del flujo sanguíneo, lo que puede llevar a una estimación más precisa del caudal en momentos específicos. Sin embargo, un paso de tiempo muy pequeño puede aumentar significativamente el tiempo de cálculo y los requisitos computacionales. Similar al caudal, un paso de tiempo más pequeño permite una representación más precisa de las variaciones en la presión arterial a lo largo del tiempo. Un paso de tiempo más pequeño permite una simulación más detallada de las transiciones en la presión arterial y una mejor precisión en la determinación de los valores máximos y mínimos.

En el caso de la arteria carótida común, como podemos observar en la Figura 7, al variar la condición CFL no se observan cambios significativos en la solución. Esto quiere decir que se puede optar por utilizar un $CFL = 0.9$ garantizando resultados estables y precisos sin necesidad de llevar a cabo una gran carga computacional.

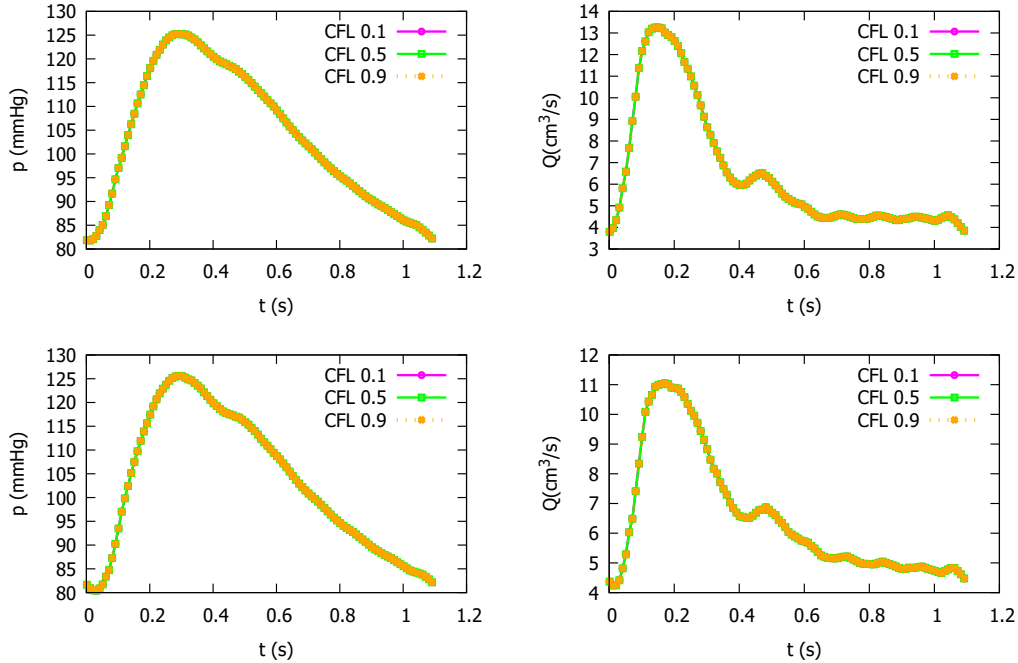


Figure 7: Sección 5.1. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.1, 0.5$ y 0.9 , con $\Delta x = 1.0$ cm

5.1.3 Variación del radio $r(x)$ lineal o exponencial

Si se utiliza una variación exponencial del radio de los vasos, se puede representar mejor la dilatación o constricción gradual de los vasos sanguíneos en función de diferentes condiciones. En algunos casos, una variación exponencial podría reflejar mejor cómo cambian los radios de los vasos en respuesta a factores como el flujo sanguíneo o la presión. Sin embargo, una variación exponencial pronunciada podría generar cambios más abruptos en la geometría vascular en comparación con la realidad fisiológica, lo que podría afectar la precisión de los resultados favorablemente. Sin embargo, la variación lineal del radio puede ser más simple de implementar y comprender. Esta variación podría ser apropiada si se busca simular cambios graduales y uniformes en la geometría de los vasos. Sin embargo, podría no capturar cambios más sutiles que podrían estar relacionados con respuestas fisiológicas más complejas.

Como podemos observar en la Figura 8, no hay cambios significativos de precisión en este caso. Esto hace que sea preferible utilizar un aumento de radio lineal en la simulación.

5.1.4 Variación de la velocidad de propagación de onda, $c_o(x)$, Olufsen o Reymond

En general, ambos métodos buscan proporcionar una comprensión profunda de la velocidad de la onda en el flujo sanguíneo y su influencia en la hemodinámica arterial. El método de Olufsen [27] puede ofrecer información detallada sobre la propagación de las ondas de presión y cómo afectan el flujo y la presión en las arterias. El método de Reymond [28], al considerar una representación más detallada de la red arterial y propiedades elásticas, puede proporcionar una visión más completa de cómo se comporta el sistema arterial en su conjunto. En la Figura 9 podemos ver que la presión sistólica se alcanza antes con el método de Reymond y que en el caudal a la salida hay una clara diferencia en los máximos y mínimos, siendo mayores los alcanzados con este método.

5.1.5 Variaciones en $A_o(x)$

La variación del área transversal del vaso tiene una influencia significativa en los resultados de caudal y presión en una simulación de flujo sanguíneo. El área transversal de un vaso sanguíneo puede cambiar debido a varios factores, como la dilatación o constricción arterial, que son procesos fisiológicos importantes. algunas

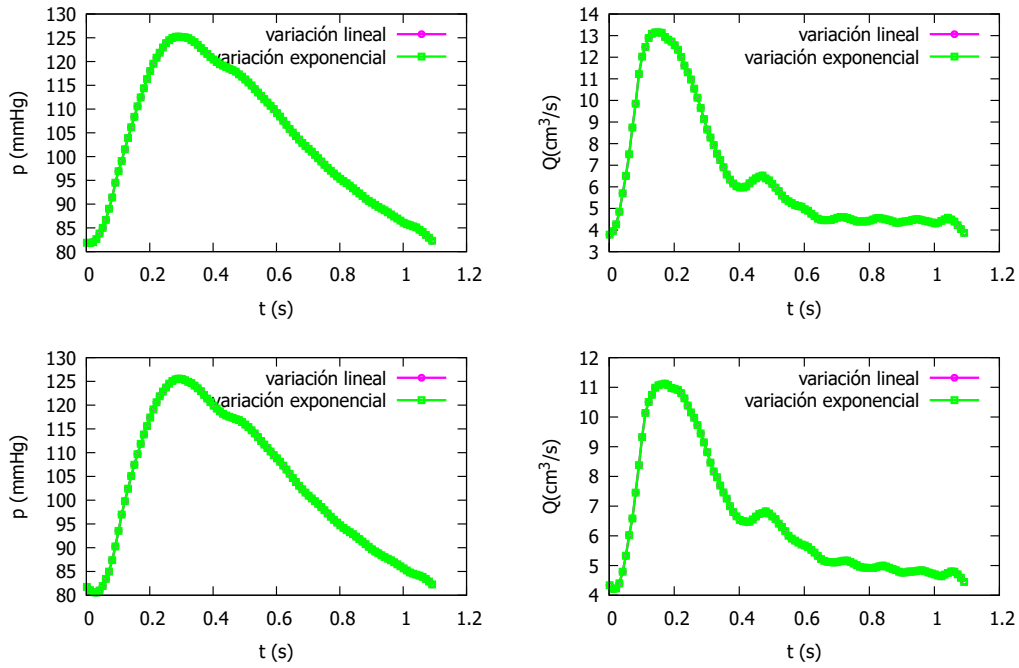


Figure 8: Sección 5.1. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Se ha representado el caudal y la presión con variación exponencial y con variación lineal del radio del vaso.

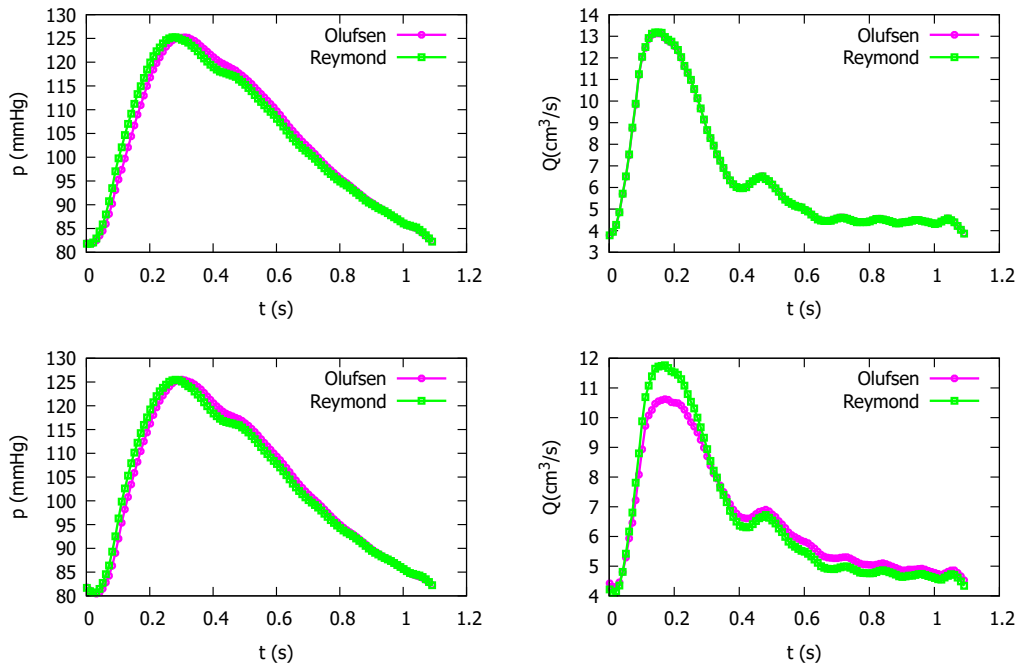


Figure 9: Sección 5.1. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Se han utilizado el método de Olufsen y el de Reymond para el cálculo de la velocidad de onda en el flujo sanguíneo.

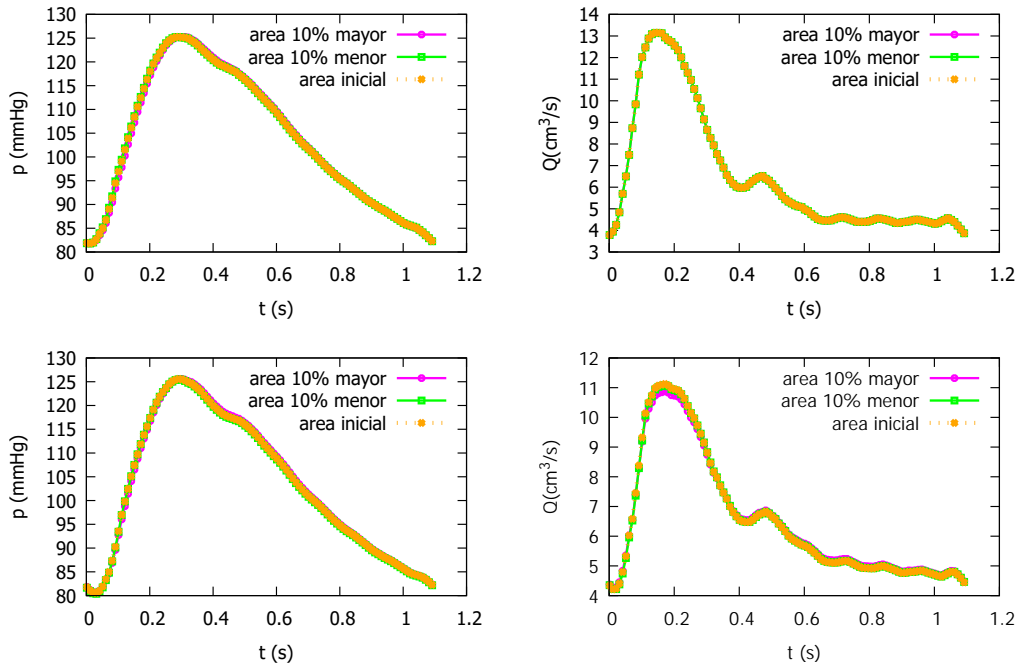


Figure 10: Sección 5.1.Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Se ha variado el área transversal aumentándola y disminuyéndola un 10 .

de las formas en que la variación del área transversal puede afectar los resultados de la simulación son las siguientes:

1. Ley de Continuidad: De acuerdo con la ley de continuidad, el caudal (flujo sanguíneo) es proporcional al área transversal y la velocidad del flujo. Si el área se reduce debido a la constricción, el flujo disminuirá incluso si la velocidad del flujo aumenta para mantener la continuidad.
2. Variación de la Velocidad: Un cambio en el área transversal puede afectar la velocidad del flujo sanguíneo. Si el área disminuye, la velocidad puede aumentar para mantener el mismo caudal.
3. Efectos Hemodinámicos: La variación del área puede tener efectos hemodinámicos, como la generación de zonas de alta velocidad y baja presión en áreas de constricción.
4. Efecto en la Resistencia: Un cambio en el área transversal afecta la resistencia al flujo sanguíneo. Una constricción puede aumentar la resistencia, lo que a su vez puede resultar en un aumento en la presión aguas arriba de la constricción.

En el caso de la carótida común, no se observan grandes diferencias ni en el caudal ni en la presión al variar el área del vaso. Pueden verse estos resultados en la Figura 10

5.1.6 Variaciones en $p_d(x)$, constante o variable

Si se busca simular condiciones más cercanas a la realidad fisiológica, mantener una presión variable puede ser más apropiado, ya que captura las interacciones dinámicas y las regulaciones activas del sistema cardiovascular. Por otro lado, mantener una presión constante puede ser útil para explorar ciertos escenarios hipotéticos o simplificados ya que al mantener la presión constante, el caudal y la velocidad del flujo pueden variar según las propiedades del vaso y las condiciones de la simulación. Si la presión es constante, el flujo puede cambiar en respuesta a cambios en la resistencia del sistema o la elasticidad de las arterias.

En la Figura 11 podemos observar que los resultados son los mismos independientemente de si se varía la presión o se deja constante.

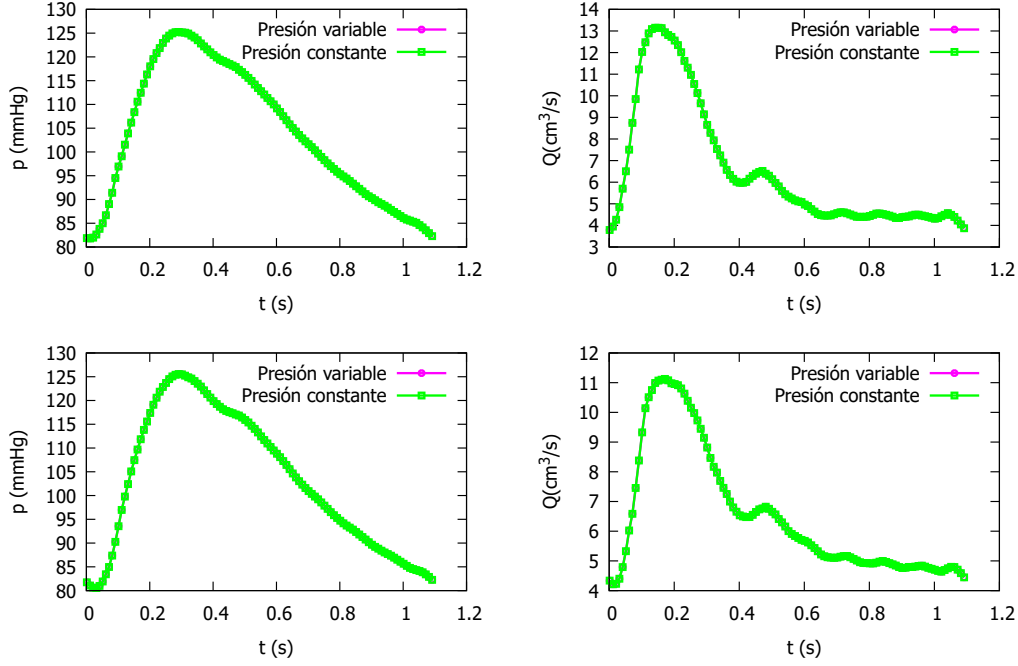


Figure 11: Sección 5.1.Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Se ha representado el caudal y la presión manteniendo la presión constante y variándola.

5.1.7 Variaciones en el factor de fricción, de parabólico a turbulento

El tipo de flujo (laminar o turbulento) y el factor de fricción en un vaso tienen un impacto en los resultados de caudal y presión en una simulación de flujo sanguíneo. En el flujo laminar, el caudal y la velocidad del flujo están directamente relacionados, mientras que en el flujo turbulento, la relación puede ser más compleja debido a las fluctuaciones y recirculaciones. La presión también puede variar de manera diferente en cada tipo de flujo, siendo gradual en el laminar y más oscilante en el turbulento.

En los modelos unidimensionales clásicos, se adopta $f(r)$ como el perfil Hagen-Poiseuille en estado estacionario:

$$f_{HP}(f) = \frac{\gamma + 2}{\gamma} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^\gamma\right) \quad (46)$$

Para el perfil Hagen-Poiseuille, el coeficiente $\gamma = 2$ corresponde a un flujo completamente desarrollado, estable, incompresible y newtoniano en un tubo cilíndrico. Este tipo de flujo se conoce como flujo de Poiseuille y se utiliza con frecuencia en estudios de dinámica de fluidos, sin embargo, se ha demostrado empíricamente que el perfil de velocidad parabólico no es del todo preciso para arterias de gran tamaño. En su lugar, se utiliza un perfil de velocidad alternativo, conocido como el perfil de velocidad "en forma de tapón", donde $\gamma = 9$. Este perfil alternativo se aplica ampliamente al modelar la red arterial. En la Figura 12 se muestran los distintos perfiles de velocidad que se obtienen al cambiar el valor de γ .

En la Figura 13 puede verse que la presión en el inicio del vaso con flujo laminar se retrasa casi imperceptiblemente con respecto a la presión con flujo turbulento. Además, en la salida podemos ver que con el flujo laminar se alcanza una mayor presión sistólica.

5.1.8 Presión media, sistólica y diastólica

En la Figura 5 puede verse que no hay variación en ninguna de las tres presiones características del sistema circulatorio.

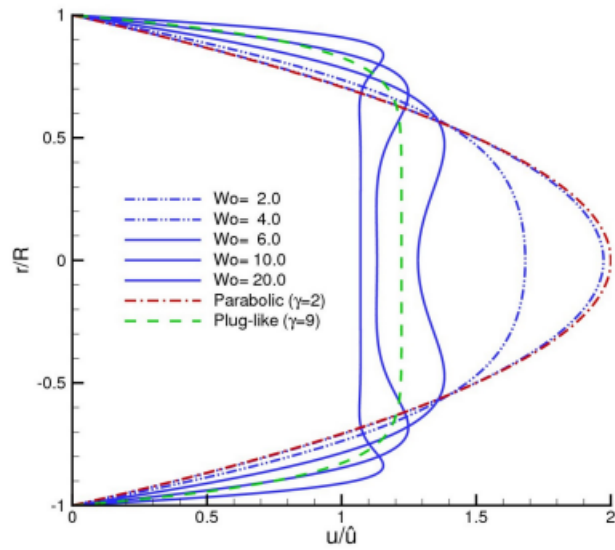


Figure 12: Perfiles de velocidad constantes de Hagen-Poiseuille parabólicos ($\gamma = 2$) y tipo "tapón" ($\gamma = 9$)

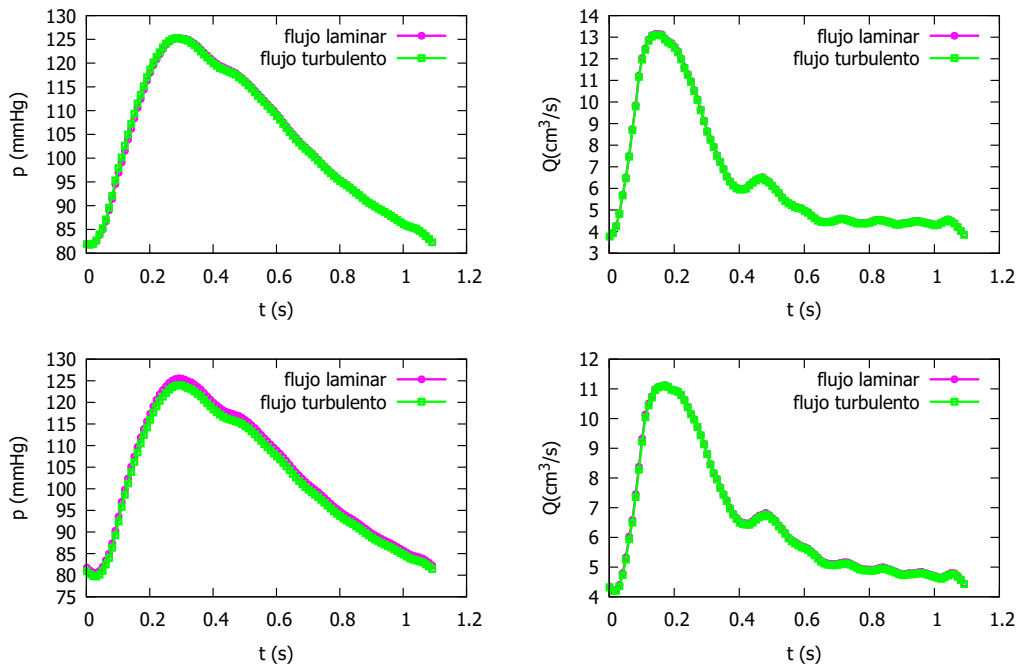


Figure 13: Sección 5.1. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Se ha representado el caudal y la presión cambiando de un flujo laminar a uno turbulento.

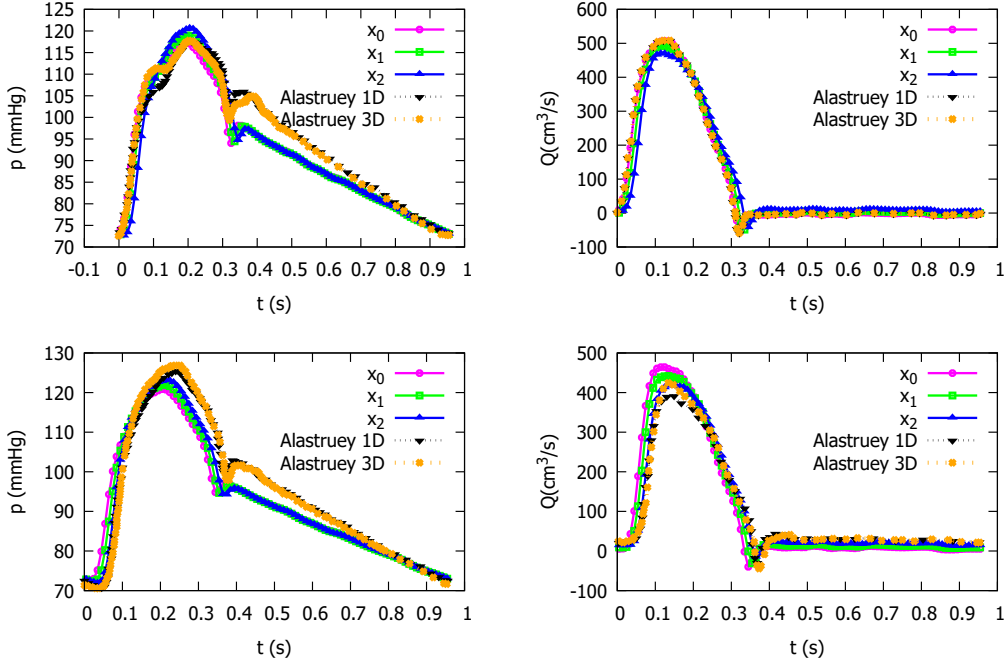


Figure 14: Sección 5.2. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. La simulación se ha calibrado en el primer vaso.

5.2 Aorta Torácica

Se considera un cilindro recto con un diámetro representativo del diámetro promedio de la aorta torácica. Para la simulación 1-D se ha considerado un modelo en el que hay dos vasos, uno de entrada y otro de salida. C_T y R_T vuelven a ser calculados según lo expuesto en la Sección 3.1. Los valores finales de R_T y C_T se obtuvieron después de iteraciones para lograr la convergencia a las presiones objetivo en la salida. Los parámetros del modelo aórtico de referencia se proporcionan en la Tabla 5.2. La velocidad de onda resultante en la presión media es de aproximadamente 5.17 m/s. Se han realizado 100 evaluaciones para llegar a los valores finales de resistencia total y complianza total con un tiempo de paso de 1 ms. Por último se ha utilizado un perfil de velocidades con $\gamma = 9$

Table 2: Propiedades hemodinámicas normales de la arteria aorta común humana.

| Propiedad | Valor |
|--------------------------|---------------|
| Longitud, L | 241.37 mm |
| Radio r_d | 12 mm |
| Espesor del vaso, h | 1.2 mm |
| Caudal medio Q_{in} | 102.8333 ml/s |
| Módulo de Young, E | 3000.25 mmHg |
| Presión sistólica p_s | 126.01 mmHg |
| Presión diastólica p_d | 71.25 mmHg |

A continuación podemos ver una comparación de las simulaciones que se han realizado con las expuestas por J.Alastruey. Las simulaciones efectuadas primeramente se habían calibrado en el primer vaso (Figura 14), pero al comprobarse que había ciertas diferencias sobre todo en la presión, se optó por realizar la calibración en el segundo (Figura 15), donde se alcanzaron unos resultados que se ajustaban mejor a lo buscado.

A continuación se va a comentar el impacto que tiene la variación del área en los resultados de la simulación. El resto de variaciones pueden encontrarse en el Anexo A.1.

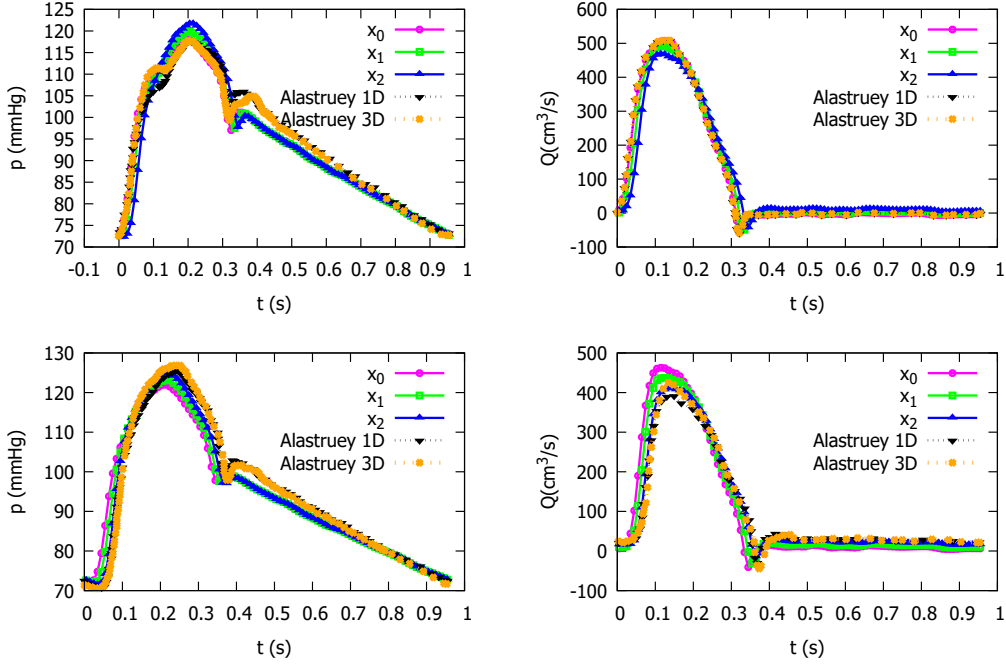


Figure 15: Sección 5.2. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. La simulación se ha calibrado en el segundo vaso.

5.2.1 Variación en el área $A_0(x)$

En este caso es importante señalar las diferencias de presión y de caudal observables en los resultados al variar el área transversal del vaso. Los resultados están expuestos en la Figura 16. Puede observarse que el caudal en la sístole disminuye y en la diástole aumenta al incrementar el área del vaso. El valor de caudal pico alcanzado en este caso depende de la impedancia del vaso

$$R_1 = \frac{\rho c_d}{A_d} \quad (47)$$

que en este caso ha aumentado debido a la modificación del radio y en consecuencia de la velocidad de propagación de onda c_d . La resistencia viscosa no juega un papel determinante en la evolución del flujo. La resistencia a la propagación de las ondas de presión y por lo tanto de flujo, denominada impedancia, es la que determina la forma de la onda de caudal. Al disminuir $A_0(x)$ el efecto es el contrario.

Por otra parte, en la presión puede verse que al aumentar el área, la presión sistólica se alcanza antes pero que rápidamente hay una caída, obteniendo unos valores de presión en la diástole muy inferiores a los conseguidos con el área inicial.

5.3 Carótida con estrechamiento

Consideramos un cilindro con forma cónica lineal con la misma longitud que la geometría anterior de la ACC. Se ha vuelto a considerar la división de la carótida en dos vasos para la simulación 1-D. Basándonos en valores de referencia para el grado de conicidad de la ACC, se estableció un diámetro de $8mm$ en la entrada y $4mm$ en la salida. C_T y R_T vuelven a ser calculados según lo expuesto en la Sección 3.1. Los valores finales de R_T y C_T se obtuvieron después de iteraciones para lograr la convergencia a las presiones objetivo en la salida. Los demás parámetros se mantuvieron inalterados en relación con los proporcionados en la Tabla 5.1. Para el modelo 1-D, se especificó el perfil de velocidad con $\gamma = 2$.

A continuación podemos ver que los resultados de la Figura 17 de las simulaciones realizadas se ajustan de una manera exacta a los presentados por J. Alastruey.

En este caso, es de interés ver la influencia del área transversal presentado en la Figura 18 y del tipo de variación radial presentado en la Figura 19. El resto de variaciones pueden encontrarse en el Anexo A.2.

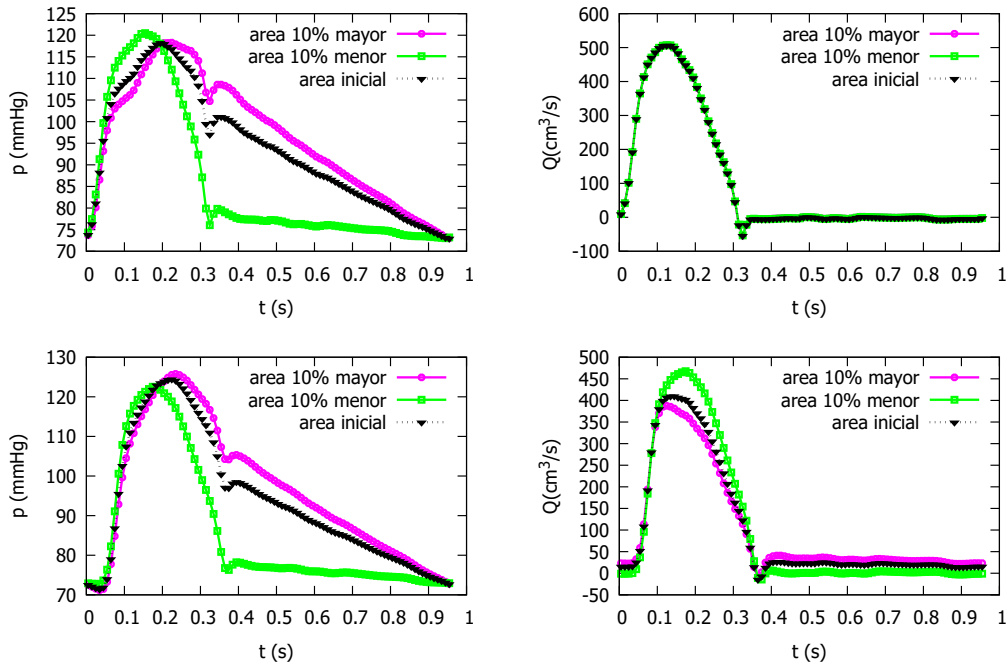


Figure 16: Sección 5.2. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. La simulación se ha calibrado en el segundo vaso. Se ha aumentado y disminuido un 10% el área trasversal del vaso.

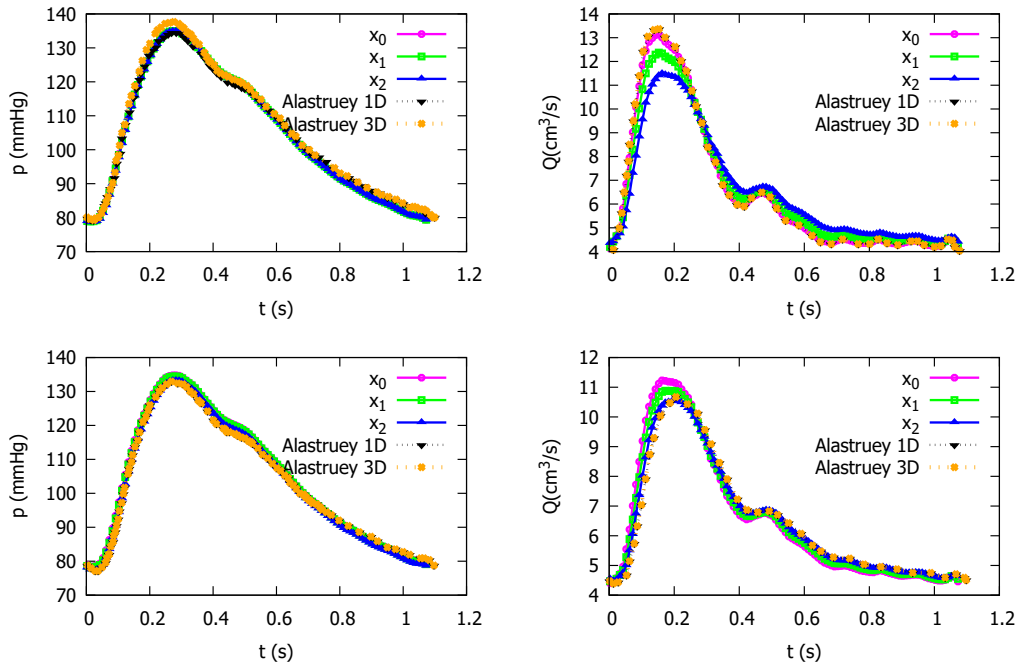


Figure 17: Sección 5.3. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

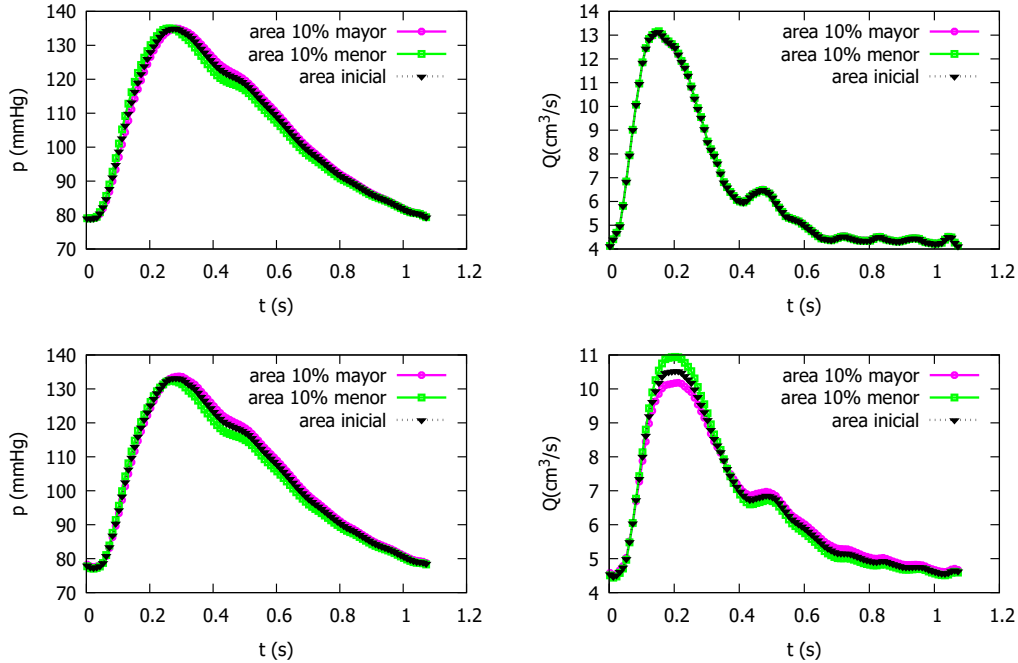


Figure 18: Sección 5.3. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Se ha modificado el área ampliándola y disminuyéndola un 10%

5.3.1 Variación en $A_0(x)$

Siendo el volumen de líquido que circula el mismo en todos los casos, al aumentar el área se observa que el caudal pico o máximo disminuye un poco en la sístole y que aumenta ligeramente durante la diástole. Ocurre lo opuesto al disminuir el área del vaso. En cuanto a la presión, puede observarse que la curva se adelanta al reducir el área y se atrasa al aumentarla.

5.3.2 $r(x)$, forma lineal o exponencial

Si nos fijamos en las gráficas que comparan ambos casos, es evidente que la presión en el segundo vaso se representa de manera más exacta con una variación exponencial del radio del vaso.

5.4 Aorta con estrechamiento

Consideramos un cilindro con forma cónica lineal de longitud idéntica a la del modelo aórtico de referencia sin conicidad. Se vuelve a dar uso de la división de la aorta en dos vasos para la simulación 1-D. Basándonos en las dimensiones aórticas típicas reportadas, se fijó un diámetro de 3 cm en la entrada y 2 cm en la salida. C_T y R_T vuelven a ser calculados siguiendo los pasos de la Sección 3.1. Los valores finales de R_T y C_T se obtuvieron después de varias iteraciones. Los parámetros restantes permanecieron sin cambios con respecto a los de la Tabla 5.2. En el modelo 1-D, se eligió que el orden del polinomio del perfil de velocidad fuera $\gamma = 9$. Se presenta nuevamente, una comparación de los valores obtenidos en las simulaciones y los conseguidos por J. Alastruey en la Figura 20, donde vemos que ambos modelos, 1-D y 3-D, tienen la misma solución tanto para el caudal como para la presión. En las gráficas se ve que no se han conseguido con total exactitud los resultados de presión buscados ya que en la diástole obtenemos una presión un poco más elevada. Sin embargo, en la sístole se ha logrado alcanzar los valores requeridos de manera muy precisa.

El caudal en el vaso 1 se ha representado de forma muy exacta, aunque en el vaso 2 nos encontramos con una pequeña diferencia con los resultados de J. Alastruey.

En este caso se van a analizar los resultados variando el método de cálculo de la velocidad de onda, modificando el área transversal del vaso y utilizando un flujo de sangre laminar y otro turbulento. El resto de variaciones pueden encontrarse en el Anexo A.3.

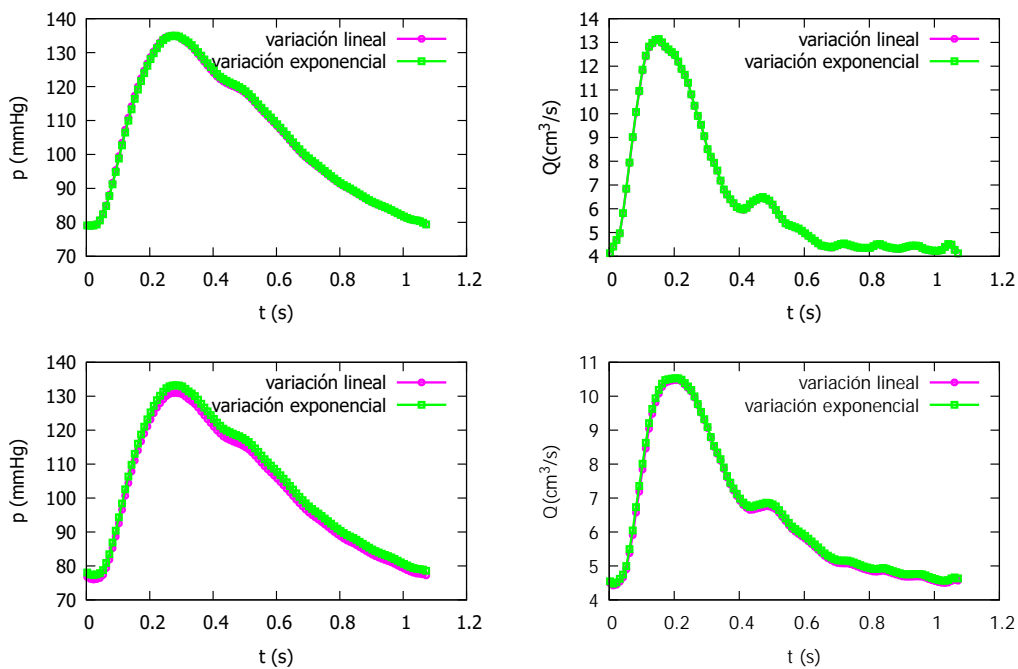


Figure 19: Sección 5.3. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm con variación del radio exponencial y lineal.

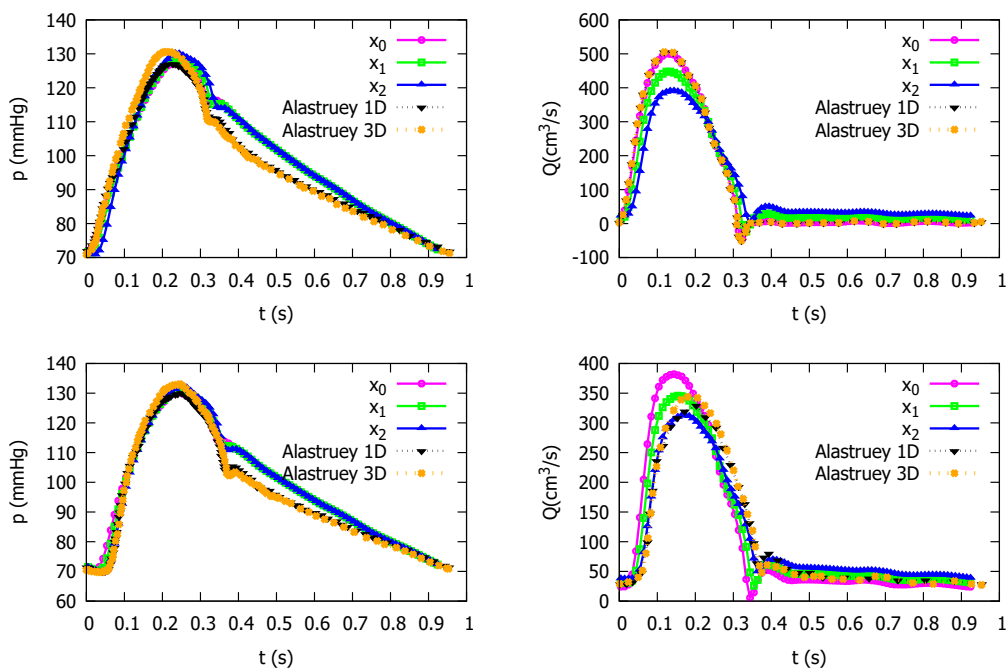


Figure 20: Sección 5.4. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

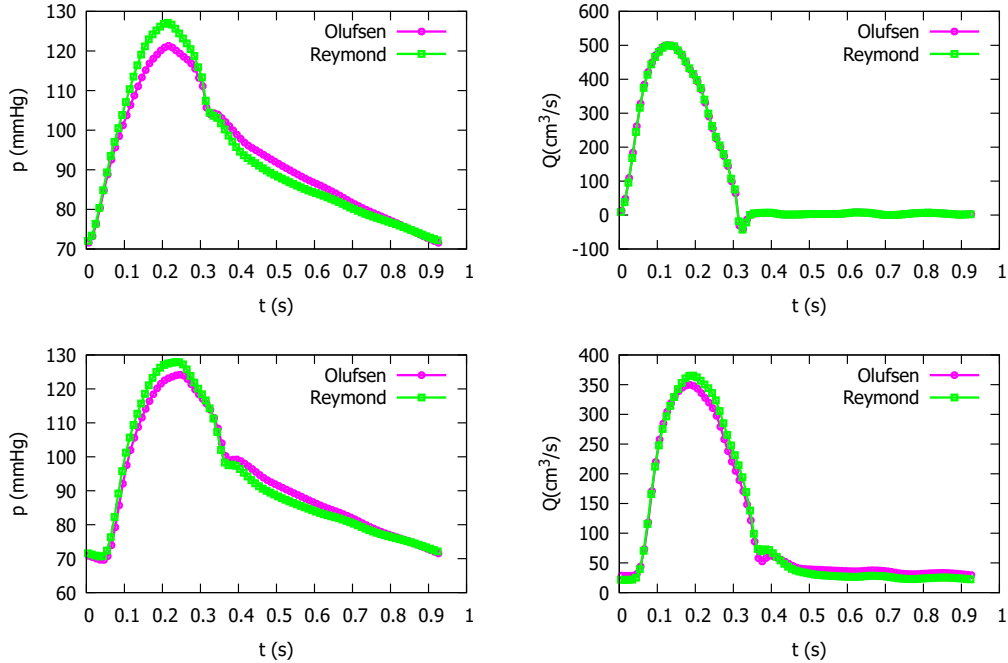


Figure 21: Sección 5.4. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Se ha representado el caudal y la presión modificando el método de cálculo de c_0 .

5.4.1 Variación del método de cálculo de $c_0(x)$

Como puede ser visto en la Figura 21, con el modelo de Reymond se alcanza la presión requerida tanto a la entrada como a la salida mientras que el modelo de Olufsen no se ajusta bien a los resultados buscados al no alcanzar la presión sistólica.

5.4.2 Variación de $A_o(x)$

Al igual que en el modelo de la carótida con estrechamiento, en la Figura 22 vemos que al aumentar el área, en el vaso 2, hay una disminución de caudal en la sístole y un aumento en la diástole y que al disminuirla ocurre de forma inversa. Se observa a su vez que la presión sistólica se alcanza antes y que la presión diastólica disminuye de manera importante.

5.4.3 Variación del factor de fricción

En el flujo turbulento, el caudal puede ser más irregular y fluctuante. Las partículas de fluido se mueven en patrones caóticos y desordenados, lo que puede resultar en variaciones más pronunciadas en el caudal a lo largo del vaso. Esto puede observarse en la Figura 23 si nos fijamos en el vaso 2. Por otro lado, fijándonos en la presión, vemos que con un flujo de sangre turbulento no alcanzamos las presiones sistólica y diastólica objetivo. Ésta disminución de la presión puede deberse al aumento de la resistencia del flujo al aumentarse la fricción entre el fluido y las paredes del vaso.

5.5 Bifurcación aórtica

Aquí, consideramos un modelo idealizado de la bifurcación aórtica, que incluye un único segmento principal representando la aorta abdominal, y dos segmentos de ramificación que representan las arterias ilíacas. Para la simulación 1-D se han modelizado tres vasos que representan la entrada, el punto de unión entre la aorta abdominal y las dos ilíacas y la salida. Las longitudes y diámetros se encuentran detallados en la Tabla 5.5. La resistencia periférica neta inicial y la complianza total se calcularon utilizando las Ecuaciones 27 y 30. Los valores finales de R_T y C_T se obtuvieron después de varias iteraciones para lograr la convergencia a las

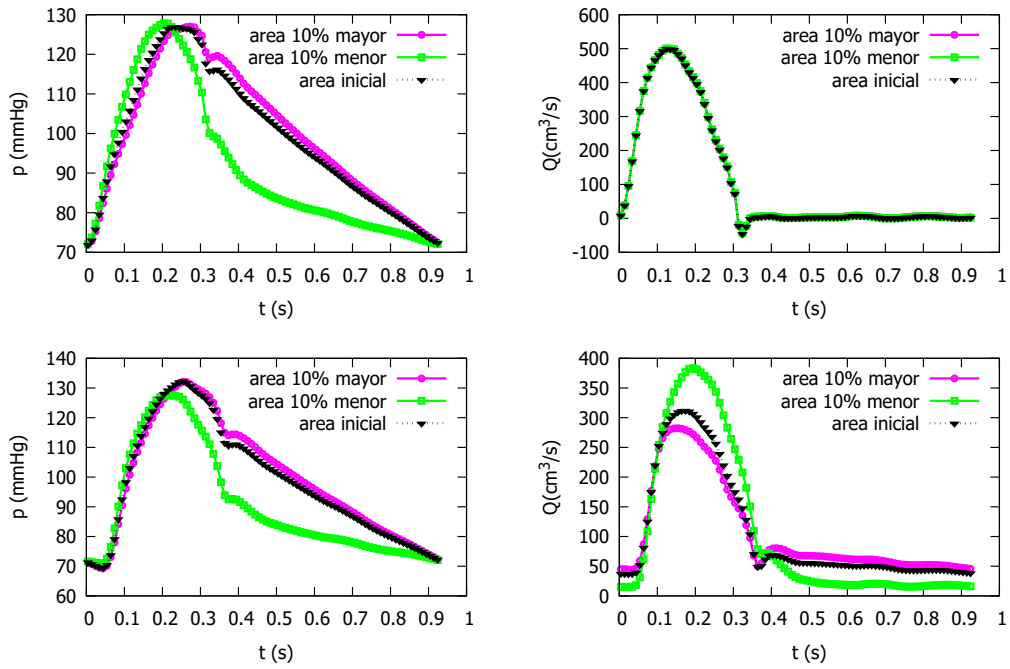


Figure 22: Sección 5.4. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Se ha representado el caudal y la presión modificando el área transversal.

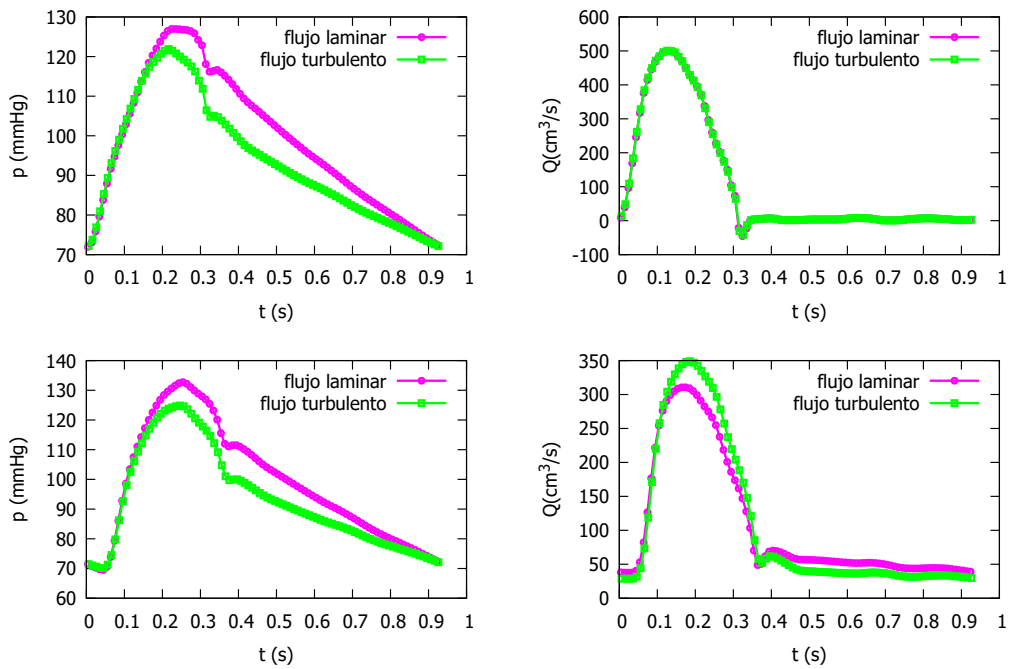


Figure 23: Sección 5.4. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Se ha representado el caudal y la presión utilizando un flujo de sangre laminar y otro turbulento.

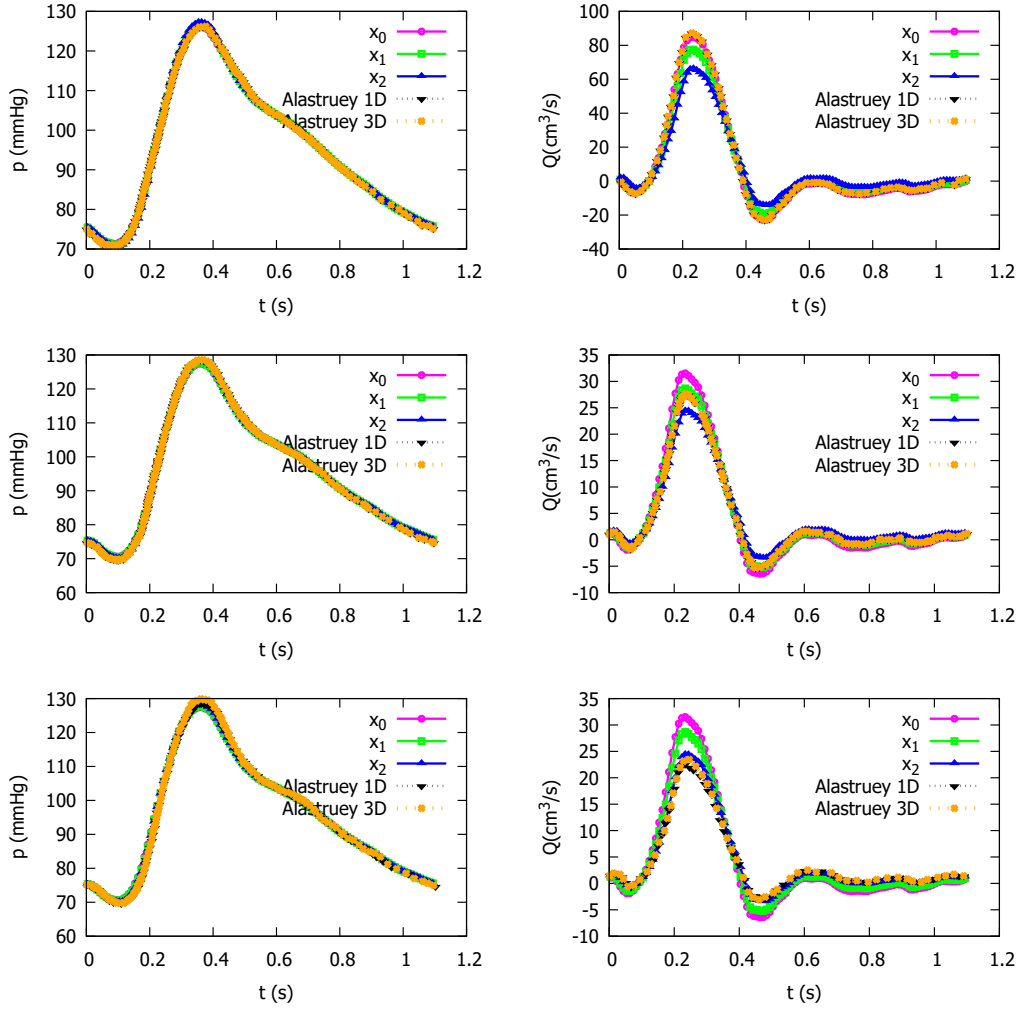


Figure 24: Section 5.5. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior), el vaso 2 (parte central) y el vaso 3 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

presiones objetivo en la entrada. La resistencia periférica $R_1 + R_2$ en la salida de las arterias ilíacas se calculó asumiendo una distribución de flujo igual entre ellas. El perfil de velocidad se eligió con un orden polinómico de $\gamma = 9$. En la Figura 24 se muestra la comparación de los resultados obtenidos con los de J. Alastruey y podemos decir que no hay diferencias apreciables entre ellos.

Table 3: Propiedades hemodinámicas normales de la bifurcación aórtica humana.

| Propiedad | Aorta | Iliaca |
|--------------------------|---------------|--------|
| Longitud, L | 86 mm | 85 mm |
| Radio r_d | 8.6 mm | 6 mm |
| Espesor del vaso, h | 1.032 mm | 0.72 |
| Caudal medio Q_{in} | 7,98 ml/s | |
| Módulo de Young, E | 3750.31 mmHg | |
| Presión sistólica p_s | 126,0103 mmHg | |
| Presión diastólica p_d | 71,2558 mmHg | |

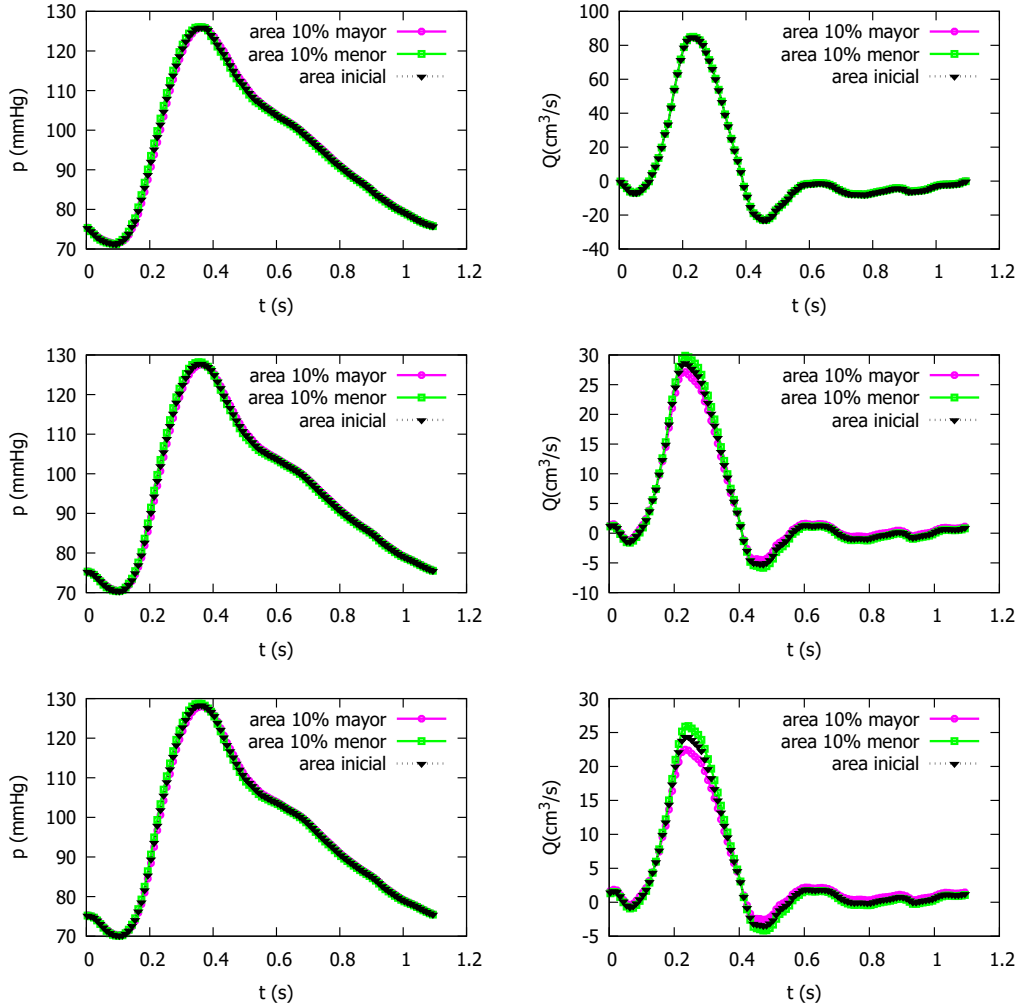


Figure 25: Section 5.5. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior), el vaso 2 (parte central) y el vaso 3 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Se ha representado el caudal y la presión modificando el área transversal.

5.5.1 Variación de $A_o(x)$

En este modelo solo es de interés mostrar los resultados obtenidos tras variar el área transversal del vaso, cambiando la misma entre un valor un 10% menor y uno un 10% mayor. El resto de variaciones se encuentran en el Anexo A.4. Como se muestra en la Figura 25, únicamente hay diferencias entre las soluciones en los caudales de los vasos 2 y 3. Como ha pasado con otros modelos, el caudal en la sístole ha disminuido levemente cuando se ha aumentado el área y ha aumentado cuando se ha disminuido el área. También se ve que el caudal en la diástole ha aumentado al incrementar el área y ha disminuido al reducirla.

6 Aorta Completa

Consideramos una geometría idealizada que representa la aorta y la primera generación de ramas principales, desde justo encima de los senos hasta la bifurcación aórtica, omitiendo los vasos coronarios e intercostales como se muestra en la Figura 26. La curvatura y angulación respecto al plano sagital en el arco aórtico se basaron en mediciones publicadas realizadas en cadáveres humanos. Los parámetros utilizados están recogidos en la Tabla 6. Los módulos elásticos variables espacialmente (E) se calcularon a partir de la velocidad del

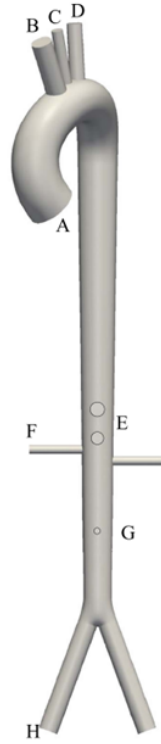


Figure 26: Modelo 3D de la aorta completa. A es el vaso 1 de la aorta, B es la aorta braquiocefálica, C es la carótida común izquierda, D es la subclavia izquierda, E es la arteria mesentérica superior, F es la arteria renal derecha, G es la arteria mesentérica inferior y H es la íliaca común derecha

pulso, c , dada por la relación empírica de Reymond:

$$c = \frac{a^2}{0.2r_d b^2}, \quad (48)$$

, donde c se proporciona en m/s , r_d es el radio a presión diastólica expresado en mm, $a^2 = 13.3$ y $b^2 = 0.3$.

A continuación se mostrarán las soluciones obtenidas para los vasos, comparándolas con los resultados que obtiene J.Alastruey en las Figuras 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36. Aunque hay veinte vasos no se han podido comparar todos ya que J.Alastruey solo realiza simulaciones para algunos de ellos. Podemos ver que hay diferencias entre la solución en 1-D y en 3-D, por ejemplo en la Figura 32 al observar cómo se alcanza la presión sistólica o al ver la bajada del caudal después de la sístole.

Las simulaciones realizadas se ajustan perfectamente a la simulación 1-D expuesta por J.Alastruey para todos los vasos menos para la íliaca común derecha (Figura 36), en la que nuestros resultados de presión tienen unos valores un poco más elevados.

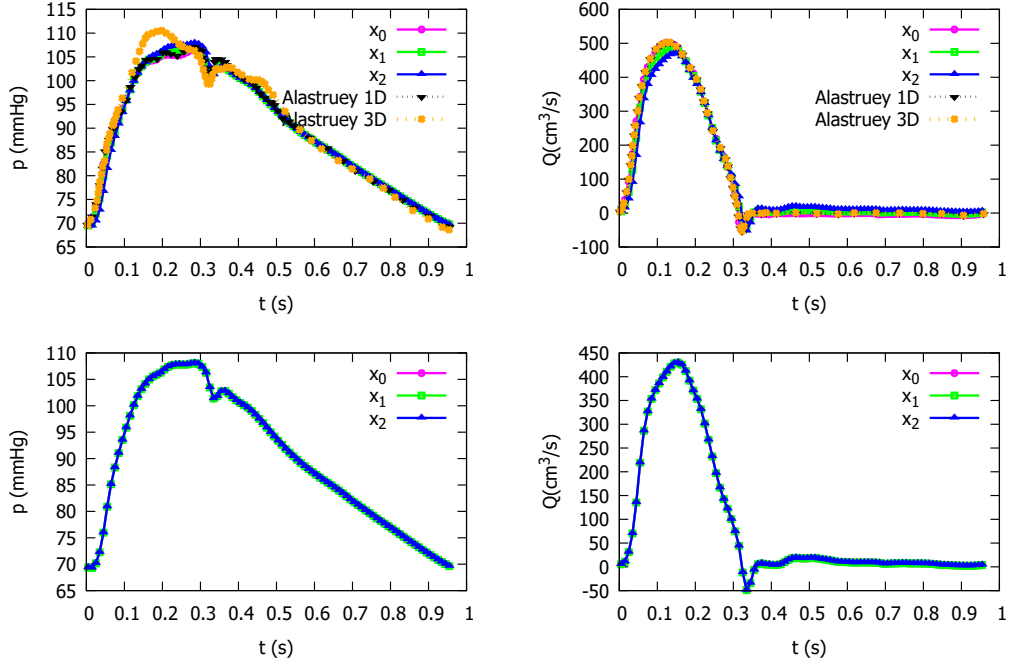


Figure 27: Sección 6. Solución numérica para la Aorta 1 (parte superior), la Aorta 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

Table 4: Propiedades hemodinámicas normales de la aorta completa humana.

| Segmento arterial | Longitud (mm) | $r_{in}(mm) \rightarrow r_{out}(mm)$ |
|------------------------------|---------------|--------------------------------------|
| 1. Aorta 1 | 70.357 mm | 15.2 \rightarrow 13.9 |
| 2. Aorta 2 | 8 mm | 13.9 \rightarrow 13.7 |
| 3. Aorta 3 | 9 mm | 13.7 \rightarrow 13.5 |
| 4. Aorta 4 | 64.737 mm | 13.5 \rightarrow 12.3 |
| 5. Aorta 5 | 152 mm | 12.3 \rightarrow 9.9 |
| 6. Aorta 6 | 18 mm | 9.9 \rightarrow 9.7 |
| 7. Aorta 7 | 7 mm | 9.7 \rightarrow 9.62 |
| 8. Aorta 8 | 7 mm | 9.62 \rightarrow 9.55 |
| 9. Aorta 9 | 43 mm | 9.55 \rightarrow 9.07 |
| 10. Aorta 10 | 43 mm | 9.07 \rightarrow 8.6 |
| 11. Braquiocéfálica | 34 mm | 6.35 \rightarrow 6.35 |
| 12. Carótida común izquierda | 34 mm | 3.6 \rightarrow 3.6 |
| 13. Subclavia izquierda | 34 mm | 4.8 \rightarrow 4.8 |
| 14. Celiaca | 32 mm | 4.45 \rightarrow 4.45 |
| 15. Mesentérica superior | 60 mm | 3.75 \rightarrow 3.75 |
| 16. Renal derecha | 32 mm | 2.8 \rightarrow 2.8 |
| 17. Renal izquierda | 32 mm | 2.8 \rightarrow 2.8 |
| 18. Mesentérica inferior | 5 mm | 2.0 \rightarrow 2.0 |
| 19. Ilíaca común derecha | 85 mm | 6.0 \rightarrow 6.0 |
| 20. Ilíaca común izquierda | 85 mm | 6.0 \rightarrow 6.0 |

6.1 Variaciones

En cuanto a las variaciones realizadas, son destacables la del método de cálculo de la velocidad de propagación de onda y la del área. En ambos casos se ha seleccionado el vaso 13 (subclavia izquierda) para mostrar los resultados. El resto de variaciones pueden encontrarse en el Anexo A.5.

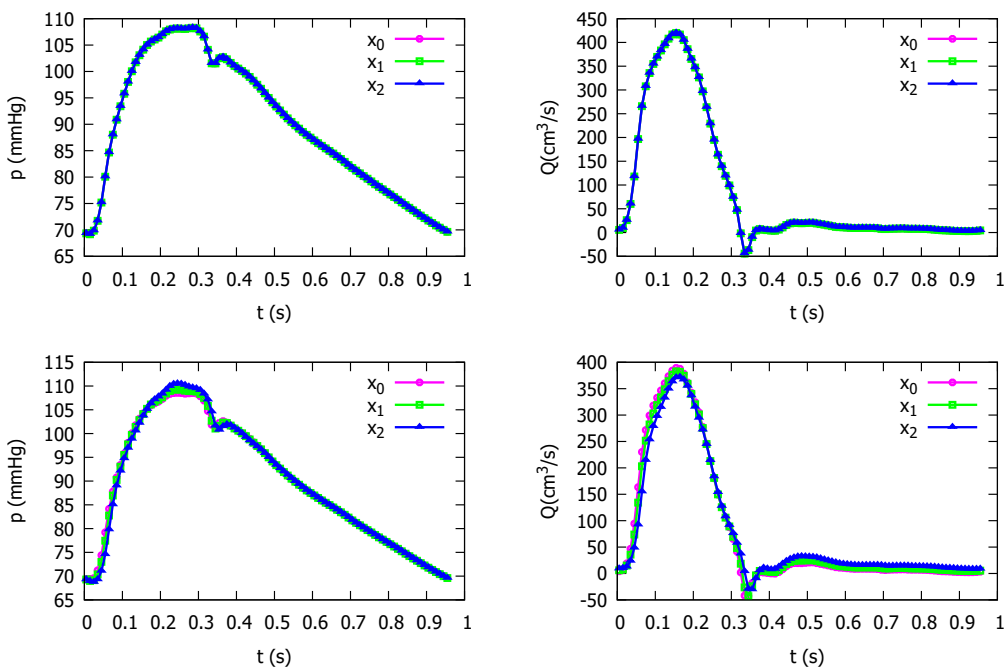


Figure 28: Sección 6. Solución numérica para la Aorta 3 (parte superior), la Aorta 4 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

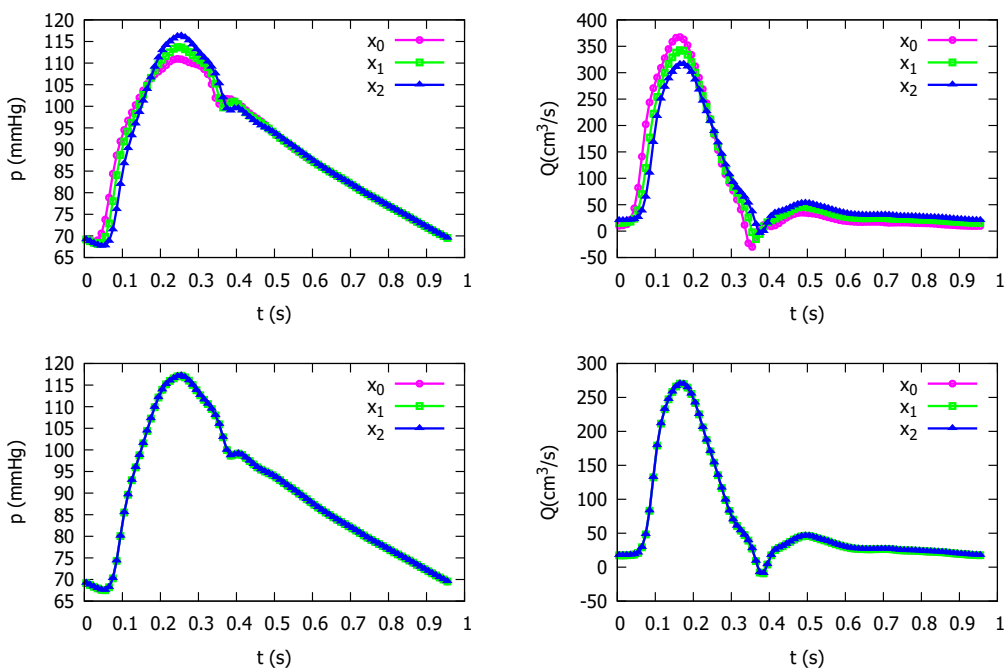


Figure 29: Sección 6. Solución numérica para la Aorta 5 (parte superior), la Aorta 6 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

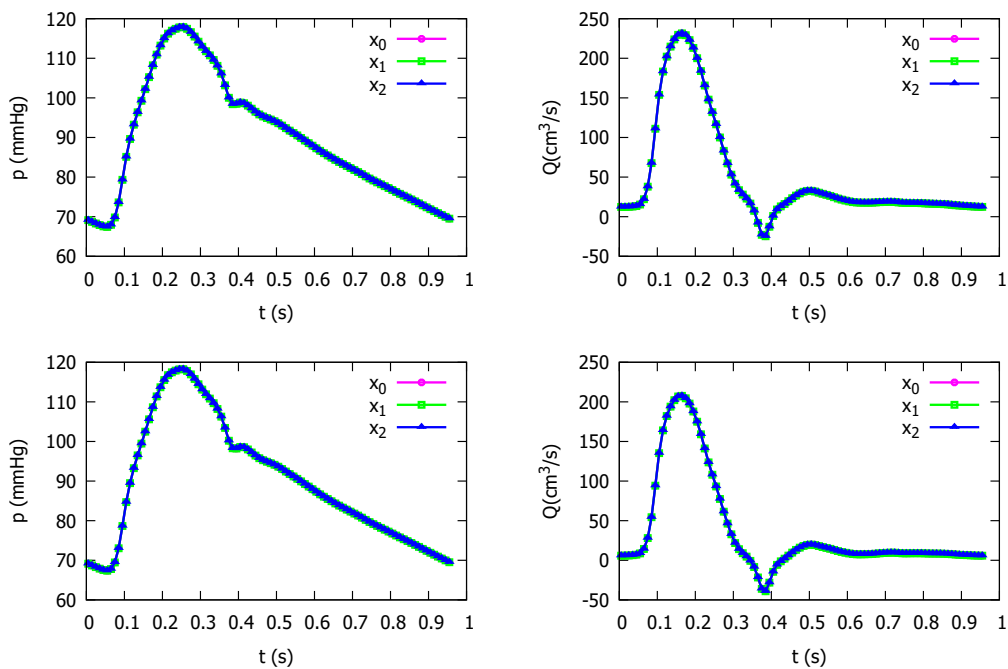


Figure 30: Sección 6. Solución numérica para la Aorta 7 (parte superior), la Aorta 8 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

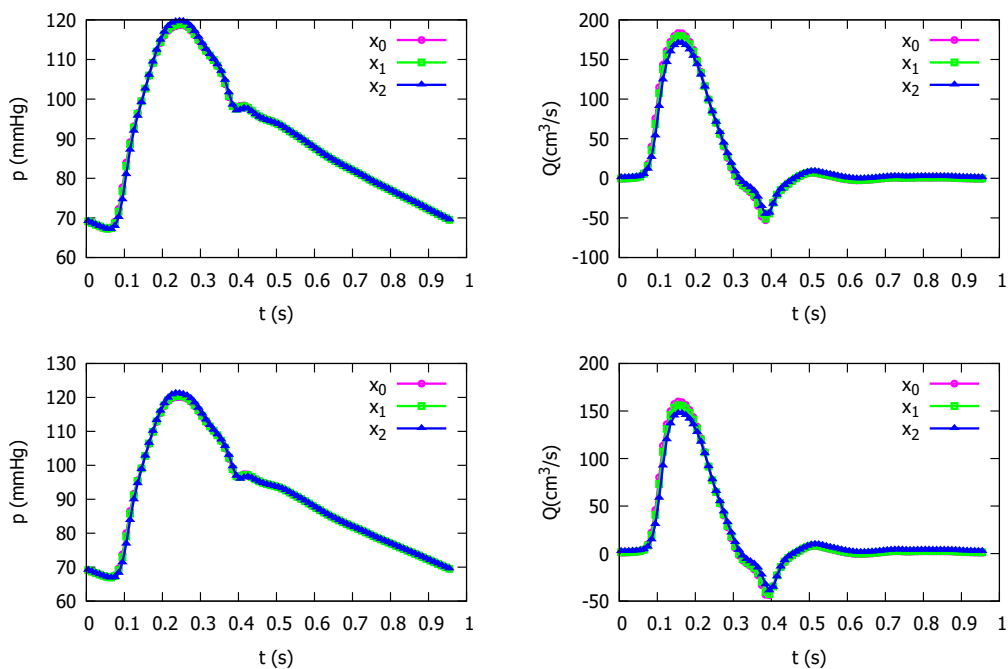


Figure 31: Sección 6. Solución numérica para la Aorta 9 (parte superior), la Aorta 10 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

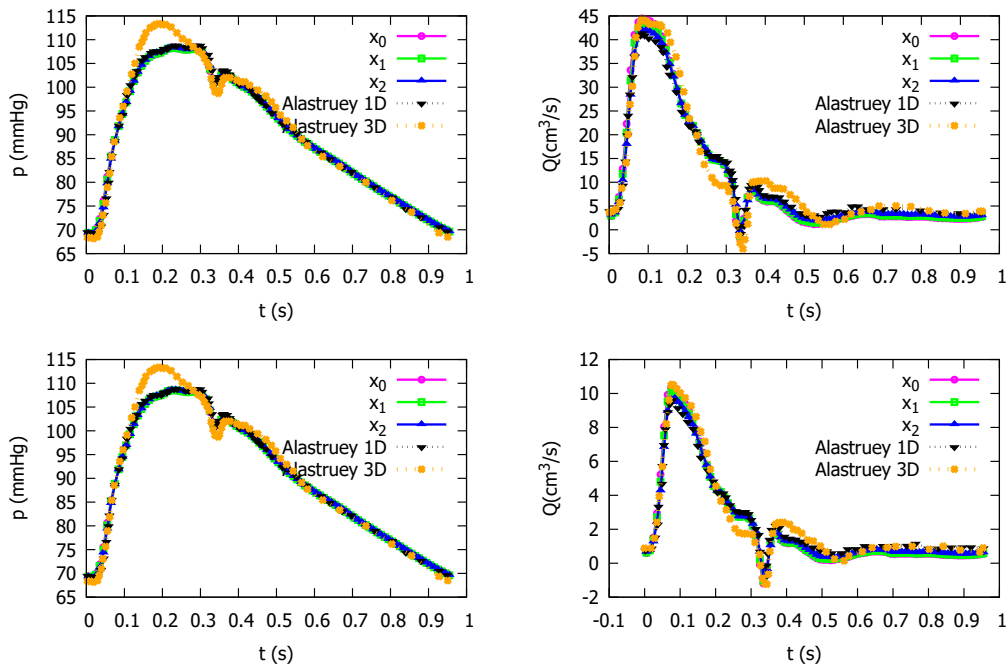


Figure 32: Sección 6. Solución numérica para la braquiocefálica (parte superior), la carótida común izquierda (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

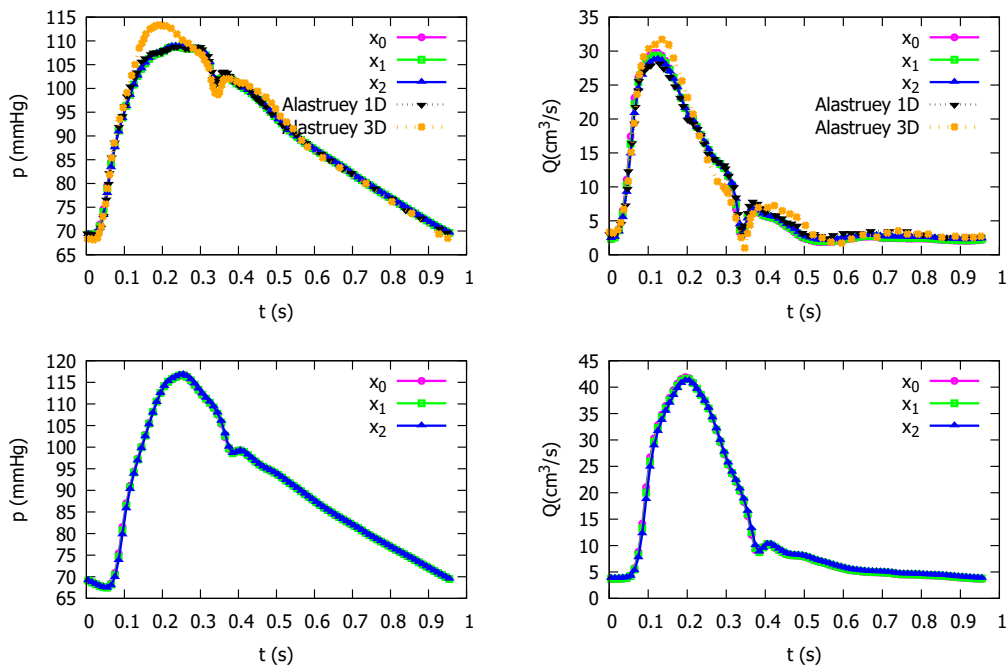


Figure 33: Sección 6. Solución numérica para la subclavia izquierda (parte superior), la celiaca (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

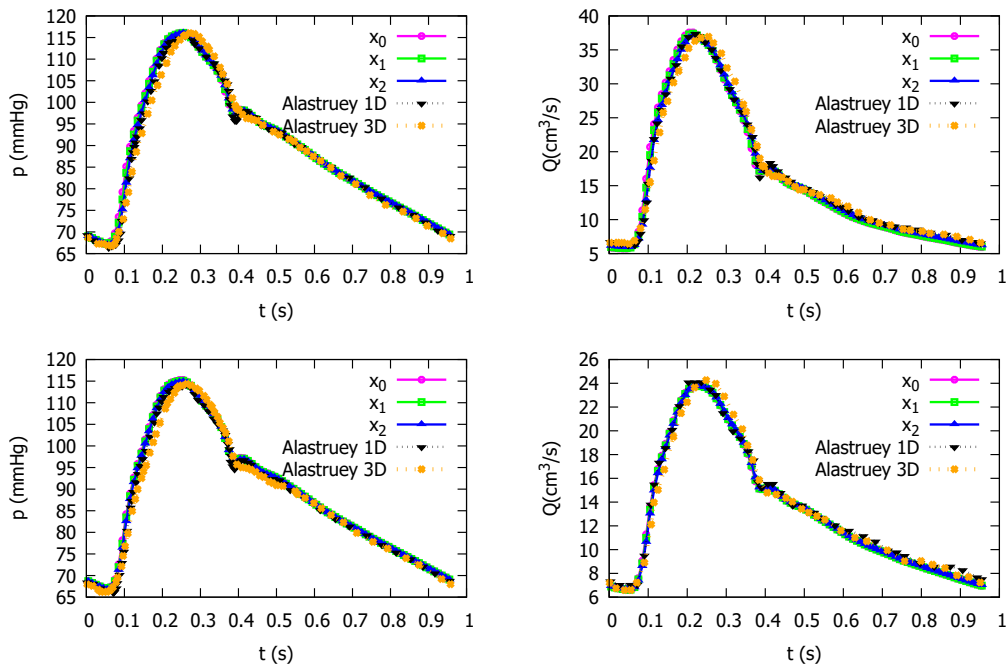


Figure 34: Sección 6. Solución numérica para la mesentérica superior (parte superior), la renal derecha (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

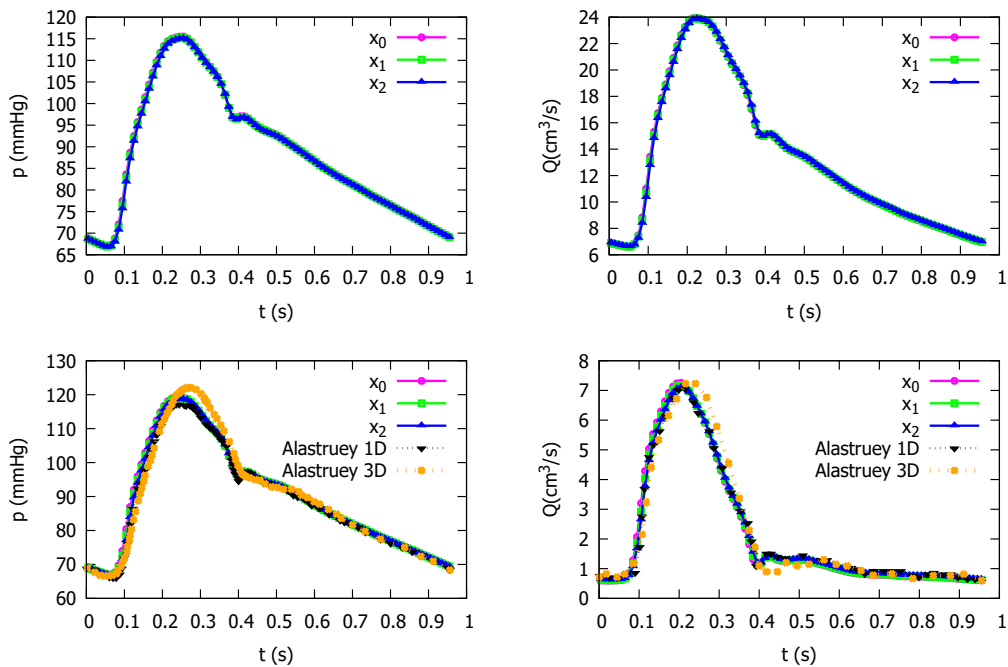


Figure 35: Sección 6. Solución numérica para la renal izquierda (parte superior), la mesentérica inferior (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

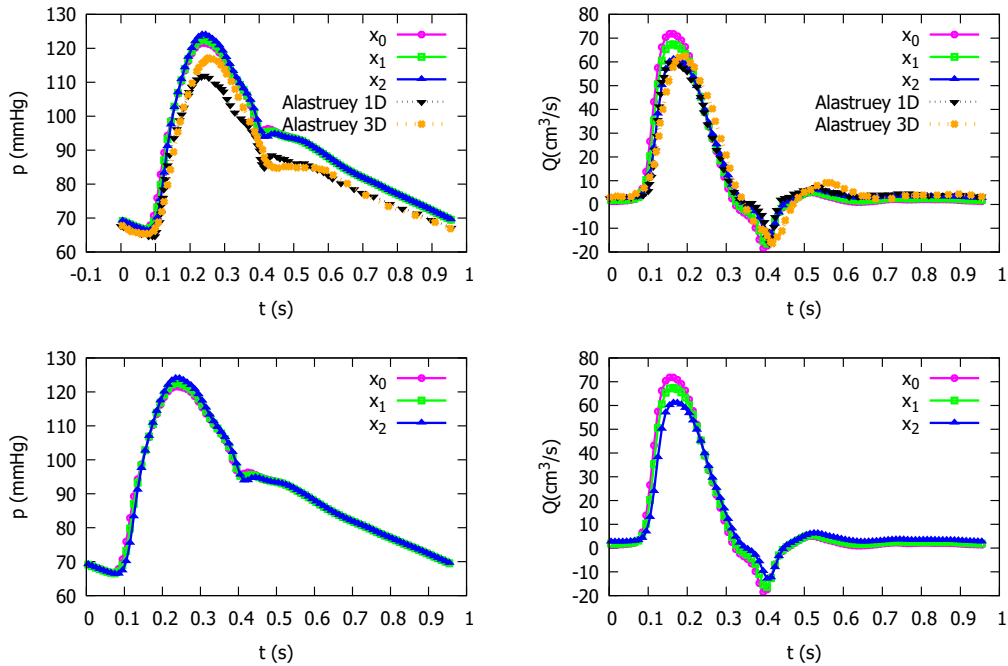


Figure 36: Sección 6. Solución numérica para la íliaca común derecha (parte superior), la íliaca común izquierda (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

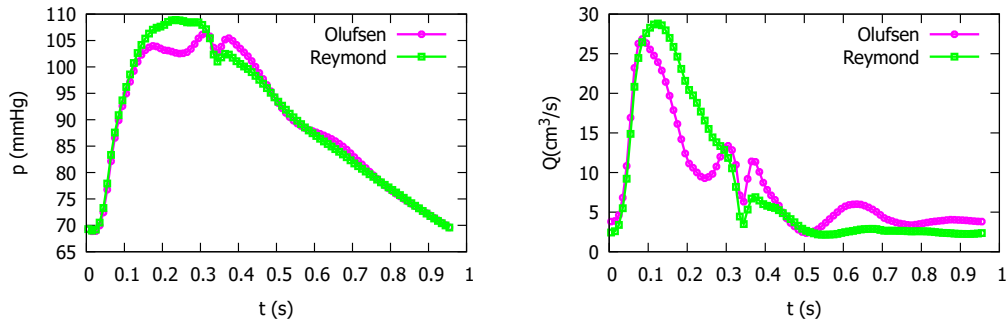


Figure 37: Sección 6.1.1. Solución numérica para el vaso 13, subclavia izquierda torácica utilizando $\Delta x = 1.0$ cm y $CFL = 0.5$. Se ha utilizado el método Olufsen y el método Reymond.

6.1.1 Variación en el método de cálculo de c_0

En la Figura 37, se obtiene una mayor presión sistólica utilizando el método de Reymond frente al método de Olufsen. Esto puede ser debido a su enfoque más detallado y preciso en la modelización de las propiedades del vaso y las condiciones de contorno. Por otra parte, se observa que utilizando el método Olufsen, el caudal es un poco fluctuante. Esto puede deberse a que en sistemas hemodinámicos complejos, las ondas de presión y flujo interactúan entre sí y pueden generar fenómenos complejos, como reflexiones y superposiciones. Este método podría no capturar completamente estas interacciones, lo que podría llevar a resultados inestables.

6.1.2 Variación de A_0

Al igual que en otros modelos explicados anteriormente, en la Figura 38, la presión sistólica se alcanza antes con una disminución del área del vaso, además de alcanzar una menor presión diastólica. A su vez, el caudal es menor en la sístole al aumentar el área y mayor al reducirla. Por el contrario, en la diástole, se observa un aumento del caudal al incrementar el área y una reducción al disminuirla.

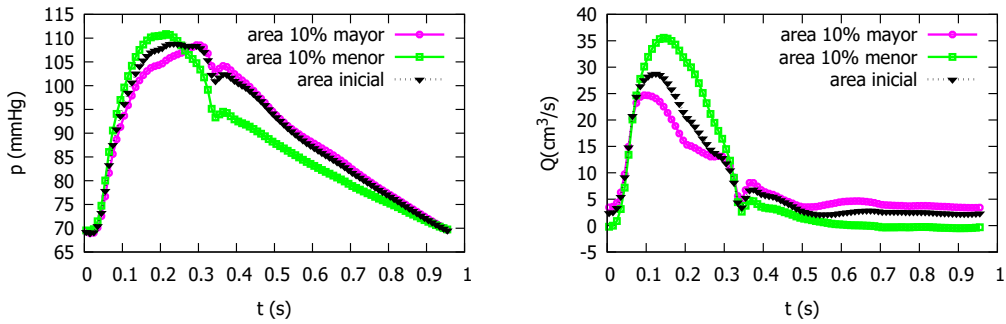


Figure 38: Sección 38. Solución numérica para el vaso 13, subclavia izquierda torácica utilizando $\Delta x = 1.0$ cm y CFL = 0.5. Se ha variado el área trasversal del vaso.

7 Análisis de la simulación de la circulación pulmonar arterial

La siguiente parte del proyecto implica la elaboración de un modelo de simulación tridimensional de las arterias pulmonares. Para esto, se ha utilizado la herramienta SimVascular, un software que permite generar simulaciones detalladas y representaciones en 3D del flujo sanguíneo. Esto resulta de gran ayuda para médicos y científicos, ya que les brinda una comprensión más profunda de cómo ciertos procedimientos y condiciones impactan en el sistema vascular.

El modelo elegido es bastante complejo e incluye hasta nueve generaciones de vasos. El número total de vasos modelados ha sido de 177 y se han creado 72 uniones entre ellos. Además hay un número de 105 lechos vasculares. Por lo tanto, en la representación gráfica se ha optado por seleccionar un vaso representativo de cada generación, desde la entrada hasta llegar a los vasos terminales. El propósito de esta selección es exhibir de manera progresiva el comportamiento de la presión y el flujo sanguíneo.

Se explicará primeramente cómo se ha creado el modelo en SimVascular, para lo cual se ha seguido una serie de pasos, algunos de ellos ilustrados en la Figura 39:

1. Importación de datos médicos: Se ha comenzado importando imágenes de tomografía computarizada (TC) pulmonar.
2. Creación de trayectorias: Se toman puntos sobre las imágenes médicas creando rutas para guiar la segmentación y modelado de las estructuras vasculares en un modelo 3D. Estas trayectorias ayudan a definir la forma y la dirección de los vasos sanguíneos en el modelo.
3. Segmentación: Se han utilizado las herramientas de segmentación para delinear los vasos sanguíneos, cuya trayectoria ha sido previamente definida. En cada punto tomado se ha dibujado el área trasversal correspondiente, tomando como referencia las imágenes importadas.
4. Creación del modelo 3D: Con ayuda de los segmentos creados, se obtiene un modelo 3D de las arterias pulmonares.
5. Generación de mallas: Se ha convertido las segmentaciones en mallas 3D mediante las herramientas de generación de mallas, definiendo las resoluciones y tipos de malla necesarios. En este caso se ha tomado una malla con un tamaño de celda de 0.1mm .
6. Definición de propiedades: Se han asignado propiedades a las estructuras, como propiedades elásticas, densidad sanguínea y viscosidad sanguínea.
7. Asignación de condiciones de contorno: Se ha definido el flujo de entrada al modelo y se ha especificado un valor de resistencia inicial para cada vaso.
8. Ejecución de la simulación: Se ha ejecutado la simulación utilizando los parámetros y las condiciones configuradas. La simulación genera datos sobre el flujo, la presión y otras propiedades a lo largo del modelo.

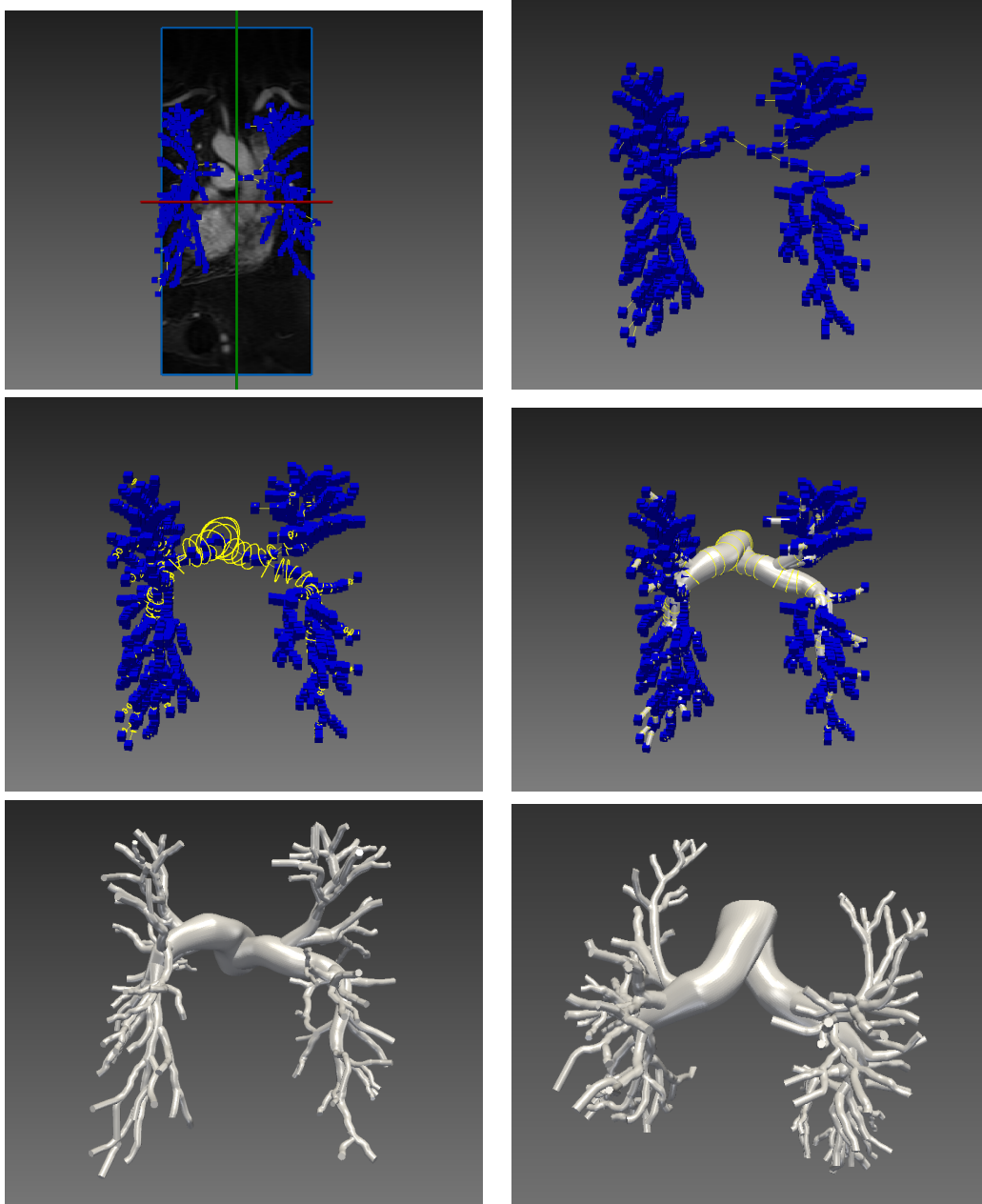


Figure 39: Sección 7. Vista de imágenes médicas y trayectorias (superior izquierda), trayectorias (superior derecha), segmentación (centro izquierda), creación del modelo 3D (centro derecha), vista frontal del modelo 3D (inferior izquierda), vista desde arriba del modelo 3D (inferior derecha).

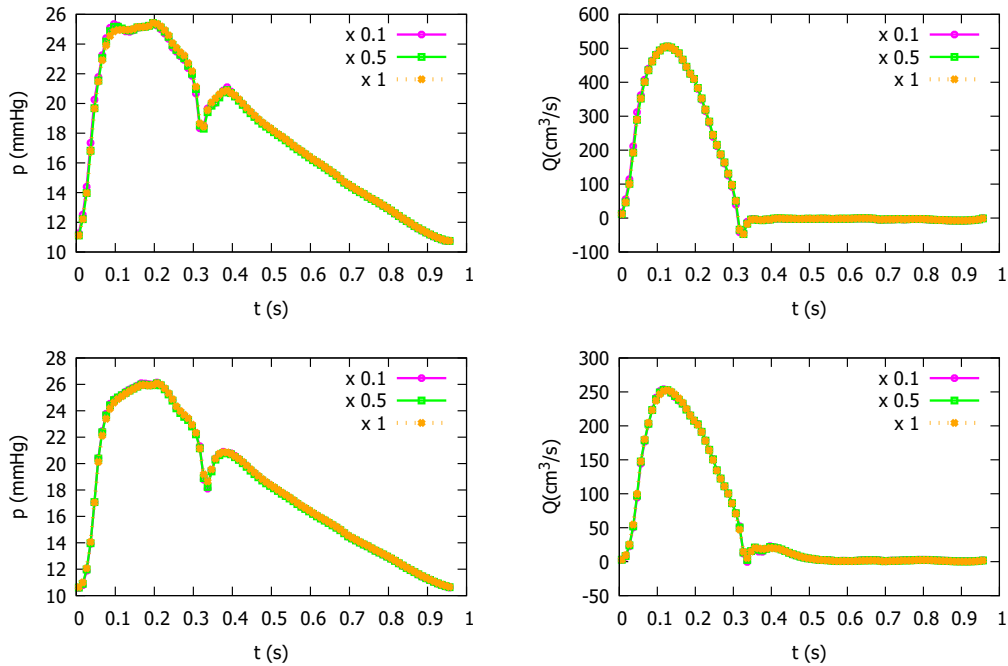


Figure 40: Sección 7. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y para el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

9. Análisis de datos: Se han extraído los datos resultantes para obtener información sobre el comportamiento hemodinámico del modelo y generar las gráficas a partir de las cuáles haremos el análisis.

A continuación se procederá a analizar el impacto de la resolución de la malla en los resultados de caudal y presión. Más variaciones pueden ser encontradas en el Anexo A.6.

7.0.1 Resolución de la malla

En las gráficas de las figuras 40, 41, 42, 43 y 44 podemos observar que utilizando un mayor refinamiento de la malla, con $\Delta x = 0.1$ cm, se puede alcanzar una mayor precisión. Se puede señalar por ejemplo la sístole en el primer vaso en la Figura 40, donde la presión sistólica puede verse mejor representada con una mayor resolución de malla. En cuanto al caudal, puede verse que la representación de los resultados se muestra mejor con $\Delta x = 0.1$ cm al fijarnos en la caída de caudal que se produce en $t = 0.35$ s en la Figura 42 o en el caudal máximo en la Figura 44.

7.0.2 Presión media, sistólica y diastólica

En una simulación de flujo sanguíneo a través de las arterias pulmonares, la evolución de las presiones diastólica, sistólica y media suele seguir ciertos patrones característicos a medida que el flujo avanza por el sistema vascular. Estos patrones van a ser comparados con los obtenidos en las Figuras 40, 41, 42, 43 y 44:

1. Presión Diastólica: A medida que el flujo sanguíneo avanza a lo largo de las arterias pulmonares, la presión diastólica tiende a disminuir gradualmente. Esto se debe en parte a la resistencia vascular y a la capacidad de las arterias para expandirse y acomodar el flujo sanguíneo. Sin embargo, en nuestras simulaciones, podría considerarse que la presión diastólica se mantiene constante.
2. Presión Sistólica: A medida que el flujo sanguíneo avanza por las arterias pulmonares, la presión sistólica puede experimentar algunas variaciones, pero tiende a disminuir en general. Esto puede deberse a la disipación de la energía del flujo a medida que recorre el sistema arterial y a la expansión y elasticidad de las arterias. Si nos fijamos en las gráficas obtenidas, vemos que la presión sistólica en este caso sigue un patrón similar, ya que primero aumenta y luego disminuye en los vasos terminales.

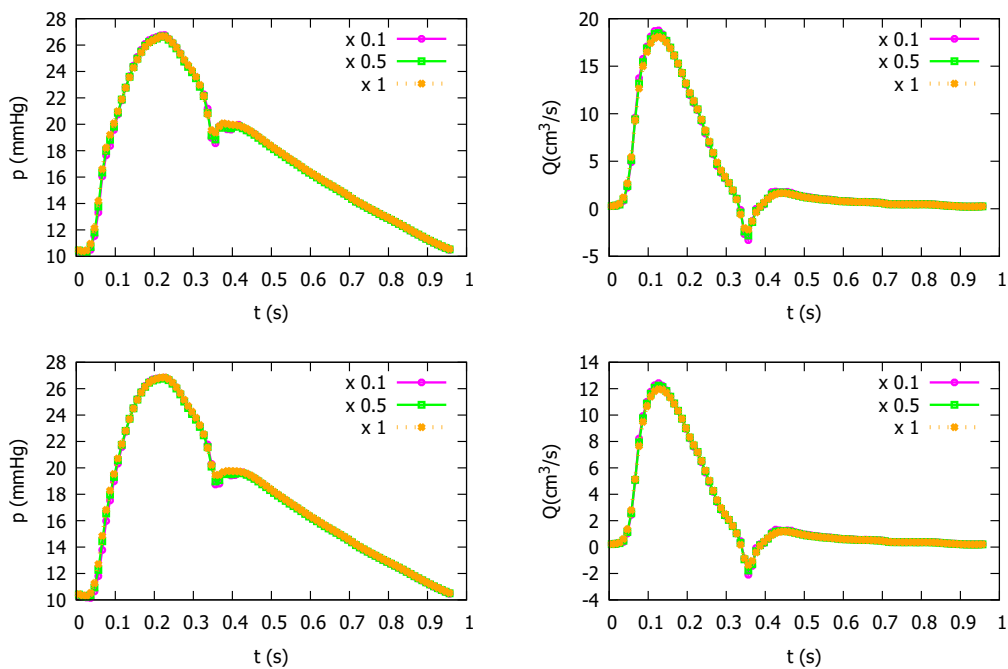


Figure 41: Sección 7. Solución numérica para el vaso 3 (parte superior) y para el vaso 4 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

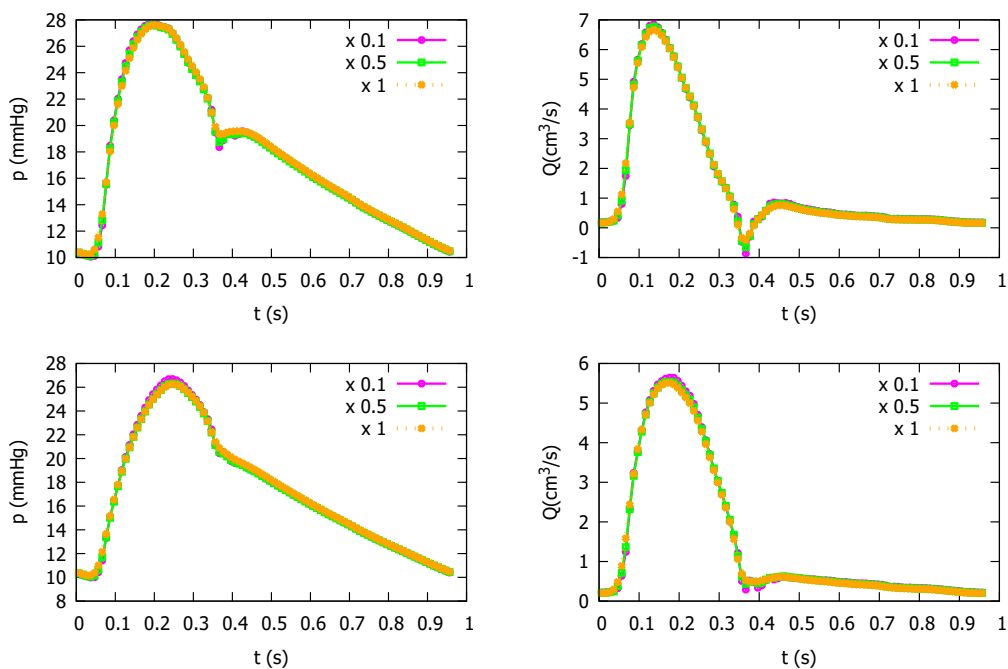


Figure 42: Sección 7. Solución numérica para el vaso 5 (parte superior) y para el vaso 9 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

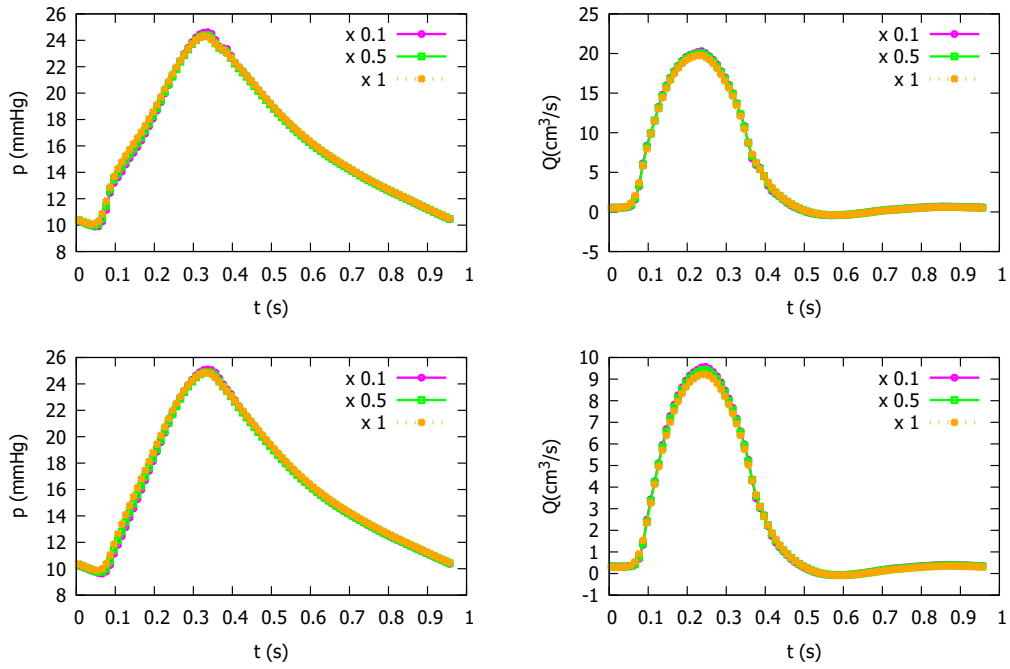


Figure 43: Sección 7. Solución numérica para el vaso 39 (parte superior) y para el vaso 40 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

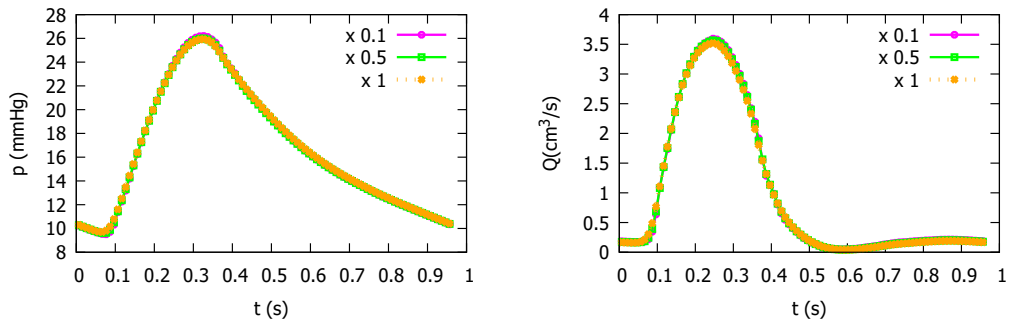


Figure 44: Sección 7. Soluciones numéricas para el vaso 41 con $\Delta x = variable$ y con $CFL = 0.5$.

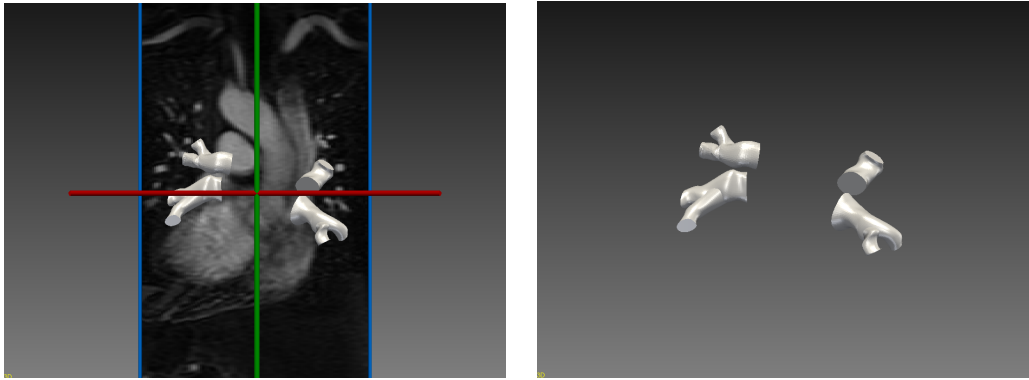


Figure 45: Sección 8. Venas pulmonares con imágenes médicas (izquierda) y modelo 3D venas pulmonares (derecha).

3. Presión Media: La presión arterial media es un promedio ponderado de las presiones diastólica y sistólica y refleja la presión promedio en el sistema arterial durante un ciclo cardíaco. A medida que el flujo avanza a través de las arterias pulmonares, la presión media también tiende a disminuir en comparación con la presión sistólica inicial. Esta disminución está influenciada por la relación entre las presiones sistólica y diastólica y por las características de resistencia y elasticidad de las arterias.

8 Análisis de la simulación de la circulación pulmonar arterial y venosa

En este caso se ha simulado aprovechando el modelo arterial pulmonar anterior pero eliminando el primer vaso de entrada y añadiendo las cuatro venas pulmonares por las que la sangre fluye de vuelta al corazón. Estas venas pulmonares han sido modeladas con SimVascular de igual manera que las arterias pulmonares, las cuales constan de dos a cinco vasos y pueden verse en la Figura 45.

Se ha realizado la simulación hemodinámica en siete generaciones desde los capilares pulmonares hasta las venas de retorno al corazón.

A continuación se ha realizado una comparación del caudal y la presión del flujo de sangre por las arterias entre el modelo que solo contiene la parte arterial pulmonar y el modelo que contiene la parte pulmonar venosa unida a la arterial.

8.1 Comparación modelo arterial pulmonar y venoso

Como se muestra en las figuras 46, 47, 48, 49 y 44, en la parte arterial pulmonar, de ambos modelos se obtiene la misma solución por parte del caudal. En cuanto a la presión, si que podemos ver alguna diferencia en la diástole, siendo mayor la presión de la parte arterial sin parte venosa. Esto es debido a que al ser el modelo con parte venosa más complejo geoméricamente, la resistencia al flujo puede aumentar y provocar una disminución de la presión.

8.2 Simulación de la circulación pulmonar venosa

Los resultados de la simulación de la circulación pulmonar venosa con variaciones en el tamaño de la malla se muestran en las Figuras 51, 52 y 53. En ellos podemos observar que existe muy poca variación tanto en el caudal como en la presión. Esto es debido a que la principal función de la circulación pulmonar venosa, de gran complianza y baja resistencia, es recoger el flujo saliente de los lechos capilares, donde ocurre el intercambio de oxígeno y dióxido de carbono entre la sangre y los alvéolos pulmonares. Este intercambio de gases debe ocurrir a una presión y caudal prácticamente constante. En el Anexo A.7 pueden encontrarse los resultados obtenidos variando el CFL.

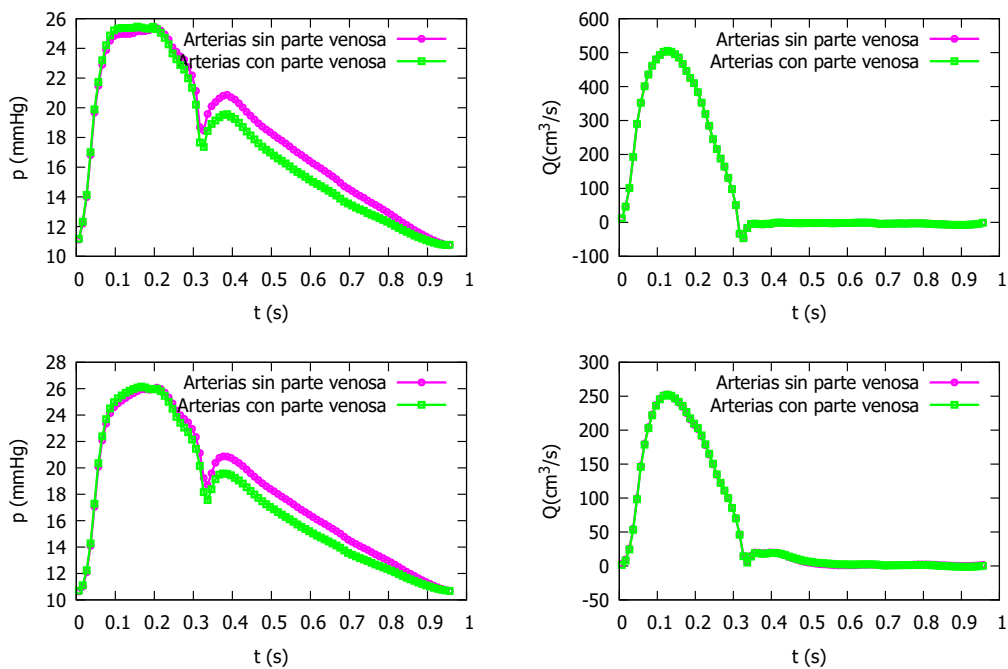


Figure 46: Sección 8. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y para el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

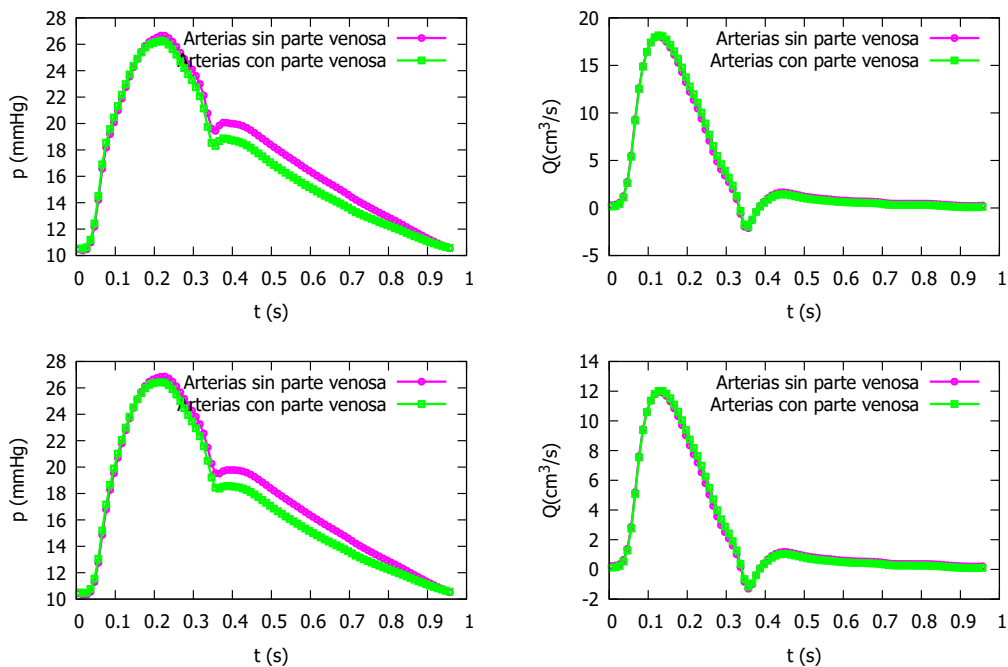


Figure 47: Sección 8. Solución numérica para el vaso 3 (parte superior) y para el vaso 4 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

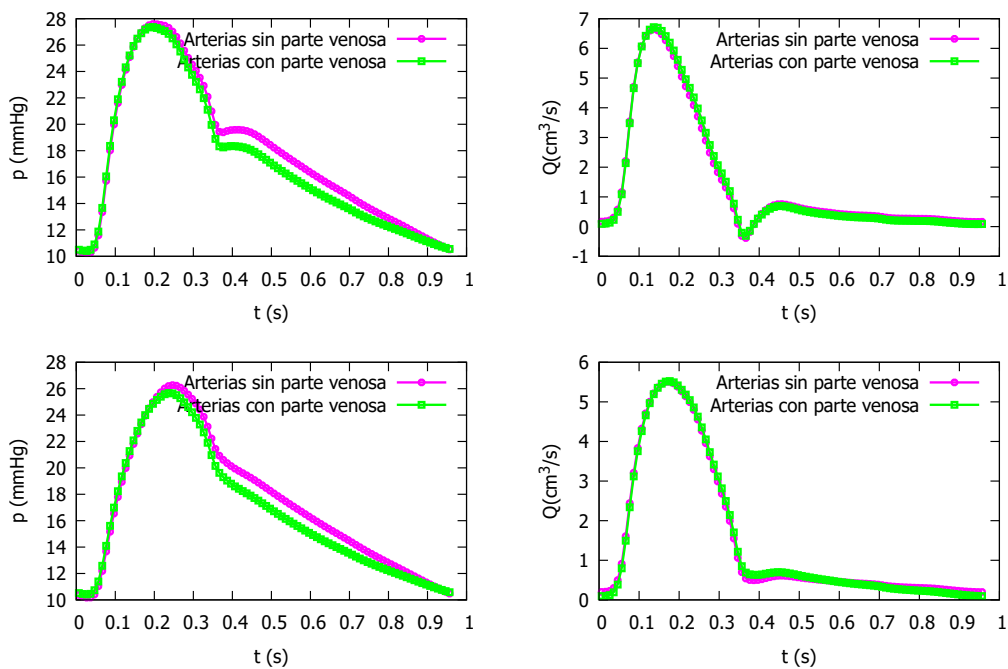


Figure 48: Sección 8. Solución numérica para el vaso 5 (parte superior) y para el vaso 9 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

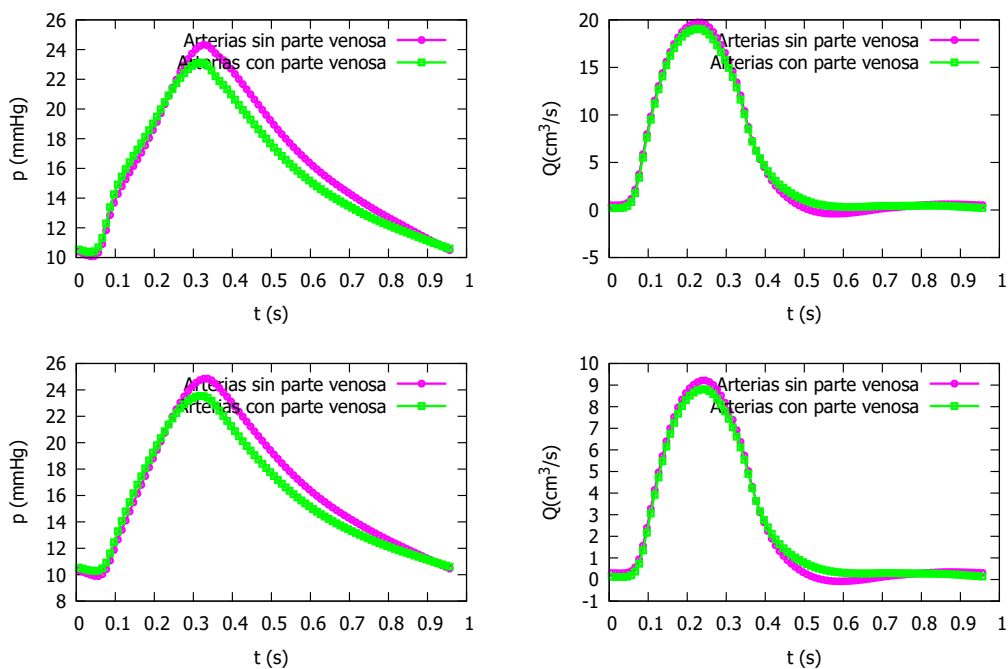


Figure 49: Sección 8. Solución numérica para el vaso 39 (parte superior) y para el vaso 40 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

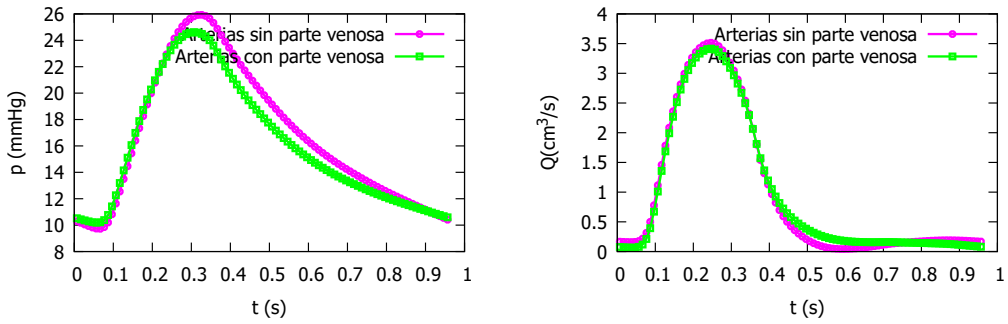


Figure 50: Sección 8. Solución numérica para el vaso 41, para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

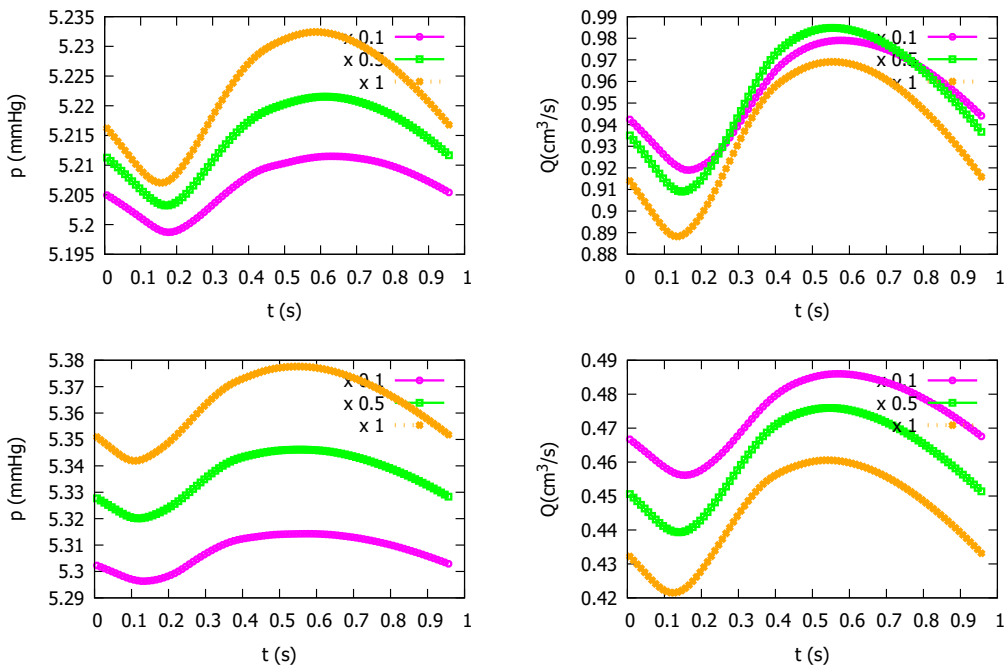


Figure 51: Sección 8. Solución numérica para el vaso 200 (parte superior) y para el vaso 201 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = \text{variable}$.

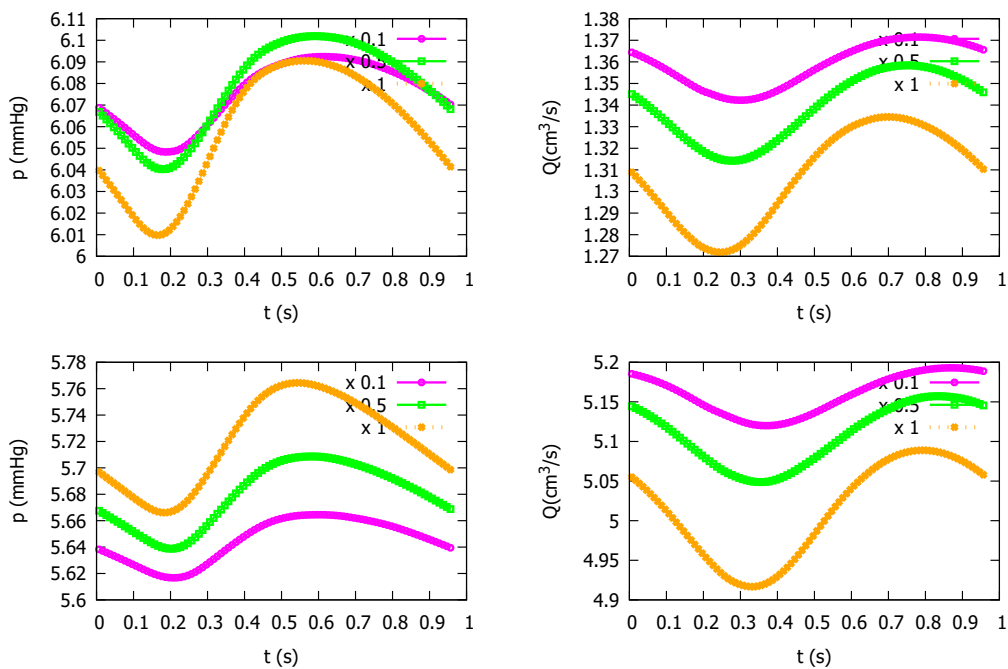


Figure 52: Sección 8. Solución numérica para el vaso 208 (parte superior) y para el vaso 216 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = \text{variable}$.

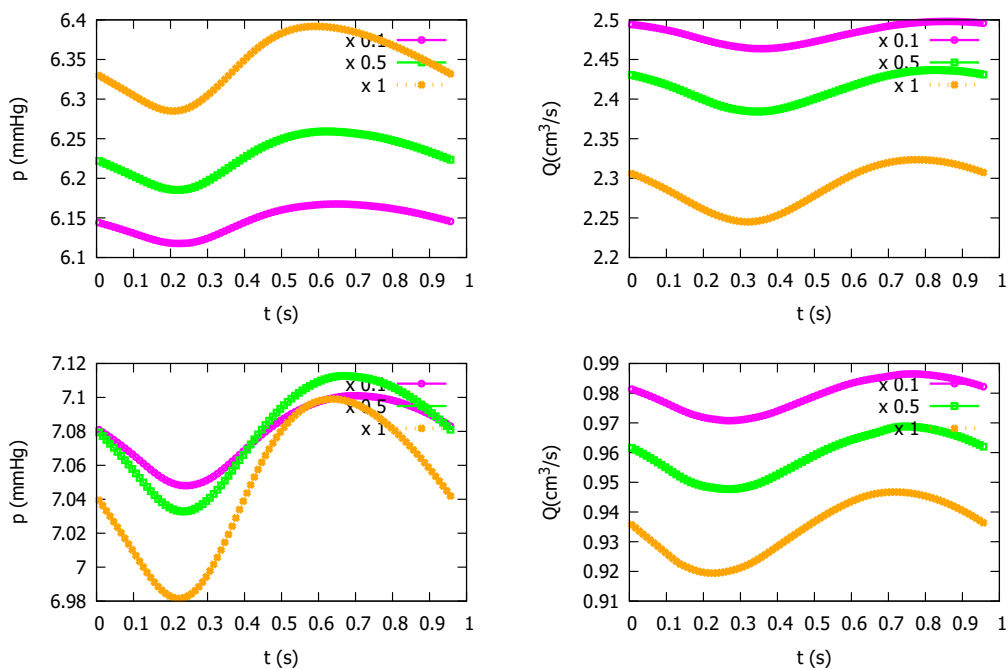


Figure 53: Sección 8. Solución numérica para el vaso 217 (parte superior) y para el vaso 218 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = \text{variable}$.

8.2.1 Presión media, sistólica y diastólica

Como se ha podido observar en el apartado anterior, hay muy poca variación de presión en el retorno venoso. Además, la presión venosa suele ser más baja que la presión arterial, ya que los vasos venosos tienen paredes más delgadas y menos musculatura que los vasos arteriales.

9 Conclusiones

Basándonos en los resultados obtenidos de las pruebas realizadas en los distintos modelos, podemos extraer las conclusiones de este estudio.

En la primera parte se ha realizado un análisis de la simulación de la circulación sistémica, utilizando una serie de modelos que representan la arteria carótida común, la aorta torácica, el punto de bifurcación aórtica y la aorta en su totalidad desde el arco hasta la bifurcación ilíaca, y se han comparado con los resultados obtenidos por J. Alastruey. Con estas comparaciones hemos podido comprobar que nuestras simulaciones se han realizado de forma correcta al ajustarse todas ellas a la solución alcanzada en la literatura.

Una vez comprobada la validez de nuestras simulaciones, se ha procedido a realizar variaciones con el objetivo de descubrir el impacto que tiene cada parámetro en los resultados de caudal y presión en cada modelo.

Es destacable el efecto que tiene el uso de distintos métodos para el cálculo de la velocidad de propagación de onda. En los modelos de la arteria carótida común, aorta con estrechamiento y en la aorta completa, cuando se utiliza el método de Olufsen, método conocido por su eficiencia en estudios a gran escala y análisis generales, se obtienen unos resultados menos exactos que cuando se da uso del método de Reymond. Para otros modelos como la carótida con estrechamiento o la bifurcación aórtica no se ha encontrado una gran diferencia entre los resultados al usar los dos métodos.

En varios modelos se ha visto que también tiene importancia la variación del área y los cambios que ha generado sobre todo en el caudal, resultando en una reducción de caudal en la sístole y un aumento en la diástole cuando el área se incrementa y un aumento de caudal en la sístole y una reducción en la diástole cuando se disminuye el área.

Por otra parte, se ha variado el número de Courant-Friedrichs-Lewy. Su variación influye en la estabilidad, precisión y eficiencia de la simulación. Se ha comprobado que un CFL grande puede causar inestabilidades numéricas, mientras que uno pequeño mejora la precisión pero puede aumentar los costos computacionales. Ajustar el valor óptimo de CFL busca equilibrar la estabilidad numérica, la precisión y la eficiencia en la simulación del flujo sanguíneo.

Como se ha podido ver en las simulaciones, la variación del tamaño de celda en la malla de una simulación hemodinámica involucra un equilibrio entre la precisión y la eficiencia computacional. Se debe elegir cuidadosamente para garantizar que los resultados sean confiables y representativos de los fenómenos hemodinámicos que se están estudiando.

En la segunda parte se ha realizado un análisis sobre una simulación de la circulación pulmonar arterial. Para llevarla a cabo se ha creado un modelo 3D de las arterias pulmonares con la ayuda del programa de simulación hemodinámica SimVascular. Una vez creado el modelo, se ha realizado una simulación 1D con él, se han extraído los datos de caudal y presión resultantes y se ha efectuado una simulación variando el CFL, donde ha vuelto a ser evidente que un valor de CFL pequeño mejora la precisión de los resultados.

Por último se presenta un análisis de la simulación de la circulación pulmonar arterial añadiéndole la parte venosa del retorno al corazón. Para ello se han modelado en SimVascular cuatro venas de retorno, se ha llevado a cabo una simulación hemodinámica 1D y se han extraído los datos de la resolución de la misma. Esos datos han servido para crear el modelo de unión de la parte arterial y la venosa, en el cual simplemente se ha retirado el vaso de entrada del flujo a las arterias pulmonares y se ha sustituido por las cuatro venas de retorno.

Se ha comparado el caudal y la presión de los modelos arterial pulmonar sin parte venosa y con parte venosa y se ha obtenido que la presión disminuye en el modelo que sí tiene la parte venosa acoplada. Además se han mostrado gráficas que representan el caudal y la presión del flujo de sangre en la parte pulmonar venosa y se ha podido comprobar que los dos sufren variaciones muy leves.

Para concluir, quedaría demostrado que la herramienta de simulación es capaz de calibrar modelos complejos incluyendo modelos arteriales y venosos integrados, lo que nos hace poder prescindir de modelos 3D, que conllevarían mucho más esfuerzo computacional.

References

- [1] Francesca Bellamoli, Lucas O. Müller, and Eleuterio F. Toro. A numerical method for junctions in networks of shallow-water channels. *Applied Mathematics and Computation*, 337:190–213, 2018.
- [2] J.J. Wang and K.H. Parker. Wave propagation in a model of the arterial circulation. *Journal of Biomechanics*, 37(4):457–470, 2004.
- [3] Nan Xiao, Jordi Alastruey, and C. Alberto Figueroa. A systematic comparison between 1-d and 3-d hemodynamics in compliant arterial models. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 30(2):204–231, 2014.
- [4] P. Morgan and K.H. Parker. A mathematical model of flow through a collapsible tube—i. model and steady flow results. *Journal of Biomechanics*, 22(11):1263–1270, 1989.
- [5] T.J. Pedley and X.Y. Luo. Modelling flow and oscillations in collapsible tubes. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 10:277–294, 1998.
- [6] S Bassez, P Flaud, and M Chauveau. Modeling of the deformation of flexible tubes using a single law: application to veins of the lower limb in man. *Journal of biomechanical engineering*, 123(1):58–65, February 2001.
- [7] Emilie Marchandise and Patrice Flaud. Accurate modelling of unsteady flows in collapsible tubes. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 13(2):279–290, 2010. PMID: 20373183.
- [8] H. Ho, K. Mithraratne, and P. Hunter. Numerical simulation of blood flow in an anatomically-accurate cerebral venous tree. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 32:85–91, 2013.
- [9] Lucas O. Müller and Eleuterio F. Toro. A global multiscale mathematical model for the human circulation with emphasis on the venous system. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 30(7):681–725, 2014.
- [10] Lucas O. Müller and Eleuterio F. Toro. Enhanced global mathematical model for studying cerebral venous blood flow. *Journal of Biomechanics*, 47(13):3361–3372, 2014.
- [11] Jonathan P. Mynard and Joseph J. Smolich. One-dimensional haemodynamic modeling and wave dynamics in the entire adult circulation. *Ann Biomed Eng*, 43:1443–1460, 2015.
- [12] Ascher H. Shapiro. Steady Flow in Collapsible Tubes. *Journal of Biomechanical Engineering*, 99(3):126–147, 08 1977.
- [13] Xiancheng Zhang, Shigeho Noda, Ryutaro Himeno, and Hao Liu. Gravitational effects on global hemodynamics in different postures: A closed-loop multiscale mathematical analysis. *Acta Mechanica Sinica*, 33(3):595–618, June 2017.
- [14] S.J. Sherwin, V. Franke, J. Peiró, and K. Parker. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. *Journal of Engineering Mathematics*, 47(3/4):217–250, dec 2003.
- [15] S. J. Sherwin, L. Formaggia, J. Peiró, and V. Franke. Computational modelling of 1d blood flow with variable mechanical properties and its application to the simulation of wave propagation in the human arterial system. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 43(6-7):673–700, 2003.
- [16] J. Alastruey, K. H. Parker, J. Peiró, and S. J. Sherwin. Lumped parameter outflow models for 1-d blood flow simulations: Effect on pulse waves and parameter estimation. *Communications in Computational Physics*, 4(2):317–336, 2008.
- [17] J. P. Mynard, M. R. Davidson, D. J. Penny, and J. J. Smolich. A simple, versatile valve model for use in lumped parameter and one-dimensional cardiovascular models. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 28(6-7):626–641, 2012.

- [18] Eleuterio Francisco Toro, Morena Celant, Qinghui Zhang, Christian Contarino, Nivedita Agarwal, Andreas Linninger, and Lucas Omar Müller. Cerebrospinal fluid dynamics coupled to the global circulation in holistic setting: Mathematical models, numerical methods and applications. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 38(1):e3532, 2022.
- [19] J. Murillo and P. García-Navarro. A roe type energy balanced solver for 1d arterial blood flow and transport. *Computers and Fluids*, 117:149 – 167, 2015.
- [20] J. Murillo, A. Navas-Montilla, and P. García-Navarro. Formulation of exactly balanced solvers for blood flow in elastic vessels and their application to collapsed states. *Computers and Fluids*, 186:74–98, 2019.
- [21] Javier Murillo and Pilar García-Navarro. A solution of the junction riemann problem for 1d hyperbolic balance laws in networks including supersonic flow conditions on elastic collapsible tubes. *Symmetry*, 13(9), 2021.
- [22] Javier Murillo and Pilar García-Navarro. Numerical coupling of 0d and 1d models in networks of vessels including transonic flow conditions. application to short-term transient and stationary hemodynamic simulation of postural changes. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, n/a(n/a):e3751.
- [23] A. Siviglia Eleuterio F. Flow in collapsible tubes with discontinuous mechanical properties: Mathematical model and exact solutions. *Communications in Computational Physics*, 13(2):361–385, 2013.
- [24] E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, third edition, 2009.
- [25] Ascher H. Shapiro. Steady Flow in Collapsible Tubes. *Journal of Biomechanical Engineering*, 99(3):126–147, 08 1977.
- [26] J. Murillo and P. García-Navarro. Augmented versions of the hll and hllc riemann solvers including source terms in one and two dimensions for shallow flow applications. *Journal of Computational Physics*, 231(20):6861 – 6906, 2012.
- [27] Mette Sofie Olufsen, Charles S. Peskin, Won Yong Kim, Erik Morre Pedersen, Ali Nadim, and Jesper K. Larsen. Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured-tree outflow conditions. *Annals of Biomedical Engineering*, 28:1281–1299, 2000.
- [28] Philippe Reymond, Yvette Bohraus, Fabienne Perren, François Lazeyras, and Nikos Stergiopoulos. Validation of a patient-specific one-dimensional model of the systemic arterial tree. *American journal of physiology. Heart and circulatory physiology*, 301 3:H1173–82, 2011.

A Anexo

A.1 Aorta torácica

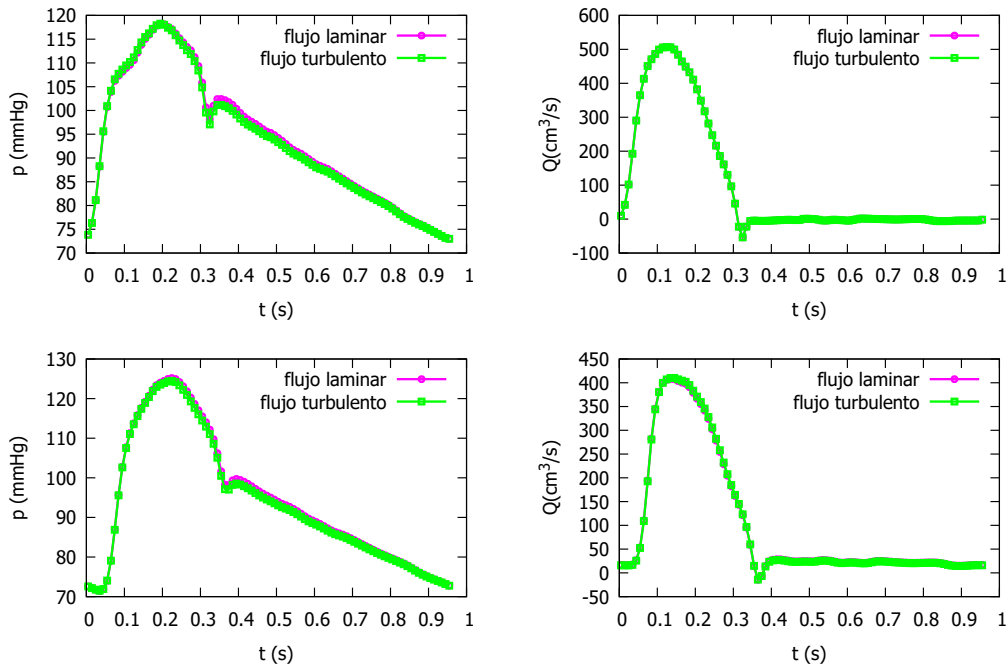


Figure 54: Sección 5.2. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. La simulación se ha calibrado en el segundo vaso. Para flujo laminar y turbulento.

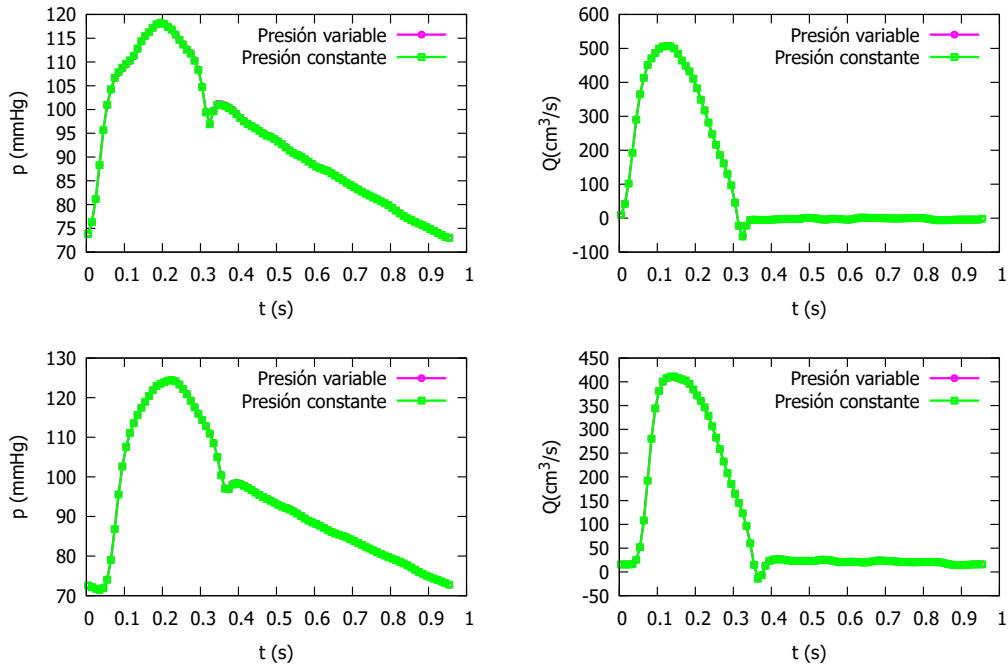


Figure 55: Sección 5.2. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. La simulación se ha calibrado en el segundo vaso. Para presión variable y constante.

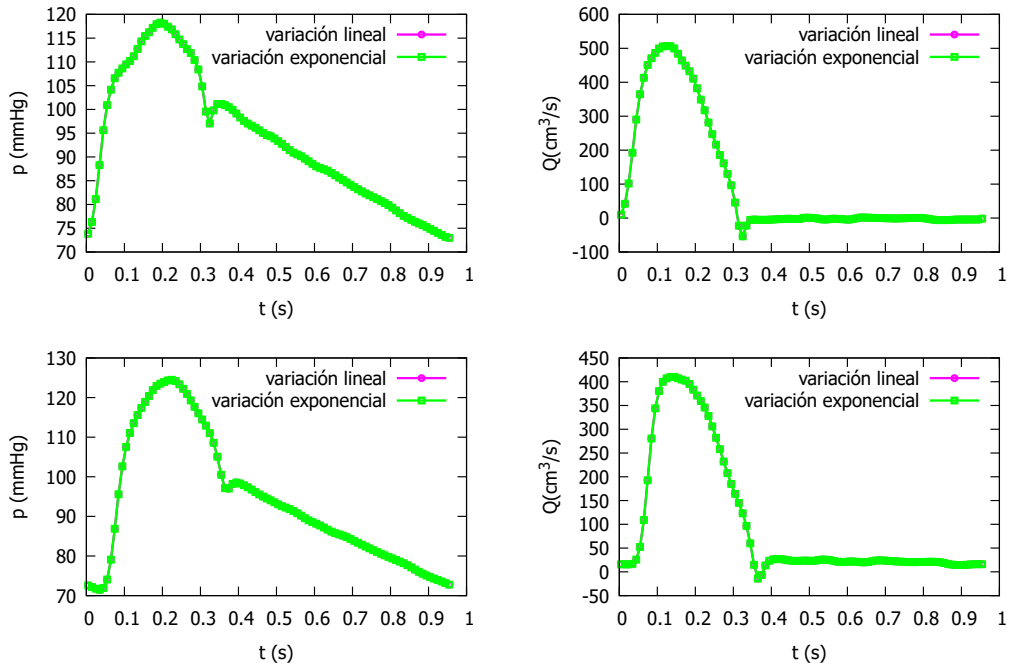


Figure 56: Sección 5.2. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con variación de radio lineal y exponencial.

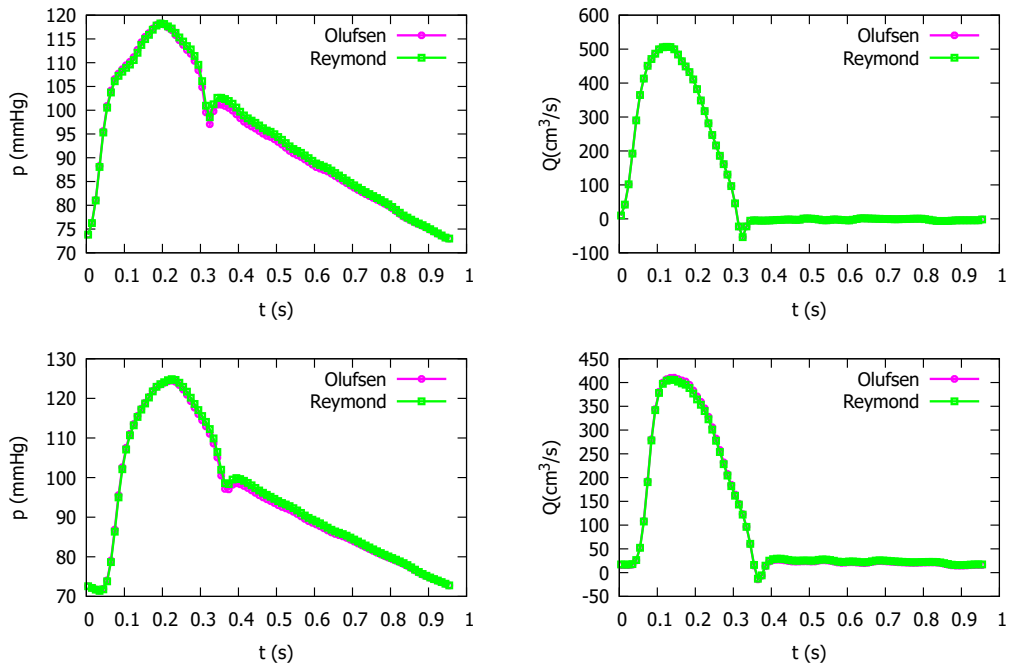


Figure 57: Sección 5.2. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con método Olufsen y con método Reymond.

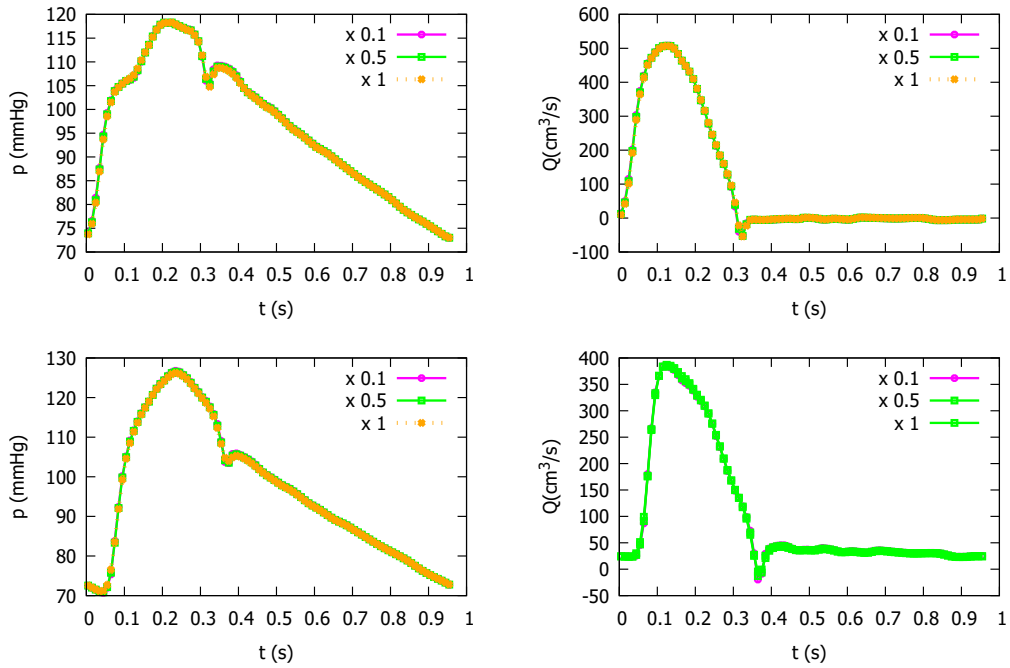


Figure 58: Sección 5.2. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = \text{variable}$.

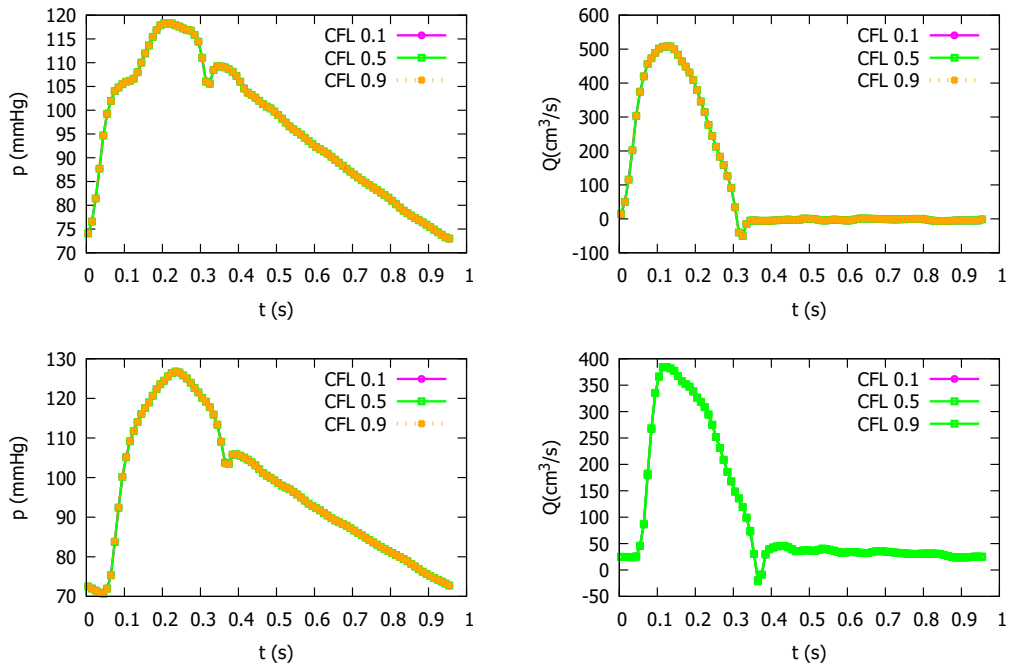


Figure 59: Sección 5.2. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = \text{var}$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

A.2 Carótida con estrechamiento

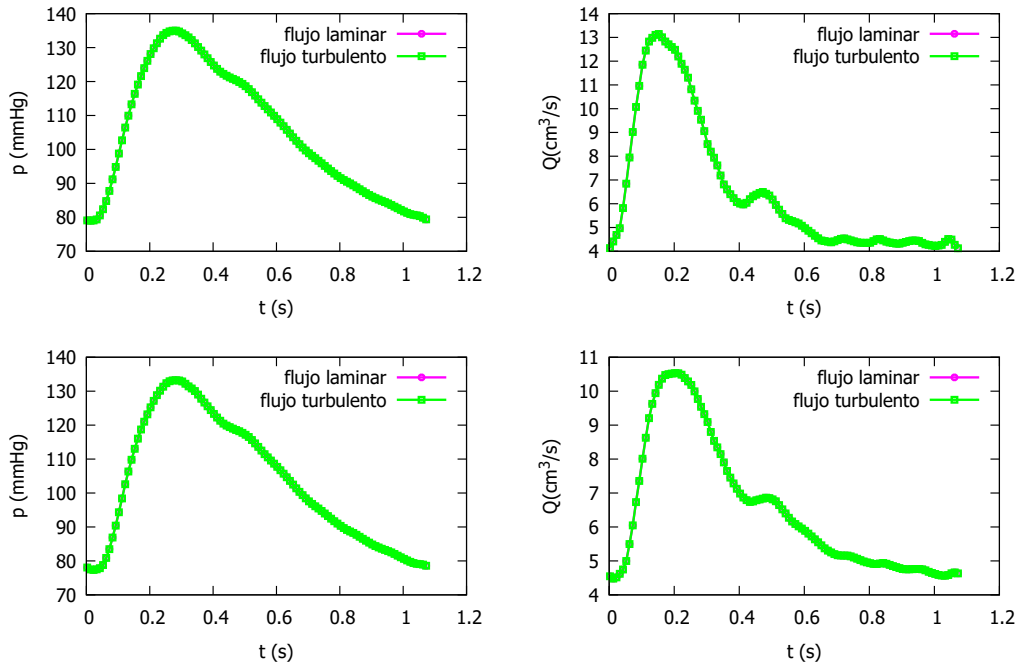


Figure 60: Sección 5.3. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con flujo laminar y turbulento.

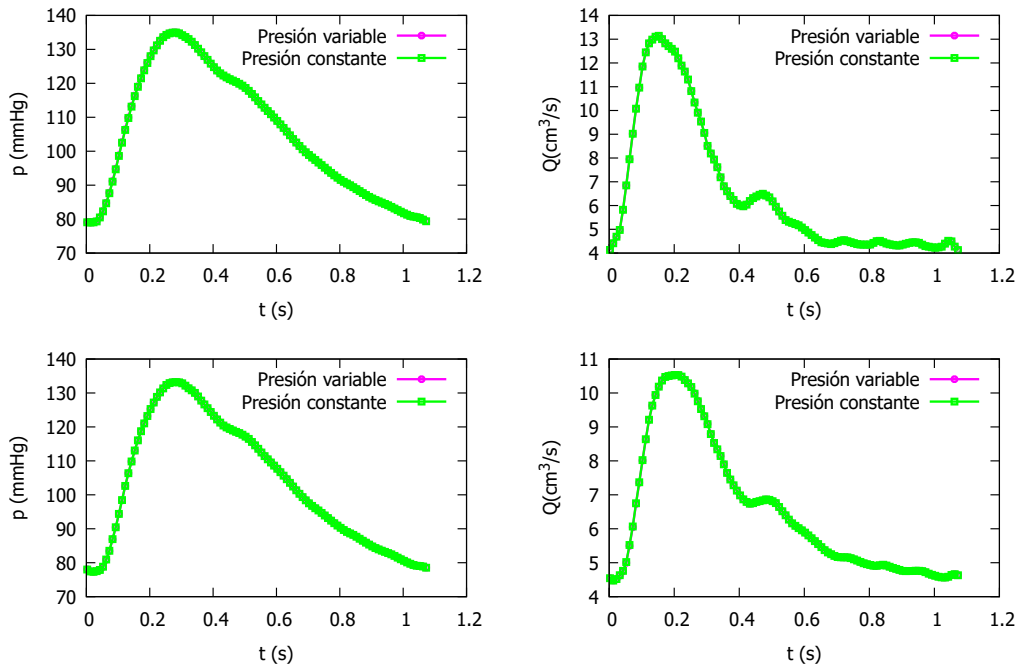


Figure 61: Sección 5.3. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con presión constante y variable.

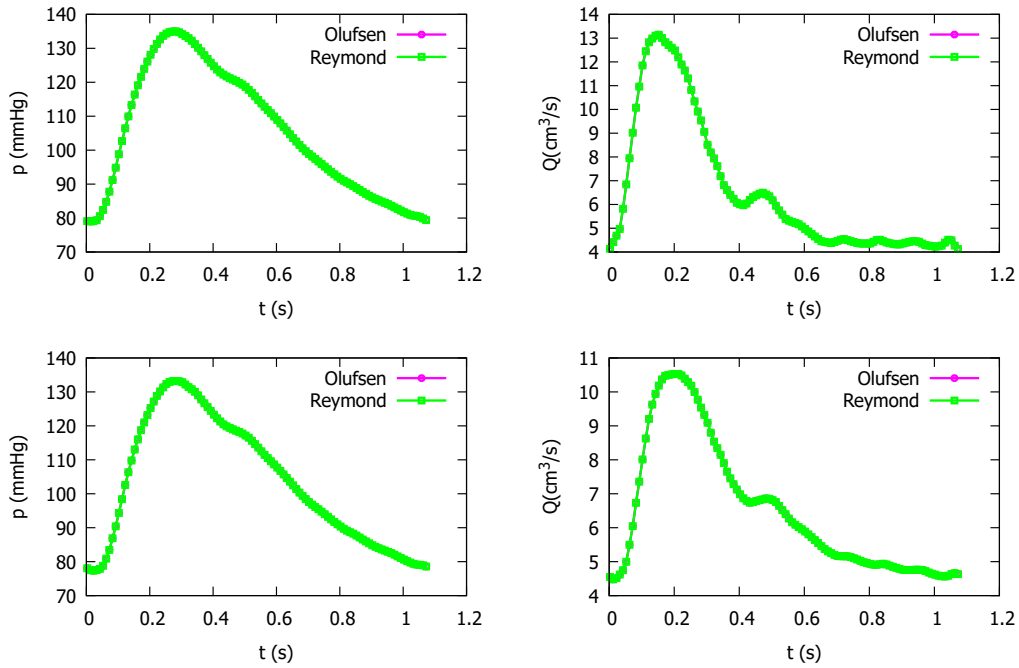


Figure 62: Sección 5.3. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Se han utilizado los métodos de Olufsen y Reymond.

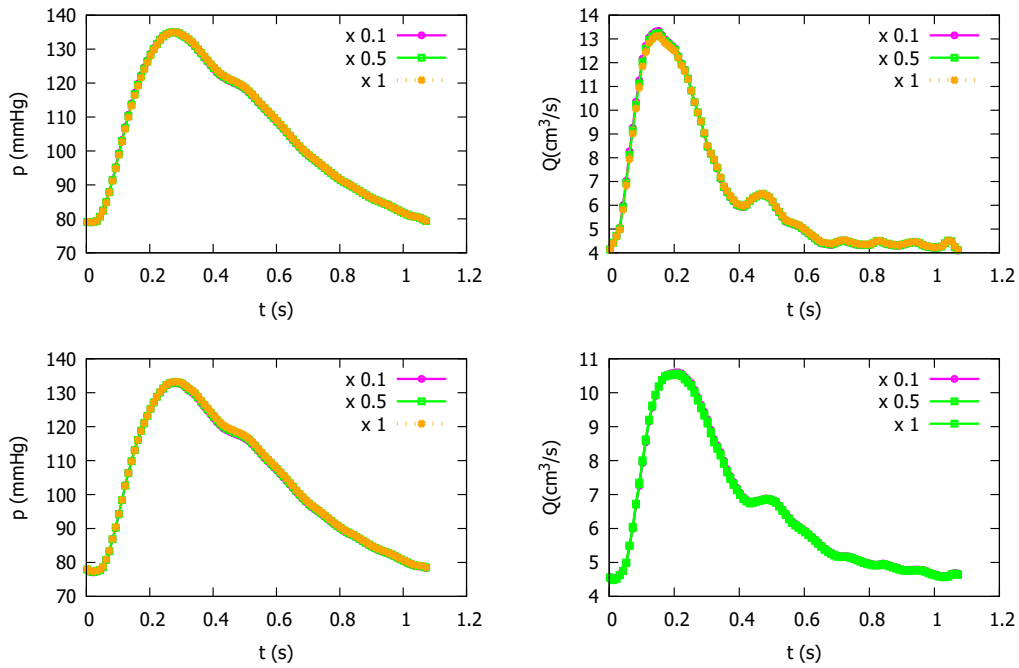


Figure 63: Sección 5.3. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = \text{variable}$.

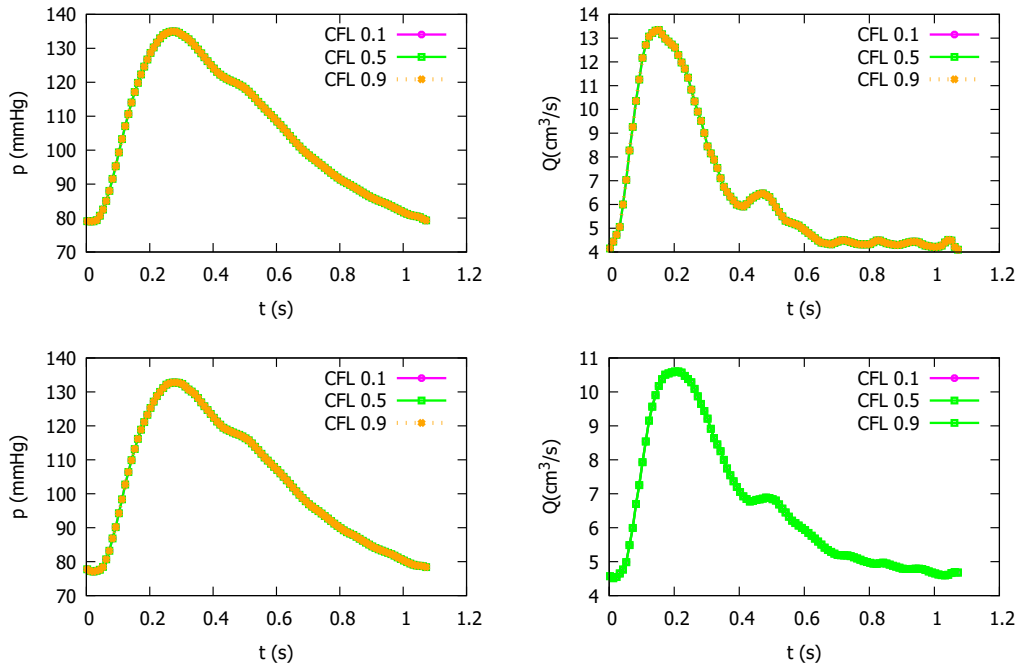


Figure 64: Sección 5.3. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = \text{variable}$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

A.3 Aorta con estrechamiento

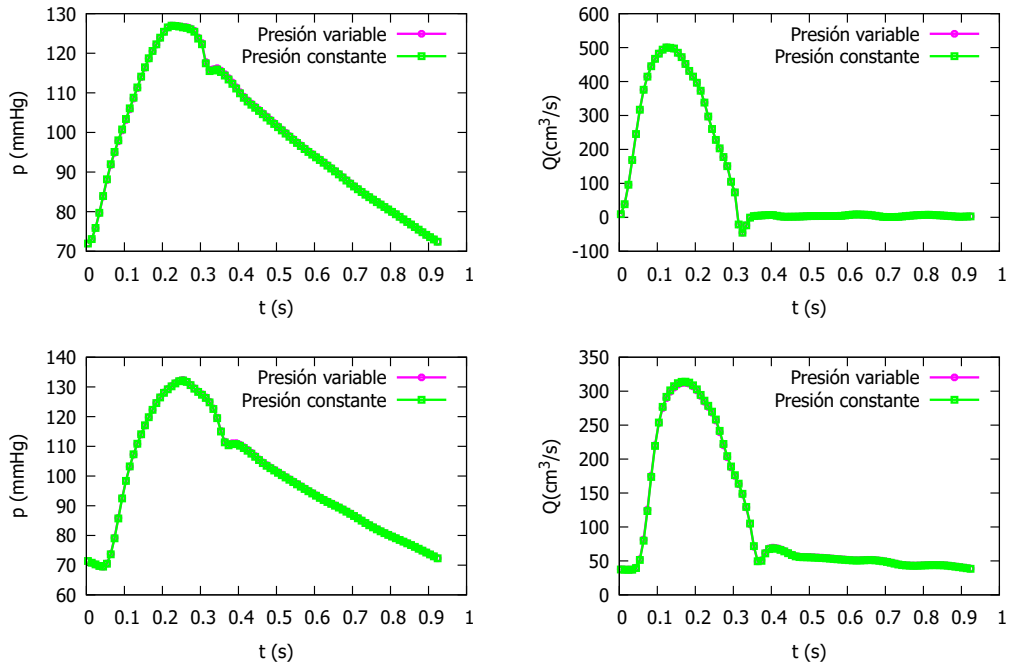


Figure 65: Sección 5.4. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con presión constante y variable.

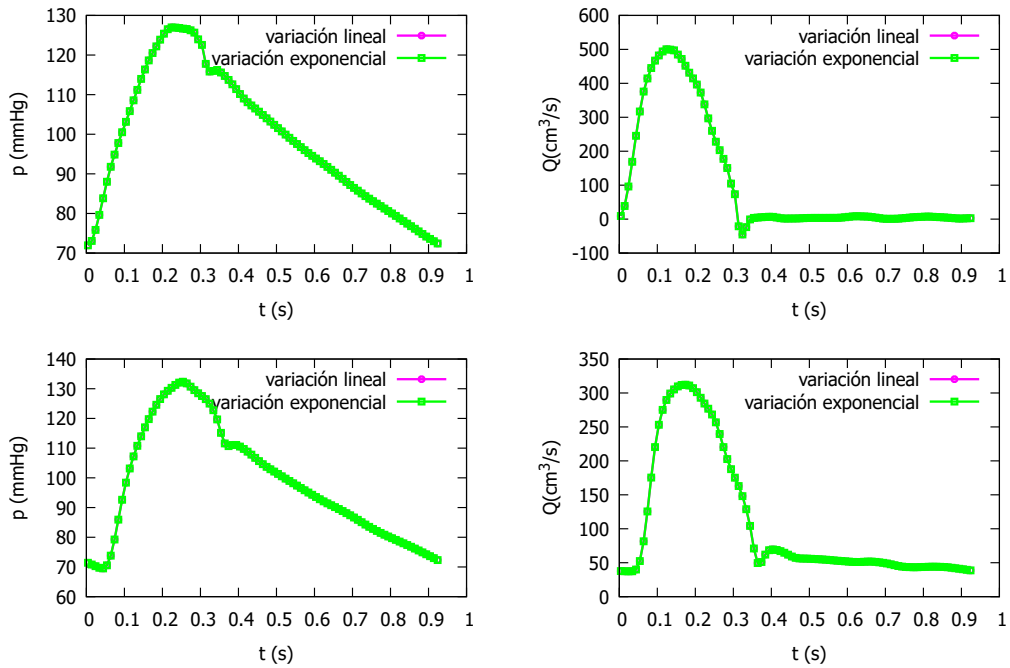


Figure 66: Sección 5.4. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con variación lineal y exponencial del radio del vaso.

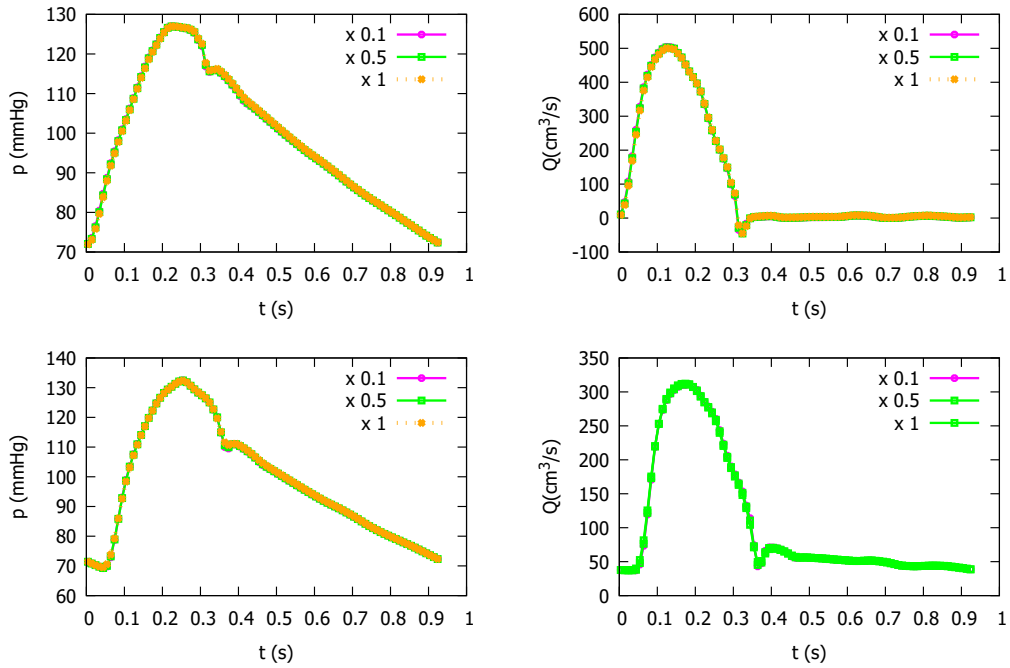


Figure 67: Sección 5.4. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x =$ variable cm.

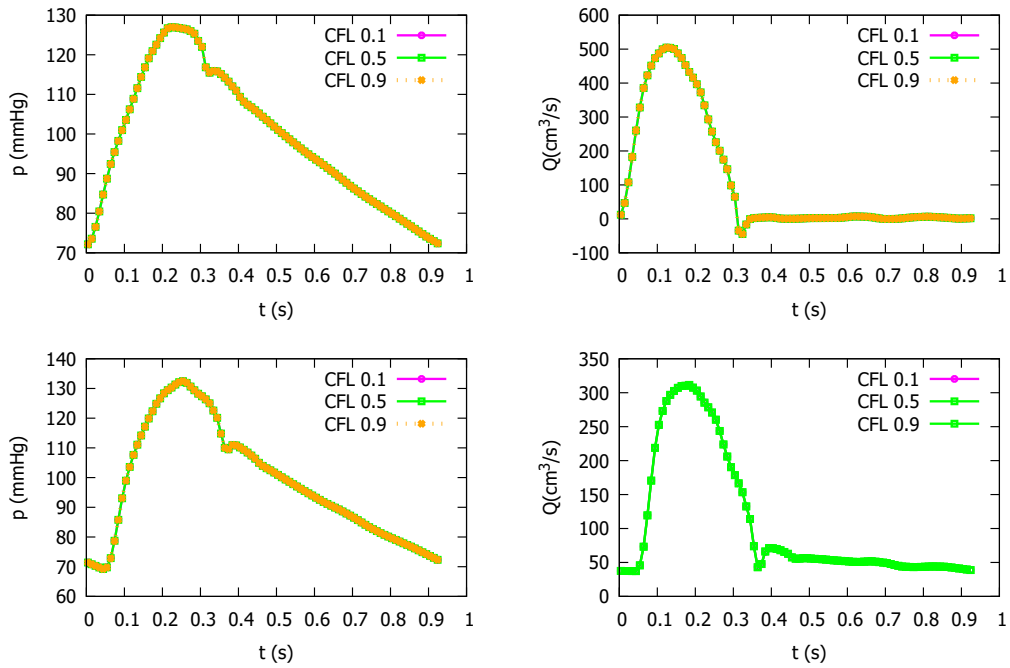


Figure 68: Sección 5.4. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y el vaso 2 (parte inferior), para $CFL =$ variable, con $\Delta x = 1.0$ cm.

A.4 Bifurcación Aórtica

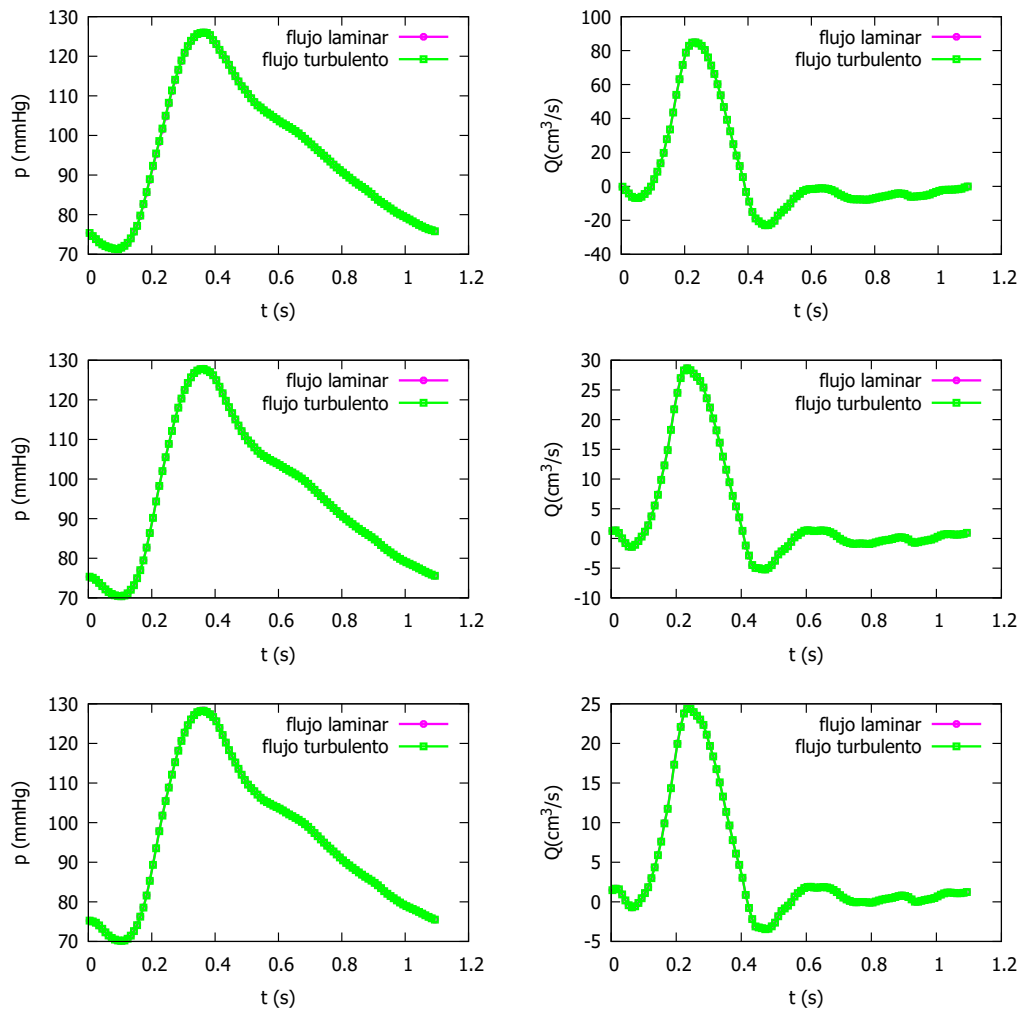


Figure 69: Section 5.5. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior), el vaso 2 (parte central) y el vaso 3 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con flujo turbulento y con flujo laminar.

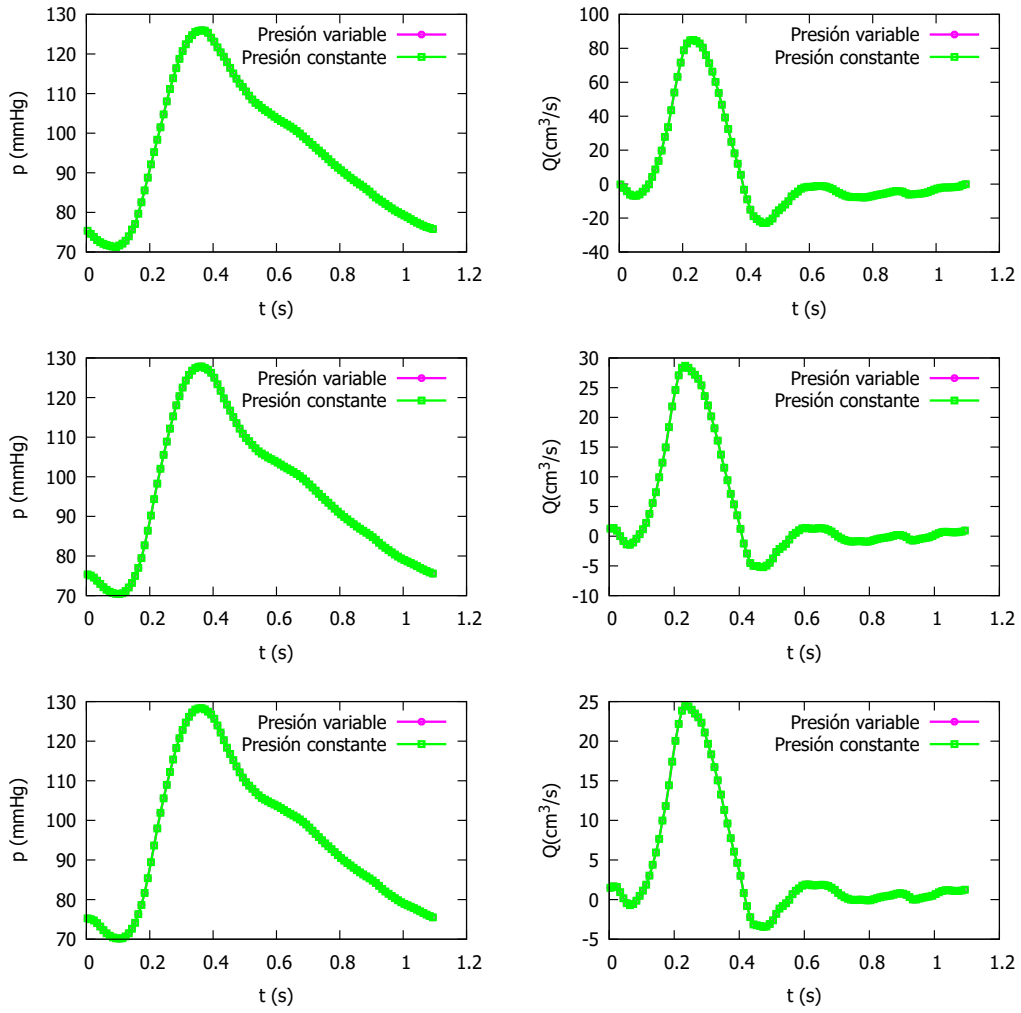


Figure 70: Section 5.5. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior), el vaso 2 (parte central) y el vaso 3 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con presión constante y variable.

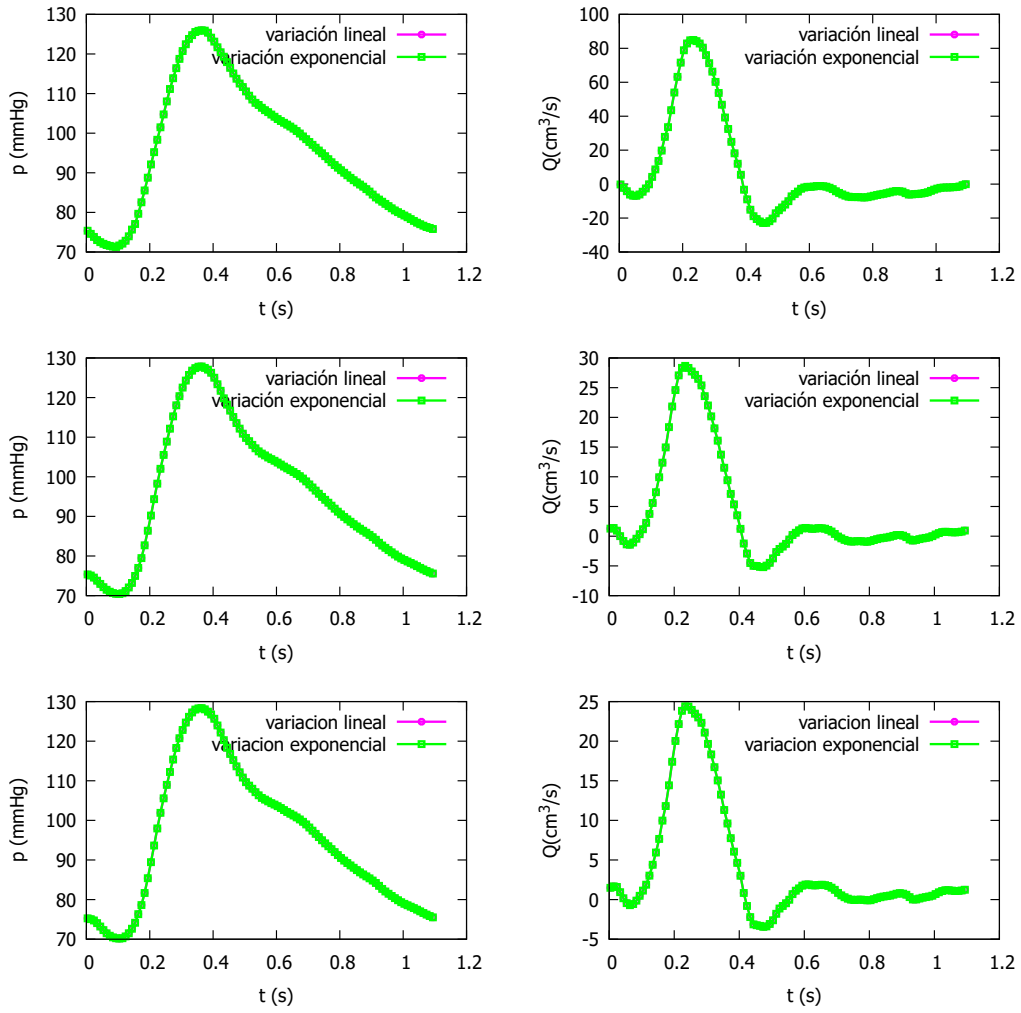


Figure 71: Section 5.5. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior), el vaso 2 (parte central) y el vaso 3 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con variación del radio del vaso lineal y exponencial.

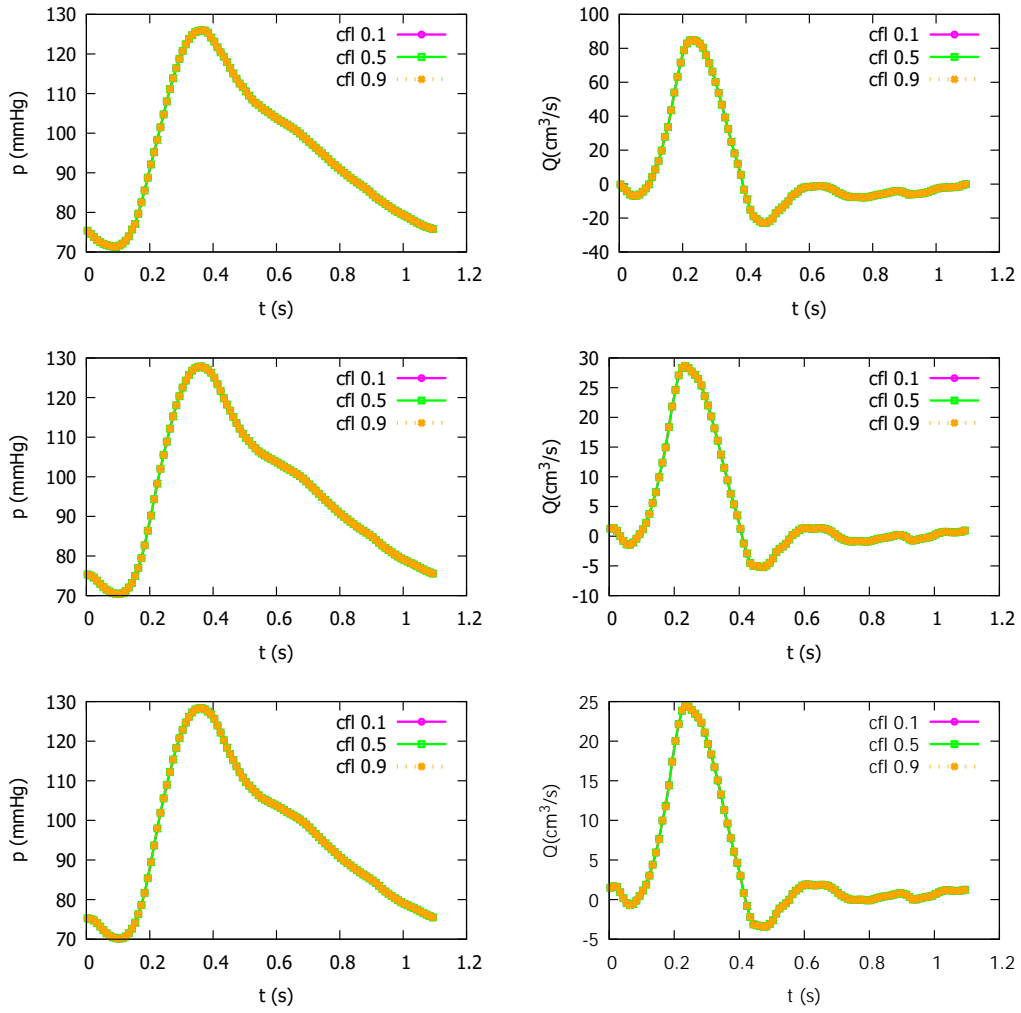


Figure 72: Section 5.5. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior), el vaso 2 (parte central) y el vaso 3 (parte inferior), para $CFL = \text{variable}$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

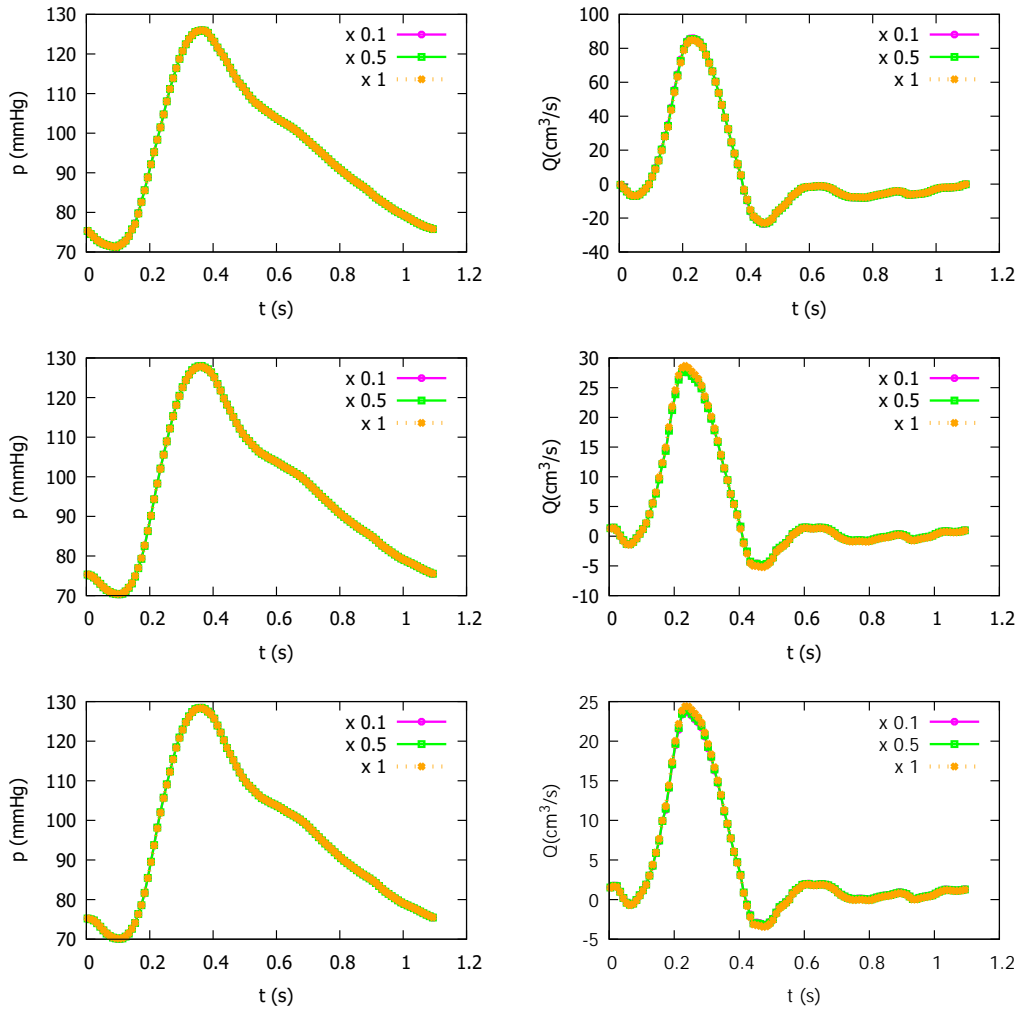


Figure 73: Section 5.5. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior), el vaso 2 (parte central) y el vaso 3 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x =$ variable.

A.5 Aorta Completa

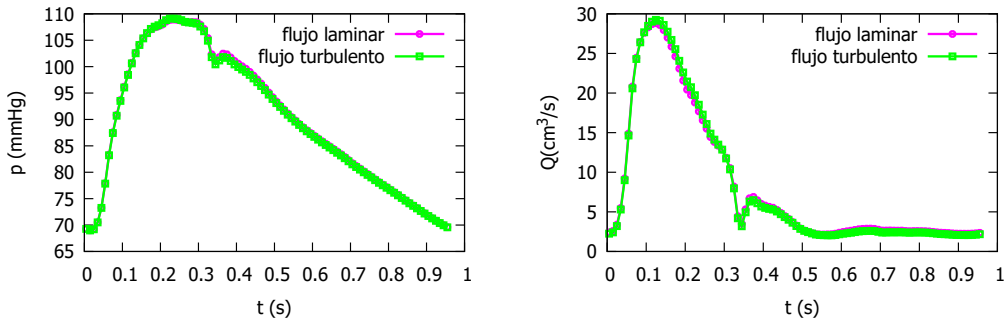


Figure 74: Sección 6. Solución numérica para el vaso 13, subclavia izquierda torácica utilizando $\Delta x = 1.0$ cm y CFL = 0.5. Con flujo laminar y turbulento.

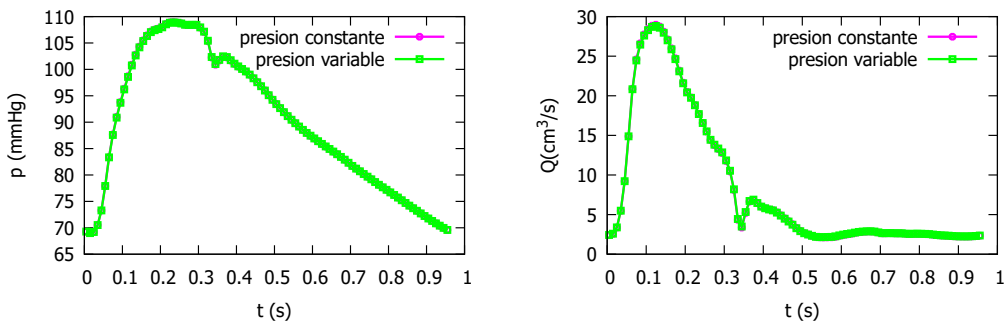


Figure 75: Sección 6. Solución numérica para el vaso 13, subclavia izquierda torácica utilizando $\Delta x = 1.0$ cm y CFL = 0.5. Con presión constante y variable.

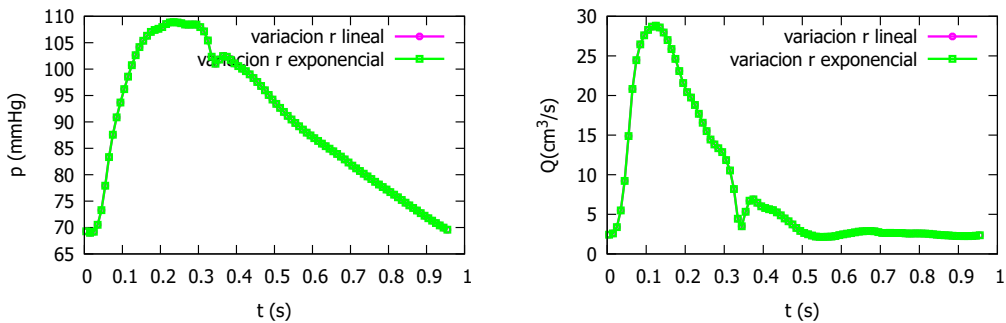


Figure 76: Sección 6. Solución numérica para el vaso 13, subclavia izquierda torácica utilizando $\Delta x = 1.0$ cm y CFL = 0.5. Variación del radio lineal y exponencial.

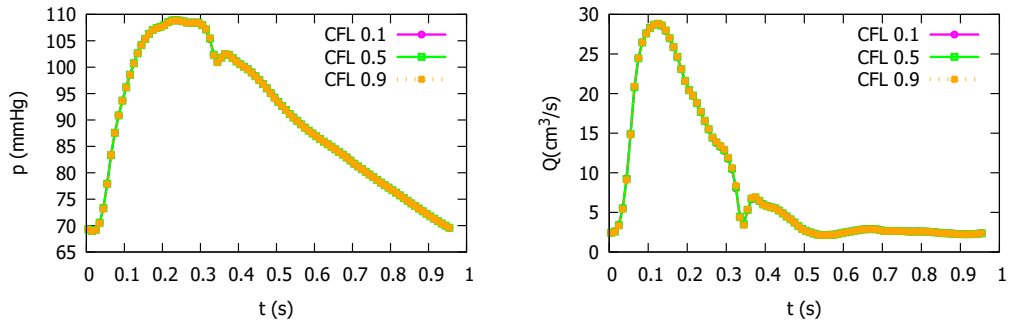


Figure 77: Sección 6. Solución numérica para el vaso 13, subclavia izquierda torácica utilizando $\Delta x = 1.0$ cm y $CFL = variable$.

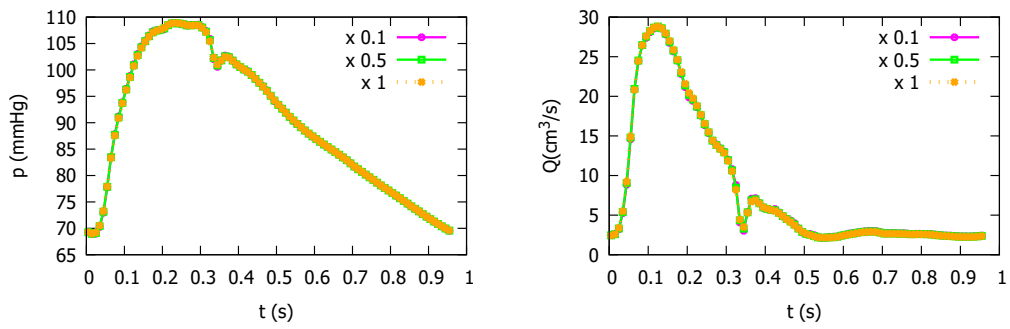


Figure 78: Sección 6. Solución numérica para el vaso 13, subclavia izquierda torácica utilizando $\Delta x = 1.0$ cm y $CFL = variable$.

A.6 arterias pulmonares

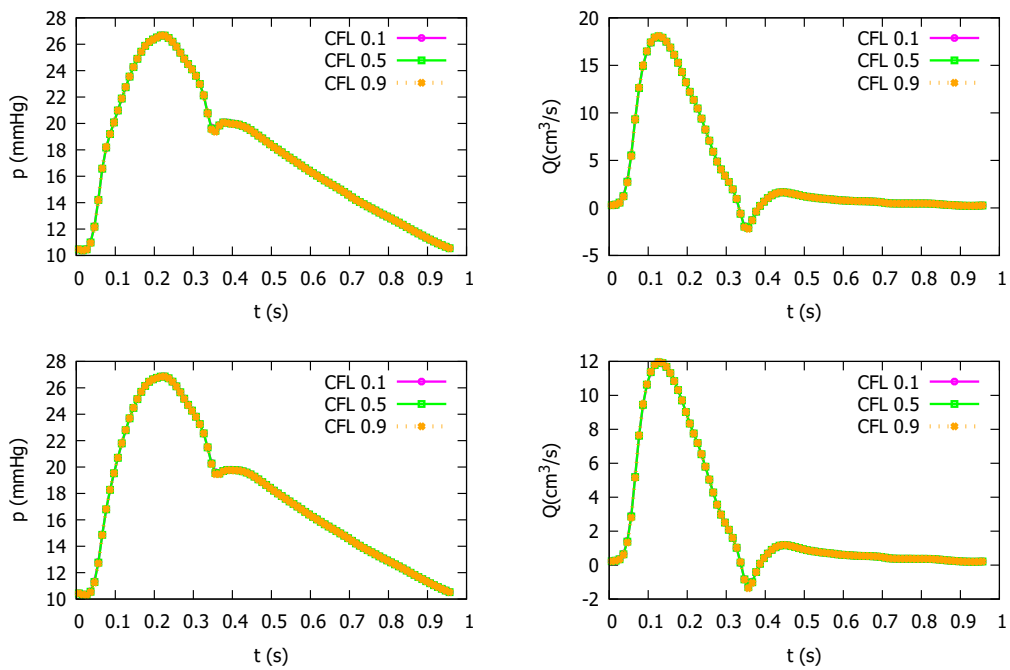


Figure 79: Sección 7. Solución numérica para el vaso 3 (parte superior) y para el vaso 4 (parte inferior), para $CFL = variable$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

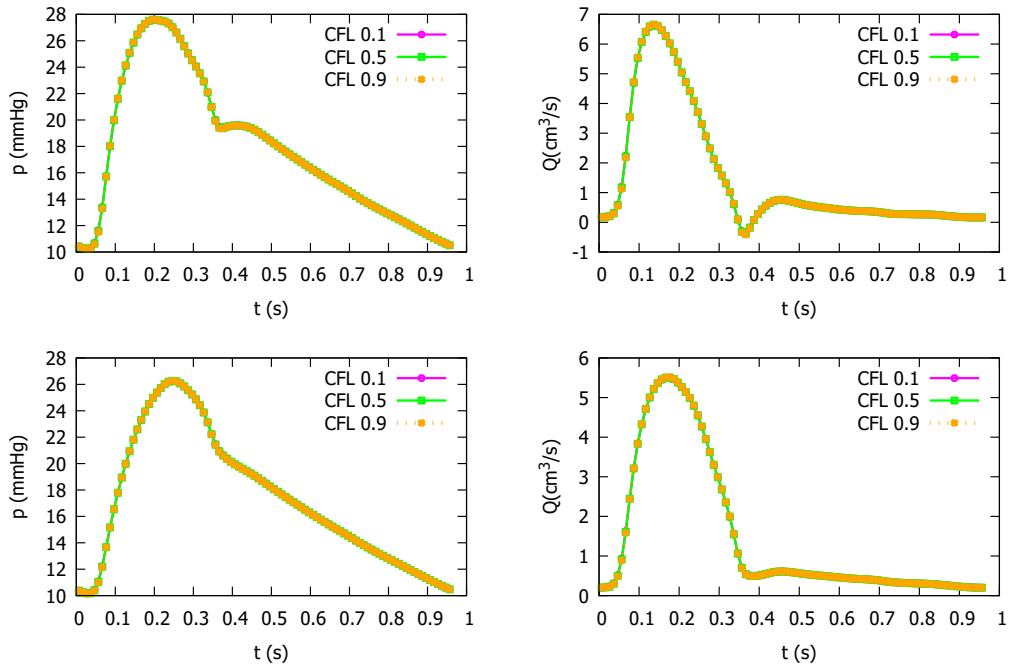


Figure 80: Sección 7. Solución numérica para el vaso 5 (parte superior) y para el vaso 9 (parte inferior), para $CFL = variable$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

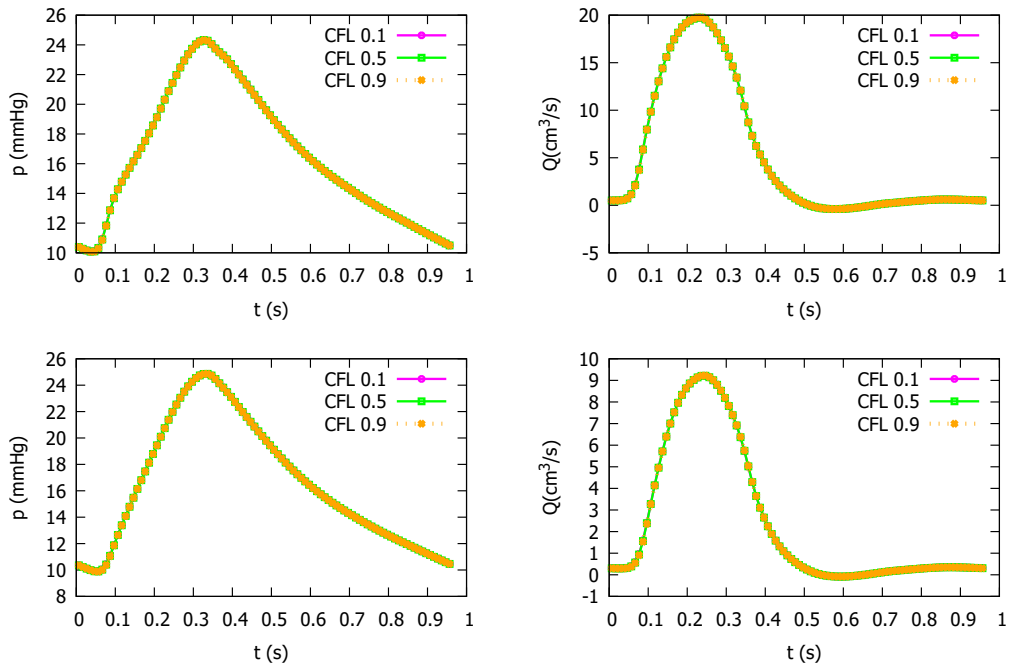


Figure 81: Sección 7. Solución numérica para el vaso 39 (parte superior) y para el vaso 40 (parte inferior), para $CFL = variable$, con $\Delta x = 1.0$ cm.

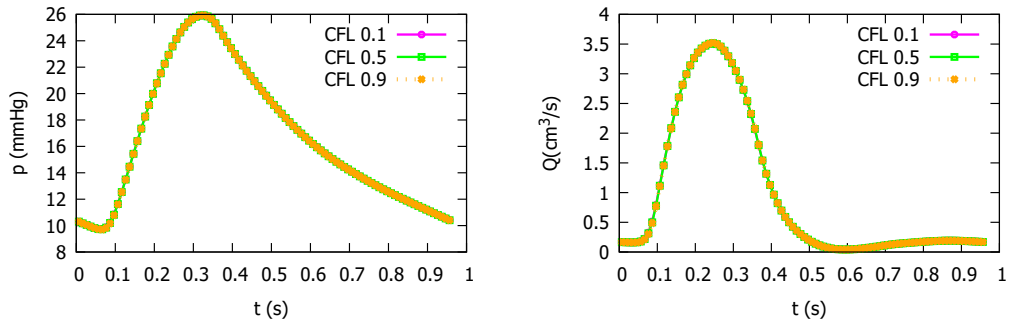


Figure 82: Sección 7. Soluciones numéricas para el vaso 41 con $\Delta x = 1\text{cm}$ y con $CFL = \text{variable}$.

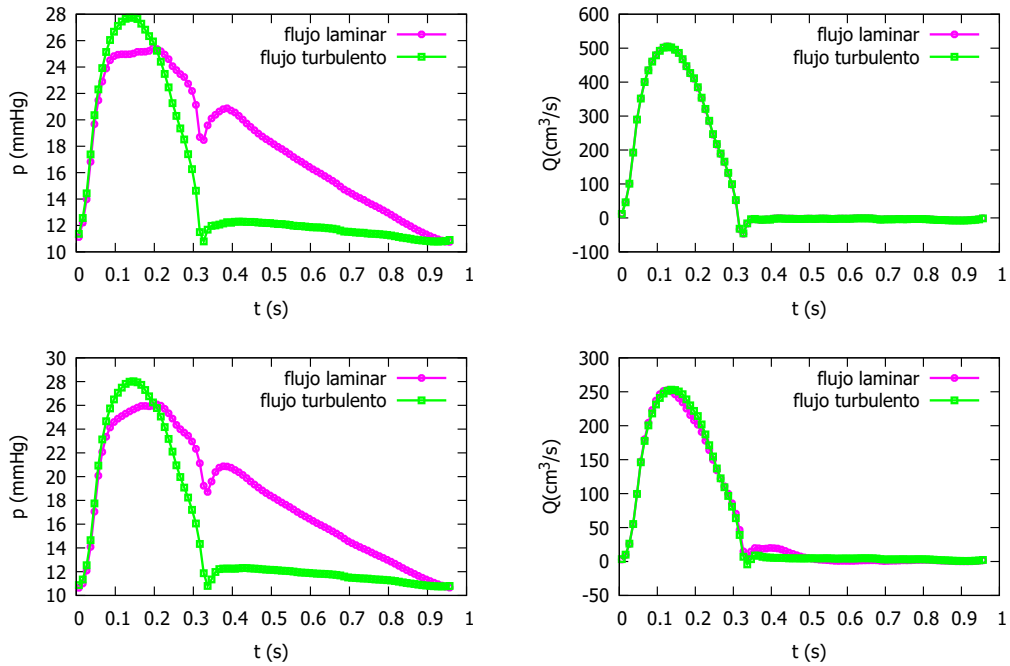


Figure 83: Sección 7. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y para el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con flujo laminar y turbulento.

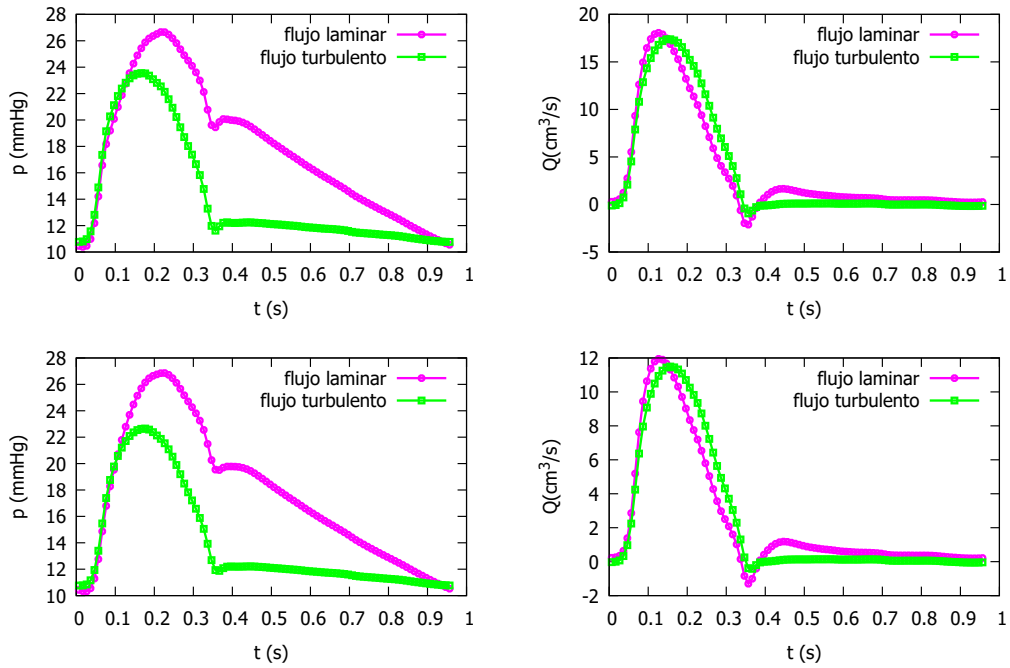


Figure 84: Sección 7. Solución numérica para el vaso 3 (parte superior) y para el vaso 4 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con flujo laminar y turbulento.

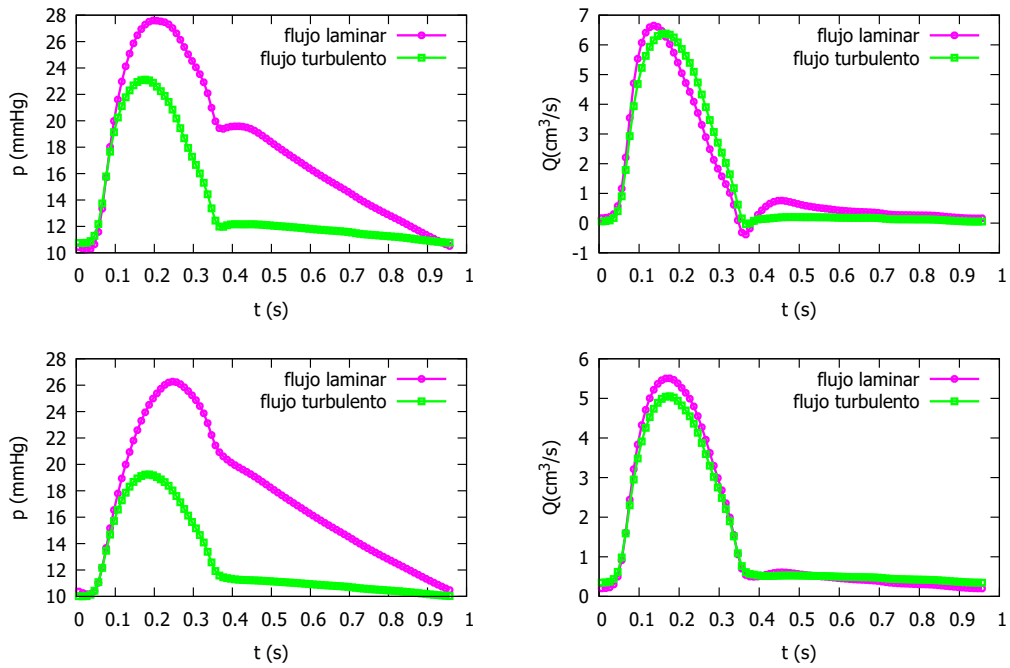


Figure 85: Sección 7. Solución numérica para el vaso 5 (parte superior) y para el vaso 9 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con flujo laminar y turbulento.

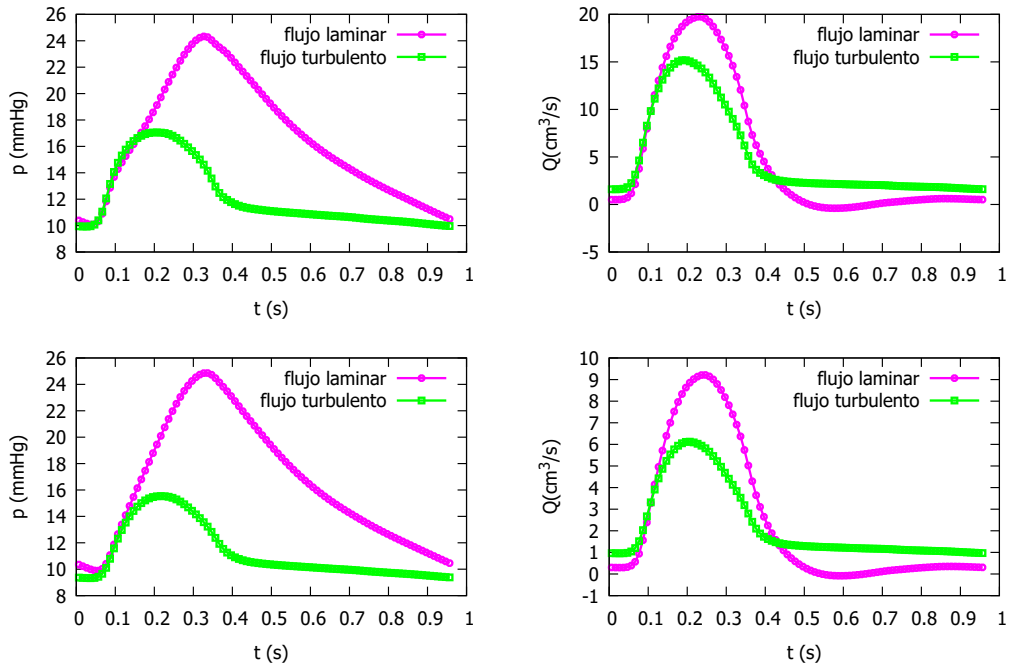


Figure 86: Sección 7. Solución numérica para el vaso 39 (parte superior) y para el vaso 40 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con flujo laminar y turbulento.

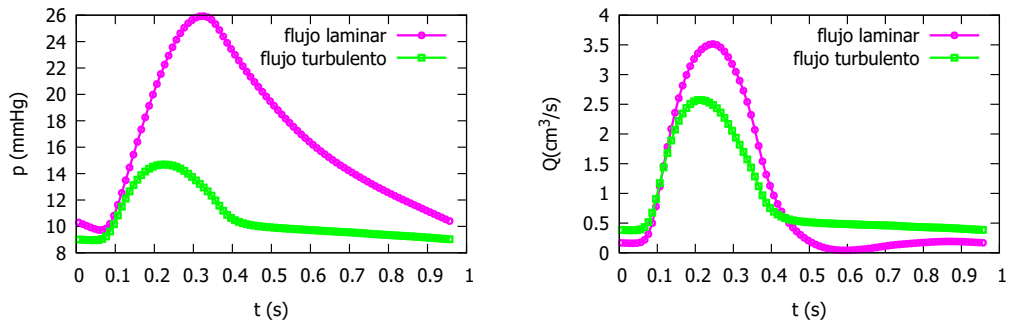


Figure 87: Sección 7. Soluciones numéricas para el vaso 41 con $\Delta x = 1\text{cm}$ y con $CFL = 0.5$. Con flujo laminar y turbulento.

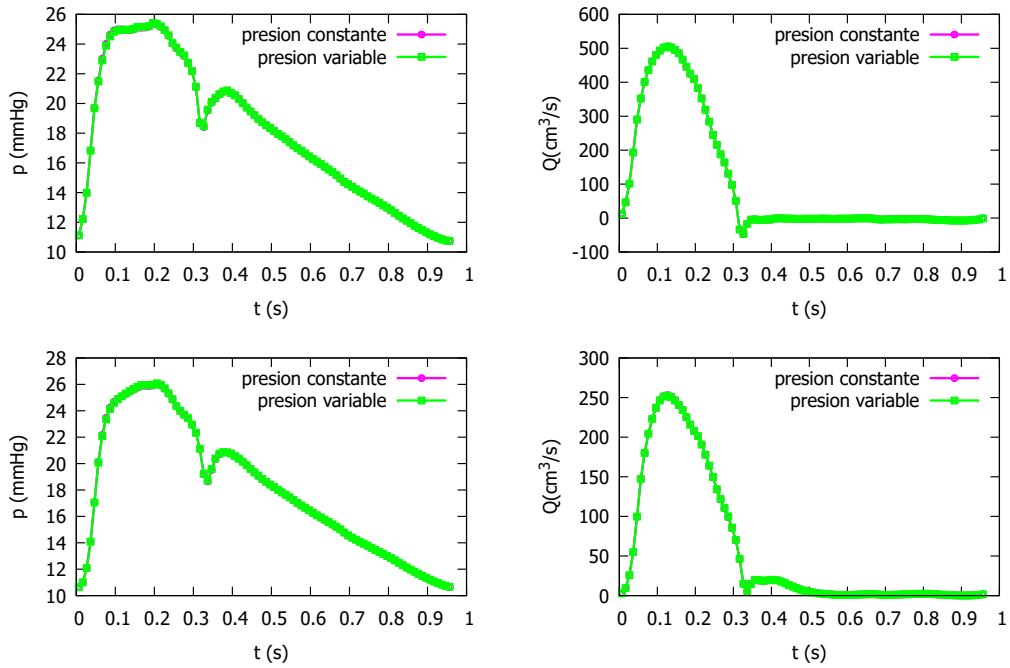


Figure 88: Sección 7. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y para el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con presión constante y variable.

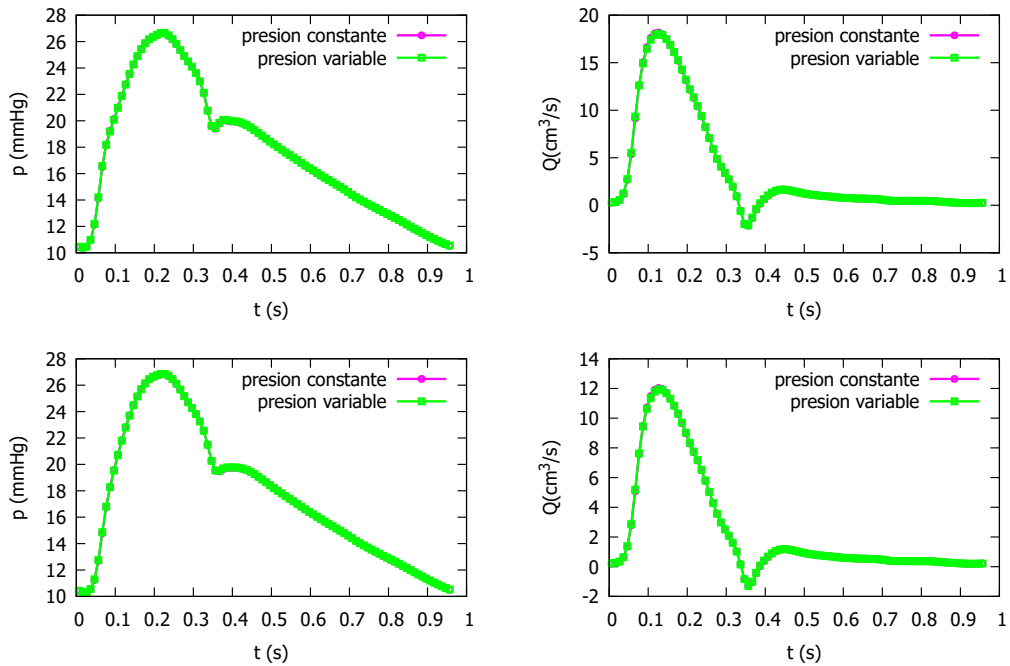


Figure 89: Sección 7. Solución numérica para el vaso 3 (parte superior) y para el vaso 4 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con presión constante y variable.

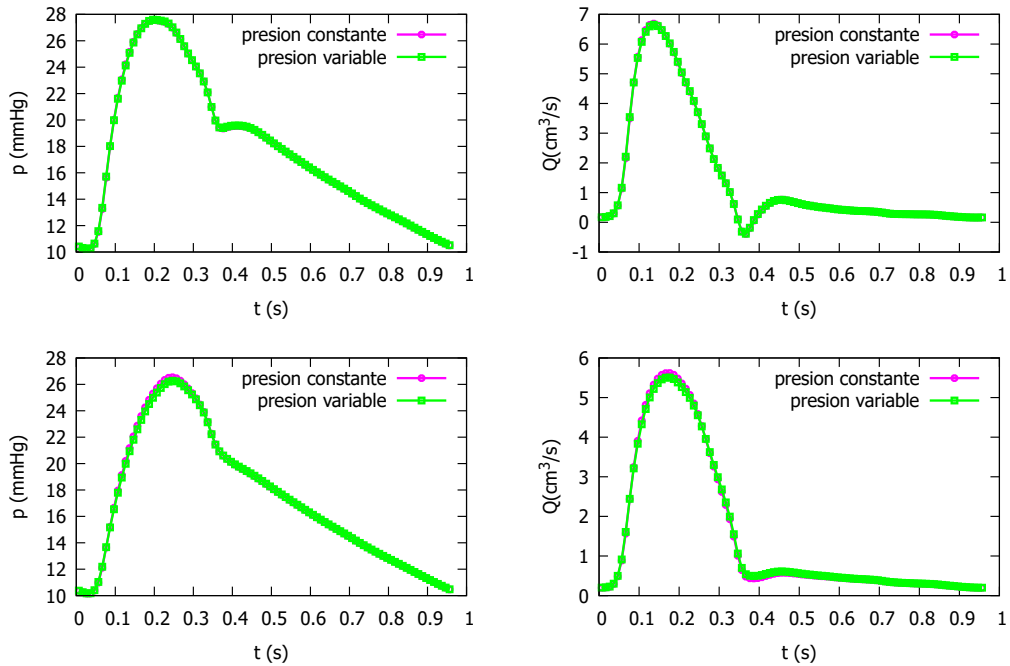


Figure 90: Sección 7. Solución numérica para el vaso 5 (parte superior) y para el vaso 9 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con presión constante y variable.

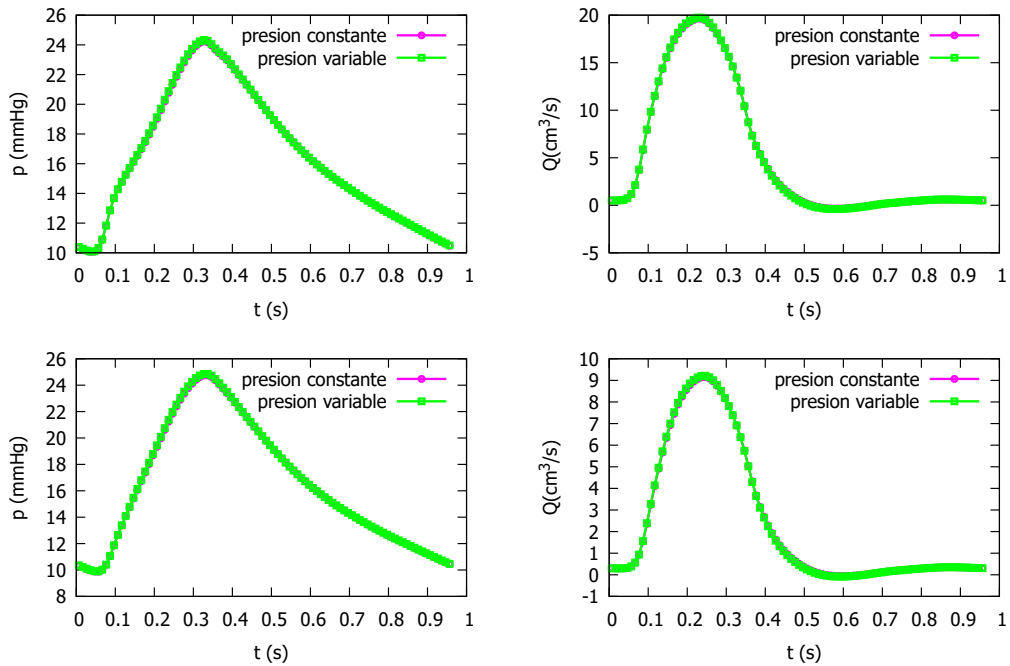


Figure 91: Sección 7. Solución numérica para el vaso 39 (parte superior) y para el vaso 40 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con presión constante y variable.

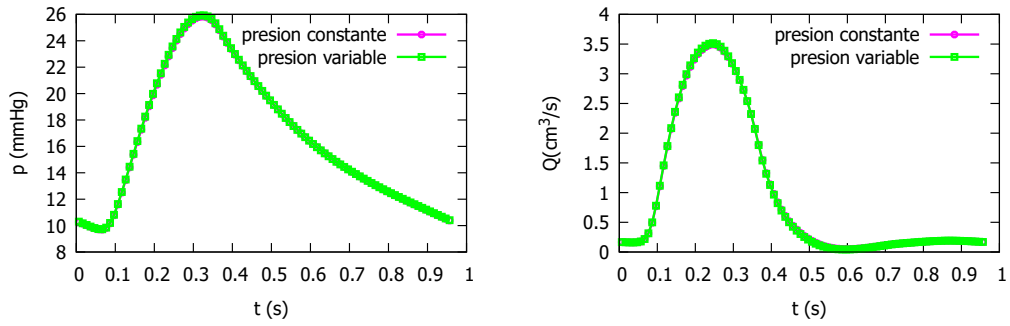


Figure 92: Sección 7. Soluciones numéricas para el vaso 41 con $\Delta x = 1\text{cm}$ y con $CFL = 0.5$. Con presión constante y variable.

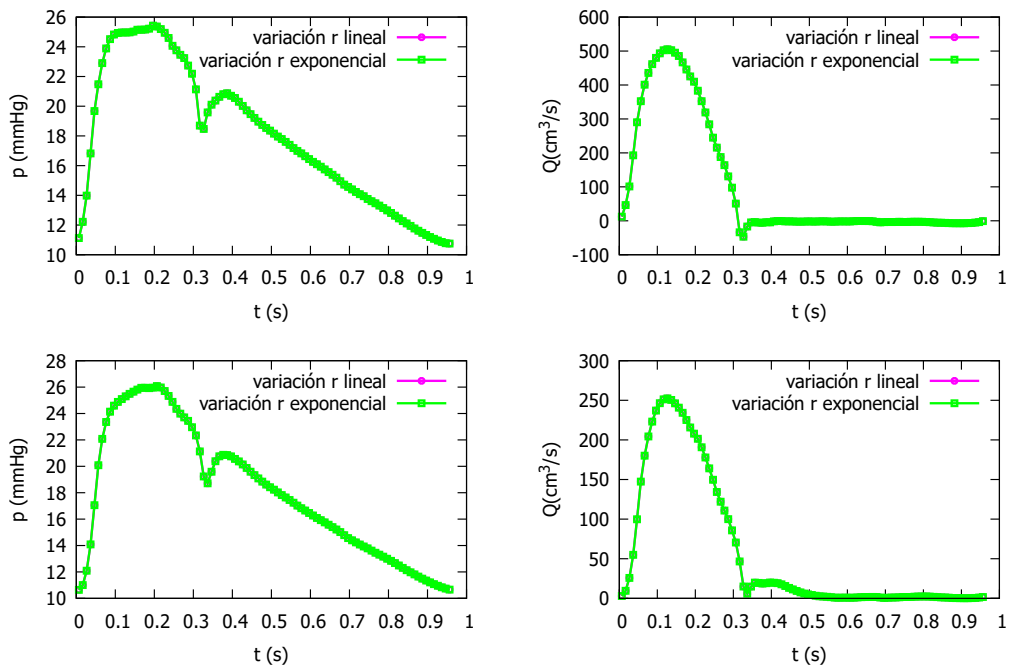


Figure 93: Sección 7. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y para el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con Variación del radio lineal y exponencial.

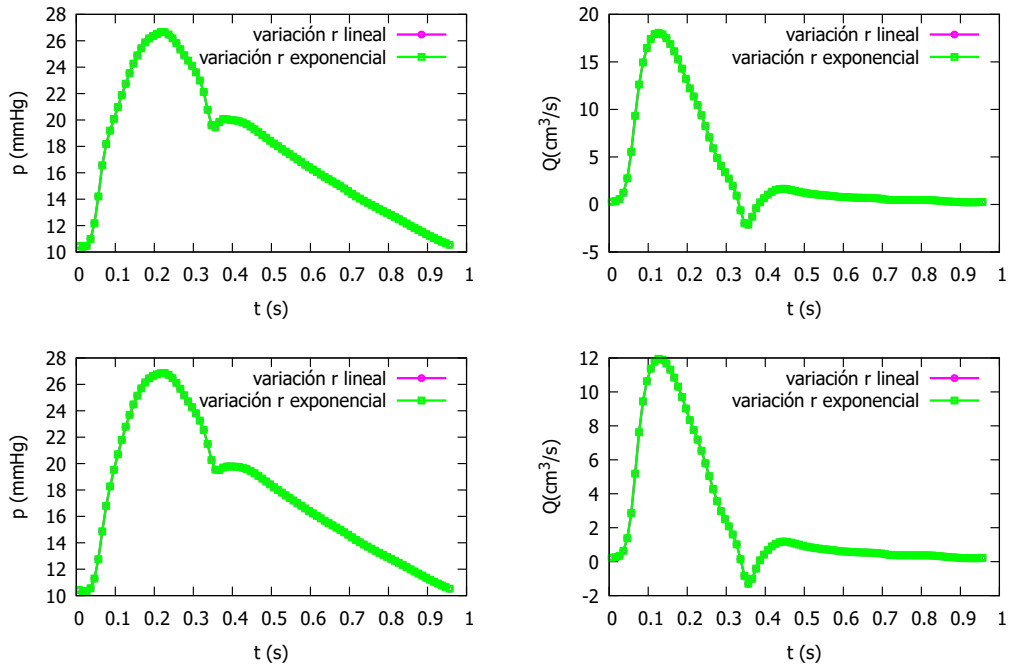


Figure 94: Sección 7. Solución numérica para el vaso 3 (parte superior) y para el vaso 4 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con Variación del radio lineal y exponencial.

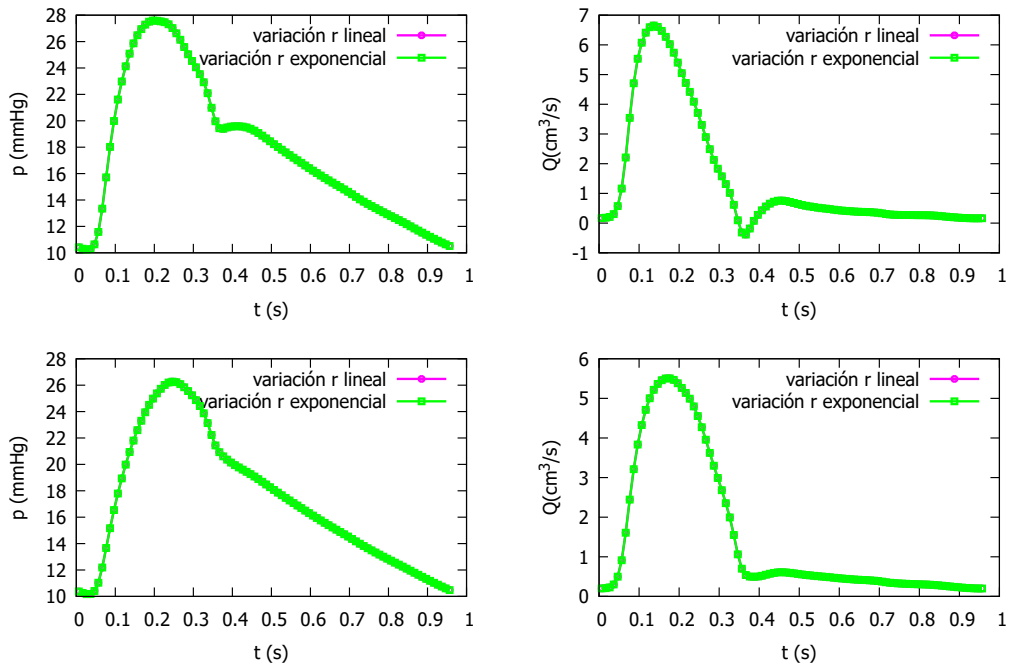


Figure 95: Sección 7. Solución numérica para el vaso 5 (parte superior) y para el vaso 9 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con Variación del radio lineal y exponencial.

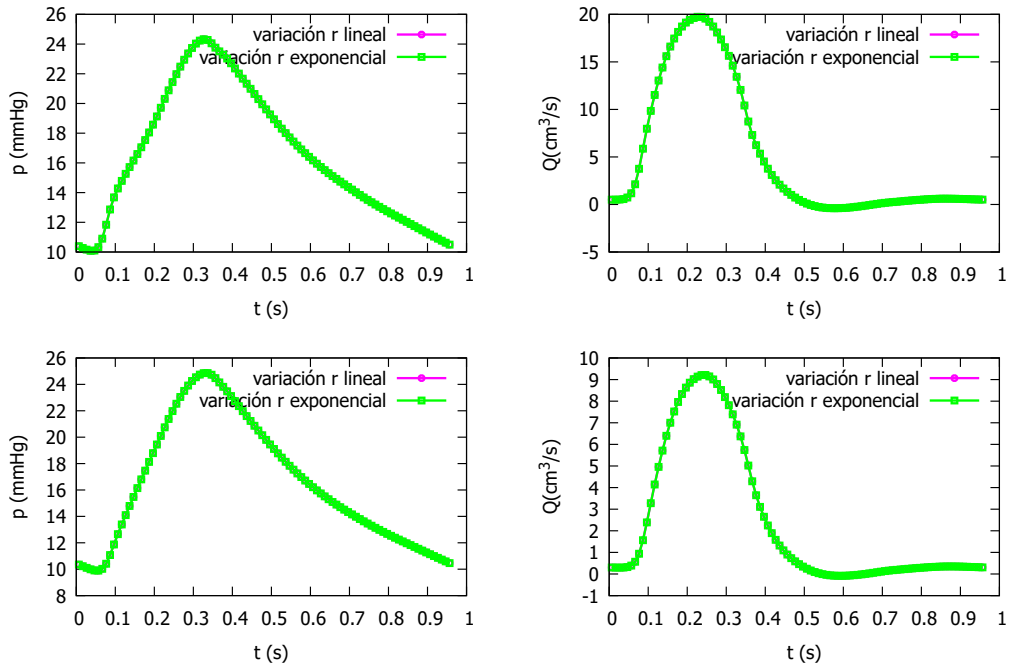


Figure 96: Sección 7. Solución numérica para el vaso 39 (parte superior) y para el vaso 40 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con Variación del radio lineal y exponencial.

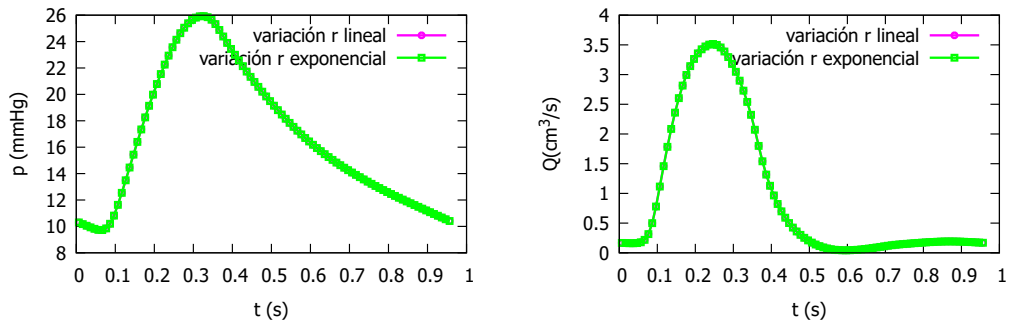


Figure 97: Sección 7. Soluciones numéricas para el vaso 41 con $\Delta x = 1$ cm y con $CFL = 0.5$. Con Variación del radio lineal y exponencial.

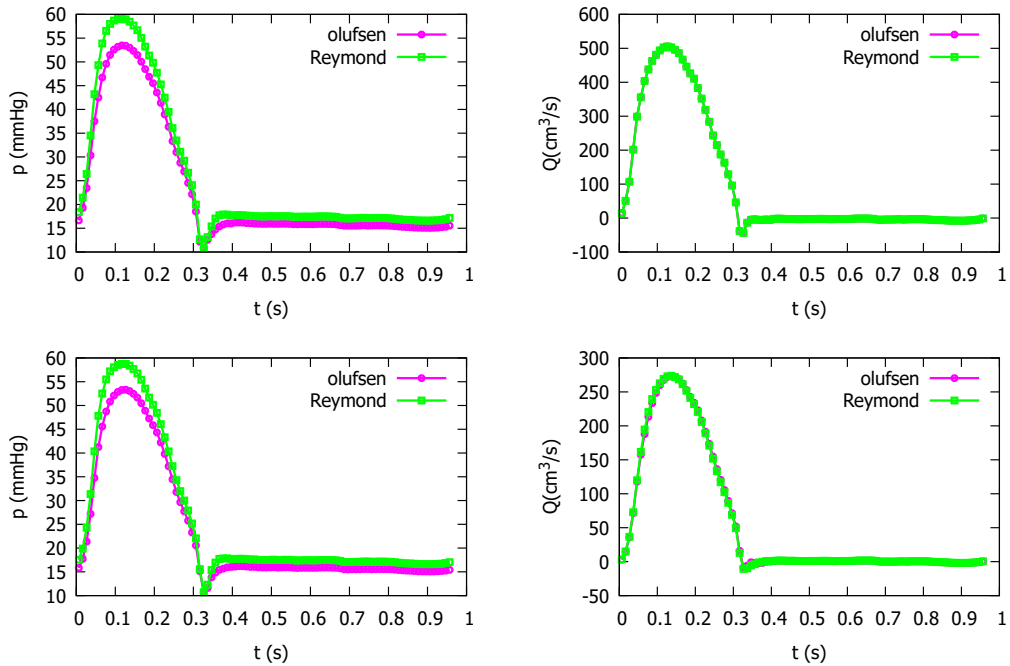


Figure 98: Sección 7. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y para el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con método Olufsen y método Reymond.

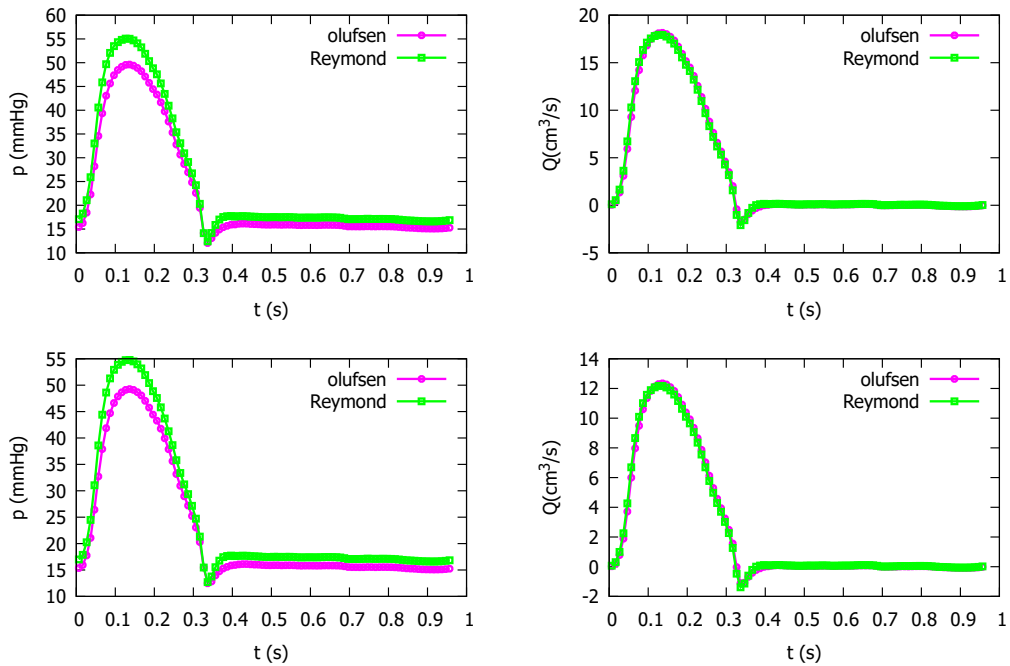


Figure 99: Sección 7. Solución numérica para el vaso 3 (parte superior) y para el vaso 4 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con método Olufsen y método Reymond.

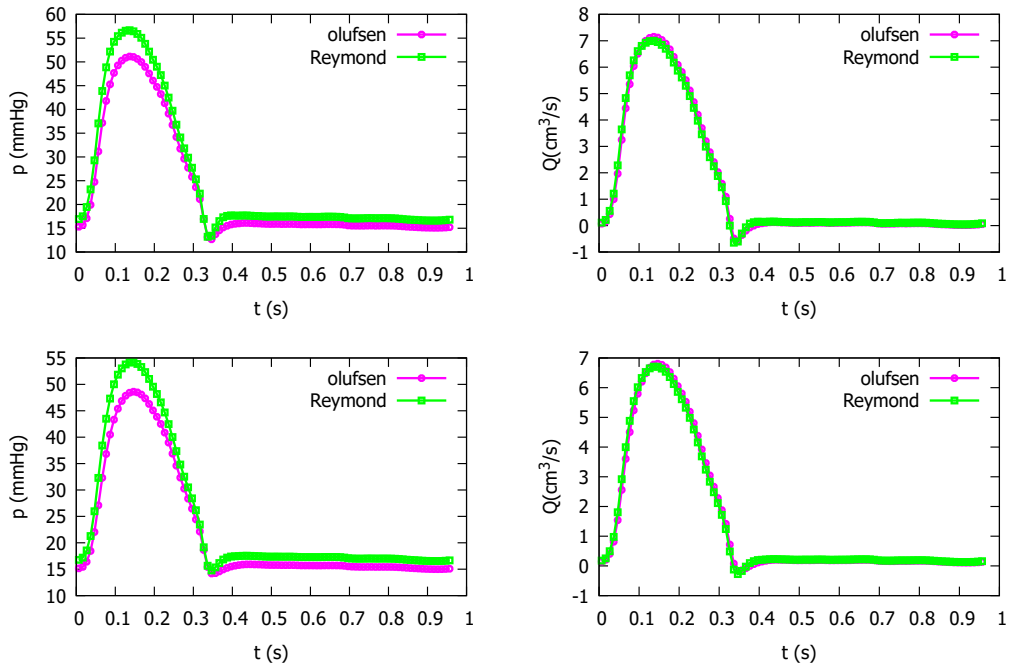


Figure 100: Sección 7. Solución numérica para el vaso 5 (parte superior) y para el vaso 9 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con método Olufsen y método Reymond.

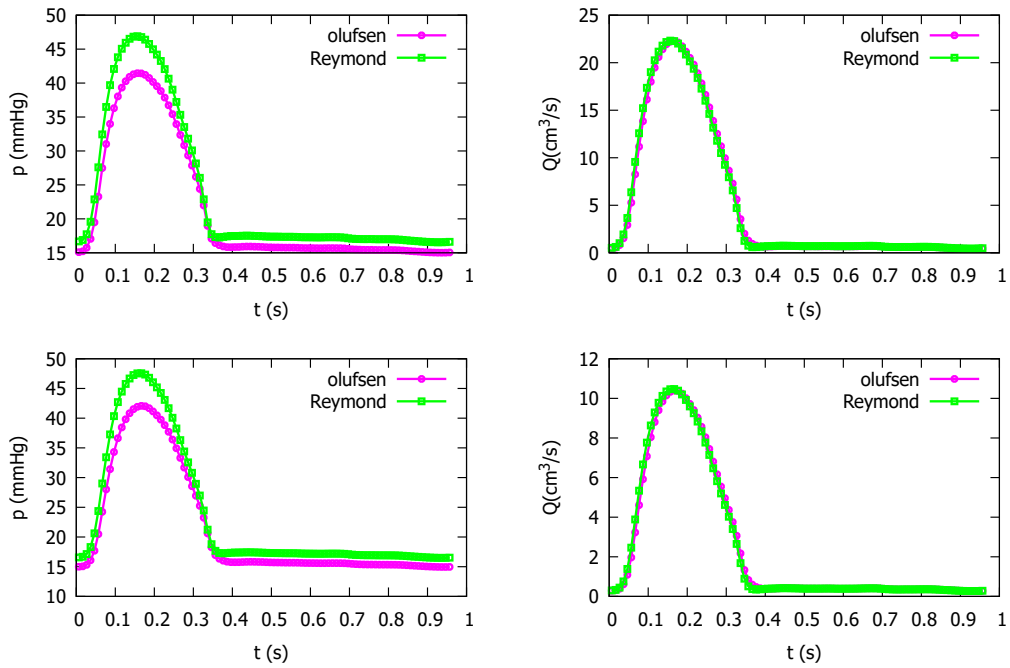


Figure 101: Sección 7. Solución numérica para el vaso 39 (parte superior) y para el vaso 40 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Con método Olufsen y método Reymond.

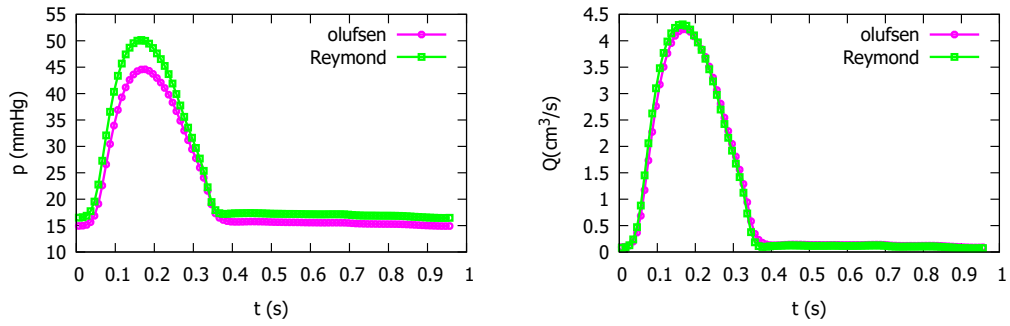


Figure 102: Sección 7. Soluciones numéricas para el vaso 41 con $\Delta x = 1\text{cm}$ y con $CFL = 0.5$. Con método Olufsen y método Reymond.

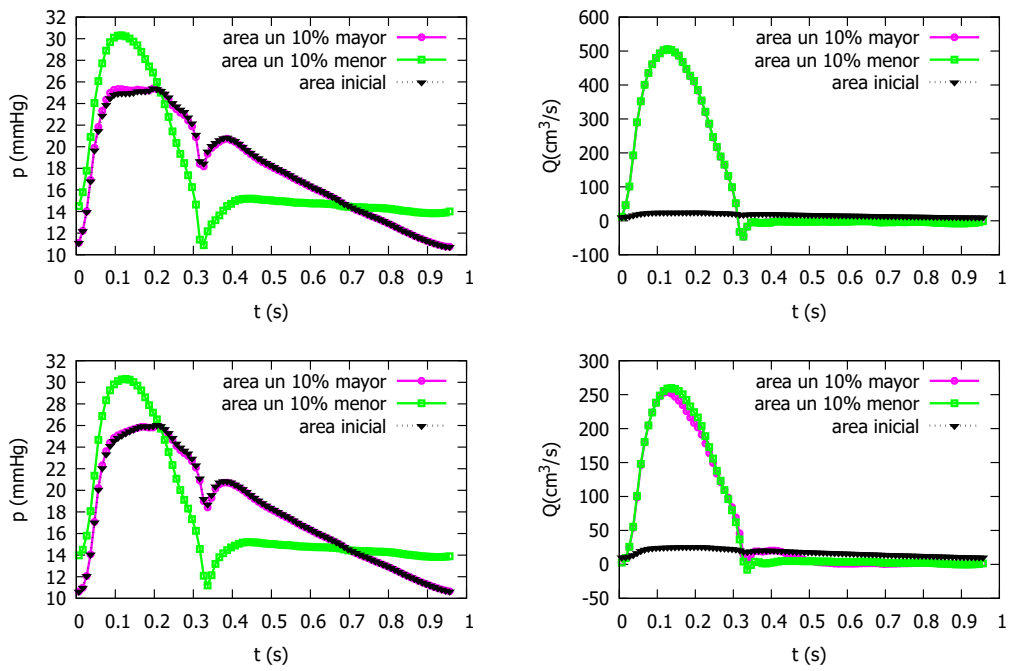


Figure 103: Sección 7. Solución numérica para el vaso 1 (parte superior) y para el vaso 2 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0\text{ cm}$. Area variable.

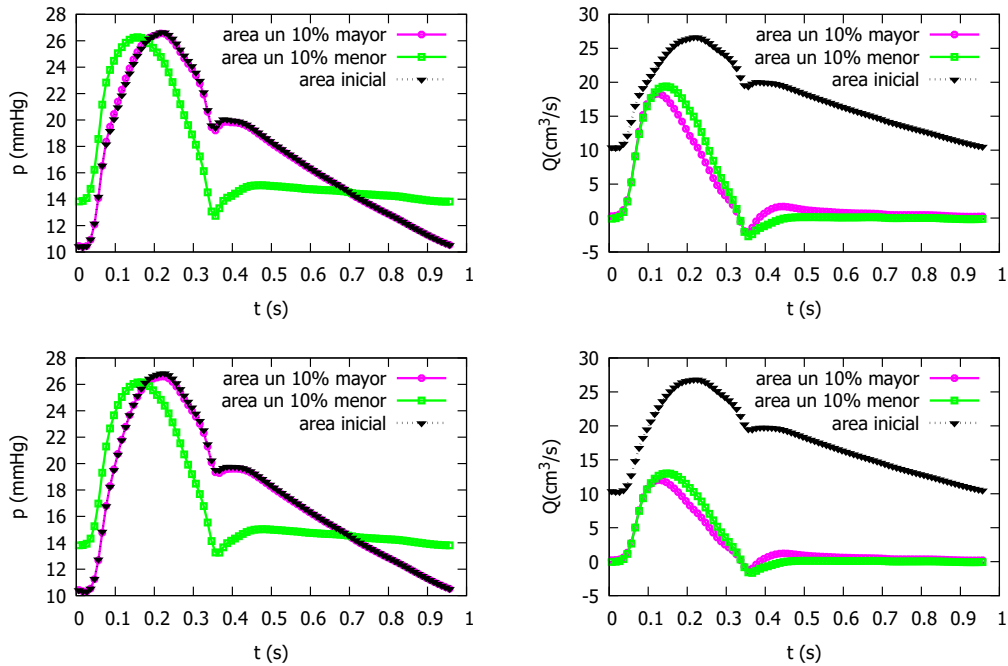


Figure 104: Sección 7. Solución numérica para el vaso 3 (parte superior) y para el vaso 4 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Area variable.

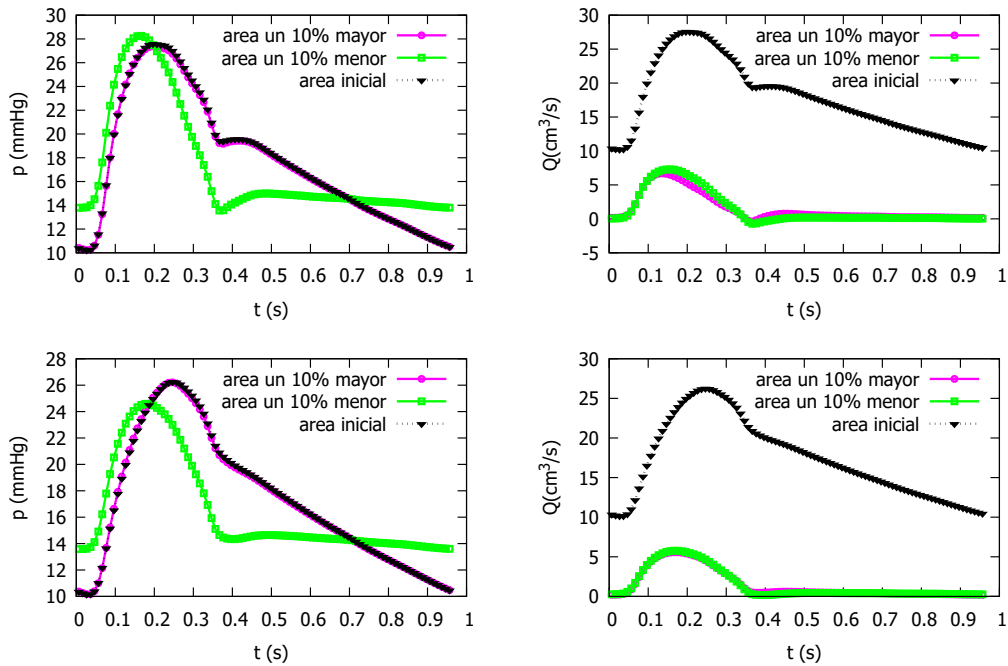


Figure 105: Sección 7. Solución numérica para el vaso 5 (parte superior) y para el vaso 9 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Area variable.

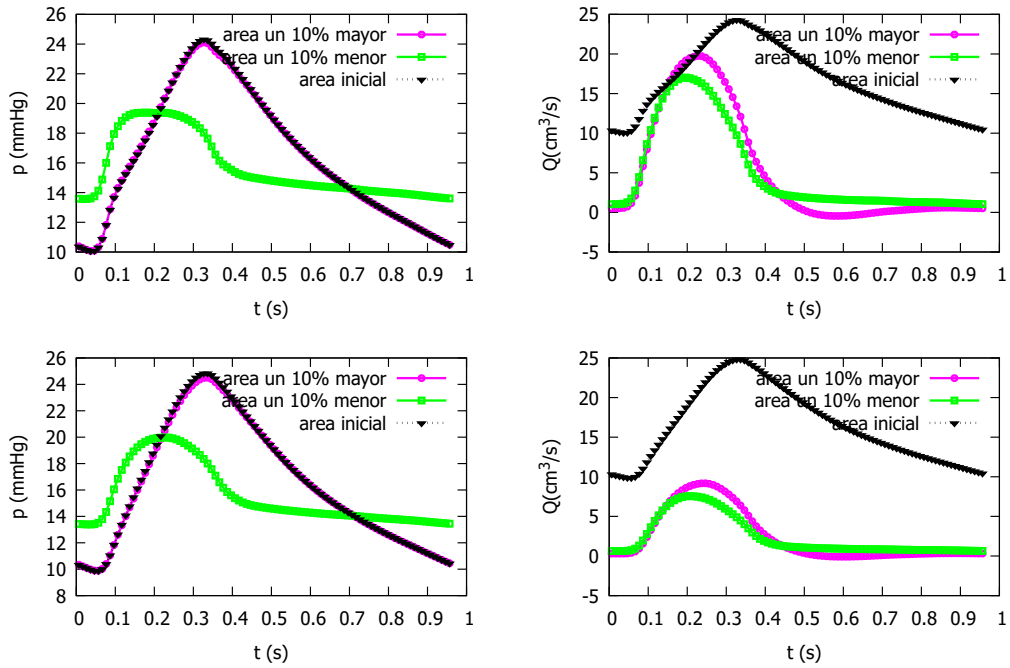


Figure 106: Sección 7. Solución numérica para el vaso 39 (parte superior) y para el vaso 40 (parte inferior), para $CFL = 0.5$, con $\Delta x = 1.0$ cm. Área variable.

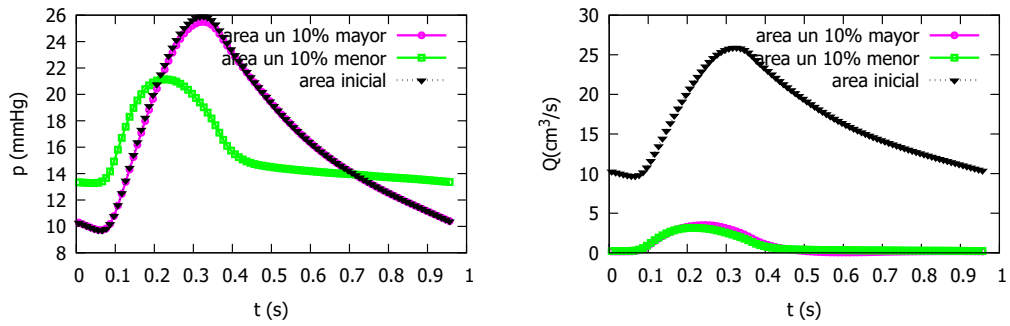


Figure 107: Sección 7. Soluciones numéricas para el vaso 41 con $\Delta x = 1\text{cm}$ y con $CFL = 0.5$. Área variable.

A.7 Venas pulmonares

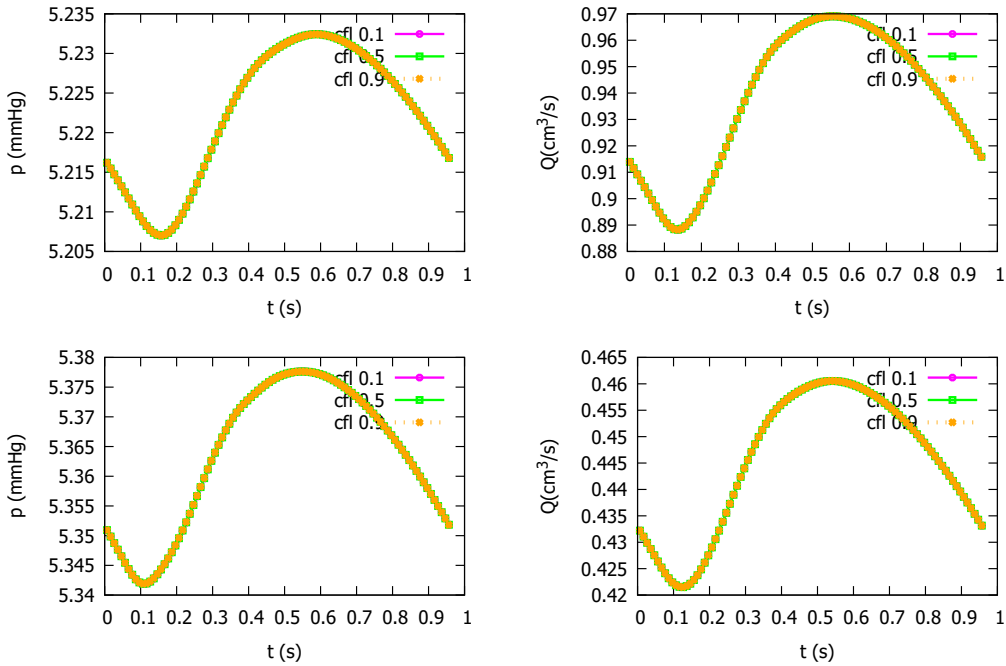


Figure 108: Sección 8. Solución numérica para el vaso 200 (parte superior) y para el vaso 201 (parte inferior), para $CFL = \text{variable}$, con $\Delta x = \text{variable}$.

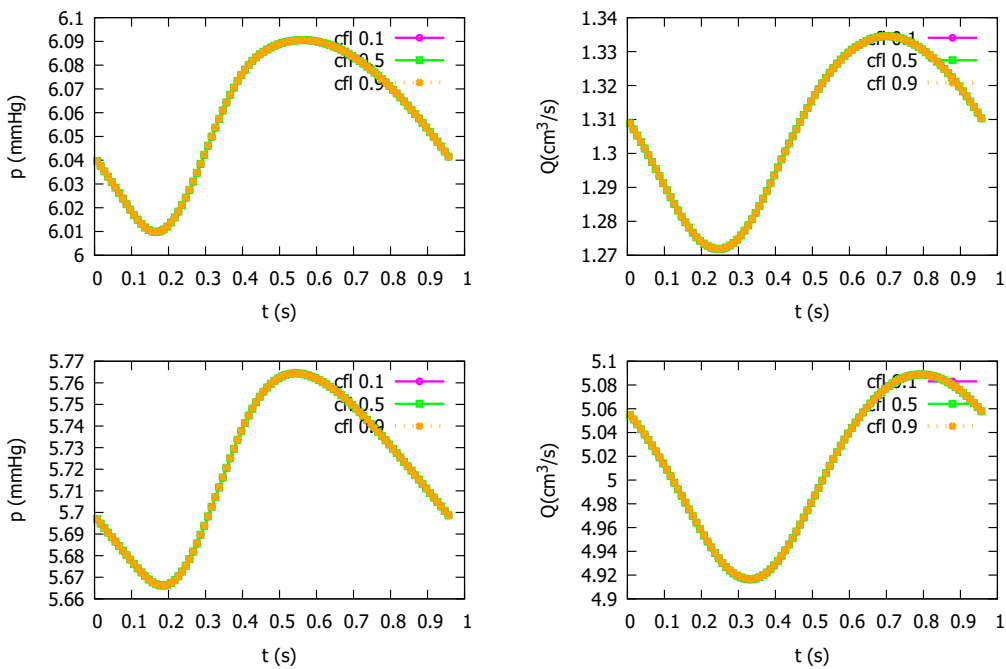


Figure 109: Sección 8. Solución numérica para el vaso 208 (parte superior) y para el vaso 216 (parte inferior), para $CFL = \text{variable}$, con $\Delta x = \text{variable}$.

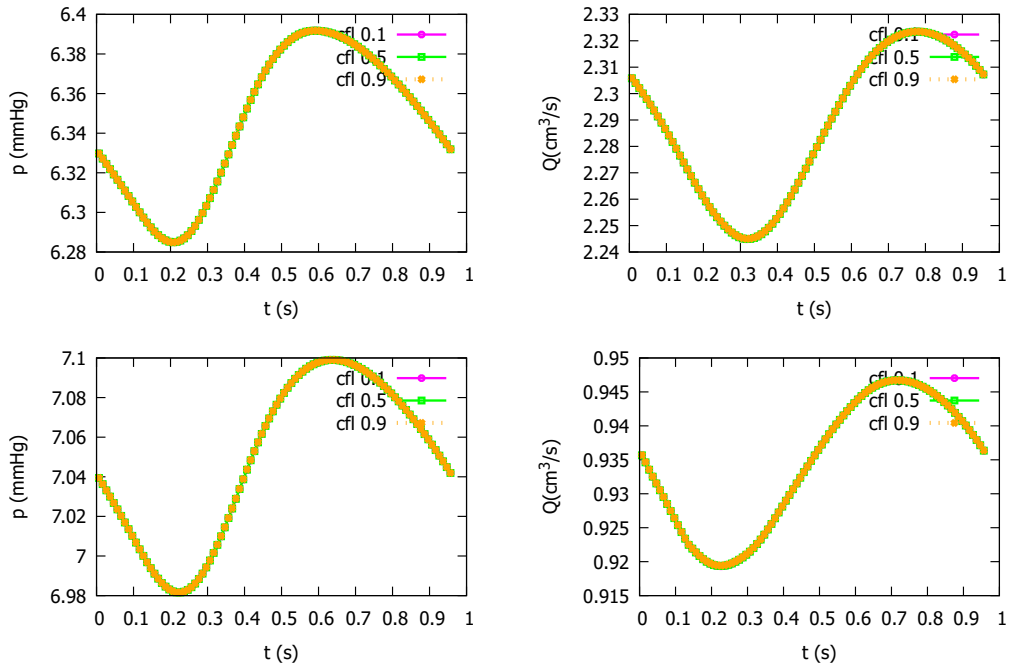


Figure 110: Sección 8. Solución numérica para el vaso 217 (parte superior) y para el vaso 218 (parte inferior), para $CFL = \text{variable}$, con $\Delta x = \text{variable}$.