

César Asensio Chaves

# Un análisis estadístico del paisaje de Bousso- Polchinski y otros modelos relacionados

Departamento  
Física Teórica

Director/es  
Seguí Santonja, Antonio

<http://zaguan.unizar.es/collection/Tesis>



**Universidad**  
Zaragoza

Tesis Doctoral

# UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO DEL PAISAJE DE BOUSSO-POLCHINSKI Y OTROS MODELOS RELACIONADOS

Autor

César Asensio Chaves

Director/es

Seguí Santonja, Antonio

**UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA**

Física Teórica

2013



TESIS DOCTORAL

**Un análisis estadístico del paisaje de  
Bouso-Polchinski y otros modelos  
relacionados**

Otoño 2013



**Universidad**  
Zaragoza

Memoria presentada por

**César Asensio Chaves**

Departamento de Física Teórica  
Universidad de Zaragoza

No digas: es imposible. Di: no lo he hecho todavía.

*Proverbio japonés*

*A mis padres*

---

Esta Tesis doctoral se presenta como compendio de los artículos que el autor ha escrito en colaboración con Antonio Seguí Santonja, director de la Tesis. Las referencias completas de los artículos publicados que forman el cuerpo principal de esta Tesis, incluidos como los capítulos 2, 3, 4, 5, 6 y 7, son:

- (1)** C. Asensio and A. Seguí: “*A geometric-probabilistic method for counting low-lying states in the Bousso-Polchinski Landscape*”, Phys. Rev. D **80**, 043515 (2009).  
arXiv:0812.3247 [hep-th]
- (2)** C. Asensio and A. Seguí: “*Counting states in the Bousso-Polchinski Landscape*”, 99-110 in M. Asorey, J. V. García Esteve, M. F. Rañada and J. Sesma (Editors): *Mathematical Physics and Field Theory – Julio Abad, in Memoriam*, Prensas Universitarias de Zaragoza, ISBN 978-84-92774-04-3 (2009).  
arXiv:0903.1947 [hep-th]
- (3)** C. Asensio and A. Seguí: “*Applications of an exact counting formula in the Bousso-Polchinski Landscape*”, Phys. Rev. D **82**, 123532 (2010).  
arXiv:1003.6011 [hep-th]
- (4)** C. Asensio and A. Seguí: “*Some Physical Consequences of an Exact Vacua Distribution in the Bousso-Polchinski Landscape*”, J. Phys. Conf. Ser. **314**, 012050 (2011).  
arXiv:1012.4947 [hep-th]
- (5)** C. Asensio and A. Seguí: “*Exploring a simple sector of the Einstein-Maxwell landscape*”, Phys. Rev. D **87**, 023503 (2013).  
arXiv:1207.4662 [hep-th]
- (6)** C. Asensio and A. Seguí: “*Consequences of moduli stabilization in the Einstein-Maxwell landscape*”, Phys. Rev. Lett. **110**, 041602 (2013).  
arXiv:1207.4908 [hep-th]

Como director de la Tesis titulada “*Un análisis estadístico del paisaje de Bousso-Polchinski y otros modelos relacionados*”,

**DECLARO**

que el trabajo recogido en la presente memoria de Tesis Doctoral se corresponde con los objetivos relacionados en el Proyecto de Tesis aprobado en su día por el órgano responsable del programa de doctorado. Asimismo,

**AUTORIZO**

a César Asensio Chaves a presentar dicha Tesis como compendio de publicaciones.

En Zaragoza, a 5 de Diciembre de 2013.

Firmado

Antonio Seguí Santonja

---

José V. García Esteve, Director del Departamento de Física Teórica de la Universidad de Zaragoza, como órgano responsable del programa de doctorado de Física,

**DECLARO**

que, dado que el trabajo del doctorando César Asensio Chaves ha dado lugar a la publicación de suficientes artículos en revistas de reconocido prestigio y que la memoria presentada reúne todos los requisitos, resulta apropiada la presentación de su Tesis doctoral como compendio de publicaciones.

En Zaragoza, a 5 de Diciembre de 2013.

Firmado

José V. García Esteve

---

# Agradecimientos

Cuando se completa un trabajo largo y difícil, se consigue una sensación de satisfacción imposible de describir a quienes nunca la han experimentado. Esa satisfacción es producto de un trabajo reconocido, efectuado de forma escrupulosa y con rigor científico; pero todo ese trabajo, visto en retrospectiva, se distingue de otros más cotidianos en un aspecto fundamental: *yo no podría haberlo hecho solo*. En consecuencia, debo estar agradecido a todas las personas que me han ayudado a completarlo, directa o indirectamente, sin cuya ayuda este trabajo sería peor, o, simplemente, no se habría llevado a buen término. Sin lugar a dudas, he recibido ayuda de más personas de las que recordaré a continuación: mis disculpas para aquellos que pueda olvidar, y gracias a ellos también.

Terminar esta tesis es el colofón de un largo periplo que comenzó hace ya dieciséis años, en 1997. Si tomé la decisión de hacer el doctorado en Física Teórica fue casi con seguridad gracias al impulso que recibí de Carlos López Ullod, compañero y amigo, que por aquel entonces investigaba para escribir su tesis en ese mismo departamento. A Carlos le debo, además de sus ánimos y su amistad, el hecho de haber pensado en mí para ocupar el puesto de trabajo que desempeñé desde entonces, y sin el cual nada de lo que ha sucedido hubiese sido posible. Por tanto, por muchas cosas, Carlos, muchas gracias: sin tí nada de esto hubiera sido posible.

Por aquél entonces, a la vez que numerosos cursos de doctorado en los que aprendí cosas interesantes y diversas, empecé a estudiar teoría cuántica de campos en el retículo bajo la supervisión de Vicente Azcoiti. Gracias por introducirme en ese campo, rico y apasionante, y especialmente gracias también a Angelo Galante, que disipaba la mayor parte de mis dudas al respecto, durante el tiempo que duró aquel periodo. En esos comienzos tuve que aprender además a manejarme con el sistema  $\text{\LaTeX}$ , y en eso me ayudó sobremanera Jesús Clemente, que escuchaba y contestaba mis dudas en esas y otras cuestiones con paciencia inagotable, y Arturo Ramos, que me facilitó enormemente la ruta de entrada al mundo de los documentos científicos. Supongo que si hoy en día uso  $\text{\LaTeX}$  para todas las tareas profesionales es gracias a ellos, y tengo que resaltar su amabilidad en aquellos tiempos. Gracias Jesús por interesarte por mi devenir académico hasta el día de hoy.

Circunstancias personales me hicieron abandonar la intención de escribir la tesis al poco tiempo de acabar los cursos de doctorado. Y probablemente nunca la hubiera escrito si Pepín Cariñena no me hubiera empujado a continuar en 2003. Muchas gracias, Pepín, por no permitirme abandonar, y muchas gracias a mi compañera Gloria Burbano, sin cuyos ánimos no hubiera sido capaz de retomar las cosas donde las dejé. El propio Pepín me dirigió un trabajo entonces, que lamentablemente no llegamos a publicar, y me llevó a la puerta de Víctor Laliena, quien me dirigió el otro trabajo necesario para ganar la suficiencia investigadora y poder comenzar con la tesis. Muchas gracias a ambos por haber sido tan amables conmigo en aquel momento.

Víctor Laliena no sólo se ofreció a dirigirme un trabajo, sino que además, cuando



hube obtenido la suficiencia investigadora, se ofreció a dirigirme la Tesis. Con él aprendí Relatividad General, y aprendí cómo se debe investigar en Física Teórica. Su forma de trabajar y su visión aguda de los puntos espinosos de tan dispersa área de conocimiento formaron en mi cabeza una visión de conjunto que aún conservo y un modelo de trabajo que trato de seguir. Por todo ello le estoy profundamente agradecido.

Víctor tuvo que abandonar el mundo de la Física, hecho que me creó un desánimo considerable. Afortunadamente para mí, hubo alguien que me recogió como su estudiante, y con el que recuperé el ánimo para continuar. Fue mi actual director de Tesis, Antonio Seguí, al que agradezco enormemente que me echara un cable en aquél *impasse*. Él me propuso varios temas para empezar a trabajar que no dieron los resultados esperados. Pero, gracias a su paciencia y perseverancia, en 2007 terminó encontrando el tema adecuado para mí en el paisaje de Bousso-Polchinski, por el que comenzamos a elaborar el contenido de esta Tesis. El enfoque personal de Antonio de los problemas a los que nos hemos enfrentado en estos años ha sido fundamental para encontrar las soluciones tal y como lo hemos hecho. Su actitud ante las dificultades ha sido y es siempre positiva, lo cual me ha venido de maravilla cuando me he atascado con un problema o he recibido alguna mala noticia. Su gran imaginación ha contribuido a desatar la mía, lo cual es imprescindible para tratar cualquier problema, y su constante empeño en entender todo para no pasar nada por alto me ha llevado a trabajar con seguridad y rigor. También me ha hecho poner los pies en la tierra muchas veces, llevándome en la dirección correcta, y poniéndome en contacto con expertos en uno u otro campo, gracias a los cuales he sido capaz de salir de todos los atolladeros en los que me he visto atrapado en mi camino para resolver los problemas que hemos ido encontrando. Por todas estas razones nuestra colaboración ha sido fructífera y mi trabajo con él ha sido, y continúa siendo, un placer. ¡Muchas gracias por todo, Antonio, aún nos quedan muchos años de trabajo por delante!

También quiero agradecer a mis compañeros Pablo Díaz y Adil Belhaj, que han trabajado estrechamente con Antonio durante varios años, su apoyo y amabilidad en todo este tiempo.

Desde que empecé a acudir por el departamento de Física Teórica, la ayuda de Pedro y Esther ha sido muy valiosa para mí en mil cosas, unas pequeñas y otras grandes. En todas las ocasiones en que he ido de acá para allá con un papel que tenía una casilla vacía en busca de una firma, Pedro no ha descansado hasta conseguirla. Siempre ha encontrado una forma de ayudarme y facilitarme las cosas, lo cual he encontrado imprescindible en nuestro mundo burocrático, que a veces entiendo tan poco. Y gracias a Esther me he ahorrado un buen montón de horas de trabajo en el pasillo.

Durante la elaboración de los trabajos que forman esta Tesis, en diversos congresos y encuentros, he encontrado numerosos expertos que me han animado a continuar, y han reconocido de una forma u otra mi trabajo. Su reconocimiento ha supuesto para mí una recompensa a mi esfuerzo y una razón de peso para continuar. Me gustaría mencionar especialmente a Tomás Ortín, Bartomeu Fiol, Luis Álvarez-Gaumé y Fernando Quevedo, por sus comentarios favorables hacia este trabajo en sus etapas más tempranas. Son grandes físicos y grandes personas de las que he aprendido mucho en estos años.

Otros expertos me han dado buenos consejos además de ánimos y reconocimiento. Su ayuda desinteresada es impagable e irremplazable. Muchas gracias a Roberto Emparán, Jaume Garriga, Bert Janssen y Mario Floría, por escuchar mis preguntas con atención y paciencia, y por contestar siempre cosas que merece la pena escuchar. También me gustaría agradecer a Frederik Denef, Donald Marolf y Jorge Zanelli su atención y sus

---

consejos, que en retrospectiva han dado buen resultado. Resulta asombroso que personas tan reclamadas allá donde van encuentren la manera de ser amables con los estudiantes que una y otra vez les asediamos con preguntas. Muchas gracias a todos ellos.

También me siento en deuda de gratitud con el centro de Ciencia de Benasque Pedro Pascual y con las personas que en él trabajan y lo hacen posible. En él he desarrollado parte de este trabajo, y el ambiente de trabajo, colaboración y cordialidad que allí se encuentra es estimulante e inspirador.

Durante estos años, he compaginado la labor investigadora con la labor docente en la Escuela Universitaria Politécnica de La Almunia (EUPLA), donde he enseñado métodos matemáticos básicos desde 1995. Allí he tenido la suerte de encontrar a Antonio Laliena y Luis Esteban, mis compañeros, con los que he trabajado y sigo trabajando a día de hoy. Ellos me han facilitado la tarea docente e investigadora muchas veces, y me han ofrecido un hombro en el que llorar cuando me ha superado la frustración. En sus respectivas áreas, ellos también han desarrollado una labor investigadora, y yo me he beneficiado de sus conocimientos, de Análisis en el caso de Antonio, de Estadística en el caso de Luis. Muchas gracias por echarme una mano cuando me ha hecho falta, trabajar con vosotros ha sido y todavía es un placer, espero sinceramente que dure mucho. Gracias a vosotros me siento parte de un equipo.

También he recibido una ayuda impagable de Concha Orna, sin la cual el inglés de mis artículos sería paupérrimo. Además de Concha, Carlos Hernando y Susana González me han ayudado asimismo en este aspecto, que tan difícil me resulta. Muchas gracias por vuestra ayuda, a vosotros se debe una parte nada despreciable de mi producción científica.

Cuando empecé a trabajar en la EUPLA conocí a Fernando Vea, quien me ha insistido en la necesidad de escribir esta Tesis desde entonces: Aquí está, Fernando, gracias por preguntar todos estos años. También en la EUPLA he recibido los ánimos de Gloria Burbano, a quien he mencionado más arriba. Sin tu ayuda esto no habría sido posible. Otros compañeros de los que también he recibido ánimos y apoyo son Marian Peligero, Javier Esteban (gracias también por tu apoyo informático, que todos hemos necesitado alguna que otra vez) y Cristina Belloso.

Naturalmente, en el trabajo cotidiano muchas personas te prestan su ayuda a lo largo de los años, de muchas maneras distintas. En particular, el personal de administración y servicios de la EUPLA siempre me ha brindado su apoyo cuando me ha hecho falta. Alejandro Lasarte, Agustín Soria y José Antonio Orna en conserjería, y Serafín Latorre, Elena Latorre, José Antonio López, M<sup>a</sup> Carmen Aísa, Ana Viruete, Dorita Sanjuán y María Soler en secretaría, siempre hacéis que mi trabajo sea más fácil. ¡Muchas gracias!

Quisiera recordar también a mi compañero de la EUPLA e investigador del departamento Javier Casahorrán, que sufrió una muerte prematura que nos dejó a todos sus compañeros igualmente impactados. Persona inteligente e irónica a partes iguales, me brindó su ayuda en los últimos años, y tuve la suerte de trabajar con él y aprovecharme de sus abundantes conocimientos en Física y Matemáticas. Gracias Javier, te echamos de menos.

También durante el desarrollo de esta Tesis nos sorprendió el deceso del profesor Julio Abad, que trabajó incansablemente en el departamento de Física Teórica durante muchos años. Tuve el honor de participar junto con mi mentor Antonio Seguí en un capítulo de un libro escrito en su memoria, capítulo que forma parte de esta Tesis. En el departamento todos te recordamos con cariño.

Naturalmente, mi familia merece todo mi agradecimiento por soportar mis disquisi-

ciones educativas tratando de explicarles en qué diantres paso tanto tiempo trabajando. A pesar de la paliza que os he dado, no habéis dejado de preguntarme y darme ánimos. Especialmente gracias a mis padres, Cesáreo e Isabel, por apoyarme en todo lo que he querido hacer por raro que haya parecido; a mi hermano Jesús, que me contagió su gusto por la Física y siempre me ha animado a continuar, y a mis hermanas Pili e Isa, por prestarme su apoyo y mostrarme su interés.

Mis amigos también han mostrado interés y me han animado en mi trabajo científico, además de ser un apoyo continuo en esta y en cualesquiera otras facetas de mi vida. Por supuesto, mi agradecimiento hacia ellos, tanto como a mi familia, va mucho más allá de esta Tesis. Con ellos, incluso los malos momentos son buenos. Pero por figurar en el apartado de agradecimientos, tengo que mencionar a José Luis Sevillano “Pollo”, que me ha sacado de numerosos trances informáticos con prioridad 1. Muchas gracias, *arkadas*, pero aún no te has librado de mí. También tengo que agradecer las preguntas incansables que César Gonzalo me ha hecho sobre éstas y otras cosas a lo largo de estos años, permitiéndome explayarme de un modo no técnico. Perdona por las palizas, en estos casos es mejor la actitud de Ernesto López “Nano”, que me preguntó “Lo que tú haces, ¿se puede explicar en cinco minutos?”, y cambió de tema tras mi negativa. Así es, queridos amigos, os quiero precisamente por cosas como ésta. También desde aquí mi agradecimiento a Carlos Molina, que además de preguntarme “¿Pero tú cuando (!#€& vas a acabar la tesis?”, me ha brindado su ayuda y su atención en la biblioteca pública de Soria, donde, gracias a él y a sus encantadoras compañeras, cada vez que voy me siento como en casa. Quien también se ha interesado extensivamente por los aspectos menos técnicos de mi tesis es Alberto Vélaz: muchas gracias, al fin lo he conseguido. Y en cuanto a los demás, Carlos Pascual, Ana Calvo, Luis Martínez, Tere Palomar, Pili Pérez, Rafa Arranz, Emilio López, Emilio Molina, Jaime Albitre y Miki Gómez, no recuerdo anécdotas que tengan relación directa con todo el asunto que vengo tratando, pero os agradezco igualmente vuestro apoyo, entre muchas otras cosas.

En último lugar, mi agradecimiento para Idoia, mi esposa, compañera y amiga, que siempre me ha facilitado mi trabajo. Aunque ello haya supuesto un gran esfuerzo para ella, me ha ayudado desinteresadamente, con amor y cariño, mucho en los buenos momentos, pero muchísimo más en los malos. En estos años, esta Tesis no es lo mejor que he hecho, como me recuerdan mi dos preciosos hijos Iratxe y Hegoï cada vez que les veo. Gracias también por ellos, Idoia, os quiero con locura a los tres.

Tenías razón, Antonio, los primeros años de los hijos representan una época de gran inspiración, como demuestra este trabajo, completo al fin.

Zaragoza, 11 de Julio de 2013

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>11</b>
1.1	Situación actual de la Física Teórica . . . . .	11
1.1.1	Relatividad General . . . . .	11
1.1.2	Teoría Cuántica de Campos . . . . .	15
1.1.3	Problemas de ambas teorías . . . . .	20
1.2	Más allá de las teorías estándar . . . . .	26
1.2.1	Cosmología Cuántica . . . . .	26
1.2.2	Loop Quantum Cosmology . . . . .	27
1.2.3	Teoría de Cuerdas . . . . .	30
1.2.4	El Paisaje . . . . .	42
1.3	El modelo de Bousso-Polchinski . . . . .	44
1.3.1	Presentación del modelo . . . . .	45
1.3.2	Problemas del modelo . . . . .	49
1.4	Objetivos de la presente Tesis . . . . .	52
1.5	Contando estados en el paisaje de Bousso-Polchinski . . . . .	52
1.5.1	Estados secantes, estados frontera . . . . .	53
1.5.2	Modelo del hiperplano aleatorio . . . . .	56
1.5.3	Mejoras al modelo del hiperplano aleatorio . . . . .	60
1.5.4	Conteo exacto . . . . .	62
1.5.5	El problema $\alpha^*$ . . . . .	67
1.6	El paisaje de Einstein-Maxwell . . . . .	71
1.6.1	El paisaje Einstein-Maxwell multi-esfera . . . . .	71
1.6.2	Estabilización de los módulos . . . . .	73
1.6.3	Estados antrópicos del paisaje multi-esfera . . . . .	75
<b>2</b>	<b>A geometric-probabilistic method...</b>	<b>79</b>
2.1	Introduction . . . . .	79
2.1.1	The Bousso-Polchinski count . . . . .	80
2.1.2	The Bousso-Yang count . . . . .	81
2.1.3	Our method of counting . . . . .	82
2.2	Counting secant states . . . . .	84
2.3	The random hyperplane model . . . . .	87
2.3.1	The hyperplane space . . . . .	88
2.3.2	A probability measure in the hyperplane space . . . . .	90
2.4	Number of states in the Weinberg Window . . . . .	93
2.5	Conclusions and future directions . . . . .	98
2.6	Improving the BP count . . . . .	100

<b>3</b>	<b>Counting in the BP Landscape</b>	<b>103</b>
3.1	Introduction . . . . .	103
3.2	Counting secant states . . . . .	105
3.3	Number of states in the Weinberg Window . . . . .	109
3.4	Replacing secant by boundary states . . . . .	111
3.5	Conclusion . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Applications of an exact counting...</b>	<b>115</b>
4.1	Introduction . . . . .	115
4.2	The BP Landscape degeneracy . . . . .	118
4.2.1	The exact representation . . . . .	118
4.2.2	The large distance (or BP) regime . . . . .	120
4.2.3	The small distance regime . . . . .	123
4.2.4	The middle distance regime . . . . .	125
4.3	Applications . . . . .	127
4.3.1	Number of states in the Weinberg Window . . . . .	127
4.3.2	Typical number of non-vanishing fluxes . . . . .	127
4.3.3	Estimating the minimum positive cosmological constant . . . . .	130
4.3.4	A possible influence on the KKLT mechanism . . . . .	140
4.4	Conclusions . . . . .	141
4.5	Detailed computation of the typical fraction of non-vanishing fluxes . . . . .	142
4.6	Typical fraction of non-vanishing fluxes in the pure BP regime . . . . .	146
<b>5</b>	<b>Some physical consequences...</b>	<b>151</b>
5.1	Introduction . . . . .	151
5.2	The BP Landscape degeneracy . . . . .	152
5.2.1	The exact representation . . . . .	152
5.2.2	The large distance (or BP) regime . . . . .	152
5.2.3	The small distance regime . . . . .	153
5.3	Applications . . . . .	153
5.3.1	Number of states in the Weinberg Window . . . . .	153
5.3.2	Typical number of non-vanishing fluxes . . . . .	153
5.3.3	Estimating the minimum positive cosmological constant . . . . .	154
5.3.4	A possible influence on the KKLT mechanism . . . . .	154
5.4	Conclusions . . . . .	154
<b>6</b>	<b>Exploring the EM landscape</b>	<b>157</b>
6.1	Introduction . . . . .	157
6.2	One-flux compactification in the four-dimensional Einstein-Maxwell theory	160
6.2.1	The one-flux four-dimensional Einstein Maxwell landscape . . . . .	160
6.2.2	Modulus stabilization . . . . .	163
6.3	Adding many fluxes . . . . .	167
6.3.1	Multi-sphere compactification . . . . .	168
6.3.2	Moduli stabilization . . . . .	173
6.3.3	State searching in concrete examples . . . . .	178
6.4	State counting . . . . .	184
6.4.1	Counting states in the principal branch . . . . .	184
6.4.2	Small cosmological constant distribution . . . . .	191

6.5	Anthropic states in the multi-sphere Einstein-Maxwell landscape . . . . .	199
6.5.1	Step-by-step construction of anthropic states . . . . .	199
6.5.2	Implications for the multiverse prediction of the cosmological constant	205
6.6	Comparison between the Bousso-Polchinski and multi-sphere Einstein-Maxwell landscapes . . . . .	206
6.6.1	The Bousso-Polchinski landscape . . . . .	207
6.6.2	Comparison between BP and ms-EM landscapes . . . . .	208
6.7	Possible implications for the string theory landscape . . . . .	210
6.8	Conclusions . . . . .	212
6.9	Effect of derivative couplings in the multi-radion evolution equations . . .	213
<b>7</b>	<b>Moduli stabilization in the EM landscape</b>	<b>217</b>
7.1	Introduction . . . . .	217
7.1.1	The Bousso-Polchinski Landscape . . . . .	217
7.1.2	The $\alpha^*$ -problem of the BP Landscape . . . . .	219
7.1.3	Motivation . . . . .	219
7.2	The multi-sphere Einstein-Maxwell Landscape . . . . .	220
7.3	Anthropic states in the MS-EM landscape . . . . .	223
7.4	Conclusions . . . . .	223
<b>8</b>	<b>Resumen y conclusiones</b>	<b>225</b>
8.1	Objetivos de investigación . . . . .	225
8.2	Metodología utilizada . . . . .	228
8.3	Aportaciones del doctorando . . . . .	228
8.4	Conclusiones finales . . . . .	229
<b>A</b>	<b>Factores de impacto</b>	<b>231</b>



# Índice de figuras

1.1	Las diferentes teorías de cuerdas . . . . .	37
1.2	Mecanismo de neutralización de Brown-Teitelboim . . . . .	48
1.3	Tipos de estados en el paisaje de Bousso-Polchinski . . . . .	54
1.4	Trozos de la curva $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ . . . . .	57
1.5	Parámetros $v$ y $\rho$ que definen un estado secante . . . . .	57
1.6	Espacio de hiperplanos secantes . . . . .	58
1.7	Diferentes estimaciones de la curva $\alpha^*(h)$ . . . . .	69
2.1	States on the $\Lambda = 0$ surface in a $J = 2$ BP Landscape . . . . .	83
2.2	Directional density of states . . . . .	84
2.3	Construction of $N(\theta)$ . . . . .	85
2.4	Construction of the hyperplane space in the $J = 2$ case . . . . .	89
2.5	Hiperplane space and cell boundaries . . . . .	89
2.6	Geometric and simulated samples in hyperplane space . . . . .	91
2.7	Illustration of the circle method . . . . .	92
2.8	Histograms of the number of points inside a random circle . . . . .	92
2.9	Histogram of the $\rho$ parameter in a $J = 2$ Landscape . . . . .	95
2.10	Histograms of brute-force search for secant states . . . . .	96
2.11	Number of states in a shell vs. BP count . . . . .	98
2.12	Voronoi cells of states inside a shell . . . . .	99
3.1	Secant states and definition of the $\rho$ and $v$ parameters . . . . .	105
3.2	Secant hyperplanes of positive $\rho$ in a $J = 2$ BP landscape . . . . .	106
3.3	Lattice with a typical scale along with its dual lattice . . . . .	107
3.4	Boundary hyperplane space . . . . .	112
4.1	Complementary asymptotic regimes of the $\vartheta$ function . . . . .	121
4.2	Numerical saddle point $u(h)$ of the $\omega_J(r)$ integrand . . . . .	124
4.3	Asymptotic regimes of the Landscape degeneracy $\omega_J(r)$ . . . . .	126
4.4	Numerical solution $\alpha^*(h)$ and samples of the typical number of non-vanishing fluxes . . . . .	129
4.5	Brute-force computation of the minimum positive cosmological constant . . . . .	132
4.6	Essential degeneracy of the minimum positive cosmological constant states . . . . .	135
4.7	Fluctuation of $\Lambda_{\text{min}}$ for constant geometric average charge . . . . .	136
4.8	Thermodynamic magnitudes with discrete or continuous density of states . . . . .	139
4.9	Numerical saddle point of the $P(\alpha)$ integrand . . . . .	145
4.10	Construction of the solution $\alpha^*$ of equation (4.117) . . . . .	146
4.11	Critical points of the $\phi$ function (4.132) in complex $s$ -plane . . . . .	149



5.1	Samples of the typical number of non-vanishing fluxes . . . . .	154
6.1	Curvature $K$ and cosmological constant $\lambda$ of the one-flux Einstein-Maxwell landscape . . . . .	164
6.2	The eight branches of the $J = 3$ Einstein-Maxwell landscape . . . . .	172
6.3	Landscape examples: states . . . . .	181
6.4	Landscape examples: $\lambda$ . . . . .	182
6.5	Landscape examples: stability eigenvalue . . . . .	183
6.6	Number of stable dS states as a function of $\Lambda$ . . . . .	189
6.7	Number of stable dS states at half-integer values of $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ . . . . .	190
6.8	Density of states of the $J = 1$ landscape . . . . .	194
6.9	Exact and estimated minimum- $\lambda$ . . . . .	195
6.10	Brute-force-computed $\lambda$ -spectrum and approximated density of states . . .	196
6.11	Brute-force data and approximate formulae . . . . .	198
6.12	Density of states of three different examples of the $J = 2$ Einstein-Maxwell landscape . . . . .	198
6.13	Gap of the $J = 2$ density of states as a function of $\Lambda$ . . . . .	200
6.14	Iteration function of recurrence relation (6.154) . . . . .	202
6.15	Turning points and actual trajectories of the normal modes of the projected multi-radion evolution equation . . . . .	216
7.1	Examples of $J = 2$ BP and MS-EM landscapes . . . . .	222
7.2	Effective cosmological constant distribution of a $J = 2$ BP landscape and a $J = 2$ MS-EM landscape . . . . .	222

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Situación actual de la Física Teórica

El siglo XXI, cuyos comienzos vivimos, es una época sin ningún precedente en lo que se refiere a evolución científica. La inmensa mayoría de los fenómenos que observamos en la actualidad encuentran explicación en alguna de las teorías que en su conjunto llamamos Física. Los niveles de sofisticación alcanzados por los experimentos modernos, como los detectores dispuestos a lo largo del *Large Hadron Collider* (LHC) en Ginebra, o los satélites astrofísicos *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) y *Planck*, arrojan datos con una precisión tal que las teorías desarrolladas durante la segunda mitad del siglo XX se están sometiendo a durísimas pruebas experimentales. Hasta el momento, los datos no hacen sino confirmar una y otra vez las teorías vigentes, que constituyen por tanto el cuerpo de conocimiento verificable más complejo y completo jamás alcanzado por el ser humano en toda su historia.

Podría pensarse que si las teorías se ven confirmadas por los experimentos es porque son correctas, y por tanto el trabajo de la Física Teórica, que consiste precisamente en diseñar dichas teorías, está terminado. Sin embargo, las teorías no están exentas de contradicciones internas, si bien ninguna entra en contradicción con los datos experimentales, y afortunadamente todas contienen medios para establecer sus propios límites de aplicabilidad, de manera que existen aún problemas que no se han conseguido resolver dentro del marco teórico existente. Esta introducción está dedicada a explicar algunos de esos problemas y su relación con el estudio que se expone en esta Tesis.

De todas las teorías de la Física, quizá la que ha sido confirmada en más ocasiones y además se encuentra libre de contradicciones es la Termodinámica, entendida como la descripción estadística de las consecuencias macroscópicas de los fenómenos microscópicos. No hay ningún problema fundamental sin resolver asociado a esta teoría. Sin embargo, la Termodinámica, o la teoría más general de la Mecánica Estadística, no son teorías fundamentales en el sentido en que se apoyan en otras teorías que sí lo son. Las teorías fundamentales, completas, autocontenidas e independientes de otras, son la Relatividad General y la Teoría Cuántica de Campos, que se consideran a continuación.

#### 1.1.1 Relatividad General

La teoría de la Relatividad General que Einstein formuló en 1915, es una descripción del campo gravitatorio acorde con la teoría de la Relatividad. En palabras de Landau

([1], pág. 245), la teoría de la Relatividad General “representa probablemente la más bella de todas las teorías físicas existentes”, punto de vista compartido por la mayoría de la comunidad científica. Al contrario de lo que ocurre con la mayor parte de las teorías nuevas, que se construyen para explicar un resultado experimental que contradice el punto de vista vigente, la Relatividad General (RG) se construyó tomando como guía el principio de Relatividad, sin ninguna evidencia experimental que contradijera la teoría Newtoniana. Sólo después se confirmaron experimentalmente los test clásicos, que no tenían explicación en el marco Newtoniano, lo que supuso un éxito total de la teoría y la elevó al estatus del que disfruta hoy en día: la teoría clásica más completa.

Los tests clásicos que confirman experimentalmente la teoría de la Relatividad General [2, 3] se consideran brevemente en lo que sigue.

**Refracción gravitatoria** Según la teoría Newtoniana, sólo los cuerpos con masa podían verse afectados por la fuerza de la gravedad. Sin embargo, la ecuación central de la Relatividad,

$$E = mc^2, \quad (1.1)$$

establece la equivalencia entre masa y energía, lo que quiere decir que toda la energía debería notar los efectos gravitatorios. Por tanto, un rayo de luz debería desviarse de su trayectoria rectilínea al pasar cerca de un cuerpo de gran masa, experimentando un efecto equivalente a la refracción que ocurre cuando la luz atraviesa un medio ópticamente activo. Este efecto puramente relativista fue medido durante un eclipse solar en 1919. Toma el valor de 1.75 segundos de arco, en pleno acuerdo con la predicción relativista. Este efecto es también el responsable de las *lentes gravitatorias*, que son distorsiones en una imagen captada por un telescopio cuando se interpone un objeto muy masivo y compacto, de una forma análoga a la distorsión causada por una lente que los rayos luminosos tuvieran que atravesar.

**Desplazamiento hacia el rojo** La atracción gravitatoria que sufren los rayos luminosos al pasar cerca de objetos masivos tiene otra consecuencia curiosa. Si se emite una onda luminosa desde la superficie de un cuerpo masivo, su longitud de onda aumenta, experimentando un desplazamiento hacia el rojo, como si la luz perdiese energía al ascender desde un pozo gravitatorio, de una forma análoga a lo que les ocurre a los objetos con masa. Curiosamente, este efecto tiene una aplicación moderna en el Sistema de Posicionamiento Global (GPS), que consiste en la utilización de satélites en órbita alrededor de la Tierra para medir la posición sobre su superficie. La precisión de una medida de la distancia entre un punto de la superficie terrestre y un satélite depende de la precisión con la que se conoce la longitud de onda de la señal luminosa que se envía y se recoge de vuelta; pero esa longitud de onda cambia a lo largo del camino de ida y vuelta entre la Tierra y el satélite debido al efecto relativista de desplazamiento hacia el rojo. Si no se tuviese en cuenta este efecto, los dispositivos GPS no tendrían la alta precisión de la que disfrutan hoy en día, que les permite localizar un punto sobre la superficie terrestre con un error inferior a un metro.

**Tiempo de retardo en señales de radar** Otro efecto medible del comportamiento de la luz en presencia de campos gravitatorios es el retardo que experimentan las señales de radar emitidas desde la Tierra. Si se emite una señal de radar desde la Tierra, la señal pasa cerca del Sol, alcanza otro planeta y se refleja hacia su punto de partida,

la luz recorrerá una distancia superior de la que recorrería en ausencia del sol debido a la refracción gravitatoria. Por lo tanto, el tiempo empleado en ir y volver debe ser mayor del que sería sin campo gravitatorio. Este efecto se ha medido con una alta precisión siguiendo la trayectoria de vehículos espaciales que emiten señales hacia la Tierra.

**Precesión del perihelio de Mercurio** Las órbitas de los planetas alrededor del Sol son keplerianas si se desprecian las perturbaciones introducidas por los planetas masivos. Las órbitas keplerianas son elipses perfectas, y en esas elipses la posición angular del perihelio, es decir, la orientación del eje mayor de la órbita, permanece fija en el espacio, es decir, el planeta vuelve exactamente al mismo punto tras cada revolución. Sin embargo, la influencia gravitatoria de un planeta masivo tiene como consecuencia que el perihelio se mueva alrededor del sol en un lento movimiento de precesión. Este efecto puede calcularse, y todos los planetas experimentan una precesión de sus perihelios causada principalmente por la influencia de sus planetas vecinos y de Júpiter, que es el más masivo de los planetas. Sin embargo, la precesión del perihelio de Mercurio es mucho mayor de la que debería ser si estuviera causada por el resto de los planetas. Un cálculo exacto de las órbitas de los planetas alrededor del Sol en el marco de la Relatividad General concuerda con el valor de la precesión del perihelio de Mercurio medida experimentalmente, que es de 43 segundos de arco por siglo, después de excluir los efectos del resto de los planetas. Los demás planetas apenas sufren este efecto debido a que su distancia al Sol es mucho mayor.

Desde las primeras medidas que acompañaron a estos tests clásicos, las comprobaciones experimentales de la Relatividad General no dejan de producirse, y cada vez con una mayor precisión [4]. Es natural entonces que se busquen aplicaciones a la teoría en diferentes situaciones. Una de las primeras aplicaciones fue la búsqueda de soluciones cosmológicas, que ofrecieran una imagen de cómo es el Universo observado a gran escala. Puesto que la Relatividad General es una teoría sobre el espacio-tiempo, una pregunta natural es averiguar cuál es el espacio-tiempo que la teoría predice para nuestro Universo. Tomando como punto de partida que el Universo a gran escala parece ser isótropo y homogéneo con una gran precisión, podemos insertar esta información en la teoría para obtener una descripción del espacio-tiempo. La primera característica que se predice es que el Universo no puede ser estático, sino que la escala de distancias debe estar en expansión o contracción. Einstein no creía que una solución dinámica fuese correcta, lo que le llevó a modificar su propia ecuación introduciendo la *constante cosmológica*. La ecuación de Einstein modificada de esta forma admite una solución isótropa y homogénea que es además estática, denominada *Universo estático de Einstein* [3]. Sin embargo, poco tiempo después se confirmó experimentalmente la expansión del Universo, lo cual motivó a Einstein a abandonar la idea de la constante cosmológica. No obstante, la teoría *sin* constante cosmológica predice dicha expansión, lo cual constituye otro éxito de la Relatividad General. Los modelos correspondientes se denominan *cosmologías de Robertson-Walker* [3].

La evolución del Universo en expansión en el futuro lejano depende de su contenido material, pero su evolución hacia el pasado es siempre la misma: debe haber un momento en el pasado en el cual todo el Universo estaba comprimido en un punto. Esta singularidad inicial predicha por las ecuaciones de Einstein recibe el nombre de “Gran Explosión” (*Big Bang*), porque a partir del instante inicial el Universo comenzó a expandirse. La opinión

extendida entre la comunidad científica es que el origen singular del Universo es una consecuencia de aplicar la Relatividad General más allá de su ámbito. En una concentración extrema del espacio los efectos cuánticos han de ser necesariamente importantes, así que cualquier teoría que los ignore debe ser por fuerza sólo aproximada, y la predicción de la singularidad debe ser incorrecta.

Asumiendo cierto contenido de materia, la imagen de la evolución cosmológica ofrecida por la Relatividad General conforma un modelo estándar de nuestro Universo. Después de la singularidad inicial, el Universo estaba fuertemente comprimido y su contenido principal era radiación. Después de experimentar cierta expansión la radiación quedó suficientemente diluída y la expansión pasó a estar dominada por la materia ordinaria, que hoy presenta una densidad unas mil veces mayor que la de la radiación. Otros dos componentes del Universo, la *materia oscura* y la *energía oscura*, se incorporan al modelo mediante sus ecuaciones de estado en el primer caso y mediante una constante cosmológica en el segundo. El modelo resultante, denominado  $\Lambda$ CDM, (constante cosmológica y materia oscura fría) [5], da cuenta de todas las etapas observables de la evolución del Universo que han dejado su huella en la radiación primigenia que llena todo el espacio, el fondo cósmico de radiación de microondas (*cosmic microwave background radiation*, CMBR). Los componentes del Universo según este modelo y las observaciones que lo soportan son, aproximadamente, un 68 % de energía oscura, un 30 % de materia oscura y un restante 2 % de materia bariónica ordinaria [6], [7].

La primera etapa del Universo, desde el *Big Bang* hasta la expansión dominada por la radiación, se conoce sólo a nivel puramente especulativo. Sin embargo, la impresionante uniformidad e isotropía del fondo de radiación de microondas a las escalas más grandes, tan grandes de hecho que es imposible que la radiación pueda alcanzar el equilibrio térmico en regiones muy alejadas del cielo, hacen pensar que toda esa radiación tuvo que estar comprimida en un volumen pequeño en una etapa temprana, durante la cual se estableció el equilibrio térmico, y a continuación el Universo experimentó una época de expansión exponencialmente rápida que lo llevó a alcanzar el tamaño actual. Hay que decir que la expansión cosmológica descubierta por Hubble no es lo bastante rápida como para explicar la homogeneidad del fondo de radiación. Esta nueva fase de expansión veloz se denomina *inflación* [8], [9], [10], y su presencia ayuda a resolver algunas paradojas de los modelos cosmológicos anteriores además de la que se acaba de mencionar sobre el equilibrio térmico de regiones causalmente desconectadas, paradoja que se conoce como *problema del horizonte*. Otros de los problemas que la inflación ayuda a resolver es el *problema de las reliquias*, consistente en la ausencia de algunas partículas que deberían haberse producido en un estado primigenio más denso del Universo pero que sin embargo no se detectan en absoluto en la actualidad (estas partículas, como por ejemplo los monopolos magnéticos, se denominan *reliquias*). Por último, sin una época de inflación es sumamente complicado explicar por qué la densidad de todos los componentes del Universo está tan próxima a la densidad crítica del espacio plano, para la cual la evolución cosmológica es la asociada a un modelo de Robertson-Walker con curvatura espacial nula, el denominado *problema de la planitud*.

La inflación deja otros problemas sin resolver. Nos ocuparemos de ellos en la sección 1.1.3, más abajo.

Por el momento, las observaciones llevadas a cabo sobre supernovas de tipo I [11, 12] han permitido establecer que el Universo no sólo se expande, sino que de hecho esa expansión es acelerada. Dichas observaciones son además consistentes con una constante

cosmológica positiva, cuyo valor es

$$\Lambda_{\text{obs}} \approx 1.23 \times 10^{-123}. \quad (1.2)$$

El análisis también excluye la posibilidad de que la constante anterior sea estrictamente cero. Por lo tanto, las observaciones muestran que nuestro Universo obedece con una precisión impactante a un modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, y en esa evolución estamos en una fase de expansión dominada por la constante cosmológica.

Los satélites astrofísicos [13], [6], [14] continúan acumulando datos para perfilar el modelo estándar cosmológico que acabamos de describir.

### 1.1.2 Teoría Cuántica de Campos

Si la Relatividad General se aplica a sistemas muy grandes como el campo gravitatorio alrededor de los cuerpos celestes, las órbitas de los planetas o la estructura del espacio-tiempo a gran escala, la Mecánica Cuántica se ocupa de los fenómenos microscópicos. Quizá las diferencias más notables entre la Mecánica Cuántica y la Mecánica Clásica son [15, 16]:

- La **dualidad onda-corpúsculo**, según la cual las partículas microscópicas se comportan también como ondas con una longitud de onda dada por la fórmula de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1.3)$$

donde  $p$  es el momento de la partícula, y  $h$  es la *constante de Planck*, que mide el valor de la acción de una partícula a partir del cual se manifiesta su comportamiento ondulatorio. Este comportamiento ha sido comprobado mediante experimentos con partículas como los electrones, que muestran patrones de interferencia cuando se dirigen hacia una placa fotográfica pasando por una doble rendija, patrones que desaparecen cuando se tapa una de las rendijas.

- El **principio de incertidumbre**, según el cual dos variables dinámicas canónicamente conjugadas, como la posición de una partícula o su momento, no pueden medirse simultáneamente con precisión arbitraria. Así, cuando se conoce la posición de una partícula, entonces su momento está fuertemente indeterminado, y viceversa. Esta dificultad intrínseca de la Mecánica Cuántica entra en contradicción con la Mecánica Clásica, en la cual en principio pueden medirse a la vez la velocidad y la posición de una partícula, como de hecho ocurre con los objetos cotidianos. La contradicción se debe al pequeño valor de la constante de Planck, cuya consecuencia es que los fenómenos cuánticos se manifiestan sólo en el mundo microscópico.
- La **influencia del observador** en los procesos de medida. En principio, las magnitudes clásicas pueden determinarse sin afectar el sistema que se está midiendo. Las medidas mediante señales luminosas, por ejemplo, no alteran ni la posición ni la velocidad de los cuerpos macroscópicos. En cambio, si se usa un detector clásico para medir el momento o la posición de una partícula microscópica como un electrón, la medida altera el estado subsiguiente del mismo.

- La **indistinguibilidad** de las partículas elementales. En general, las partículas clásicas son distinguibles unas de otras, en el sentido en que intercambiar sus posiciones y momentos produce estados dinámicos distintos. Esto hace que las partículas clásicas, cuando se consideran en conjuntos estadísticos numerosos, obedezcan a la estadística de Boltzmann. En Mecánica Cuántica, por el contrario, las partículas son indistinguibles, lo que las hace obedecer a una estadística diferente según su spin: La estadística de Fermi-Dirac para las partículas de spin semientero (o *fermiones*) y la estadística de Bose-Einstein para las partículas de spin entero (o *bosones*).

La Mecánica Cuántica surgió tratando de dar respuesta a problemas de la Mecánica Clásica como por ejemplo la radiación de cuerpo negro, los espectros atómicos o la estabilidad de los átomos, que no tiene explicación clásica. Todos estos problemas pueden explicarse sólo mediante una teoría completa que describa la interacción entre la materia y la radiación electromagnética, y para ello fue necesario completar varios niveles de abstracción en los que cada elemento del sistema luz-materia iba adquiriendo una descripción en términos de la Mecánica Cuántica. Describir cuánticamente un objeto clásico es “cuantizarlo”; lo primero que se cuantizó fueron los electrones orbitando alrededor de los núcleos atómicos, y de esa cuantización surgió la explicación de los espectros atómicos y la estabilidad de la materia. A continuación se cuantizó el campo electromagnético, lo cual permitió explicar, entre otras cosas, la radiación de cuerpo negro, como un gas ideal de partículas de spin uno llamadas *fotones*. La teoría de los fotones permitió a Einstein explicar el efecto fotoeléctrico, teoría que le hizo ganar el premio Nobel en 1921.

Los éxitos de la teoría cuántica fueron más allá. Si el campo electromagnético, que se propaga en forma de ondas luminosas, puede cuantizarse para dar lugar a los fotones, que son la versión cuantizada de las pequeñas oscilaciones del campo, se puede sospechar que el esquema es el mismo para el resto de las partículas elementales: Cada una representa una excitación cuantizada de las pequeñas oscilaciones de un campo subyacente. Esta visión de todas las partículas elementales como pequeñas excitaciones cuantizadas sobre un estado de mínima energía de un campo fundamental supone la transición de la Mecánica Cuántica a la Teoría Cuántica de Campos [17, 18].

La necesidad de una teoría cuántica de los campos fundamentales se ve porque las versiones anteriores conservan de forma genérica el número de partículas de cada clase que intervienen en un determinado proceso, mientras que la Relatividad Especial permite la creación y destrucción espontáneas de partículas elementales. Así, primero se creó una teoría cuántica del electrón acorde con la Relatividad Especial, lo que dio lugar a la ecuación de Dirac, y después se llegó a la conclusión de que la interpretación más sencilla de los estados de energía negativa y la creación de pares de partículas conducía al concepto de “mar de Dirac”, un fluido de pares partícula-antipartícula en su estado de mínima energía, lo cual parecía conducir no a una teoría de una sólo partícula, sino a una teoría de un campo cuantizado. La teoría que se sigue desde este punto de partida, llamada Electrodinámica Cuántica, fue la primera teoría cuántica de campos en predecir con una alta precisión cantidades que no tenían explicación en el marco de la Mecánica Cuántica relativista, como por ejemplo el momento magnético anómalo del electrón, cuyos valores experimental y teórico son [17]

$$\begin{aligned}
 g_{\text{obs}} &= \frac{e\hbar}{2mc} (1.00118 \pm 0.00003) \\
 g_{\text{th}} &= \frac{e\hbar}{2mc} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) = \frac{e\hbar}{2mc} (1.001162).
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

En la fórmula anterior,  $\alpha \approx \frac{1}{137}$  representa la constante (adimensional) de estructura fina, y su pequeño valor representa la baja intensidad de las interacciones electromagnéticas.

La Electrodinámica Cuántica fue la primera teoría cuántica de campos en dar resultados sorprendentes en completo acuerdo con el experimento. La predicción de la existencia de antipartículas antes de que se descubrieran, en particular el positrón, y el cálculo acertado de cantidades como la expuesta en la ecuación (1.4) convencieron a los físicos teóricos de que la teoría cuántica de campos era la forma correcta de comprender el mundo microscópico.

Sin embargo, la Electrodinámica Cuántica es una teoría que describe sólo la interacción entre los electrones (y los positrones) y el campo electromagnético. Si bien podía generalizarse la teoría para incluir otras especies de fermiones, como el protón (y su antipartícula, el antiprotón), el descubrimiento de otras partículas como el neutrón, el neutrino, el muón, los mesones  $K$  y  $\pi$ , y otros tipos de hadrones en los rayos cósmicos, pusieron de manifiesto que la teoría era insuficiente para resolver problemas como la estabilidad de los núcleos atómicos o la desintegración beta de los neutrones. Se descubrió que este último fenómeno no era invariante bajo inversión espacial, de modo que la interacción que mediaba en la desintegración beta no podía ser de naturaleza electromagnética. Se la denominó *interacción débil*, e involucraba una partícula sin carga extremadamente ligera, el neutrino, que apenas interactuaba con la materia ordinaria. Tan débil es dicha interacción comparada con la electromagnética, que de hecho no es capaz de explicar cómo es posible que un puñado de partículas positivas y neutras, como los protones y los neutrones, permanezcan juntas en los núcleos atómicos. Tal interacción se denominó *fuerte*, porque de hecho es la más intensa que se conoce en la naturaleza, si bien es la que actúa en una distancia más corta.

La teoría que acomoda las interacciones débil y fuerte se denomina *teoría gauge no-abeliana*. Su nombre surge de la invariancia *gauge* de la teoría electromagnética. En esta teoría, los campos fundamentales son las componentes del cuadripotencial  $A = (\phi, \mathbf{A})$  que permiten recuperar las intensidades de campo eléctrico y magnético, que son magnitudes medibles, mediante

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.5)$$

Si se “calibran” los potenciales mediante la transformación *gauge*

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad (1.6)$$

donde  $\chi$  es una función arbitraria del tiempo y la posición, el campo electromagnético (1.5) permanece idéntico. Si a continuación se acopla el campo electromagnético con un campo cuántico  $\Psi$  cargado con una constante de acoplamiento  $e$  mediante la sustitución mínima invariante gauge  $\nabla \rightarrow \nabla - ie\mathbf{A}$ ,  $\partial_t \rightarrow \partial_t - ie\phi$  se obtiene una acción invariante gauge si el campo cuántico cambia de acuerdo con la regla

$$\Psi \longrightarrow e^{ie\chi}\Psi. \quad (1.7)$$

El factor de fase que aparece aquí,  $e^{ie\chi}$ , es un elemento del grupo conmutativo  $U(1)$ . Se dice entonces que el electromagnetismo es una *teoría gauge abeliana* al ser invariante bajo una transformación de la forma (1.6, 1.7), donde el campo cuántico transforma bajo un elemento del grupo abeliano  $U(1)$ .



Es posible generalizar la teoría electromagnética para obtener campos cuánticos que transforman mediante elementos de un grupo distinto a  $U(1)$ . Si se elige cierto grupo de Lie no conmutativo  $G$  del que tomar las transformaciones, se obtiene una *teoría gauge no-abeliana* [18]. Las fórmulas de transformación (1.6), (1.7) se reemplazan por

$$\Psi \longrightarrow U\Psi, \quad A_\mu \longrightarrow UA_\mu U^{-1} + (\partial_\mu U)U^{-1}, \quad (1.8)$$

donde  $U \in G$  es un elemento del grupo dependiente del tiempo y de la posición en general (para la simetría *gauge local*, pero sería un elemento fijo de  $G$  para la simetría *gauge global*). El campo  $\Psi$  debe transformarse como cierta representación del grupo  $G$ , en la cual podemos escribir  $U = e^{iT_a \chi^a}$ , donde  $\chi^a$  son funciones arbitrarias y  $T_a$  son matrices que generan el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  asociada al grupo  $G$  en la representación en la que transforme el campo  $\Psi$ . En la misma representación, el cuadripotencial  $A_\mu$  es un elemento de  $\mathfrak{g}$ . En el caso particular  $G = U(1)$ , sólo hay un generador, que puede tomarse proporcional a la carga  $e$ , y sólo hay una función  $\chi$ , de modo que (1.8) es equivalente a (1.6), (1.7) en ese caso particular. Otro ejemplo relevante es el campo de Yang-Mills, en el que  $G = SU(2)$ .

Entre las características fundamentales de las teorías *gauge* no-abelianas podemos citar la auto-interacción de su campo fundamental. Puede verse el origen de esta auto-interacción en la intensidad de campo, definida a través de las ecuaciones análogas a (1.5) en el caso abeliano. Éstas ecuaciones se obtienen a partir de la conexión dada por  $A_\mu$  que permite definir la derivada covariante  $D_\mu = \partial_\mu - A_\mu$ , y con ella un tensor de curvatura asociado

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]. \quad (1.9)$$

Los términos no lineales en la fórmula anterior son debidos precisamente a la no conmutatividad del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  a la que pertenece el campo  $A_\mu$ . Así, las ecuaciones de movimiento del campo  $F_{\mu\nu}$  son no-lineales, lo que excluye la posibilidad de que las soluciones puedan superponerse sin alterar su naturaleza individual como ocurre con el campo electromagnético. En consecuencia, la auto-interacción es debida a los términos no lineales en el potencial  $A_\mu$  que están ausentes en el caso abeliano. La linealidad se traduce en que el campo electromagnético en el vacío se propaga mediante un paquete de ondas luminosas que no experimentan interacción interna. A nivel cuántico, esta ausencia de interacción se manifiesta en que los fotones no tienen carga eléctrica. Por el contrario, un campo de Yang-Mills se propaga mediante un paquete de ondas que sí interactúa consigo mismo, lo que cuánticamente se traduce en que las partículas del campo sí que están cargadas con la carga generalizada correspondiente.

En el tratamiento de las teorías gauge para calcular magnitudes físicas se hace necesario utilizar un enfoque perturbativo, en el cual las interacciones se tratan como sucesivas correcciones a la propagación de campos libres intercambiando partículas virtuales del campo gauge. Cada una de las posibles configuraciones en las que esto puede suceder da lugar a un *diagrama de Feynman* [17], denominación de la técnica perturbativa relevante, que permite la construcción de cantidades físicas de forma aproximada. Cada diagrama de Feynman representa una integral cuyo valor representa una corrección radiativa a la propagación libre. Cuando la interacción es débil, como ocurre con la interacción electromagnética, cuya constante de acoplamiento es  $\alpha \approx \frac{1}{137}$ , la suma de los diagramas de Feynman converge rápidamente y se pueden extraer valores muy precisos de cantidades físicas con muy pocas correcciones, como ocurre en la fórmula (1.4). Desgraciadamente, muchas de las integrales que representan correcciones radiativas son divergentes, como ocurre con la autoenergía de un electrón, por ejemplo. El tratamiento de estos problemas

de convergencia da lugar a las técnicas de *regularización* y *renormalización*. El contenido de los siguientes párrafos y las referencias originales pueden encontrarse en [17].

La regularización consiste en extraer información significativa de una integral divergente. La renormalización, por el contrario, consiste en asumir que los parámetros que aparecen en el Lagrangiano de la teoría, que representan masas o constantes de acoplamiento, son formalmente infinitos, y que la adición de términos que representan nuevas interacciones al Lagrangiano puede eliminar estos valores infinitos y resultar en cantidades finitas, que son las que se miden en los experimentos. Cuando esta técnica puede aplicarse a todos los diagramas de Feynman se dice que la teoría es *renormalizable*. De lo contrario, se dice que la teoría es *no renormalizable* y no es posible el cálculo perturbativo de ninguna magnitud física. El ejemplo más sencillo de una teoría gauge (abeliana) renormalizable es la electrodinámica cuántica.

Otro fenómeno descubierto en las teorías cuánticas de campos (y aplicado después a la Mecánica Estadística, tal y como ocurre con la renormalización) es la *ruptura espontánea de la simetría*. Consiste en que el grupo de simetría de la acción que describe el modelo,  $G$ , es más grande que el grupo de simetría del estado fundamental. Esto sólo puede ocurrir cuando el estado fundamental está degenerado, de manera que el grupo  $G$  transforma unos estados fundamentales en otros. Por lo tanto, la simetría del estado fundamental es inferior, y se dice que la simetría  $G$  del modelo está rota espontáneamente. Los métodos perturbativos tienen entonces que elegir uno de los estados fundamentales a partir del cual efectuar sus expansiones aproximadas, lo cual singulariza el estado elegido y destruye la simetría del modelo. Esta ruptura espontánea de la simetría se aprovecha en el mecanismo de Higgs que dota de masas a las partículas elementales [19, 20, 21], como se describe brevemente a continuación.

Las teorías gauge no-abelianas renormalizables constituyen la base del denominado *modelo estándar* de la física de partículas. Por una parte, tenemos el modelo de Weinberg-Salam, que consiste en una teoría con grupo gauge  $SU(2) \times U(1)$  que unifica las interacciones electromagnética y débil, cuya constante de acoplamiento es aún menor que la electromagnética (de ahí su nombre). El modelo predice con gran precisión la existencia de un campo gauge no abeliano que tiene una componente abeliana, el fotón (asociado al campo electromagnético), y otra no abeliana, un mesón vectorial que contiene tres partículas masivas, los bosones  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z$ . Estas partículas se acoplan a los leptones, fermiones que aparecen asociados en pares junto con su correspondiente neutrino. Los leptones descubiertos en los aceleradores son el electrón, el muón y la partícula  $\tau$ . La teoría electrodébil predice acertadamente las masas de los leptones y los bosones intermedios mediante el mecanismo de Higgs, que asume la existencia de un bosón escalar que se acopla con el campo gauge y fermiónico, asignando masas a las partículas mediante la ruptura espontánea de la simetría de este nuevo campo escalar. Los bosones  $W^\pm$ ,  $Z$  y de Higgs han sido descubiertos en los aceleradores de partículas (éste último en el LHC, en 2012), en completo acuerdo con la teoría electrodébil [22, 23], [24], [25, 26]. Así pues, este modelo constituye un gran éxito de las teorías gauge no-abelianas.

La última pieza del modelo estándar es la construcción de las partículas más pesadas, los *hadrones*, que existen en una diversidad mucho mayor que los leptones. La teoría que da explicación al variado espectro hadrónico es la  *cromodinámica cuántica*, una teoría gauge no-abeliana basada en el grupo  $SU(3)$  (lo que se menciona en este párrafo está extraído de la referencia [18]). El campo fermiónico fundamental es el *quark*, una partícula de carga fraccionaria que no se puede detectar aislada, y se agrupa en dobletes. El doblete de quarks

de masa más pequeña está formado por los quarks *up* y *down*. Otros dobletes son el *strange* junto con el *charm*, y por último el *bottom* con el *top*. Cada quark interactúa por medio de un campo gauge no-abeliano con grupo  $SU(3)$ . Sus tres generadores transportan una carga conservada cada uno, denominada *carga de color*, de ahí el nombre de la cromodinámica. Las partículas asociadas al campo gauge se denominan *gluones*, y son bosones de masa cero que sí que interactúan entre sí, puesto que poseen carga de color, igual que los quarks. La intensidad de la interacción entre quarks y gluones es mucho mayor que la electromagnética, y por eso se la conoce como *fuerza fuerte*. Una de las características de esta fuerza es que desaparece a distancias muy cortas (se dice que la cromodinámica cuántica es *asintóticamente libre*), siendo en cambio muy intensa cuando la distancia aumenta. Esta peculiaridad tiene como consecuencia que los quarks no pueden nunca encontrarse separados unos de otros, y sólo pueden aparecer en combinaciones con carga de color neutra, que son los hadrones observados, como el protón, el neutrón, pión, etcétera. Este fenómeno, denominado *confinamiento* de la carga de color, explica que no puedan encontrarse quarks libres: en cuanto dos de ellos se intentan separar, se debe comunicar una energía tan grande que es bastante para la creación espontánea de un par quark-antiquark entre ellos. Este par se asocia a las partículas originales, produciendo un par mesón-antimesón. Este mecanismo cuántico de creación de pares explica el confinamiento. Por último, el mecanismo de Higgs también es responsable de la adquisición de masa de los quarks, y explica sus masas en completo acuerdo con los datos experimentales.

La cromodinámica cuántica, con sus tres generaciones de quarks, y la teoría electrodébil, con sus tres generaciones de leptones, junto con sus campos gauge no-abelianos asociados (el grupo gauge sería  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ), y el bosón de Higgs que dota de masas a todas las partículas, constituyen el modelo estándar de la física de partículas [27, 28]. Este modelo explica toda la fenomenología encontrada en los aceleradores de partículas, de modo que constituye un completo éxito de la teoría cuántica de campos.

### 1.1.3 Problemas de ambas teorías

Uno de los problemas del modelo estándar de la física de partículas es el elevado número de parámetros libres que tiene la teoría, 19 [29, 30], y que deben determinarse mediante experimentos en los aceleradores. La mayoría de los físicos encuentra elegante la idea de poder explicar toda la fenomenología de las partículas elementales con muy pocos parámetros libres. También resulta curioso el diferente papel representado por fermiones y bosones en el modelo estándar, en el que los bosones parecen mediadores de las interacciones y los fermiones los constituyentes de la materia.

Una forma de intentar limitar el número de parámetros libres en la teoría es intentar incrustar el grupo gauge del modelo estándar,  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  dentro de un grupo mayor que contenga una sólo constante de acoplamiento. Estos modelos, denominados *teorías de gran unificación* [30], obligan a que las constantes de acoplamiento obedezcan ciertas relaciones que están en completo desacuerdo con el experimento: en particular, las constantes de acoplamiento fuerte y débil deberían coincidir, lo que no es cierto.

Una de las consecuencias de la renormalización de las teorías cuánticas de campos es que, gracias a la supresión de los grados de libertad con energías mucho mayores que las energías típicas del proceso bajo estudio, los acoplamientos cambian con el nivel de energía. Por tanto, relaciones entre las constantes de acoplamiento tienen sentido sólo a ciertas energías, en las cuales el grupo gauge de unificación representa una simetría que

no está rota. A esas energías, los acoplamientos fuerte y electrodébil serían comparables. El bosón gauge de la teoría unificada tendría una masa de ese mismo orden, con un valor alrededor de  $10^{15}$  GeV. La predicción más sólida de tales teorías es el decaimiento del protón [31, 30] que, de confirmarse, reforzaría la verosimilitud de la gran unificación. No se ha encontrado ninguna evidencia experimental de ese decaimiento [32].

Otra extensión del modelo estándar incluye la denominada *supersimetría*, según la cual cada campo (sea bosónico o fermiónico) posee un campo gemelo de naturaleza contraria [33]. Así, por ejemplo, los fotones del campo electromagnético poseerían un gemelo fermiónico, denominado *foto*. Esta extensión supersimétrica añade muchos más campos al modelo estándar, pero se asume que la supersimetría está rota, de modo que los campos gemelos tienen masas muy diferentes, de manera que los campos que faltan no pueden detectarse en los experimentos por tener masas demasiado altas. La extensión supersimétrica minimal del modelo estándar (que posee 124 parámetros libres [30]) tiene un contenido en partículas que debería haberse confirmado experimentalmente en el acelerador LHC. A fecha de hoy, la ausencia de los campos gemelos necesarios (llamados *superpartners*) no confirma la extensión minimal supersimétrica del modelo estándar. Por tanto, la supersimetría no se ha detectado directamente en la naturaleza por el momento, si bien como herramienta matemática es un avance extraordinario, puesto que la supersimetría y la integrabilidad suelen ir de la mano, de tal modo que los modelos supersimétricos son en general más fáciles de resolver.

No obstante, el problema más grave que se asocia al modelo estándar no es la aparición asimétrica de bosones y fermiones ni su elevado número de parámetros, sino el denominado *problema de la jerarquía* [31]. Este problema consiste en el enormemente disperso rango de masas de las partículas elementales. Mientras que los neutrinos poseen masas muy pequeñas, menores de 2 eV, los leptones con carga tienen masas que oscilan desde los 0.511 MeV del electrón hasta los 1777 MeV de la partícula  $\tau$ , y los quarks poseen masas desde los 2.3 MeV del quark  $u$  o los 4.8 MeV del quark  $d$ , que son los más ligeros, hasta los 4.2 GeV del quark  $b$  o los 173 GeV del quark  $t$ . Se cubren al menos 11 órdenes de magnitud de diferencia entre la partícula masiva más ligera, el neutrino, y la más pesada, el quark  $t$ <sup>1</sup>. No hay ninguna explicación de por qué ocurre esta dispersión. Es de esperar que un modelo completo explicase el origen de este rango tan amplio de masas; por esta razón se considera como un problema del modelo y se buscan ampliaciones que puedan explicarlo, hasta el momento con escaso éxito.

Otra jerarquía presente en el modelo estándar es la diferente intensidad de las diversas fuerzas cubiertas por el modelo. La interacción electromagnética, la débil y la fuerte difieren en varios órdenes de magnitud, y no se tiene ninguna explicación de por qué debe ser así y no de otra forma.

Pero quizá el problema más profundo que los físicos del siglo XXI tienen que enfrentar es el *problema de la constante cosmológica* [34], [31], [35]. Los campos cuánticos tienen una densidad de energía en su estado vacío diferente de cero; es decir, el valor medio de la densidad de energía de un sistema cuántico en el estado que no contiene ninguna partícula es distinto de cero. Pero además, el valor que la teoría asigna a esta cantidad viene dado por la energía de Planck, del orden de  $10^{19}$  GeV, como  $10^{76}$  GeV<sup>4</sup>. Sin embargo, la densidad de energía del vacío, medida a través de la observación de supernovas de tipo Ia muy lejanas [11, 12], resulta ser diferente de cero, de orden de  $(10^{-3}$  eV)<sup>4</sup>, es decir, 124 órdenes de magnitud inferior a la predicha por el modelo estándar. Esta discrepancia es el problema

---

<sup>1</sup>Los datos sobre las masas de las partículas elementales han sido tomados de [30].

de la constante cosmológica.

Este problema pone de manifiesto, en primer lugar, la íntima conexión que existe entre la física de partículas, a muy pequeña escala, y la física de cosmos, a escalas enormes; en segundo lugar, la incompletitud de dos modelos estándar que no pueden explicar la razón de la pequeñez de la densidad de energía del vacío, y por último, la necesidad de contar con teorías que describan ambos mundos, el microscópico y el cosmológico, desde el mismo enfoque, como única forma de resolver el problema de la constante cosmológica.

Por otra parte el modelo estándar de la cosmología también tiene problemas sin resolver que ponen de manifiesto su propia incompletitud. Uno de los más persistentes es el *problema de la coincidencia* [34], [31], [35], , que consiste en explicar por qué razón las diferentes componentes que constituyen el contenido completo del universo, a saber, la materia bariónica ordinaria, la materia oscura, y la energía oscura, aparecen en proporciones comparables (respectivamente, del 2 %, 30 % y 68 %) en la época precisa del universo en que podemos observarlas desde nuestro planeta. Resulta sorprendente sobre todo porque la teoría cosmológica estándar predice que diferentes formas de energía cambian su densidad a lo largo de la historia del universo, el cual ha pasado por épocas diversas en las cuales la componente más importante, que determina el ritmo de la expansión del universo, ha ido cambiando: en una de ellas fue la radiación electromagnética, en otra predominó la materia bariónica, en otra aún más temprana predominó la fuerte curvatura del espacio-tiempo, y en la época actual es el vacío la componente principal. La teoría predice que el predominio del vacío se va a ir acentuando en el futuro (en eso consiste precisamente la expansión acelerada del universo), así que resulta sorprendente que en la época presente del universo, en la que vivimos observadores conscientes como nosotros, las proporciones de las diversas componentes del mismo sean de órdenes de magnitud semejante.

El problema de la coincidencia es un aspecto sutil del problema de la constante cosmológica, puesto que alude al orden de magnitud de la proporción de energía oscura, que se atribuye a la densidad de energía del vacío, es decir, a la constante cosmológica. El punto de vista más generalizado, dado en [36], es que el problema de la constante cosmológica puede resumirse en tres preguntas básicas:

- ¿Porqué la constante cosmológica es tan pequeña?
- ¿Porqué, siendo tan pequeña, no es cero?
- ¿Porqué la densidad de energía del vacío en la actualidad es del mismo orden de magnitud que la densidad de energía de la materia?

Así, el problema de la coincidencia también alude al valor de la constante cosmológica.

La referencia [36] recopila todos los enfoques que hasta el momento se han adoptado para intentar resolver, sin éxito, el problema de la constante cosmológica, y contiene numerosas referencias sobre ellos. Entre ellos figuran:

- **Ajuste fino:** Suponemos que la constante cosmológica es un parámetro físico más a medir, y no nos preguntamos por su origen físico. Por supuesto, esto no puede considerarse una solución, porque no explica absolutamente nada.
- **Supersimetría:** Las teorías supersimétricas [33] incorporan el mismo número de grados de libertad fermiónicos y bosónicos, y sus contribuciones a la densidad de

energía del vacío cancelan exactamente. Sin embargo, no se han encontrado partículas supersimétricas en la naturaleza, así que, de existir, la supersimetría debe estar rota al menos a la escala de energía alcanzable por el mayor acelerador de nuestro tiempo, el LHC, que son varios TeVs, lo cual induce una energía del vacío también grande. Otras simetrías que tampoco se dan en la naturaleza, como la simetría conforme, proporcionan enfoques diferentes que también presentan problemas.

- **Holografía:** La constante cosmológica podría ser una consecuencia de una descripción efectiva holográfica del Universo [37], [38], en la cual todos sus grados de libertad se pueden expresar mediante una teoría con una dimensión espacial menos. Tales descripciones admiten sólo un número finito de estados cuánticos, es decir, su entropía está acotada superiormente. En el espacio de de Sitter, que es la solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica, ocurre lo mismo: La entropía está limitada por el valor de la constante cosmológica. Por tanto, la finitud del número de estados cuánticos es la causa del valor de la constante cosmológica. Sin embargo, este argumento no está exento de críticas.
- **Teoría de Volovik:** En esta teoría [39], se explota la similitud entre el estado fundamental de un superfluido cuántico y el vacío gravitacional con constante cosmológica para sugerir que la gravitación podría ser una teoría emergente (la gravedad emergente se considera también en [40]) de una teoría análoga a la de un líquido cuántico. Tiene la ventaja de proporcionar una cancelación exacta de las contribuciones fermiónicas y bosónicas, y explica la pequeñez de la constante cosmológica como una perturbación térmica del vacío por encontrarse el Universo a una temperatura diferente de cero. La densidad de materia y la densidad de energía del vacío resultarían proporcionales, lo cual resuelve también el problema de la coincidencia. La principal objeción a este enfoque, cuya base es el equilibrio térmico de un sistema cuántico, es que el Universo nunca puede alcanzar el equilibrio térmico en presencia de una constante cosmológica.
- **Apantallamiento:** Añadir al sistema gravitacional campos adicionales que puedan desarrollar un valor medio no nulo para tiempos muy grandes que pueda apantallar el valor de cualquier constante cosmológica inicial para disminuir notablemente su valor efectivo.
- **Reacción gravitatoria:** Un sistema de ondas gravitacionales propagándose en un cierto fondo puede representarse mediante un tensor efectivo de energía-momento que puede contribuir a la energía de vacío cancelando la constante cosmológica. No obstante, este mecanismo requiere tomar promedios espaciales de la métrica, lo cual no está justificado desde un punto de vista fundamental ni define cantidades observables. Otros tipos de apantallamiento, como el basado en el grupo de renormalización, no consiguen explicar la extrema pequeñez de la constante cosmológica. Todos los enfoques basados en reacción se apoyan en la idea de que la constante cosmológica es muy pequeña porque el Universo es muy viejo, lo cual bien podría ser el caso, si bien ninguna implementación de esta idea constituye una solución del problema.
- **Dimensiones extra:** La principal consecuencia del principio de equivalencia, que constituye la base de la Relatividad General, es que todas las formas de energía

se acoplan a la gravedad. Una de las propuestas para tratar de explicar la pequeñez de la constante cosmológica consiste en suponer que el vacío no gravita, es decir, es transparente a la gravedad. Implementar esta idea en modelos concretos es difícil: una posibilidad muy en boga en los últimos años es suponer que nuestro espacio-tiempo tiene dimensiones adicionales además de las cuatro que observamos. La gravedad actúa en todas estas dimensiones, y la gravitación en altas dimensiones produce efectos que pueden cancelar la constante cosmológica. Tenemos un ejemplo en los modelos de Randall-Sundrum [41], [42], en los que el espacio-tiempo físico es una variedad tetradimensional en un espacio con muchas dimensiones, denominada la *brana*. Los campos ordinarios, como las partículas o la radiación, se propagan sólo por la brana, pero la gravedad se propaga también por las dimensiones extra. La principal objeción de estos modelos es que admiten soluciones en los que el espacio-tiempo no es plano, pero para obtenerlas es necesario un ajuste fino de los parámetros del sistema, y por lo tanto no resuelven el problema de la constante cosmológica.

- **Gravedad no-local:** En este enfoque [43], la constante gravitacional de Newton depende de la longitud de onda de los modos que interactúan mediante la gravedad, de modo que es muy pequeña cuando las longitudes de onda son enormes, como en el caso de la energía del vacío. Este modelo implementa la débil interacción gravitatoria que experimenta el vacío comparado con otras formas de materia, pero puede verse como una integración de un número infinito de grados de libertad que da lugar a un modelo acausal y no-local, lo cual lleva a una violación del principio de equivalencia.
- **Gravitones masivos:** Si los gravitones no tuvieran masa exactamente nula [44], aunque fuera muy pequeña, podrían ser inestables y decaer en fotones. En ese caso, a largas distancias la ley del inverso del cuadrado no sería válida y eso daría lugar a una expansión acelerada. Sin embargo, hay un serio obstáculo a este tipo de modificación: la masa del gravitón añade nuevos estados de polarización, que pueden modificar la gravedad a pequeñas distancias hasta el punto de predecir resultados incorrectos para los tests clásicos como el desvío de los rayos luminosos al pasar cerca de cuerpos masivos. Otra posibilidad relacionada es que el gravitón, si bien tiene masa cero, pueda ser un objeto extendido y no una partícula puntual. Esto modificaría la gravedad a escalas del orden de  $20\mu\text{m}$ , lo cual no es suficiente para suprimir las contribuciones a la constante cosmológica de los campos del modelo estándar.
- **Cosmología Cuántica:** En este enfoque [45], la función de onda del Universo describe una superposición de diferentes soluciones de las ecuaciones de Einstein con diferentes constantes cosmológicas. Así, el valor de la constante cosmológica se obtiene como el pico de una distribución estadística determinada en la aproximación semiclásica por la acción de cada solución. Por ejemplo, Hawking [46] propuso que la función de onda tiene un pico acusado para  $\lambda = 0$ , siendo la primera propuesta cuántica para una solución del problema de la constante cosmológica.
- **Agujeros de gusano:** La idea de describir el valor preferido de la constante cosmológica se aprovecha en el trabajo de Coleman [47], quien sugiere tener en cuenta que los agujeros de gusano pueden conectar diferentes geometrías y por tanto deben tenerse todas en cuenta al calcular la acción de las soluciones estacionarias. Así, se

obtiene una probabilidad con un pico en  $\lambda = 0$  dado por una doble exponencial, y por lo tanto aún más acusado que en el caso de Hawking. Sin embargo, los dos enfoques cuánticos usan la acción euclídea, que no tiene porqué ser la manera correcta de expresar la gravedad cuántica, que se supone es la teoría subyacente a todos estos enfoques. Sin embargo, en la teoría de Coleman los agujeros de gusano de todos los tamaños se materializarían en el vacío con la máxima densidad permitida, lo cual describiría un Universo repleto de agujeros de gusano, en contra de las observaciones.

- **Principio Antrópico:** Uno de los primeros argumentos de tipo antrópico para intentar predecir el valor de la constante cosmológica fue de Weinberg [48]. El argumento para constreñir los valores posibles de la constante cosmológica es simple: Si el valor de  $\lambda$  es muy grande, la expansión acelerada comenzaría antes de que se formasen estructuras ligadas gravitacionalmente, como las galaxias, y por tanto la materia quedaría diluída, y no podrían formarse estrellas ni planetas ni observadores como nosotros. Por otra parte, si la constante cosmológica fuese negativa, el Universo colapsaría rápidamente sin dar oportunidad a desarrollarse a las estructuras antedichas. El argumento completo predice el valor de la constante cosmológica en un cierto intervalo, denominado *ventana antrópica* o *ventana de Weinberg*, cuyos límites son varios órdenes de magnitud mayores que el valor observacional aceptado a día de hoy. Otra propuesta en la misma línea establece el *Principio de Mediocridad* de Vilenkin [49], que establece que el valor más probable de la constante cosmológica es aquel que observaría la gran mayoría de los observadores de todos los posibles Universos. Para que este enfoque estadístico tenga sentido, debe haber un mecanismo para realizar todos los posibles Universos. Mecanismos que lo permiten son, por ejemplo, escenarios inflacionarios, versiones de la cosmología cuántica y modelos derivados de la teoría de cuerdas, todos los cuales se consideran en la sección siguiente. Cada escenario produce una variedad de Universos posibles, y para establecer cuál es el más probable se deben asignar probabilidades a cada diferente Universo. Puesto que el volumen espacio-temporal de los diferentes Universos es infinito, debe introducirse un método de corte para regularizar las probabilidades. No obstante, este método de corte no es único, y cada elección da lugar a predicciones que pueden ser muy diferentes. Este problema de la cosmología de todos los universos posibles se denomina *problema de la medida* [50]. Por tanto, intentar resolver el problema de la constante cosmológica mediante consideraciones antrópicas lleva no a una solución, sino a otro problema de dificultad comparable. Además, también es posible la existencia de Universos muy diferentes del nuestro que también alberguen galaxias, estrellas y vida, y en ese caso, ¿por qué es el nuestro el preferido y no los otros?

Como podemos ver, el problema de la constante cosmológica ha recibido una fuerte atención en las últimas décadas, pero no podemos considerarlo resuelto puesto que ninguno de los enfoques dados hasta ahora está libre de objeciones. De las soluciones mencionadas en la lista anterior vamos a considerar las que tienen relación directa con el contenido de esta tesis.



## 1.2 Más allá de las teorías estándar

Como se ha comentado más arriba, la verdadera importancia del problema de la constante cosmológica estriba en que conecta dos ramas de la física hasta el momento desconectadas, puesto que la física de partículas no tiene influencia sobre las ecuaciones de la gravitación (si bien se utiliza para perfilar la historia térmica del Universo en acuerdo con las observaciones), y por otra parte la gravedad siempre se desprecia en los cálculos de amplitudes cuánticas, a pesar de que el concepto de interacción puramente local que da lugar a energías concentradas en puntos que se usa en la teoría de perturbaciones es del todo incompatible con la relatividad general. El hecho de que haya un problema como el de la constante cosmológica que ninguna de las dos grandes ramas de la física puede resolver lleva a la conclusión de que ambas forman parte de una teoría más general que tiene a ambas como casos particulares en sus respectivos campos de aplicación, pero que las armoniza cuando se superponen. Una tal teoría debe, de forma natural, contener una solución al problema de la constante cosmológica. Dicha teoría, que todavía no se ha formulado de una forma satisfactoria, recibe el nombre de *Gravedad Cuántica*.

Si bien hay opiniones que sostienen que tal teoría no se ha podido encontrar todavía simplemente porque no existe [39], hay dos teorías bien establecidas que se postulan como candidatas a la teoría maestra. La primera de ellas se denomina *Loop Quantum Gravity* (LQG) o “gravedad cuántica de bucles” [51], que incluye conceptos como la emergencia del tiempo o la resolución cuántica de las singularidades clásicas de la gravedad, ambos brevemente descritos debajo. La segunda, que acapara una literatura formidable en los últimos treinta años, se llama *String Theory* (ST) o “teoría de cuerdas” [52]. Ésta última se considera como la candidata más prometedora a la teoría unificada definitiva. No obstante, ni la LQG ni la ST han producido todavía ningún esquema completamente satisfactorio de toda la física descrita por los modelos estándar que resuelva los problemas arriba mencionados, de modo que aún queda mucho trabajo por hacer para ambas teorías.

### 1.2.1 Cosmología Cuántica

La *cosmología cuántica* es uno de los primeros intentos de fusionar la gravedad con la teoría cuántica. Puesto que la cosmología es una aplicación de la relatividad general en la cual las ecuaciones de Einstein toman una forma particularmente sencilla, es natural tratar de cuantizar las ecuaciones de la cosmología como un primer paso antes de cuantizar la teoría de la gravedad completa. Los primeros intentos llevan a la denominada *ecuación de Wheeler-DeWitt* (WDW) [53], que pasamos a describir. Como es sabido, la traslación temporal no es una simetría en los espacio-tiempos cosmológicos; por lo tanto, en relatividad general no es posible definir una energía conservada como generador de las traslaciones temporales. No obstante, hay una condición de ligadura que relaciona la energía conservada de los campos de materia presentes en el espacio-tiempo con las componentes de la métrica. Dicha relación se llama *ligadura hamiltoniana*, y representa una ecuación análoga a la conservación de la energía que puede interpretarse a grosso modo diciendo que la suma de las energías procedentes de la materia y el campo gravitatorio debe siempre ser cero. En la versión cuántica de la ligadura hamiltoniana los campos  $\phi$  que representan las incógnitas en las ecuaciones de Einstein son tomados como coordenadas, y sus momentos conjugados  $p_\phi$  se traducen en operadores diferenciales mediante el

principio de correspondencia

$$p_\phi \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (1.10)$$

De esta forma, la ligadura hamiltoniana se traduce en una ecuación diferencial que la función de onda  $\Psi(\phi)$  debe satisfacer, denominada *ecuación de Wheeler-DeWitt*. En dicha ecuación, uno de los campos cuyo momento conjugado se conserva juega el papel de coordenada temporal, y la ecuación se interpreta como una ecuación de evolución en esa variable. Decimos así que el “tiempo” es “emergente” porque no aparece directamente en la ecuación, sino que aparece a través de una magnitud que es una función monótona del tiempo y puede usarse en su lugar. Naturalmente, la relación entre el tiempo emergente en la ecuación WDW y el tiempo propio que se utiliza en la descripción semiclásica de sus soluciones debe establecerse con sumo cuidado.

Las soluciones de la ecuación WDW constituyen los posibles estados cuánticos del sistema. Las trayectorias clásicas consisten en cosmologías que comienzan con un Big-Bang, se expanden hasta cierto punto, y vuelven a contraerse para acabar en un Big-Crunch, es decir, son modelos cerrados de Friedmann-Robertson-Walker. La función de onda que resuelve la ecuación WDW está fuertemente picada alrededor de la trayectoria clásica, lo que quiere decir que la teoría cuántica tiene un buen comportamiento semiclásico, es decir, la aproximación semiclásica representa bien la evolución cuántica completa, pero por el contrario no resuelve las singularidades inicial y final de los modelos FRW cerrados. Por esta razón la descripción cuántica de la cosmología basada en la ecuación WDW resulta insatisfactoria, porque las singularidades presentes en las soluciones clásicas no quedan resueltas por la versión cuántica de la teoría, sino que permanecen como singularidades en la evolución cuántica de la función de ondas.

Vemos así que la situación análoga a la del átomo de hidrógeno, que como sistema clásico es inestable y debería colapsar en un estado singular, pero con la descripción cuántica queda estabilizado y posee una energía en completo acuerdo con el experimento, no se reproduce en la teoría cuántica de la cosmología basada en la ecuación WDW: las singularidades clásicas siguen siendo singularidades cuánticas. Por esta razón se buscan teorías cuánticas que no dependan del fondo geométrico en el que se definen pero que den lugar a la resolución de las singularidades clásicas presentes en las soluciones cosmológicas que tan bien describen el comportamiento del Universo a gran escala.

En la siguiente subsección veremos que una teoría incipiente de la cosmología cuántica denominada *Loop Quantum Cosmology* predice una resolución de las singularidades cosmológicas clásicas como el *Big-Bang*. Dicha teoría es un caso particular de la *Loop Quantum Gravity*, la cual es capaz de producir una versión cuantizada del espacio-tiempo que describe el agujero negro de Schwarzschild que resuelve la singularidad que posee la solución clásica en el origen de coordenadas.

### 1.2.2 Loop Quantum Cosmology

El contenido de este apartado aparece con mayor detalle en la referencia [51].

Un enfoque de la cosmología cuántica alternativo a la ecuación de Wheeler-DeWitt consiste en considerar un conjunto diferente de variables clásicas que describen el sistema gravitatorio que se pretende cuantizar, por ejemplo el espacio-tiempo cosmológico, y proceder a su cuantización usando un esquema **no-equivalente** al principio de correspondencia que transforma, por ejemplo, el hamiltoniano de una partícula clásica en la ecuación de

Schrodinger de su versión cuántica.

Por ejemplo, el modelo cosmológico cerrado de Friedmann-Robertson-Walker con  $k = 1$  posee dos singularidades, una en el pasado remoto llamada *Big Bang* y otra en el futuro infinito llamada *Big Crunch*. La descripción cuántica de ese espacio-tiempo basada en la ecuación WDW utiliza una descripción clásica en la cual la métrica es

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (1.11)$$

donde  $a(t)$  es el *factor de escala* que describe la expansión del Universo,  $k$  es un número que puede elegirse como  $+1$ ,  $0$  o  $-1$  según el tipo de modelo cosmológico que se considere, y  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  es la métrica de la esfera de radio unidad.

En lugar de tomar la ecuación (1.11) como punto de partida, se describe el espacio-tiempo como una variedad de la forma  $\mathbb{R} \times M$ , donde  $M$  tiene la topología de una esfera  $S^3$ , y se introducen las uno-formas de conexión para expresar la métrica (1.11) no en relación a la métrica plana, como es usual, sino en relación a la métrica de Killing en el álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  del grupo de simetría  $SU(2)$  de  $M$ . Con las uno-formas de conexión pueden formarse variables dinámicas de conexión de spin  $A$  y sus momentos conjugados  $E$  (llamadas *variables de Ashtekar*) de una forma totalmente análoga al potencial vector  $A$  y el campo eléctrico  $E$  de una teoría gauge no-abeliana con grupo gauge  $SU(2)$ . Estas variables son proporcionales a las uno-formas de conexión y a sus duales a través de factores que son funciones del tiempo  $c(t)$  y  $p(t)$ . Estas funciones codifican la expansión del Universo en lugar del factor de escala  $a(t)$  que aparece en la ecuación (1.11).

Puesto que  $A$  y  $E$  son variables conjugadas, puede calcularse el corchete de Poisson de  $c$  y  $p$ , que resulta proporcional a un parámetro libre  $\gamma$  (denominado *parámetro de Barbero-Immirzi*) [54]. El parámetro  $\gamma$  constituye una de las dificultades de la teoría, puesto que el proceso subsiguiente de cuantización no fija su valor, con lo cual representa la ambigüedad en la cuantización.

Al pasar del formalismo lagrangiano al formalismo hamiltoniano encontramos la restricción hamiltoniana  $H(c, p, \phi, p_\phi) = 0$ , donde  $\phi$  representa un campo escalar como el que representa la materia en la ecuación WDW y  $p_\phi$  es su momento conjugado. Esta ecuación se usa como punto de partida para el proceso de cuantización.

La teoría cuántica resultante debe ser independiente de las coordenadas que se hayan elegido para representar el espacio-tiempo, pero eso no ocurre con las variables  $A$  y  $E$ . Por esa razón se usan en su lugar las *líneas de Wilson* u *holonomías*

$$h_\ell = \text{P} e^{-\int_\ell A} \quad (1.12)$$

a lo largo de caminos arbitrarios  $\ell$ . El símbolo  $\text{P}$  representa la ordenación de los factores en la integral, puesto que el integrando pertenece al álgebra no-abeliana  $\mathfrak{su}(2)$ . El papel de los momentos conjugados  $E$  lo toman sus integrales sobre superficies de una forma análoga a las integrales de  $A$  a lo largo de caminos. Estas nuevas variables son independientes de la métrica o de cualquier campo de fondo que pueda haber en la teoría. Para cuantizar la teoría, debe encontrarse una representación en operadores de la correspondiente álgebra de Poisson, que produce la ecuación análoga a (1.10). De dicha representación se sabe que es única y que **no** es capaz de asociar un operador a las variables de conexión  $A$ , aunque sí a las líneas de Wilson  $h_\ell$ . Por tanto, el esquema de cuantización está basado en las líneas de Wilson  $h_\ell$  en lugar de en la conexión. Cuando los caminos de integración  $\ell$  son cerrados se denominan “bucles” (*loops*), de ahí el nombre de *Loop Quantum Cosmology*.

Encontramos el curioso resultado de que la función  $c(t)$  de la que depende la ligadura hamiltoniana no tiene asociado ningún operador al cuantizar. Esto resulta sorprendente, porque la holonomía sí que tiene asociado un operador, y dicho operador depende de  $c$  a través de funciones del tipo  $e^{i\lambda c/2}$ , donde  $\lambda$  es un parámetro real, lo que sugiere que podría definirse el operador asociado a  $c$  simplemente diferenciando respecto de  $\lambda$  el operador asociado al bucle de Wilson. Sin embargo, nos encontramos con la sorpresa de que esto en general no es posible, porque las holonomías generan grupos uniparamétricos unitarios que **no** son débilmente continuos respecto de  $\lambda$ , y por lo tanto no pueden simplemente derivarse para obtener el generador asociado.

Al no existir un operador que corresponda a  $c$ , debe reescribirse la ligadura hamiltoniana en términos de los bucles de Wilson  $h_\ell$ , y sustituirlos después por sus operadores asociados. Los operadores que se usan en este proceso dan lugar a una ecuación que es fundamentalmente diferente de la ecuación WDW, y por lo tanto sus predicciones son radicalmente distintas. En particular, en la ligadura hamiltoniana aparece el tensor de curvatura  $F$  asociado a la conexión de spin  $A$  que se usa para definir los bucles de Wilson  $h_\ell$ . El procedimiento estándar que se usa para definir  $F$  a partir de  $h_\ell$  consiste en tomar  $\ell$  como un bucle infinitesimal y deducir la forma de  $F$  a partir del límite cuando el área del bucle tiende a cero. Pero este proceso de paso al límite, bien definido en la teoría clásica, está prohibido en la versión cuántica porque la conexión no tiene asociado ningún operador. Para salvar esta dificultad, se observa que el operador que corresponde al área de las superficies tiene un autovalor más bajo  $\Delta$  que es estrictamente positivo. Por lo tanto, el bucle  $\ell$  puede encogerse hasta que su área iguale  $\Delta$ , pero no más. Este procedimiento lleva a una expresión bien definida para el operador que se asocia a la ligadura hamiltoniana. Cuando se eligen apropiadamente las funciones base del espacio de Hilbert, la ligadura hamiltoniana aparece no como un operador diferencial, como la ecuación WDW, sino como un operador en diferencias finitas.

La forma de la ecuación cuántica a la que da lugar este procedimiento de cuantización es análoga a una ecuación de Klein-Gordon en la cual la coordenada que juega el papel de tiempo es el valor del campo escalar  $\phi$  (es decir, es un tiempo emergente como en el caso WDW). El laplaciano de la ecuación KG queda reemplazado por un operador en diferencias finitas y el término de masa se sustituye por un potencial estático. Pueden elegirse unas condiciones iniciales para los observables de la teoría y usar la ecuación dinámica para calcular la evolución de sus valores medios. El programa completo es muy parecido a la resolución de la ecuación WDW, con cruciales diferencias:

- En primer lugar, las singularidades inicial y final del modelo FRW cerrado quedan sustituidas por *rebotes* cuánticos, en los que la densidad aumenta hasta un valor muy elevado (aproximadamente de 0.82 veces la densidad de Planck, cuyo valor es  $5.1 \times 10^{96}$  kg/m<sup>3</sup>) mientras el Universo se contrae; la contracción se detiene en un equilibrio inestable a esa densidad y casi inmediatamente empieza una fase de expansión exponencial en la cual la densidad disminuye otra vez.
- El estado semiclásico que describe la evolución cosmológica permanece localizado alrededor de la trayectoria clásica durante toda su evolución desde muy poco después del Big Bang hasta muy poco antes del Big Crunch. Las singularidades quedan reemplazadas por rebotes, como se menciona en el punto anterior. La evolución cerca del punto en el que la densidad alcanza su mínimo y el volumen su máximo está descrita por la solución clásica de forma esencialmente exacta.

- La evolución cuántica se aparta del comportamiento clásico cuando la densidad se aproxima a la densidad de Planck o la curvatura se aproxima a la curvatura de Planck, lo que no quiere decir que el volumen mínimo que alcanza el Universo en el rebote sea del orden del volumen de Planck. De hecho, el volumen mínimo puede ser muchos órdenes de magnitud mayor que el volumen de Planck.
- Puesto que no hay singularidades, la evolución del Universo pasa a través de un número infinito de rebotes. El estado cuántico permanece fuertemente picado sobre la trayectoria clásica durante un número enorme de ciclos de expansión-contracción antes de dispersarse. En este sentido, la versión cuántica del modelo FRW cerrado es un Universo cíclico.
- Todo lo anterior se logra sin violar ni las condiciones de positividad de energía sobre la materia presente ni los teoremas de singularidad de la relatividad general. Tampoco es necesario afinar las condiciones iniciales en modo alguno para obtener el comportamiento descrito.

Además de los logros que consigue la teoría, conviene resaltar sus puntos oscuros, para no dejarnos llevar por la impresión de que pueda ser una teoría definitiva de la cosmología cuántica:

- La teoría sólo es tan robusta al cuantizar geometrías clásicas con un elevado grado de simetría, como las cosmologías FRW o el interior del agujero negro de Schwarzschild, representado por el espacio-tiempo de Kantowski-Sachs [55]. No está del todo claro cómo se relaciona con la teoría *Loop Quantum Gravity* general, que aún no está completamente formulada.
- Si bien la evolución clásica cosmológica se sigue con una precisión impactante, no hay aún una prueba de que la teoría general tenga un límite clásico que reproduzca las ecuaciones de Einstein en modelos con una simetría inferior. Por tanto, la gravedad cuántica basada en LQG debe considerarse como una teoría incompleta e inmadura.
- Todo el programa de cuantización es ambiguo: Queda un parámetro libre cuyo valor no se determina desde dentro de la teoría, el parámetro  $\gamma$  de Barbero-Immirzi [54]. Esto parece indicar que falta algún ingrediente básico que fije su valor.

Así, vemos que la LQC es una teoría cuántica más elaborada y con una descripción detallada de la física en el régimen de Planck, pero aún no puede considerarse como la teoría cuántica cosmológica definitiva. No obstante, su formulación arroja luz sobre cómo podría conseguirse una tal teoría, y qué resultados podemos esperar de ella, así que, en este sentido, constituye un valioso avance hacia una verdadera teoría cuántica de la gravedad.

### 1.2.3 Teoría de Cuerdas

La literatura sobre teoría de cuerdas es vasta. La mayor parte de los avances son extremadamente técnicos, y es muy difícil extraer de ella avances reales hacia una teoría consistente de la gravedad cuántica. Trataremos de resumir lo más importante, pero las fuentes están dispersas y las aplicaciones más exóticas del formalismo requieren la mayor parte de las veces conceptos altamente técnicos o tecnología algebraica muy avanzada.

Para este resumen se han consultado principalmente las referencias [56], [57], [58] y [52], así como otros artículos introductorios como [59], [60], [61], [62] o [63].

La principal intención de la teoría de cuerdas es elucidar los puntos oscuros de la teoría cuántica de campos. En particular, el hecho de que la relatividad general conduzca hacia una teoría de campos no-renormalizable hizo buscar a los físicos una teoría alternativa donde la gravedad pueda incorporarse sin problemas a la mecánica cuántica. Como hemos visto en la sección precedente, no hay una sola manera de hacer esto, ni tenemos forma de comprobar experimentalmente las predicciones de una teoría semejante, debido a la minúscula escala de longitud (la longitud de Planck) donde sería de aplicación. Pequeñas distancias pueden alcanzarse en los aceleradores de partículas empleando energías muy altas: el acelerador LHC, el mayor construido hasta la fecha, opera a energías de varios TeV, pero la escala de Planck, que suponemos es la escala en la que dominan los efectos cuánticos de la gravedad, es quince órdenes de magnitud mayor, de modo que la física que describa ese comportamiento es, por el momento, puramente especulativa.

La teoría de cuerdas comenzó como una teoría para describir el comportamiento de los hadrones a energías elevadas [64]. Como modelo sobre la interacción fuerte no tuvo éxito, pero, con sustanciosas modificaciones, ha resurgido como un marco en el que todas las interacciones quedan descritas y unificadas de forma compatible con las leyes de la mecánica cuántica.

La principal hipótesis de la teoría de cuerdas es que los objetos fundamentales que componen la materia son cuerdas muy pequeñas, en lugar de partículas puntuales, como se supone en la teoría clásica. La longitud de estas cuerdas, comúnmente denominada  $\ell_s$ , es la única escala de la teoría. Esta escala también se representa mediante la *tensión* de la cuerda,  $T = \ell_s^{-2} = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ , donde el símbolo  $\alpha'$  que se usa para representar la tensión data del intento antes mencionado de aplicar los modelos antiguos de cuerdas a los datos de dispersión de hadrones;  $\alpha'$  se denomina *pendiente de Regge* [65]. Hay que notar que  $\ell_s$  es un parámetro, es decir, su valor no se ha determinado experimentalmente, y de hecho suele permitirse que varíe para examinar diferentes regímenes de la teoría.

Del mismo modo que una partícula moviéndose en el espacio-tiempo sigue una curva denominada *línea de universo*, una cuerda recorre una superficie bidimensional llamada *hoja de universo*. En teoría de campos perturbativa, cuando dos o más partículas virtuales coinciden en un vértice en un diagrama de Feynman se obtienen dos o más líneas de universo que poseen una singularidad en el vértice. Con las hojas de universo esta singularidad se evita, consiguiendo que la expansión perturbativa en teoría de cuerdas produzca cantidades finitas a todos los órdenes. Así, la teoría de cuerdas da sentido a los cálculos perturbativos a todos los órdenes.

### La cuerda bosónica

La versión más sencilla de la teoría de cuerdas la tenemos en la cuerda bosónica. Considerada como un objeto clásico, la cuerda puede describirse como un segmento de curva inmerso en el espacio-tiempo que se recorre mediante un parámetro de longitud  $\sigma \in [0, \ell_s]$ . Cuando transcurre el tiempo propio  $\tau$  la cuerda se mueve y su curva cambia, de modo que la hoja de universo que recorre la cuerda en su movimiento está descrita paramétricamente por un vector  $X^\mu(\tau, \sigma)$ , donde el superíndice  $\mu$  toma valores desde 0 (para la coordenada temporal) hasta la dimensión del espacio en el que se mueve la cuerda,  $d$ . Matemáticamente, la hoja de universo es una superficie, que puede describirse

mediante una métrica intrínseca  $h_{ab}$ , en la que los índices corresponden a las coordenadas intrínsecas  $\tau$  y  $\sigma$ . El movimiento de la cuerda partiendo de una condición inicial dada debe especificarse mediante un principio de acción estacionaria. La acción más sencilla que es a la vez invariante bajo transformaciones de Poincaré y reparametrizaciones de la métrica de la hoja de universo es la denominada *acción de Polyakov* [66]

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu, \quad (1.13)$$

donde  $M$  es la hoja de universo,  $h = \det h_{ab}$  y  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag} \{-1, +1, \dots, +1\}$  es la métrica de Minkowski en el espacio-tiempo ambiente. La acción anterior no cambia si se transforma la métrica interna mediante un reescalado conforme  $h_{ab} \rightarrow \Omega(\tau, \sigma)h_{ab}$ . Esta propiedad se denomina *invariancia de Weyl* o simplemente *invariancia conforme*.

La acción de Polyakov puede verse como la que describe el movimiento de una cuerda en un espacio-tiempo ambiente llano de dimensión  $d + 1$  con métrica de Minkowski, pero también puede interpretarse como la acción de una teoría con  $d + 1$  campos escalares  $X^\mu$  definidos sobre la hoja de universo, que es un espacio-tiempo curvo de  $1 + 1$  dimensiones. Bajo este punto de vista, el índice  $\mu$  que llevan los símbolos  $X^\mu$  simplemente distingue unos campos escalares de otros. Por esta razón, la mayor parte de las herramientas que se usan en teoría de cuerdas corresponden a la teoría de campos conforme (TCC) gracias a la invariancia conforme de la métrica, puesto que la acción de Polyakov es una TCC con  $d + 1$  campos escalares sin masa moviéndose en una superficie curva.

Al calcular las ecuaciones de movimiento de la cuerda (es decir, la forma de la hoja de universo) variando la acción aparecen, como siempre, términos integrados evaluados en los extremos de la cuerda  $\sigma = 0$  y  $\sigma = \ell_s$ . Para eliminarlos, deben especificarse condiciones de contorno en los extremos de la cuerda para cualquier instante  $\tau$ . Hay dos posibilidades: Tomar extremos libres (cuerda *abierta*) o unidos (cuerda *cerrada*). De este modo, aparecen diversos objetos no equivalentes en la teoría que poseen diferentes modos de oscilación.

Cuando las oscilaciones de la cuerda se cuantizan tienen el comportamiento de partículas de spin cero, de ahí el nombre de *cuerda bosónica*. Naturalmente, una cuerda es un sistema continuo con un número infinito de grados de libertad, es decir, un número infinito de osciladores distintos, de modo que la energía del estado fundamental resulta ser una constante infinita proporcional a  $\sum_{n=1}^{\infty} n$ . Así, el cálculo del espectro de excitaciones cuánticas ya exige una renormalización del nivel de energía del punto cero, que equivale a escribir  $\sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$  usando la función  $\zeta$  de Riemann. Tras este primer paso, pueden encontrarse las energías del estado fundamental y el primer estado excitado de la cuerda abierta como  $m_0^2 = \frac{2-(d+1)}{24\alpha'}$  y  $m_1^2 = \frac{26-(d+1)}{24\alpha'}$ . La imposición de la invariancia bajo transformaciones de Lorentz exige la presencia de estados de masa nula en este espectro, lo cual conlleva que  $d + 1 = 26$ , es decir, la teoría de Polyakov conserva la invariancia Lorentz al cuantizarse sólo si el espacio-tiempo ambiente tiene 26 dimensiones. Por supuesto, el estado fundamental o *vacío* de la teoría tiene una energía al cuadrado negativa (en cuyo caso sus excitaciones asociadas se denominan *taquiones*), de modo que no tiene significado físico. Así, la cuerda bosónica posee un vacío inestable y por tanto no es viable.

Las conclusiones anteriores son las mismas para la cuerda cerrada, pero uno de sus modos de masa cero es un tensor simétrico que puede asociarse con una partícula de spin 2. La única forma de acoplar tal objeto de forma consistente a un tensor de energía-impulso exige tener invariancia bajo cambios de coordenadas en el espacio ambiente: así, el modo de spin 2 se identifica con el gravitón. Podemos concluir que la teoría de la cuerda bosónica

cerrada contiene la relatividad general, al menos en la forma de excitaciones elementales alrededor del espacio de Minkowski. Del mismo modo, otro modo de masa cero de la cuerda cerrada corresponde a un bosón de spin 1 (llamado fotón) correspondiente a un tensor antisimétrico que lleva asociada una invariancia gauge. Ni la invariancia bajo cambios de coordenadas en el espacio ambiente ni la invariancia gauge eran manifiestas en la acción clásica de Polyakov (1.13). También están presentes otros dos campos escalares de masa cero, llamados dilatón y axión.

### *Cuantización y acción efectiva*

La cuantización de la cuerda bosónica puede llevarse a cabo mediante técnicas covariantes o mediante el formalismo BRST que fija el gauge en la integral funcional. Ambos resultados conducen a una teoría cuántica de campos conforme sobre la hoja de universo que puede usarse para calcular amplitudes de dispersión a todos los órdenes de la teoría de perturbaciones. Vemos entonces que toda la maquinaria de la teoría de cuerdas consiste en utilizar las herramientas de la teoría cuántica de campos evitando sus puntos más controvertidos. Por ejemplo, las anomalías (que son simetrías de la teoría clásica que se pierden al cuantizar) se evitan fijando la dimensión del espacio-tiempo a 26, y las divergencias en el ultravioleta (que son integrales divergentes en el espacio de momentos que aparecen cuando se hacen intervenir partículas virtuales de momento arbitrariamente alto) se evitan reemplazando las integrales por sumas a las geometrías de las hojas de universo.

Cuando se considera un espacio-tiempo curvo, evitar la anomalía en la invariancia Weyl conduce a una serie de ecuaciones de movimiento para los campos asociados a las excitaciones de masa cero que pueden derivarse de una acción efectiva a baja energía en el espacio-tiempo, por ejemplo

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1}X \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left[ -\frac{2(d+1-26)}{3\alpha'} + R + 4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} + \mathcal{O}(\alpha') \right]. \quad (1.14)$$

En la ecuación anterior,  $g = \det g_{\mu\nu}$  es el determinante de la métrica curva del espacio ambiente de  $d+1$  dimensiones,  $R$  es su curvatura escalar asociada,  $\Phi$  es el dilatón y  $H_{\mu\nu\rho}$  es una 3-forma que contiene al fotón y axión. Los términos  $\mathcal{O}(\alpha')$  simbolizan que la acción es válida sólo para pequeños valores de  $\alpha'$ , es decir, cuando la energía es pequeña. Así, la acción (1.14) describe los modos de masa cero de la cuerda bosónica: dos campos escalares acoplados a un campo gauge y a la gravedad.

La descripción de las teorías de cuerdas mediante acciones efectivas a baja energía como (1.14) es una técnica común: tanto es así, que algunas teorías de cuerdas están definidas sólo perturbativamente a través de una de estas acciones efectivas a baja energía.

### *Reducción dimensional*

El hecho de que la teoría de la cuerda bosónica establezca que el número de dimensiones tenga que ser 26 contradice la observación de que nuestro espacio-tiempo tiene 4 dimensiones. No obstante, esta dificultad puede soslayarse porque la relatividad general,



incorporada en la teoría, permite buscar soluciones en las que el espacio-tiempo posee 3+1 dimensiones, como el universo en que vivimos, mientras que las restantes 22 dimensiones subtienden una variedad compacta de un tamaño tan pequeño que no resulta visible en los experimentos actuales. Se dice así que las dimensiones extra están “compactificadas” en una variedad Riemanniana interna, o que nuestras 3+1 dimensiones han “decompactificado” hasta alcanzar el tamaño del Universo que observamos. Este punto de vista permite considerar modelos en un número de dimensiones mayor que nuestras 3+1, y utilizarlos para extraer consecuencias físicas sobre nuestro mundo. Esta técnica se denomina *reducción dimensional*, y la teoría de cuerdas no es el primer escenario en el que se ha considerado: de hecho, la reducción dimensional se usa en el *mecanismo de Kaluza-Klein* [67] para obtener la gravedad de Einstein y el electromagnetismo de Maxwell en 3+1 dimensiones a partir de una teoría de gravedad pura en 4+1 dimensiones mediante la compactificación de la quinta dimensión en un círculo de radio pequeño. Desde aquella primera aplicación, la reducción dimensional se aplica con éxito en relatividad general y teoría de cuerdas para producir soluciones en 3+1 dimensiones a partir de otras mucho más simples en dimensiones más altas. Con la predicción de 26 dimensiones por parte de la teoría de cuerdas bosónica, la reducción dimensional pasa de ser una técnica matemática a ser algo verosímil en nuestra realidad: la existencia de dimensiones extra de pequeño tamaño responsables de efectos medibles.

La idea de las dimensiones extra ha alcanzado un alto grado de sofisticación y versatilidad, dando lugar a escenarios como los modelos de Randall-Sundrum mencionados en la sección 1.1.3, que generan una jerarquía de masas mediante la compactificación de dimensiones extra [42], o que explican la baja intensidad de la gravedad mediante dimensiones extra no-compactificadas [41]. La idea de las dimensiones extra no-compactificadas ha generado una plétora de modelos [68] entre los que cabe destacar la búsqueda de masas pequeñas para los neutrinos [69] o propuestas para resolver el problema de la constante cosmológica [70]. Estos modelos asumen que nuestro Universo descansa sobre una variedad tridimensional, denominada *brana*, que evoluciona en un espacio ambiente con más dimensiones no necesariamente pequeñas. Todos los campos se mueven sobre el volumen del universo de la brana, y pueden sentir el efecto de fuerzas que se propagan por el espacio ambiente, como la gravedad, lo cual puede dar lugar a efectos como los mencionados. No obstante, como ya se ha mencionado anteriormente, estos modelos suelen necesitar ajuste fino de sus parámetros, y por esa razón no se consideran soluciones concluyentes de los problemas antedichos. A pesar de eso, las técnicas que involucran son muy versátiles y productivas y bien podrían formar parte de un modelo definitivo que resuelva los problemas pendientes de la física teórica de principios del siglo XXI.

### *Dualidad-T, Dualidad-S, D-branas*

Una de las consecuencias que la compactificación de una sola dimensión sobre un círculo de radio  $R$  tiene sobre la teoría de la cuerda cerrada bosónica es la denominada *dualidad T* [52]. Dicha dualidad consiste en que el espectro de excitaciones que surge al compactificar es invariante bajo el cambio  $R \rightarrow \frac{\alpha'}{R}$ , es decir, el modelo con radio de compactificación muy pequeño es equivalente al modelo con radio muy grande. La magnitud de  $R$  regula la intensidad del acoplamiento en la teoría dimensionalmente reducida, por lo que se dice que la dualidad T intercambia entre sí los regímenes de acoplamiento débil y acoplamiento fuerte. La misma dualidad T se presenta en la cuerda abierta, con

la restricción de que los extremos de la cuerda en la versión de radio grande deben estar situados sobre subespacios en el espacio ambiente.

Otro tipo de dualidad similar es la *dualidad-S* [52], en la que la transformación de dualidad se efectúa directamente sobre el acoplamiento de la cuerda,  $g_s$ , definido como el valor esperado de  $e^\Phi$  ( $\Phi$  es el dilatón), como  $g_s \rightarrow \frac{1}{g_s}$ . Así, se relacionan teorías en régimen de acoplamiento débil, y por tanto susceptibles de ser tratadas perturbativamente, con otras en régimen de acoplamiento fuerte.

Puesto que las vibraciones de baja energía de la cuerda pueden dar lugar a fluctuaciones de la geometría en la forma de gravitones, del mismo modo los subespacios en los que las cuerdas deben tener sus extremos pueden fluctuar y tener su propia dinámica. Estas variedades dinámicas se denominan *D-branas* [71] (la  $D$  es de *Dirichlet*, el nombre de las condiciones de contorno satisfechas por las cuerdas).

La exploración de la física de las excitaciones de baja energía sobre el volumen de mundo de una D-brana comienza por encontrar su acción efectiva, que resulta ser la acción de Born-Infeld. Dicha acción se propuso como un remedio para las divergencias a corta distancia de la electrodinámica cuántica, sin mucho éxito. Como acción de las D-branas da lugar a fenómenos interesantes que se comentan en lo que sigue.

### Supercuerdas

Los otros dos problemas de la cuerda bosónica, a saber, la presencia de excitaciones superlumínicas inestables (taquiones) y la ausencia de fermiones no pueden resolverse dentro de la teoría sin añadirle supersimetría. La supersimetría añade un grado de libertad fermiónico por cada grado de libertad bosónico, y necesita generalizar la invariancia conforme para incluir a los nuevos grados de libertad. La teoría resultante, denominada *teoría de supercuerdas*, tiene muchas semejanzas con la teoría de la cuerda bosónica que acabamos de considerar, con la salvedad de que la cancelación de anomalías ahora produce 10 dimensiones para el espacio-tiempo en lugar de 26. A cambio, obtenemos modos de vibración que representan partículas de spin semientero (fermiones). Además, exigir que la teoría no posea modos de masa al cuadrado negativa es una condición muy fuerte que restringe de un modo considerable la forma de espectro de baja energía, dando lugar a sólo unas pocas teorías consistentes, es decir, sin taquiones y con una expansión perturbativa finita a todos los órdenes. Por fin, hay una invariancia adicional que se impone, a saber, la invariancia modular de las amplitudes calculadas a primer orden. Las cinco teorías consistentes son:

- **Tipo IIA, IIB:** En el sector de masa cero, la teoría contiene dos gravitinos (de ahí el **II**) y dos dilatinos (además del contenido bosónico habitual: gravitones, fotones, dilatones, axiones). Si los gravitinos son de la misma quiralidad estamos en la teoría **IIB**, si son de quiralidades opuestas estamos en la **IIA**. Se retiene un sector u otro eligiendo qué autoespacios de los operadores quiralidad van a considerarse (la denominada *proyección GSO* [57]). La dualidad T intercambia ambos autoespacios, lo que implica que ambas teorías de tipo **II** son mutuamente T-duales.
- **Tipo I:** La existencia de dos gravitinos en las teorías de tipo **II** se debe a que contienen cuerdas no-orientadas. Si se consideran sólo cuerdas orientadas, la proyección GSO produce un sólo gravitino, y sólo el grupo gauge  $SO(32)$  produce perturbaciones finitas a primer orden.

- **Heterótica**  $SO(32)$  o  $E_8 \times E_8$ : Las cuerdas descritas hasta ahora pueden tener excitaciones que se mueven hacia la izquierda o hacia la derecha, según las corrientes de las teorías cuánticas con invariancia conforme en la hoja de universo de la cuerda sean holomorfas o antiholomorfas respectivamente. Si se retiene el sector que se mueve hacia la izquierda en la cuerda bosónica y el sector que se mueve hacia la derecha en la supercuerda de tipo **II**, se obtiene la cuerda *heterótica*. La consistencia deja sólo dos posibilidades para el grupo gauge, a saber, puede ser bien  $SO(32)$ , o bien  $E_8 \times E_8$ .

Las anteriores son las únicas teorías de cuerdas que mantienen la invariancia de Poincaré y carecen de taquiones y anomalías, pero no son, al parecer, teorías aisladas. Como se ha mencionado, todas ellas están bien definidas perturbativamente. Sin embargo, en el régimen de acoplamiento fuerte las teorías parecen intercambiar su comportamiento, de tal manera que la definición perturbativa de una de ellas para acoplamiento pequeño describe el régimen de acoplamiento fuerte de otra. Esta relación es la generalización de las dualidades S y T a las supercuerdas:

- La teoría **IIB** es *S-autodual*, en el sentido en que los objetos extendidos que contiene intercambian su comportamiento a acoplamiento débil y fuerte, de manera que la descripción perturbativa de uno de ellos se interpreta como la descripción del otro en la descripción de acoplamiento fuerte.
- La teoría **I** es S-dual de la teoría heterótica  $SO(32)$ , es decir, comparten el mismo grupo gauge pero sus regímenes de acoplamiento débil y fuerte se intercambian.
- La teoría **IIA** es T-dual de una teoría de supergravedad en once dimensiones compactificada en un círculo.
- Finalmente, la teoría heterótica  $E_8 \times E_8$  es T-dual de la supergravedad en once dimensiones, pero compactificada en un segmento compacto con sus extremos sin identificar.

Hay que enfatizar, sin embargo, que todas estas relaciones de dualidad vienen sugeridas por el aspecto de los espectros de baja energía de las teorías de campos efectivas que definen perturbativamente las supercuerdas a bajo acoplamiento. No existe ninguna expresión explícita de las dualidades, ni siquiera a nivel de teorías de campos efectivas. Cuando se dispone de una descripción completa, no-perturbativa de una teoría, la identificación de su dual a acoplamiento fuerte se reduce a un cierto cambio de variable sobre los grados de libertad. Por ejemplo, el modelo de Thirring [72] es una teoría de campos fermiónica con un potencial de autointeracción cuártico: su campo fundamental, un spinor de Dirac, puede usarse para construir un campo escalar. Este proceso, denominado *bosonización*, equivale a un cambio de variable en el modelo de Thirring en 1+1 dimensiones que lo lleva a un modelo escalar con un potencial de autointeracción no-lineal, llamado el modelo *seno-Gordon* [73]. Dicho modelo tiene estados no-perturbativos llamados *solitones* [74], que representan excitaciones de energía localizada: Bajo el cambio de variable, esos solitones describen las excitaciones elementales, fermiónicas, del modelo de Thirring. Así, la dualidad (en este caso, *dualidad-S*) se manifiesta como una relación rigurosa entre dos modelos de teorías cuánticas de campos exactamente solubles. No existe nada semejante en el caso de las cuerdas, principalmente debido al hecho de que los modelos que podrían usarse para definir las teorías de forma no-perturbativa sólo sirven para obtener

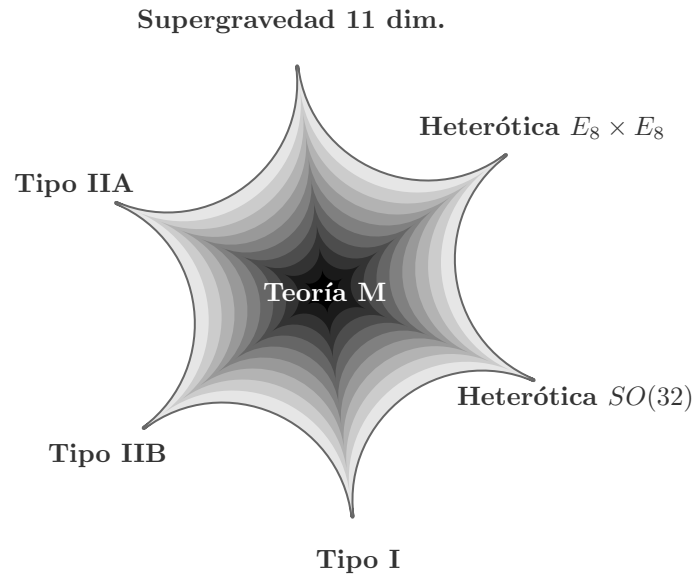


Figura 1.1: Las teorías de cuerdas conocidas parecen ser diferentes límites de una sola teoría, llamada *teoría M*.

los mismos resultados perturbativos que ofrecen las teorías de campos efectivas a baja energía. Por lo tanto, debe subrayarse que las dualidades entre las teorías de cuerdas son conjeturas, si bien las indicaciones de su validez son robustas y diversas.

### Teoría M

Tenemos entonces que las diversas teorías parecen estar relacionadas entre sí. No es correcto pensar que todas las teorías son una sola, puesto que la descripción efectiva del mundo en cuatro dimensiones a la que conducen es diferente [61]. En lugar de eso, parece que las seis teorías efectivas a baja energía son seis estados límite de una sola teoría cuántica en cierta región del espacio de parámetros. No se sabe con certeza de qué teoría se trata, ni cuáles son sus grados de libertad. Dicha teoría desconocida se denomina *teoría M*.

El gráfico con el que se resume la situación de las teorías de cuerdas conocidas se muestra en la figura 1.1. Desde que se descubrieron las teorías heteróticas en los años 80 no ha habido ninguna modificación sustancial de este escenario.

Casos límite especiales de la teoría M, es decir, modelos que constituyen soluciones particulares válidas en cierto régimen, se denominan *vacíos* de la teoría. Como se describe más abajo, muchos vacíos ya se han identificado, a pesar de no tener una descripción completa de la teoría subyacente.

De la teoría M sabemos que debe formularse en 10+1 dimensiones, puesto que su límite de baja energía es una teoría de supergravedad en 10+1 dimensiones. También debe ser una teoría única, sin ningún parámetro ajustable como  $\alpha'$ , y muchas de las magnitudes dadas *a priori* en las teorías de campos y cuerdas, como por ejemplo las coordenadas, deben ser propiedades derivadas de ciertos vacíos particulares. A esas propiedades se las llama *emergentes*. Si, por ejemplo, el tiempo o las constantes de acoplamiento, que son magnitudes dadas a priori en todos los modelos conocidos, fuesen propiedades emergentes, no podrían aparecer en la formulación básica de la teoría. Esto quiere decir que dicha formulación debe ser completamente distinta de cuantas se conocen hasta el momento.

*La entropía de los agujeros negros*

Uno de los éxitos de la teoría de cuerdas consiste en ofrecer una explicación microscópica de la entropía de los agujeros negros. Es un resultado bien establecido en relatividad general que aquellas soluciones de las ecuaciones de Einstein que poseen horizontes, como los agujeros negros o algunas soluciones cosmológicas como el espacio de de Sitter, obedecen leyes similares a las leyes de la termodinámica. En particular, la “segunda ley” afirma que el área del horizonte nunca puede decrecer bajo evolución temporal, de forma análoga a la segunda ley de la termodinámica que obedece la entropía. Esto motivó la definición de la entropía de Bekenstein-Hawking [75], [76] de un agujero negro como

$$S = \frac{A}{4} \tag{1.15}$$

donde  $A$  es el área del horizonte medida en unidades de Planck. En mecánica estadística, la entropía de un sistema macroscópico se interpreta como una medida del número de estados microscópicos compatibles con las magnitudes termodinámicas observadas del sistema. Asimilar la entropía de Bekenstein-Hawking con una verdadera entropía termodinámica implica que (1.15) está midiendo el número de estados microscópicos responsable de la entropía del agujero negro. Por supuesto, sólo una teoría cuántica puede dar cuenta de los estados microscópicos de un sistema, de modo que la explicación estadística de la entropía de Bekenstein-Hawking de un agujero negro se ha convertido en el problema por excelencia de la gravedad cuántica.

La teoría de cuerdas contiene objetos extendidos denominados  $p$ -branas, que son la generalización de las cuerdas a más dimensiones (una 0-brana es una partícula, una 1-brana es una cuerda, una 2-brana es una membrana, etc.). Un agujero negro en 3+1 dimensiones posee una singularidad puntual en el origen de coordenadas y un horizonte esférico bidimensional. El agujero negro que se considera en la teoría de cuerdas es un objeto definido en una teoría de supergravedad en 1+9 dimensiones reducida a cuatro o cinco dimensiones. La singularidad es una  $p$ -brana en lugar de un punto (luego es realmente una  $p$ -brana negra), y el horizonte es una esfera de 8 dimensiones. La energía del agujero negro se obtiene añadiendo D-branas de diferentes dimensionalidades, cada una con una carga diferente asociada a los diferentes campos gauge de la teoría o a dimensiones reducidas de Kaluza-Klein. Por ejemplo, el agujero negro más sencillo en 1+4 dimensiones necesita tres tipos diferentes de cargas, y es una solución supersimétrica de la teoría efectiva de supergravedad que describe la teoría **IIB** compactificada en un toro  $T^5$  con 27 cargas  $U(1)$  diferentes, análogas a la carga eléctrica ordinaria. Para estos objetos, un cálculo del área del horizonte obtenido resolviendo las ecuaciones de Einstein arroja el mismo resultado que la degeneración de los estados ligados de las D-branas que forman el agujero negro, con las mismas cargas, en el límite en que éstas son grandes (caso macroscópico). La degeneración se calcula contando de cuántas formas puede repartirse las cargas entre los diferentes modos de oscilación fermiónicos y bosónicos del sistema. El término dominante de la entropía microcanónica así calculada coincide con la cuarta parte del área del horizonte [77].

Este resultado confirma que la teoría de cuerdas contiene una versión consistente de la gravedad cuántica, lo bastante al menos como para verificar el origen microscópico de la entropía de algunos agujeros negros especiales. Sin embargo, no hay hasta el momento ninguna derivación análoga de la entropía de los agujeros negros clásicos no-extremales

(Schwarzschild, Reissner-Nordström y Kerr), de manera que la teoría cuántica de la gravedad con la que se obtiene este impactante resultado, hasta el momento, no se aplica al universo que observamos.

### *La correspondencia AdS/CFT*

En anteriores secciones hemos visto que la herramienta más potente que ha desarrollado la teoría de cuerdas es la dualidad entre diferentes teorías, que permite usar el régimen perturbativo de una teoría para efectuar cálculos en otra. Este mismo mecanismo de intercambio entre regímenes de acoplamiento débil y fuerte se explota en una dualidad reciente que ha producido una gran cantidad de resultados y una vasta literatura: la *correspondencia AdS/CFT* [78].

Como todas las dualidades de la teoría de cuerdas, la correspondencia AdS/CFT es una conjetura, sobre la cual se acumulan numerosas indicaciones y, hasta el momento, ninguna inconsistencia. Dicha dualidad, en su versión más sencilla, puede resumirse de la forma siguiente.

La teoría de cuerdas de tipo **IIB** posee una solución en la que una colección de D3-branas negras coincidentes genera una geometría que es asintóticamente  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ . En la región próxima al horizonte de las branas negras, la teoría de cuerdas es dual a una teoría gauge invariante conforme definida en el volumen de universo de las mismas branas. Puesto que una D3-brana es un objeto extendido en tres dimensiones, su volumen de universo es una variedad 3+1 dimensional, y la teoría conforme correspondiente es una teoría de campos gauge cuántica en 3+1. El fondo geométrico de la teoría de cuerdas está compactificado, y sus dimensiones abiertas forman una geometría  $\text{AdS}_5$ . Así, en el límite de baja energía en el que la teoría de cuerdas está definida perturbativamente por la supergravedad, sólo los modos sin masa son relevantes, de modo que la teoría de cuerdas está bien representada por la geometría  $\text{AdS}_5$  junto con algunos campos escalares sin masa. Por lo tanto, una teoría clásica puramente gravitatoria en 4+1 dimensiones es dual de una teoría cuántica de campos gauge en una dimensión espacial menos.

Si en la teoría de cuerdas se tienen  $N$  D3-branas coincidentes, entonces el grupo gauge del dual conforme es  $SU(N)$ . El caso de las D3-branas es especialmente interesante porque la constante de acoplamiento efectiva de la teoría gauge es independiente de la escala de energía considerada, y viene expresada a través del acoplamiento de 't Hooft

$$g_{\text{'t Hooft}} = g_{\text{YM}}^2 N, \quad (1.16)$$

siendo  $g_{\text{YM}}$  el acoplamiento que aparece en la acción de la teoría de Yang-Mills. La relación básica entre el acoplamiento de 't Hooft y el radio de compactificación  $R$ , que es el mismo en las geometrías de fondo  $\text{AdS}_5$  y  $\text{S}^5$ , es

$$\frac{R}{\ell_s} = g_{\text{'t Hooft}}^{\frac{1}{4}}. \quad (1.17)$$

Puede interpretarse la ecuación (1.17) diciendo que cuando la teoría gauge está débilmente acoplada, es decir,  $g_{\text{'t Hooft}}$  es pequeño, entonces la geometría del dual gravitacional está fuertemente curvada y los cálculos en ella son complicados, mientras que en la teoría gauge es posible extraer resultados perturbativos. Recíprocamente, cuando la teoría gauge está fuertemente acoplada los cálculos perturbativos no tienen sentido, pero en el

dual gravitacional las curvaturas son muy pequeñas y los cálculos no ofrecen dificultad. Vemos así que cada teoría se utiliza en el régimen en el que es manejable para obtener información sobre el régimen intratable de su dual. Éste es, en resumen, el punto fuerte de la correspondencia AdS/CFT.

Hay pruebas indirectas que indican que la correspondencia es correcta, como por ejemplo el hecho de que el grupo de (super)simetría de ambas teorías es idéntico. También, la constante de acoplamiento en la teoría de cuerdas, dada por el dilatón, es uniforme en todo el espacio, como corresponde a una constante de acoplamiento independiente de la escala de energía en la teoría gauge: ambas están relacionadas, así que dicha relación es una indicación más de la validez de la conjetura. Por último, también es posible relacionar los estados excitados de la teoría gauge con los estados de Kaluza-Klein de la teoría de cuerdas, incluso asociar un operador invariante gauge en la teoría conforme a cada observable gravitatorio.

A nivel operativo, el espacio  $\text{AdS}_{p+1}$  se reemplaza por su espacio recubridor, que posee una frontera en el infinito espacial con topología  $S^p \times \mathbb{R}$ , que es el espacio en que se define la teoría gauge. Por esta razón, y abusando del lenguaje, suele decirse que la teoría gauge “vive” en la frontera del espacio AdS, si bien esta afirmación es de naturaleza más bien estética: no debemos olvidar que las teorías duales se formulan en contextos totalmente diferentes. De una forma estricta, la teoría gauge reside en el volumen de universo de las 3-branas negras, y la teoría gravitacional es la geometría decimensional cerca del horizonte *por fuera*, luego la imagen más acertada es ciertamente muy diferente de la más popular.

Hay muchas esperanzas puestas en que la correspondencia AdS/CFT constituya una definición no ambigua de la teoría cuántica de la gravedad. La razón hay que buscarla en una de las entradas del *diccionario AdS/CFT*, que relaciona ambas teorías a nivel operativo. Tal entrada afirma que las funciones de partición de las versiones euclídeas de la teoría cuántica gravitatoria y de la teoría cuántica de campos conforme son iguales. Naturalmente, esto define una de ellas en función de la otra. Una de las aplicaciones que puede hacerse de esta identificación es trabajar en el régimen de gravedad débil, en el cual puede definirse semiclásicamente la función de partición gravitatoria, para obtener la función de partición de la teoría gauge en acoplamiento fuerte, y así explicar el diagrama de fases de confinamiento en la teoría gauge en función de la transición de fase gravitatoria en la que se forma un agujero negro [79]. Así, la correspondencia AdS/CFT ofrece un cálculo explícito de dicho diagrama de fases usando una teoría puramente gravitatoria. Desgraciadamente, dicho cálculo se lleva a cabo en una teoría conforme, y el modelo estándar no lo es, así que debe mejorarse la técnica para incluir el caso más realista; no obstante, es un avance considerable por sí solo, que abre la puerta a una plétora de métodos de cálculo muy potentes que están dando numerosos frutos en la literatura de los últimos años.

Por el momento, una demostración completa de la certeza de la correspondencia AdS/CFT está fuera de nuestro alcance, sobre todo porque toda la teoría de cuerdas está definida a través de dualidades, y por tanto no podrá probarse nada sobre AdS/CFT hasta que dispongamos de una definición completamente no-perturbativa de la teoría. No obstante, la potencia de las técnicas de cálculo que acompañan a la conjetura AdS/CFT ha hecho que se acepte como cierta mientras no se encuentren paradojas o inconsistencias. También se ha generalizado para abarcar otra clase de fenomenología; por ejemplo, hay esfuerzos para intentar adaptar la conjetura AdS/CFT a una nueva correspondencia

dS/CFT [80] que pueda aplicarse al Universo que observamos.

### *El principio holográfico*

Los agujeros negros presentan una entropía de Bekenstein-Hawking que, tomada como una entropía termodinámica, parece contar el número de microestados que constituyen el agujero negro. Además, el hecho de que dicha entropía sea proporcional al área del horizonte hace pensar que todos los grados de libertad internos del agujero negro están codificados en su horizonte. Una generalización de esta idea sería que cualquier sistema gravitatorio tiene sus grados de libertad codificados en una teoría no-gravitatoria con una dimensión menos. Tal es la hipótesis holográfica [37], [81], [38], llamada así en analogía con los hologramas, que son imágenes tridimensionales cuya información está enteramente codificada en dos dimensiones.

Cualquier teoría cuántica de la gravedad, cuando trate de examinar lo que ocurre a distancias muy pequeñas, tendrá que considerar sistemas con densidades tan elevadas que la formación de agujeros negros será inevitable; puesto que la hipótesis holográfica parece ser cierta para ellos, su extensión a la teoría cuántica completa de la gravedad parece algo natural.

La correspondencia AdS/CFT parece realizar de manera explícita la hipótesis holográfica. En ella, todo un sistema gravitatorio completo está codificado en una teoría gauge con una dimensión menos, y todo ello a nivel cuántico [82], [83]. No obstante, no hay ejemplos de dicha hipótesis holográfica además de la correspondencia AdS/CFT, la cual se aplica a sistemas muy concretos, de modo que no puede tomarse como punto de partida para basar la hipótesis holográfica, si bien es su más firme punto de apoyo. Como ya se ha dicho, no hay manera de probar la conjetura AdS/CFT desde la formulación actual de la teoría de cuerdas. Por lo tanto, la hipótesis holográfica se ha elevado a la categoría de principio, de modo que puede aplicarse sin demostración. El problema con este punto de vista es que no existe ninguna forma sistemática de construir el dual holográfico de un sistema gravitatorio arbitrario, lo cual hace que el poder predictivo y la potencia de cálculo del principio holográfico estén casi enteramente reducidas al caso AdS/CFT y sus generalizaciones.

La forma en que el holograma funciona es proyectando las coordenadas espaciales de la esfera que constituye la frontera espacial del espacio AdS sobre la pantalla holográfica. La coordenada radial restante del espacio AdS se asimila en el dual holográfico con la escala de renormalización: Para renormalizar una teoría gauge se excluyen todos los grados de libertad con momento por encima de un cierto nivel de corte. Cuando la coordenada radial se aleja hacia el infinito, ese corte se levanta a momento infinito, y cuando el corte se fija en un valor concreto la distancia radial se conserva a dicho valor. Esta idea se realiza en AdS/CFT mediante lo que se denomina el grupo holográfico de renormalización.

### *Gravedad emergente*

Uno de los conceptos más innovadores que la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad ha traído a la consideración de la comunidad de físicos es la emergencia de las magnitudes que se dan como punto de partida en todas las teorías anteriores. Ya hemos encontrado un ejemplo en la sección 1.2.1, en la cual el análisis de la ecuación



de Wheeler-DeWitt produce un “tiempo” en la forma de un campo escalar, de modo que la evolución dinámica surge a partir de un modelo estático: decimos que el tiempo es *emergente*. Del mismo modo, en la teoría de cuerdas encontramos la correspondencia AdS/CFT, que afirma que las teorías gravitatorias poseen duales holográficos que **no** son gravitatorios. Por tanto, los conceptos en los que se basa la gravedad, incluso la gravedad misma, podrían ser emergentes desde las teorías duales holográficas.

No obstante, hay una propuesta sobre la emergencia de la gravedad, dada en la referencia [40], según la cual la gravedad emerge de la entropía asociada a los cuerpos masivos; cuando estos se mueven, la ley de crecimiento de la entropía conduce a la relatividad general. Esto ocurre de un modo independiente de la teoría microscópica que describe los grados de libertad que dan lugar al campo gravitatorio. Todo lo que se necesita es información, y la gravedad surge de la segunda ley de la termodinámica: la teoría microscópica intenta simplemente maximizar su entropía.

Así, podría ser que lo fundamental para la emergencia de una magnitud o una teoría no es ningún tipo sofisticado de dualidad, sino sólo la información, cuantificada mediante la entropía, y la segunda ley de la termodinámica.

#### 1.2.4 El Paisaje

Una de las consecuencias más impactantes de la teoría de cuerdas es la existencia de numerosos estados de vacío que posee. No sólo las diferentes teorías de cuerdas se ven como límites de la teoría M en ciertos límites, sino que además una misma teoría puede tener diferentes soluciones en las cuales la geometría decimensional de fondo se compactifica de formas diferentes. Un ejemplo es la geometría  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  de la correspondencia AdS/CFT; pero hay muchas más. Si la finalidad de la teoría de cuerdas es describir la física del modelo estándar, entonces debe existir una compactificación de la forma  $d\text{S}_4 \times \mathcal{K}_6$  dentro de la teoría de tipo **IIB**, por ejemplo, donde  $\mathcal{K}_6$  es una variedad hexadimensional compacta. Dichas compactificaciones conducen a modelos de la física tetradimensional en los cuales el contenido de partículas, las constantes de acoplamiento, las clases de interacciones que contienen y sus simetrías pueden ser radicalmente diferentes. Cada elección de compactificación, es decir, cada posible variedad  $\mathcal{K}_6$ , produce una teoría tetradimensional efectiva (o *vacío*) diferente. Encontrar un vacío que reproduzca el contenido conocido del modelo estándar de la física de partículas es el mayor reto al que se enfrenta la teoría de cuerdas.

Entre las posibles variedades internas que se toman como  $\mathcal{K}_6$  se encuentran los *orbifolds* [52], que son variedades que se construyen cortando regiones de otras variedades no-compactas e identificando segmentos de la frontera del corte para resultar en variedades compactas con topología no trivial, y las *variedades de Calabi-Yau* [52], que son un tipo especial de variedades en las que se anula el tensor de Ricci, lo cual las hace especialmente sencillas de manejar, razón por la cual aparecen frecuentemente en la literatura.

Dada una compactificación, es decir, una vez elegida la variedad compacta  $\mathcal{K}_6$ , aparece el problema de explicar porqué el espacio ha de presentarse de esa forma y no de otra, y de cuál es la forma concreta de la variedad y su tamaño. Por ejemplo, si  $\mathcal{K}_6$  es un toro, está caracterizado por los radios de sus ciclos: ¿cómo se eligen esos tamaños? Las cantidades escalares que caracterizan la forma y tamaño de una variedad con una topología dada son sus *módulos*. Proporcionar un mecanismo por el cual los módulos toman valores concretos (se *estabilizan*, como suele decirse en este contexto) que fijan por completo la forma y tamaño de la variedad interna se conoce como el **problema de la estabilización de**

**los módulos** [52]. El problema no sólo consiste en producir valores fijos para todos los módulos, sino también en asegurar que dichos valores se preservan bajo pequeñas perturbaciones, es decir, que los valores son estables. En caso contrario se obtienen efectos que destruyen por completo la geometría de fondo. Para ver por qué esto es así, consideremos un módulo, como por ejemplo el radio de una esfera, que controla por sí sólo el valor del volumen de la variedad interna. Si el módulo no es estable, no permanece cerca de su valor al perturbarlo ligeramente; decimos entonces que el módulo se *escapa* al desestabilizarse. Puede escaparse hacia volumen infinito (en cuyo caso se produce la *decompactificación* de la variedad interna), o hacia cero (en cuyo caso la variedad interna colapsa en un punto). Ambos comportamientos destruyen la geometría de fondo, haciéndola inviable como modelo físico.

En las teorías efectivas a baja energía, los módulos de la variedad compacta son simplemente campos escalares dinámicos. El mecanismo más eficiente y elegante para estabilizarlos es proporcionar un potencial para ellos mediante el procedimiento de compactificación. Así, los módulos se estabilizan en los mínimos del potencial. Los puntos de silla o máximos del potencial dan lugar a puntos de equilibrio inestable, y no son por tanto estados físicos viables. El potencial se define como una función escalar sobre el espacio de los módulos, que es multidimensional en general. Puesto que el potencial tendrá muchos picos y valles, suele visualizarse como un paisaje abrupto y complejo. Por eso, al conjunto de mínimos que constituyen vacíos viables se le llama **paisaje** de la teoría de cuerdas [84].

La realización más concreta del paisaje aparece en la teoría de tipo **IIB**, donde la acción efectiva a baja energía posee campos sin masa análogos al campo electromagnético, pero procedentes de potenciales que son dos-formas en lugar de uno-formas. Dichos campos fluyen a través de los ciclos de la variedad interna, dando lugar a flujos magnéticos o eléctricos, según que se calcule el flujo del campo o de su dual de Hodge. El valor del flujo a través de diferentes ciclos no puede tomar cualquier valor, sino que en general está restringido a múltiplos enteros de una cantidad fija. Esta cuantización de los flujos internos puede deberse a que sus fuentes son branas, y siempre están presentes en un número entero, o bien por condiciones de cuantización de Dirac generalizadas. En todo caso, los flujos cuantizados constituyen el mecanismo que curva la variedad interna y la estabilizan en una forma y tamaño dados: la energía que contienen los campos atrapados en los ciclos gravita, forzando al espacio-tiempo a curvarse adoptando la forma deseada  $dS_4 \times \mathcal{K}_6$ . Los valores de los números cuánticos de los flujos pueden ser muy diversos, dando lugar a numerosos vacíos diferentes; sin embargo, están fuertemente restringidos porque deben dar lugar a geometrías estables, como se ha mencionado más arriba. Sin embargo, a pesar de esa restricción, el número de posibilidades puede ser, aunque finito, de un tamaño tan enorme como  $10^{500}$ .

Está claro que con un número de vacíos tan gigantesco, la posibilidad de encontrar nuestro universo entre uno de los posibles estados del paisaje es tan pequeña que muchos físicos piensan que el poder predictivo de la teoría de cuerdas se desvanece. Después de todo, entre tantos universos posibles podría realizarse casi cualquier conjunto de leyes físicas, así que la teoría predice *todas* las posibilidades, y por tanto no nos ayuda a explicar porqué observamos la nuestra y ninguna más.

Una de las ventajas que ofrece el paisaje es una realización natural de la inflación eterna [85], [86]. En este escenario, el Universo comenzó en un vacío con una elevada constante cosmológica, y por tanto expandiéndose exponencialmente. En cierto momento se produjo una transición, o una serie de ellas, a otro vacío con la constante cosmológica

más pequeña y la inflación aminoró hasta que la constante fue mucho menor y la inflación se detuvo por completo. La cadena de “saltos” a través del paisaje nos ha llevado al Universo en que vivimos.

La descripción de las transiciones entre vacíos suele darse en términos de instantones, que son la versión de los solitones en signatura euclídea. El modelo más sencillo de instantón que representa la transición entre dos geometrías de diferente densidad de energía del vacío es el instantón de Coleman-De Luccia [87]. Suelen visualizarse los solitones entre geometrías como burbujas que se materializan espontáneamente y después comienzan a expandirse. El cálculo de los instantones permite cuantificar la tasa de transición entre los diferentes vacíos, y por tanto permite “poblar” el paisaje con una distribución de probabilidad. Esta imagen de la realidad, en la que muchos Universos diferentes se realizan a lo largo de la historia con una distribución de probabilidad bien determinada se denomina **Multiverso** [88]. Nuestro Universo sería, por tanto, una burbuja dentro del Multiverso, y se presenta el problema de calcular la distribución de probabilidades de las diferentes burbujas. Dicha distribución debería dar cuenta de porqué es nuestro Universo el que finalmente se ha realizado, y debería permitir el cálculo de magnitudes como la densidad de energía del vacío. Encontrar esa distribución de probabilidades a partir de primeros principios constituye el **problema de la medida** [50].

La teoría de cuerdas está produciendo recientemente modelos de probabilidad basados en la correspondencia AdS/CFT. Dichos modelos se aplican, por supuesto, a ciertas geometrías de fondo concretas, y por tanto a vacíos con una cierta estructura, de modo que no es posible generalizarlas a todo el paisaje. Algunos autores [89] ven este enfoque como una falta de predictibilidad del paisaje, puesto que la teoría cuántica que define la correspondencia AdS/CFT en cada vacío está desconectada de las demás. Se concluye así que el paisaje como tal no es accesible a los cálculos perturbativos, y por tanto el escenario que describe el Multiverso adscribiendo probabilidades a los diferentes mínimos de un potencial no está justificado dentro de la teoría de cuerdas. En particular, el potencial en el espacio de módulos que define el paisaje no ha sido encontrado en ningún caso, y las transiciones entre estados descritas mediante los instantones no son posibles en el contexto de la correspondencia AdS/CFT, puesto que las diferentes teorías cuánticas duales están desconectadas. Además, la falta de una medida de probabilidad conduce inmediatamente a los argumentos antrópicos, es decir, se usa la existencia de observadores como nosotros como una condición para eliminar posibilidades. Pero como ya se ha mencionado, ni siquiera esa condición consigue explicar el valor de la constante cosmológica, por ejemplo: hay una enorme cantidad de vacíos que quedarían seleccionados por el principio antrópico, y aún tendríamos que decidir cuál de ellos es el correcto, y porqué la naturaleza elige ése y no otro.

En suma, podemos ver cómo la idea del paisaje de la teoría de cuerdas contiene elementos que, de realizarse en algún modelo concreto, dibujarían una escena completa que describiría nuestro Universo; pero son tantos los elementos que faltan en esa escena, que no sólo no consigue resolver los problemas que conlleva el Multiverso, sino que empieza a encontrar detractores.

### 1.3 El modelo de Bousso-Polchinski

Uno de los modelos de paisaje más populares por su simplicidad es el modelo de Bousso-Polchinski. No aparece descrito en ninguno de los libros sobre teoría de cuerdas por

tratarse de un “modelo de juguete” del paisaje que no tiene en cuenta todos los aspectos relevantes. No obstante, se trata de un modelo útil para visualizar la complejidad del paisaje y su utilidad en los problemas concretos, así como para descubrir los problemas que se plantean en el paisaje completo. La referencia relevante para esta sección es el artículo original de Bousso y Polchinski [90]. Después de su publicación han aparecido otros trabajos que tratan de explorar la idea de la inflación eterna con el paisaje de Bousso-Polchinski como trasfondo, como por ejemplo [91] y [92], o estudios numéricos que simulan la evolución del multiverso correspondiente [93]. Puesto que gran parte del trabajo que se expone en esta tesis está basado en este modelo, vamos a describirlo con cierto detalle a continuación.

### 1.3.1 Presentación del modelo

#### *El mecanismo de Brown-Teitelboim*

La idea central del modelo de Bousso-Polchinski consiste en utilizar un campo gauge dado a través de una cuatro-forma. Esos campos ya aparecen en el mecanismo de Brown-Teitelboim [94, 95], que es una propuesta para resolver el problema de la constante cosmológica. El modelo contiene gravedad, la cuatro-forma y sus objetos-fuente, que son membranas en el caso general. Los instantones del modelo que interpolan entre dos geometrías con diferentes curvaturas constantes (es decir, diferentes constantes cosmológicas) se interpretan como modos de decaimiento o transición entre ambas geometrías. Cuando el decaimiento es más probable en el sentido de disminuir la constante cosmológica se habla de una **neutralización dinámica**. El proceso es completamente análogo a la creación de un par partícula-antipartícula en presencia de un fuerte campo eléctrico: en este proceso, el campo en el espacio entre el par de partículas tiende a disminuir, y de hecho la creación de pares se sucede hasta que la densidad de energía almacenada en el campo eléctrico es insuficiente para crear más pares. En el modelo de Brown-Teitelboim, la creación espontánea del par partícula-antipartícula se reemplaza por la nucleación de una membrana: el par se visualiza como una esfera  $S^0$ , mientras que la membrana es una esfera  $S^2$ . El campo eléctrico que se neutraliza en el espacio entre partículas se reemplaza por la cuatro-forma, cuyos valores disminuyen en el interior de la membrana, relajando la curvatura. Así, la membrana es una burbuja que separa dos fondos gravitatorios con diferentes constantes cosmológicas. La geometría de la membrana separando dos espacio-tiempos diferentes es un instantón del modelo, y la neutralización se produce cuando el proceso de disminución de la constante cosmológica es más probable que el proceso inverso. La analogía es tal que cuando se considera el espacio-tiempo con 1+1 dimensiones, el modelo de Brown-Teitelboim produce exactamente la fórmula de Schwinger para la tasa de producción de pares en un campo eléctrico intenso. Además, este mecanismo produce una tasa de nucleación análoga a la asociada al instantón de Coleman-De Luccia [87] en 3+1 dimensiones. Por último, es necesaria una cuatro-forma en lugar de cualquier otro campo gauge porque la solución de sus ecuaciones de movimiento tiene una contribución a la dinámica que es indistinguible de una constante cosmológica puesta *a mano* en el modelo.

No obstante, el mecanismo de Brown-Teitelboim para neutralizar la constante cosmológica presenta el problema de que el espaciado entre valores consecutivos de la constante cosmológica antes y después del evento de nucleación es demasiado grande en términos

microscópicos, lo que quiere decir que la carga de las membranas respecto de la cuatro-forma debería ser afinada más de 100 órdenes de magnitud para explicar la constante cosmológica observada. Por lo tanto, el mecanismo de Brown-Teitelboim, por sí solo, no alivia el problema de la constante cosmológica.

En el modelo de Bousso-Polchinski se aclara que no se puede elegir libremente el único valor  $c$  de la cuatro-forma  $F^{\mu\nu\rho\sigma} = c\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  que no queda fijo por las ecuaciones de movimiento, sino que sus valores están cuantizados. Esta condición es más fuerte que la condición de cuantización de Dirac, en la cual lo que se cuantiza es el flujo del campo, es decir, su integral extendida a una superficie cerrada que engloba las fuentes. La cuantización del valor de la cuatro-forma procede de la inmersión del modelo de Brown-Teitelboim en una teoría de campos de baja energía que describe la teoría M compactificada en una variedad heptadimensional. Por supuesto, esta cuantización impide cancelar cualquier constante cosmológica inicial con la contribución de la cuatro-forma, precisamente porque no puede ajustarse su valor.

### *Flujos desde una compactificación de la teoría M*

En la teoría de campos de baja energía que representa la teoría M, podemos considerar una compactificación del espacio-tiempo de 10+1 dimensiones en la forma  $\mathcal{V}_{11} = \mathcal{M}_4 \times \mathcal{K}_7$ , donde  $\mathcal{K}_7$  es una variedad compacta en siete dimensiones espaciales y  $\mathcal{M}_4$  es el espacio-tiempo tetradimensional ordinario (de Sitter o anti-de Sitter, según el signo de la constante cosmológica efectiva). En esta teoría disponemos de M5-branas, que son la generalización de las D-branas a la teoría M, y de una siete-forma  $\mathbf{F}_7$ . La acción efectiva de baja energía correspondiente es, teniendo en cuenta sólo la gravedad y la siete-forma,

$$S = (M_{\text{P}}^{(11)})^9 \int_{\mathcal{V}_{11}} d^{11}X (R^{(11)} - \mathbf{F}_7^2), \quad (1.18)$$

donde  $M_{\text{P}}^{(11)}$  y  $R^{(11)}$  son respectivamente la masa de Planck y la curvatura escalar en once dimensiones, y  $\mathbf{F}_7^2$  es el escalar invariante gauge asociado a la siete-forma, es decir, su densidad lagrangiana. La parte correspondiente a las M5-branas no influye directamente; no obstante, las M5-branas son los objetos cuya nucleación dará lugar a las transiciones que neutralizan la constante cosmológica. Puesto que necesitamos que esa transición ocurra en el espacio  $\mathcal{M}_4$  a través de membranas (superficies bidimensionales  $S^2$ ), y las M5-branas son objetos pentadimensionales, necesitamos que las restantes tres dimensiones de la M5-brana envuelvan un 3-ciclo interior de la variedad compacta  $\mathcal{K}_7$ . Las variedades de Calabi-Yau son profundas en 3-ciclos; si  $N_3$  es el número de ellos, podemos descomponer la siete-forma en los siguientes términos:

$$\mathbf{F}_7 = [*\mathbf{F}_4^{(J)}(x)] \wedge \epsilon_7(y) + \sum_{i=1}^{N_3} \mathbf{F}_4^{(i)}(x) \wedge \omega_3^{(i)}(y). \quad (1.19)$$

En la ecuación anterior, las coordenadas  $X^0, \dots, X^{10}$  se han dividido en abiertas  $x^0, \dots, x^3$  y compactas  $y^1, \dots, y^7$ . El símbolo  $\omega_3^{(i)}$  denota la tres-forma armónica que se asocia al  $i$ -ésimo ciclo;  $\epsilon_7$  es la forma de volumen en  $\mathcal{K}_7$ ;  $\mathbf{F}_4^{(i)}$  es la cuatro-forma cuyo flujo atraviesa el  $i$ -ésimo ciclo; y  $*\mathbf{F}_4^{(J)}$  es una cero-forma obtenida reduciendo  $\mathbf{F}_7$ , cuya dual de Hodge en 3+1 dimensiones es la cuatro-forma  $\mathbf{F}_4^{(J)}$  (aquí  $J = N_3 + 1$ ).

Como se ha señalado más arriba, las cuatro-formas poseen valores cuantizados, de modo que  $\mathbf{F}_4^{(i)} \sim n_i$  con  $n_i$  entero. Tras sustituir la expresión (1.19) en la acción (1.18) y efectuar la integración a las coordenadas internas, la cuantización de las cuatro-formas produce una constante cosmológica efectiva

$$\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda_{\text{bare}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^J q_i^2 n_i^2, \quad (1.20)$$

donde las cargas elementales  $q_i$  asociadas a cada ciclo son

$$q_J = \sqrt{\frac{2\pi}{(M_{\text{P}}^{(11)})^3 V_7}}, \quad q_i = q_J \left(M_{\text{P}}^{(11)}\right)^3 V_3^{(i)} \quad (1 \leq i \leq J-1). \quad (1.21)$$

Vemos así que la compactificación fija las cargas elementales según los volúmenes tridimensionales de los tres-ciclos  $V_3^{(i)}$  y el volumen heptadimensional de la variedad interna  $V_7$ .

Los números cuánticos  $n_i$  que describen cuánto flujo envuelve a cada tres-ciclo forman la densidad de energía del vacío en la teoría dimensionalmente reducida. Por supuesto, cuando los valores de  $n_i$  sean grandes, la energía que contiene el flujo de cada tres-ciclo debería ser mayor; puesto que dicha energía también gravita, el volumen del ciclo debería contraerse, compensando el exceso de energía con un incremento en la curvatura, es decir, la energía reacciona sobre la geometría. Pero si el volumen de un tres-ciclo se contrae, su carga elemental asociada  $q_i$  debería disminuir: llegamos a la conclusión de que una solución completa del modelo de Bousso-Polchinski debería incluir la reacción mediante unas cargas  $q_i$  dependientes de los números cuánticos  $n_i$ . No obstante, por simplicidad, la reacción se desprecia, lo que produce la fórmula (1.20).

### *Neutralización de la constante cosmológica*

La expresión (1.20) para la constante cosmológica efectiva se combina ahora con el mecanismo de Brown-Teitelboim. En lugar de una sola cuatro-forma que se descarga mediante la nucleación de la brana correspondiente, ahora tenemos un tipo diferente de M5-brana por cada tres-ciclo, que se manifiesta como una burbuja en el modelo dimensionalmente reducido. Cada vez que nuclea una burbuja, la constante cosmológica efectiva (1.20) disminuye un poco: la transición más sencilla reduce un sólo cuanto de flujo en una de las cuatro-formas, de modo que su número cuántico  $n_i$  se reduce (o aumenta) en una unidad,  $n_i \rightarrow n_i \pm 1$ . Por supuesto, cada uno de estos saltos tiene una probabilidad de ocurrir perfectamente especificada por el mecanismo de Brown-Teitelboim. Llegamos así a la conclusión de que, partiendo de condiciones iniciales genéricas, el flujo va disminuyendo progresivamente, efectuando un camino aleatorio por el retículo formado por los números cuánticos de los flujos. De esta forma emerge el mecanismo de neutralización de Bousso-Polchinski: en el espacio de flujos correspondiente, la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$  puede tener nodos del retículo arbitrariamente próximos, produciendo así configuraciones de flujo con la constante cosmológica extraordinariamente pequeña. Esto sólo es posible si el valor de la constante cosmológica  $\Lambda_{\text{bare}}$  es negativo, hipótesis que se asume como parte del modelo. La figura 1.2 presenta una ilustración del mecanismo de Bousso-Polchinski para el caso simple de sólo dos flujos,  $J = 2$ , en el cual el espacio de flujos puede representarse como un retículo bidimensional y la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$  es un círculo.

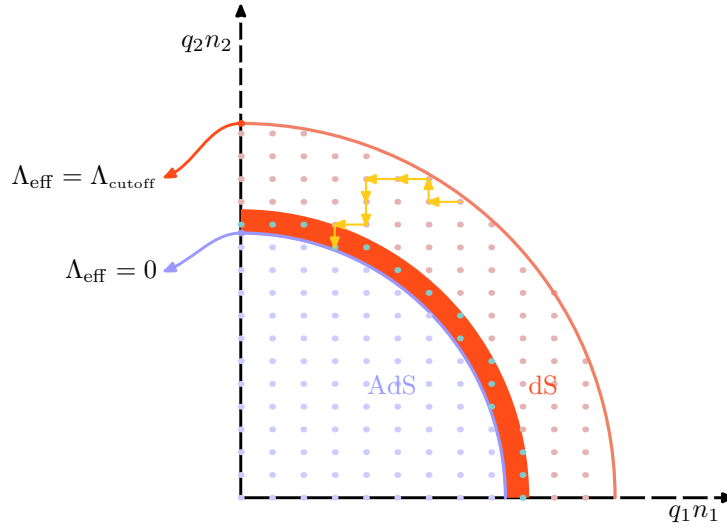


Figura 1.2: Ilustración del mecanismo de neutralización de Brown-Teitelboim en el modelo de Bousso-Polchinski: Los flujos cuantizados forman un retículo, y la neutralización es un camino aleatorio que reduce la constante cosmológica efectiva llevándola a una capa delgada próxima a la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ .

### Contando estados antrópicos

En una capa muy delgada próxima a la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$  se encuentran los **estados antrópicos** del modelo, que poseen una constante cosmológica efectiva análoga a la que se observa en nuestro Universo. Podemos contar dichos estados mediante un argumento probabilístico: Si un sólo nodo del retículo ocupa un volumen  $v = \prod_{i=1}^J q_i$ , entonces la capa antrópica contendrá al menos un estado si su volumen es comparable al volumen asociado a un nodo. El volumen de una capa con espesor  $\delta\Lambda$  alrededor de la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$  puede calcularse observando en (1.20) que dicha superficie es una esfera de radio  $R_0 = \sqrt{2|\Lambda_{\text{bare}}|}$  y la capa se extiende entre dicha esfera y otra exterior de radio  $R_1 = \sqrt{2(|\Lambda_{\text{bare}}| + \delta\Lambda)}$ , de modo que el volumen comprendido entre ambas es

$$\frac{R_1^J}{J} \varpi_{J-1} - \frac{R_0^J}{J} \varpi_{J-1} \approx (2|\Lambda_{\text{bare}}|)^{\frac{J}{2}-1} \varpi_{J-1} \delta\Lambda, \quad (1.22)$$

donde  $\varpi_{J-1} = \frac{2\pi^{J/2}}{\Gamma(J/2)}$  representa el área superficial de la esfera unidad  $S^{J-1}$ . Puede ocurrir además que muchos nodos diferentes posean la misma constante cosmológica efectiva; si su degeneración es  $D$ , la condición de que la capa antrópica posea al menos un estado es que su volumen sea mayor que  $D$  veces el volumen asociado a un sólo nodo:

$$D \prod_{i=1}^J q_i \leq (2|\Lambda_{\text{bare}}|)^{\frac{J}{2}-1} \varpi_{J-1} \delta\Lambda. \quad (1.23)$$

Así, el número de estados en la capa antrópica se obtiene como el cociente del volumen de la capa y el de una celda elemental del retículo, y la condición para que el modelo de Bousso-Polchinski contenga estados antrópicos es simplemente que dicho número supere a la degeneración típica de un nodo en el modelo:

$$\mathcal{N}_A = \frac{(2|\Lambda_{\text{bare}}|)^{\frac{J}{2}-1} \varpi_{J-1} \delta\Lambda}{\prod_{i=1}^J q_i} \geq D. \quad (1.24)$$

Si el modelo contiene estados antrópicos, es decir, si la condición (1.24) se cumple para alguna compactificación razonable de la teoría M, entonces se puede decir que el modelo de Bousso-Polchinski es capaz de resolver el problema de la constante cosmológica.

### 1.3.2 Problemas del modelo

El modelo anteriormente expuesto es una sobresimplificación de lo que parece ser la propuesta más prometedora procedente de la teoría de cuerdas para resolver el problema de la constante cosmológica. Sin embargo, hay una serie de escollos en el modelo que merece la pena resaltar, porque no sólo ponen de manifiesto sus limitaciones, sino que pueden poner en duda sus conclusiones:

- **[Corte superior no-natural]** En primer lugar, el tratamiento de los estados de vacío del modelo incluye un corte a energías elevadas, marcado como un círculo exterior en la figura 1.2. Este corte es necesario porque cuando las energías son tan elevadas y los estados están tan densamente empaquetados no es posible considerarlos como aislados en un análisis semiclásico. Además, los efectos de la gravedad cuántica se harán notar a esas energías; en particular, cualquier teoría efectiva a baja energía deja de ser válida, de modo que la expresión dada para la acción en (1.18) ya no puede considerarse correcta. Lamentablemente, no hay nada en el modelo que sugiera cuál debe ser el valor al que se haga el corte, de manera que se introduce *a mano* en el modelo. Los resultados de contar estados dependen fuertemente de ese corte, así que en definitiva este procedimiento resulta insatisfactorio.
- **[Asumir estabilidad]** Quizá la simplificación más severa del modelo consista en asumir la estabilidad de los estados de vacío. Cuando el número de estados es tan grande y sus energías son tan altas, es de esperar que haya un límite superior a partir del cual los estados serán inestables en cualquier análisis semiclásico. Por supuesto, el conteo de estados debería incluir sólo los estados estables, y puede cambiar enormemente al incluir la estabilidad, lo cual puede potencialmente alterar todas las conclusiones que se extraigan del modelo.
- **[Despreciar la reacción]** La estabilidad no sólo influye en decidir qué juego de números cuánticos  $\{n_i\}_{i=1,\dots,J}$  produce un estado estable, sino también en establecer cuáles son los valores correctos de las cargas elementales  $q_i$ , es decir, los tamaños de los tres-ciclos que aparecen en el modelo. Naturalmente, estos tamaños están fijados por la tensión creada entre la gravedad, que tiende a expandir los tres-ciclos para relajar la curvatura del espacio-tiempo, y la energía almacenada en las branas que envuelven a los tres-ciclos, que gravita tratando de comprimirlos. Si se desprecia la reacción de las branas sobre la geometría se imposibilita que este mecanismo estabilice las cargas a valores concretos, que por supuesto dependerían de la cantidad de flujo, invalidando la expresión (1.20) sobre la que descansan todas las conclusiones que se extraen de él.
- **[No hay estados explícitos]** El modelo contiene una enorme cantidad de estados antrópicos sin necesidad de hacer un ajuste fino de sus parámetros. Sin embargo, esta conclusión es puramente estadística, puesto que a pesar de saber contarlos aproximadamente, no tenemos ningún algoritmo concreto que nos permita construirlos explícitamente, es decir, que produzca cuáles deben ser los números cuánticos de



cada flujo necesarios para producir un estado con una constante cosmológica igual a la observada. Esto reduce el interés práctico del modelo, puesto que los valores que distinguen nuestro Universo de las demás posibilidades presentes en el paisaje son imposibles de calcular en la práctica.

- **[Contaje aproximado de estados]** Otro problema diferente aparece en la forma de contar estados. Como se ha visto, la fórmula (1.24) cuenta estados usando el cociente entre volúmenes de la capa antrópica y de una celda en el espacio de flujos, asumiendo que cabe un estado por cada celda. Se asume, además, que la dimensión del espacio de flujos  $J$  es grande, para obtener constantes cosmológicas pequeñas. Pero la fórmula (1.24) tiene un comportamiento curioso: cuando  $J$  se hace grande se estabiliza y comienza a bajar, simplemente debido a que el volumen  $\varpi_{J-1}$  decrece más deprisa que otras contribuciones exponenciales debido a la presencia de la función  $\Gamma$  en el denominador. Por tanto, ¡hay un valor de  $J$  por encima del cual la capa antrópica tiene un volumen inferior al de una sola celdilla! Este efecto indicaría que tener muchos flujos hace que conseguir constantes cosmológicas pequeñas sea más difícil, lo cual es absurdo. Debemos concluir que el método de contaje mediante cociente de volúmenes tiene una validez limitada y para  $J$  muy grande es inadecuado.
- **[Simulaciones basadas en hipótesis incorrectas]** Una primera consecuencia del mecanismo de neutralización es que las cadenas de transiciones tienden a poblar preferentemente la capa antrópica, es decir, se produce un mecanismo de *selección* de los estados, de modo que el valor medio de las magnitudes sobre los estados seleccionados puede ser muy diferente del que se obtiene muestreando los estados sin selección. Para probar esta hipótesis, Bouso y Yang [93] llevaron a cabo una simulación numérica de las cadenas de transición que seleccionan los estados, pero en esa simulación usaron una aproximación demasiado drástica, que consiste en suponer que los números cuánticos de los flujos que especifican los estados son variables aleatorias independientes. Naturalmente, los flujos asociados a estados seleccionados están próximos a la superficie esférica  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$  (ver figura 1.2), y por tanto su distribución tiene que tener la misma simetría que la esfera. Pero si se asume independencia de los flujos, la distribución adopta la misma simetría que una celda individual del retículo de estados, y en un número muy elevado de dimensiones una distribución esféricamente simétrica y otra con la simetría de la celdilla poseen soportes tan diferentes que la predicción del número de estados se vuelve radicalmente distinta. Por tanto, no puede asumirse independencia, y las conclusiones del estudio numérico son dudosas.
- **[Ausencia de un mecanismo cuántico de selección]** Si las simulaciones no pueden asegurar que se selecciona la capa antrópica, es necesario un mecanismo cuántico que asegure que los estados de constante cosmológica parecida a la nuestra son los que van a seleccionarse. Este mecanismo debe dar lugar a una medida de probabilidad sobre los estados que justifique la selección; ésta se explica actualmente recurriendo al principio antrópico de forma casi exclusiva, lo cual no puede considerarse como satisfactorio considerando el grado de generalidad y lo fundamental de la teoría de la que procede el modelo.

*El problema de la estabilidad: El mecanismo KKL*

El problema de la falta de estabilidad del modelo de Bousso-Polchinski es el más serio de todos. Desde la publicación del artículo original se han encontrado varios modelos de paisajes con todos los módulos fijados dinámicamente, notablemente en teoría F [96], pero son bastante complicados de establecer en detalle, y todos ellos se basan en el mecanismo seminal introducido en la referencia [97], denominado *mecanismo KKL*. Dicho mecanismo parte de la teoría de cuerdas de tipo **IIB** considerada como un sector de la teoría F. La teoría se describe mediante la supergravedad efectiva a baja energía con flujos, y sobre ella se formula una compactificación distorsionada (en estas compactificaciones la métrica de las coordenadas de la variedad abierta posee un factor conforme que depende de las coordenadas de la parte compacta). Las soluciones supersimétricas tienen módulos sin fijar; el modelo se concentra sobre uno de ellos, el que determina el tamaño de la variedad compacta, denominado módulo de volumen, análogo a la carga  $q_J$  en el modelo de Bousso-Polchinski. El proceso de compactificación produce un potencial para el módulo de volumen que procede de un superpotencial (llamado así porque su origen está en la supersimetría) y de un potencial de Kähler (se llama *potencial de Kähler* a una sola función escalar a partir de la cual puede derivarse la métrica de la variedad compacta).

Por sí sólo, el potencial así obtenido no fijaría el módulo de volumen, que aumentaría de tamaño dinámicamente produciendo la descompactificación de la geometría. Para conseguir que el potencial tenga un mínimo, se añaden a la teoría efectos suplementarios como instantones o condensación de gauginos, que pueden aportar correcciones al potencial que crecen para valores grandes del módulo de volumen, evitando así la decompactificación. El mínimo del potencial corregido estabiliza el módulo de volumen con un valor negativo del potencial, es decir, la solución es anti-de Sitter en las coordenadas abiertas. Esto es algo genérico de las teorías supersimétricas: indica que un vacío con constante cosmológica positiva no puede ser supersimétrico.

Para obtener un vacío de tipo de Sitter debe por tanto romperse la supersimetría. Esto se consigue añadiendo al modelo anti-D3 branas, que modifican el potencial añadiendo un término que no elimina la existencia del mínimo, y por tanto el módulo sigue estabilizado, pero sí que levanta el valor mínimo del potencial, haciéndolo positivo. Este es el mecanismo KKL para conseguir estados dS en teoría de cuerdas.

Los flujos que aparecen en este modelo son la fuente del superpotencial, que es una parte del potencial que fija el módulo de volumen. Dichos flujos deben obedecer una condición de cancelación de la amplitud de probabilidad de crear espontáneamente un par partícula-antipartícula desde el vacío, puesto que este proceso inestabiliza el vacío frente a las fluctuaciones cuánticas. Los diagramas de Feynman más sencillos que describen estas fluctuaciones poseen una línea abierta adherida a un bucle, razón por la cual se los llama “renacuajos”. La condición de cancelación de los renacuajos es muy restrictiva, y si se añade un poco más de flujo deja de satisfacerse. No obstante, puede compensarse un exceso de flujo mediante la presencia de anti-D3 branas. Pero si bien esta nueva configuración sigue cancelando los renacuajos, también es cierto que añade más densidad de energía al sistema debido al flujo extra y a las nuevas branas; esta contribución es lo que modifica el potencial, levantando su valor en el mínimo.

Dejando de lado que la construcción anterior no es fácil de generalizar para un número arbitrario de flujos, que es lo que sería necesario para que pudiera aplicarse al modelo de Bousso-Polchinski, es necesario resaltar que la estabilidad conseguida mediante la cancelación de los diagramas renacuajo es una condición cuántica válida sólo a primer orden de

teoría de perturbaciones. Nada en el modelo garantiza que la estabilidad se conserva incondicionalmente. Además, tampoco se especifica qué cantidad de flujo es necesario tener en el modelo.

Por tanto, un modelo en el que se tengan múltiples módulos estabilizados con unas condiciones de validez específicas aún no existe.

## 1.4 Objetivos de la presente Tesis

A la luz de los problemas señalados en el apartado anterior, sería deseable disponer de un modelo en el que pudieran estabilizarse todos los flujos y el problema de la constante cosmológica pudiera tener solución mediante un paisaje que tuviese estados antrópicos y un mecanismo cuántico que los seleccionase frente al resto. Desafortunadamente, este modelo sigue siendo un sueño, así que podemos concentrarnos en pulir algunos detalles más aseguibles de la construcción de Bousso-Polchinski. Éste es el hilo conductor y el objetivo de la presente Tesis: tomar algunos problemas en el paisaje de Bousso-Polchinski y considerarlos más detenidamente para proponer alternativas. En particular, en esta tesis trataremos los siguientes puntos:

- Proporcionar una forma mejor para contar estados que no sufra de los problemas de una aproximación limitada o se base en simulaciones numéricas que usan hipótesis poco fiables. En este sentido, las mejoras en el método de conteo y sus principales consecuencias, entre las que podemos destacar la distribución de valores de la constante cosmológica en el paisaje de Bousso-Polchinski y el descubrimiento del problema  $\alpha^*$ , se consideran en la sección 1.5 y los capítulos 2, 3, 4 y 5 de la presente Tesis.
- El problema  $\alpha^*$  es una consecuencia particularmente seria de la falta de un estudio de estabilidad en el modelo BP. Tanto es así, que se muestra claramente que no puede usarse el modelo de una forma viable para contar estados. Investigar si este problema se presenta en un modelo con muchos flujos estabilizados requiere, por supuesto, construir el modelo en primer lugar. Esta construcción se expone brevemente en la sección 1.6 y con más detalle en los capítulos 6 y 7 de esta Tesis.

Los puntos débiles del paisaje de Bousso-Polchinski que se tratan con el nuevo modelo de juguete, el paisaje de Einstein-Maxwell multi-esfera, son los que conciernen al conteo de estados y a los problemas derivados de la falta del estudio de estabilidad, además de introducir un corte de forma completamente natural, tener en cuenta la reacción de los flujos sobre la geometría y permitir la construcción explícita de estados antrópicos. El último problema que se ha señalado, producir un mecanismo cuántico de selección que evite el uso del principio antrópico, es un trabajo que se deja para el futuro.

## 1.5 Contando estados en el paisaje de Bousso-Polchinski

El trabajo original en esta Tesis comienza considerando el problema del conteo de estados, que es el más sencillo de los listados en la sección 1.3.2. El primer enfoque usa una formulación probabilística sobre una serie de estados especiales que podemos encontrar en el paisaje de Bousso-Polchinski, los estados secantes que se describen en la sección

1.5.1. La fórmula que se obtiene resulta ser equivalente a la fórmula (1.24) de contar mediante el cociente de volúmenes, con la ventaja adicional de permitir el cálculo de la distribución de probabilidad de los valores de la constante cosmológica. El método, basado en el modelo del hiperplano aleatorio que se describe en la sección 1.5.2, puede verse como una aproximación de orden cero en la fórmula de sumación de Poisson, y por tanto admite correcciones más allá del cociente de volúmenes (sección 1.5.3). Por último, usamos la expresión exacta del conteo de estados en la sección 1.5.4, lo que nos condujo al descubrimiento del problema  $\alpha^*$  que se describe en la sección 1.5.5.

### 1.5.1 Estados secantes, estados frontera

La cadena de transiciones de Brown-Teitelboim que se describe en la sección 1.3.1 y se ilustra en la figura 1.2 no continúa indefinidamente: El proceso de nucleación de la brana se visualiza como una materialización espontánea de una burbuja con un radio finito que conserva la energía. Este proceso sólo puede ocurrir mientras el radio de la burbuja crítica sea una cantidad real y finita; cuando el radio crítico pasa a ser imaginario el proceso no puede continuar. De acuerdo con el mecanismo de neutralización de Brown-Teitelboim, la nucleación procede hasta que se alcanza el primer estado anti-de Sitter (AdS) (o Minkowski, que a estos efectos se comportan de forma análoga a los estados AdS), momento en el cual el camino aleatorio en el retículo del espacio de flujos se detiene. Por esta razón, los estados de constante cosmológica nula o negativa se denominan **estados terminales**: en ellos, la cadena de decaimiento de Brown-Teitelboim termina.

Naturalmente, el último salto que la cadena de transiciones realiza sobre un estado terminal debe proceder de un estado (dS), por tanto con constante cosmológica positiva, y en muchas ocasiones de valor pequeño. Esos estados, los penúltimos de las cadenas de transición, se llaman **estados frontera**. Nótese que todos los estados frontera poseen al menos un vecino terminal pero la cadena de transiciones no tiene por qué saltar a él en el siguiente paso. Por esa razón, si bien todos los penúltimos estados son estados frontera, una cadena de transición puede pasar muchas veces por estados frontera, así que denominarlos “penúltimos” no es adecuado.

Nótese que un estado AdS podrá ser el estado terminal de una cadena si la última transición se realiza desde un estado frontera. Por tanto, los estados terminales deben tener algún vecino que sea un estado frontera: si todos los vecinos de un estado AdS son también AdS, entonces ese estado no puede alcanzarse mediante una transición, y es por tanto un **estado inaccesible**.

El tratamiento de los estados frontera es un poco más complicado de lo que parece a primera vista, por motivos que se detallarán más abajo; debido a esto, podemos reemplazarlos por otros estados un poco más sencillos de contar. Los estados frontera se caracterizan por estar próximos a la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$  pero sobre ella, y tener algún vecino bajo ella. Si dibujamos la *celda de Voronoi* de un nodo cualquiera  $n$  del retículo, definida como la región del espacio que contiene los puntos que están más cerca del nodo  $n$  que de cualquier otro, obtenemos un paralelotopo centrado entorno al nodo  $n$ . Dada la especial ubicación de un estado frontera, su celda de Voronoi corta a la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ . Esta condición motiva la definición de un **estado secante** como aquél cuya celdilla de Voronoi corta a la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ . Con esta definición, vemos que casi todos los estados frontera son estados secantes, pero sin embargo podemos encontrar estados secantes que **no** son frontera: basta con que tengan constante cosmológica negativa. Además, un estado

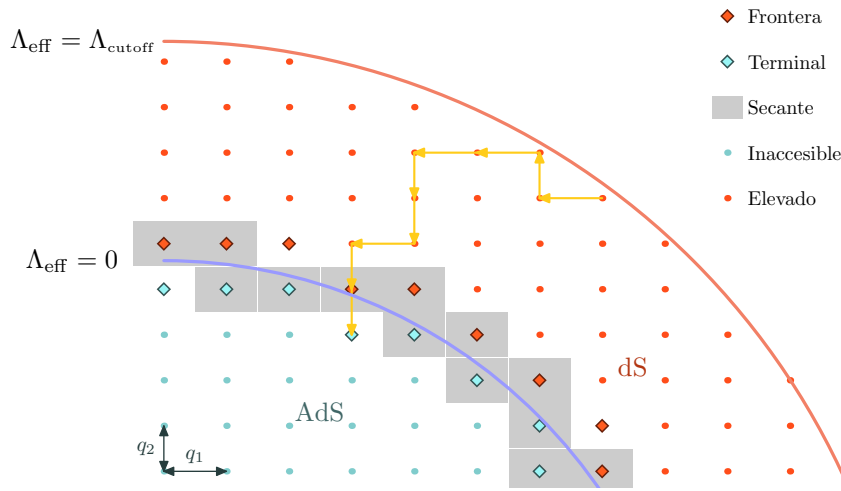


Figura 1.3: Diferentes tipos de estados en el paisaje de Bousso-Polchinski definidos en relación a la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ .

frontera puede estar suficientemente alejado de la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$  y no ser secante.

Los estados secantes también deben estar relativamente cerca de la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ , si bien no tanto como los estados frontera. Sin embargo, su manipulación es más sencilla porque pueden contarse más fácilmente, y por eso se utilizan en lo que sigue.

En la figura 1.3 se ilustran los distintos tipos de estados recién introducidos. En ella pueden verse estados secantes que no son frontera, estados frontera que no son secantes, estados terminales que no son secantes, estados inaccesibles y estados dS de elevada constante cosmológica.

Los estados secantes se consideran a continuación por ser más fáciles de contar que los estados frontera. Una vez se ha desarrollado la teoría completa de los estados secantes es posible ver cuáles serían las modificaciones a la misma en caso de considerar los estados frontera en su lugar. Podemos adelantar que todas las propiedades que se establecen en la cercanía de la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$  son completamente idénticas considerando estados frontera o estados secantes dS, porque en ese caso coinciden. Las predicciones pueden cambiar cuando se incluyen estados más alejados, porque es entonces cuando aparecen las diferencias entre ellos: existen estados secantes muy alejados de la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ , pero en cambio todos los estados frontera están cerca de la misma.

### Contaje geométrico de estados secantes

Los estados secantes circundan la superficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ , que, en virtud de (1.20), es una esfera de radio  $R_0 = \sqrt{2|\Lambda_{\text{bare}}|}$ . Contar estos estados es relativamente sencillo usando el siguiente procedimiento geométrico.

En la figura 1.3 podemos ver que el número de celdas que contienen un estado secante en un retículo con  $J = 2$  flujos puede calcularse de una forma sencilla observando que las celdas recubren por completo la curva  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ . Por lo tanto, la longitud horizontal de las celdas en el primer cuadrante coincide con el radio de la circunferencia que recubren,  $R_0$ , y su longitud vertical también. Por lo tanto, el número de celdas es simplemente la suma de las celdas que caben a lo largo de la horizontal y las que caben a lo largo de la vertical,

multiplicadas por el número de cuadrantes:

$$\mathcal{N}_S = 4 \left( \frac{R_0}{q_1} + \frac{R_0}{q_2} \right). \quad (1.25)$$

La estimación anterior será razonable siempre y cuando la suma de las longitudes de celdillas que exceden del radio de la circunferencia sea pequeña comparada con éste. Y el exceso de longitud no puede ser mayor que la suma de las mitades de los lados de la celdilla, lo cual lleva a la condición

$$\frac{q_1 + q_2}{2} \ll R. \quad (1.26)$$

Nótese que la comparación de longitudes en el retículo de  $J = 2$  dimensiones es comparación de volúmenes ( $J - 1$ )-dimensionales. La fórmula (1.25) puede generalizarse a cualquier número de dimensiones. Para entender el resultado, podemos ver el caso  $J = 3$  con detalle: En este caso, las celdillas son pequeños paralelepípedos centrados en los nodos del retículo cuyos lados son las cargas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ . Puesto que las celdas son pequeños “ladrillos” que recubren la esfera, podemos imaginar que las caras inferiores de dichos ladrillos recubren el círculo ecuatorial de radio  $R_0$ . Para ello, son necesarios un número de ladrillos igual al cociente entre el área del círculo y el área de la base de cada celda; y este mismo recubrimiento sucede en los otros dos planos coordenados. Tenemos por lo tanto un número de estados secantes en  $J = 3$  igual a

$$\mathcal{N}_S = 2 \left( \frac{\pi R_0^2}{q_1 q_2} + \frac{\pi R_0^2}{q_1 q_3} + \frac{\pi R_0^2}{q_2 q_3} \right). \quad (1.27)$$

El factor 2 cuenta los estados a cada lado de cada plano coordenado. La relación (1.27) será válida siempre y cuando el volumen de cada cara de la celdilla sea menor que el volumen de un cuadrante del círculo que las caras recubren, es decir,

$$\frac{1}{3} (q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3) \ll \frac{1}{4} \pi R_0^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{J \bar{q}^2}{R_0^2} \ll \frac{3\pi}{4} \approx 2.35, \quad (1.28)$$

donde el valor medio de las cargas se ha definido como  $\bar{q}^2 = \frac{1}{3} (q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3)$ .

Podemos probar el funcionamiento de la aproximación (1.27) frente a una búsqueda intensiva de estados secantes en un retículo con  $J = 3$  dimensiones según el valor del parámetro  $h$  definido en la ecuación (1.28). Los resultados se muestran en la tabla siguiente:

$h$	$\mathcal{N}_S$ (búsqueda)	$\mathcal{N}_S$ (fórmula)	Estados buscados	Secantes/Total	Error
0.001	71878	72220	1729920	4.15 %	0.5 %
0.08	676	722.2	1881	36 %	6 %
0.55	86	115.5	105	82 %	34 %

Nótese que cuando el valor de  $h$  queda a menos de un orden de magnitud del límite (1.28), la fórmula puede contar más estados secantes de los de los que el modelo tiene *en total* en el correspondiente paralelepípedo que engloba a la esfera. Pero mientras el valor de  $h$  permanezca pequeño, el valor devuelto por la fórmula (1.27) es muy preciso.

La fórmula (1.27), establecida para  $J = 3$ , puede generalizarse a cualquier valor de  $J$  usando la densidad direccional de estados secantes. Los detalles se dejan para el capítulo 2;

para nuestro propósito en esta introducción, basta establecer que la fórmula aproximada para contar estados secantes es

$$\mathcal{N}_S = \frac{2R_0^{J-1} \text{vol } S^{J-2}}{(J-1) \text{vol } Q} \sum_{i=1}^J q_i, \quad (1.29)$$

siendo  $\text{vol } Q = \prod_{i=1}^J q_i$  el volumen de una celdilla. La condición de validez de la fórmula anterior es análoga a (1.28), con el correspondiente parámetro  $h$  pequeño.

### 1.5.2 Modelo del hiperplano aleatorio

La utilidad de los estados secantes en el paisaje de Bousso-Polchinski consiste en la estimación de la probabilidad de que un estado elegido al azar posea una constante cosmológica dentro de la *ventana de Weinberg*, definida como aquel intervalo de valores de la constante cosmológica que posibilita la formación de estructuras en el Universo. Dicha probabilidad es proporcional al número de estados contenidos dentro de la ventana de Weinberg, que puede escribirse como

$$\mathcal{N}_{\text{WW}} = \frac{1}{2} \mathcal{N}_S P(0 < \Lambda < \Lambda_{\text{WW}}), \quad (1.30)$$

donde  $\mathcal{N}_S$  es el número de estados secantes y la probabilidad indicada se calcula usando una distribución de valores de la constante cosmológica, siendo  $\Lambda_{\text{WW}}$  el borde superior de la ventana de Weinberg. La fórmula (1.30) se refiere sólo a estados de constante cosmológica positiva, y por esa razón ponemos el factor  $\frac{1}{2}$  al número de estados secantes.

El número de estados secantes podemos obtenerlo mediante el contaje geométrico descrito en la sección precedente. Para obtener la distribución de  $\Lambda$  que nos permita completar la fórmula (1.30) vamos a usar un modelo de probabilidad que se introduce a continuación.

Supongamos que recortáramos una celda de un estado secante. Dicha celda contendría un trozo de la esfera  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ , que es una circunferencia en el caso  $J = 2$ . Si recortamos todas las celdas correspondientes a todos los estados secantes del primer cuadrante en un modelo con sólo 21 estados secantes, y después superpusiéramos todas las celdas recortadas, obtendríamos algo parecido a la figura 1.4.

Del resultado de la figura 1.4 podemos extraer algunas observaciones:

- Puesto que las celdas son pequeñas comparadas con el radio de la circunferencia, los tramos de circunferencia son casi rectilíneos con muy buena aproximación.
- La distribución de los cortes así definidos parece aleatoria.

En el caso de  $J$  arbitrario, cada trozo de la esfera contenido en la celda de Voronoi de un estado secante puede reemplazarse por el hiperplano tangente a la esfera que pasa por el punto de corte entre la esfera y la recta que une el origen de coordenadas con el nodo del estado secante. Estos hiperplanos parecen estar distribuidos aleatoriamente dentro de la celda. Así, la distribución de los estados secantes puede estudiarse mediante la distribución de los hiperplanos asociados.

Esta observación motiva la introducción de un modelo de probabilidad dentro del conjunto de todos los posibles hiperplanos. Para definir dicho modelo, en primer lugar deben parametrizarse todos los posibles hiperplanos. Un hiperplano queda caracterizado

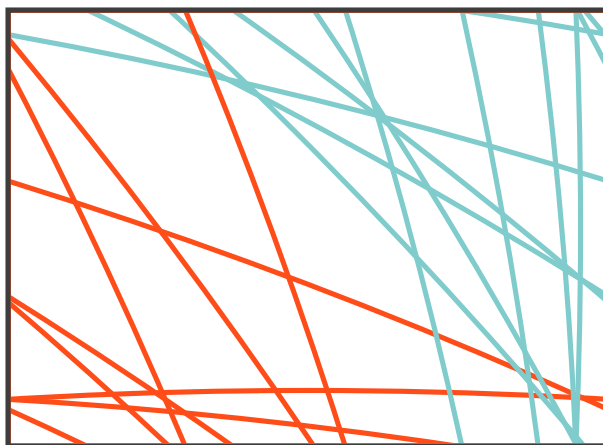


Figura 1.4: Trozos de la curva  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$  obtenidos tras recortar y después superponer las celdas de los estados secantes en un modelo con  $J = 2$ . Las líneas rojas corresponden con estados dS y las azules con estados AdS.

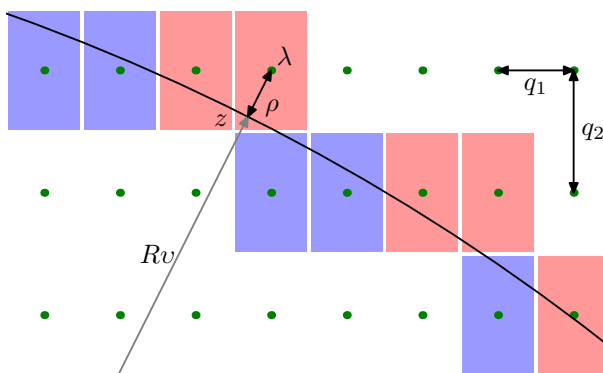


Figura 1.5: Representación gráfica de los parámetros  $v$  y  $\rho$  que definen un estado secante en un retículo con  $J = 2$ .

por un punto y un vector normal. Como punto característico puede tomarse la intersección entre la recta que une el origen de coordenadas y el estado secante en cuestión,  $z$ ; ese mismo vector, cuya longitud es el radio de la esfera, puede servir, una vez normalizado, como vector normal  $v$  del hiperplano. En la situación representada en la figura 1.4, en la que el origen de coordenadas se toma en el centro común de todas las celdas superpuestas, el parámetro que identifica al hiperplano además de su vector normal es la distancia entre el punto de corte  $z$  y el propio estado secante  $\lambda$ : llamaremos  $\rho$  a dicha distancia. Así, si  $\lambda$  es el punto representativo de un estado secante, tenemos que su correspondiente hiperplano  $h_\lambda$  está dado por el par  $(v, \rho)$  siguiente:

$$h_\lambda = (v, \rho), \quad v = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \quad \rho = \|\lambda\| - R_0. \quad (1.31)$$

La ecuación (1.31) presenta la parametrización de los hiperplanos, representada gráficamente en la figura 1.5 para el caso  $J = 2$ . Dicha figura está tomada del capítulo 3, y se reproduce aquí para conveniencia del lector.

Hay que especificar ahora qué posibles valores puede tomar cada uno de los dos parámetros: Está claro que  $v$  puede ser cualquier vector unitario, en principio, y por tanto en general es un punto de  $S^{J-1}$ . El valor de  $\rho$  está limitado por la condición de que  $\lambda$  sea



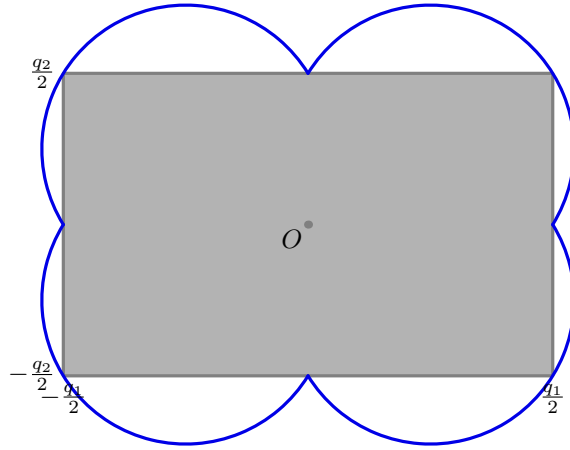


Figura 1.6: Espacio de hiperplanos secantes asociado a una celdilla en  $J = 2$ . La celdilla “física” se representa en gris, y la frontera del espacio de hiperplanos secantes  $\sigma(v)$  es la línea azul.

un estado secante; para cada dirección  $v$ ,  $\rho$  tiene un valor máximo  $\rho_{\max} = \sigma(v)$ , dado por la distancia al centro de la celda del hiperplano secante más lejano posible. Éste pasará necesariamente por una de las esquinas de la celdilla; si dicha esquina es  $e_v$ , la ecuación del hiperplano será  $v \cdot (x - e_v) = 0$ , y por tanto la distancia al origen de dicho hiperplano será simplemente  $v \cdot e_v$ . Ahora, las coordenadas de una esquina vista desde el centro de la celdilla son  $\frac{1}{2}(s_1 q_1, \dots, s_J q_J)$ , donde los  $s_i$  son los signos de las componentes de la dirección  $v$ , es decir,  $v = (s_1 |v_1|, \dots, s_J |v_J|)$ . Con todo esto, se obtiene para el valor máximo de  $\rho$  la fórmula

$$\sigma(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^J q_i |v_i|. \quad (1.32)$$

La ecuación anterior representa la frontera del conjunto de todos los hiperplanos: un punto del dominio  $\rho \in [-\sigma(v), \sigma(v)]$  define un sólo hiperplano secante, que corresponde a un estado dS si el plano está bajo el origen ( $\rho > 0$ ) y AdS si el plano está sobre el origen ( $\rho < 0$ ). La región que cumple esta condición se denomina **espacio de hiperplanos secantes**  $H$  asociado a la celdilla. Nótese que el espacio de hiperplanos secantes es compacto y su simetría es la misma que la de la celdilla, pero sin embargo es mayor que ella, lo que significa geoméricamente que el punto de intersección  $z$  puede estar situado *fuera* de la celdilla. Se representa el espacio de hiperplanos junto con la celdilla correspondiente en la figura 1.6.

Una vez que conocemos cuál es el espacio de hiperplanos secantes  $H$ , podemos incorporar la aleatoriedad de la distribución de los hiperplanos mediante la elección de un modelo de probabilidad en dicho espacio. El modelo más sencillo es el equiprobable, en el cual la densidad de probabilidad es simplemente

$$dP(v, \rho) = K^{-1} \chi_{[-\sigma(v), \sigma(v)]}(\rho) d\rho d\Omega_{J-1}(v), \quad (1.33)$$

donde  $\chi_I(\rho)$  es la función característica del intervalo  $I$  (que vale 1 si  $\rho \in I$  y cero en caso contrario),  $d\Omega_{J-1}(v)$  es el diferencial de ángulo sólido en la esfera  $S^{J-1}$  y  $K$  es una constante de normalización:

$$K = \int_{S^{J-1}} d\Omega_{J-1}(v) \int_{-\sigma(v)}^{\sigma(v)} d\rho = 2 \int_{S^{J-1}} \sigma(v) d\Omega_{J-1}(v). \quad (1.34)$$

Hay varias razones para elegir el modelo de probabilidad uniforme. En primer lugar, la distribución uniforme maximiza la entropía de Shannon de una distribución de probabilidad en un espacio compacto, lo cual significa que no favorece a ninguno de los estados sobre los demás, es decir, la aleatoriedad en la elección de los estados es completa. Por supuesto, en nuestro caso esto es una aproximación que se ve confirmada por los experimentos numéricos, como se discute con detalle en el capítulo 2. En segundo lugar, la ecuación (1.34) permite ver a  $\sigma(v)$  como una densidad direccional de estados, y de hecho así es, puesto que el número total de estados secantes puede escribirse como una integral a una densidad  $\nu(v)$

$$\mathcal{N}_S = \int_{S^{J-1}} \nu(v) d\Omega_{J-1}(v), \quad (1.35)$$

y la densidad direccional y la frontera del espacio de hiperplanos secantes resultan ser proporcionales:

$$\nu(v) = \frac{2 R_0^{J-1}}{\text{vol } Q} \sigma(v). \quad (1.36)$$

De las ecuaciones (1.34), (1.35) y (1.36) obtenemos  $K = \frac{\mathcal{N}_S \text{vol } Q}{2 R_0^{J-1}}$ . Podemos concluir que en la aproximación utilizada para contar estados secantes, el modelo de probabilidad uniforme reproduce la densidad direccional de estados correcta.

Por último, la distribución  $\omega(\rho)$  de la variable  $\rho$  que se extrae de este modelo coincide con las búsquedas numéricas y permite calcular de manera sencilla la probabilidad que buscamos en la fórmula (1.30). Integrando la medida uniforme (1.33) en la esfera, obtenemos la densidad de probabilidad para los valores de  $\rho$ :

$$\omega(\rho) = \int_{S^{J-1}} dP(v, \rho) = \frac{2 R_0^{J-1}}{\mathcal{N}_S \text{vol } Q} \int_{S^{J-1}} \theta(\sigma(v) - |\rho|) d\Omega_{J-1}(v), \quad (1.37)$$

donde el símbolo  $\theta$  representa la función escalón de Heaviside. Puesto que  $\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda_{\text{bare}} + \frac{1}{2} \|\lambda\|^2$  para un nodo  $\lambda$  del retículo, el parámetro  $\rho$  resulta ser una función sencilla de  $\Lambda_{\text{eff}}$ :

$$\rho = \sqrt{2(\Lambda_{\text{eff}} - \Lambda_{\text{bare}})} - \sqrt{2|\Lambda_{\text{bare}}|}, \quad (1.38)$$

y por tanto la distribución de  $\rho$  produce directamente la distribución de valores de la constante cosmológica efectiva, que es lo que necesitamos para calcular la probabilidad que aparece en (1.30). Afortunadamente, no es necesario efectuar la integral esférica para  $\omega(\rho)$  en (1.37) explícitamente: sus propiedades pueden establecerse sin necesidad de obtener una fórmula cerrada, y la integral puede evaluarse muy cómodamente mediante el método de Monte Carlo para contrastar la fórmula teórica (1.37) con los resultados numéricos. Por ejemplo, la distribución (1.37) es exactamente constante para valores de  $\rho$  cercanos a cero, lo cual conduce a la expresión, válida cuando  $\Lambda_{\text{WW}}$  es pequeño,

$$P(0 \leq \Lambda \leq \Lambda_{\text{WW}}) = \frac{2 R_0^{J-1}}{\mathcal{N}_S \text{vol } Q} \frac{\Lambda_{\text{WW}}}{R_0}. \quad (1.39)$$

Cuando se introduce el cálculo anterior en la fórmula (1.30), obtenemos

$$\mathcal{N}_{\text{WW}} = \frac{R_0^{J-2} \text{vol } S^{J-1}}{\text{vol } Q} \Lambda_{\text{WW}}, \quad (1.40)$$

que es exactamente el mismo resultado obtenido mediante el cociente de volúmenes en la ecuación (1.24).

Vemos así que el método del hiperplano aleatorio conduce a los mismos resultados que el conteo mediante cociente de volúmenes. Esencialmente, esto se debe a que las fórmulas geométricas que llevan al número de estados secantes (1.29) también hacen uso del cociente de volúmenes para contar. Sin embargo, el modelo del hiperplano aleatorio permite obtener fácilmente la distribución de la variable  $\rho$ ,  $\omega(\rho)$  en el paisaje de Bousso-Polchinski. La forma de la distribución ha sido corroborada con diversos experimentos numéricos, y establece claramente que los valores muy pequeños de la constante cosmológica no están especialmente favorecidos en el paisaje de Bousso-Polchinski: la densidad de estados para  $\Lambda_{\text{eff}}$  es estrictamente constante.

### 1.5.3 Mejoras al modelo del hiperplano aleatorio

En el capítulo 3 se describe detalladamente una forma alternativa de ver el modelo del hiperplano aleatorio que permite añadirle correcciones a un orden arbitrario. En esta sección describimos brevemente este enfoque.

Comenzamos por escribir la expresión exacta del número de estados secantes con constante cosmológica positiva:

$$\mathcal{N}_S = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \chi_{[0, \sigma(\lambda)]}[\rho(\lambda)]. \quad (1.41)$$

En la fórmula anterior,  $\lambda = (n_1 q_1, \dots, n_J q_J)$ ,  $(n_1, \dots, n_J) \in \mathbb{Z}^J$ , representa un nodo del retículo generado por las cargas  $\{q_1, \dots, q_J\}$ . Se utiliza la letra  $\mathcal{L}$  para representar dicho retículo:

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^J q_i \mathbb{Z}. \quad (1.42)$$

También aparece en la fórmula (1.41) la función característica del intervalo  $I = [0, \sigma(\lambda)]$ ,  $\chi_I(\rho)$ , cuyo valor es 1 si  $\rho \in I$  y 0 en caso contrario. La finalidad de dicha función es añadir 1 cuando un nodo  $\lambda$  cumple la condición  $0 \leq \rho(\lambda) \leq \sigma(\lambda)$ , siendo  $\rho(\lambda)$  el parámetro definido en la fórmula (1.31) que caracteriza, junto con la dirección  $v = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}$ , al hiperplano asociado al nodo  $\lambda$ . El símbolo  $\sigma(\lambda)$  representa la frontera del espacio de hiperplanos secantes dada en la fórmula (1.32),

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^J q_i \frac{|\lambda_i|}{\|\lambda\|}. \quad (1.43)$$

y por lo tanto, la condición  $0 \leq \rho(\lambda) \leq \sigma(\lambda)$  simplemente expresa que el nodo  $\lambda$  es secante y con constante cosmológica positiva.

Vemos así que la expresión (1.41) es una manera exacta de representar el número de estados secantes, pero es poco práctica porque, para usarla, necesitaríamos verificar uno por uno cuáles de todos los posibles nodos cumplen la condición y cuáles no. Por tanto, debemos transformar la fórmula (1.41) en otra que produzca valores sin necesidad de considerar uno por uno todos los nodos del retículo  $\mathcal{L}$ . Para ello, observamos que la ecuación (1.41) es de la forma

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}} f(\lambda), \quad (1.44)$$

con la función  $f(x) = \chi_{[0,\sigma(x)]}(\rho(x))$  extendida a cualquier valor de  $x \in \mathbb{R}^J$ . Expresiones como (1.44) aparecen en la fórmula de sumación de Poisson:

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}} f(\lambda) = \frac{1}{\text{vol } Q} \sum_{\kappa \in \mathcal{L}^*} \widehat{f}(\kappa), \quad (1.45)$$

donde  $Q$  es la celdilla fundamental del retículo  $\mathcal{L}$  y su volumen es  $\prod_{i=1}^J q_i$ ; la expresión  $\widehat{f}$  representa la transformada de Fourier de  $f$ ,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^J} f(x) e^{-i\xi \cdot x} d^J x, \quad (1.46)$$

y  $\kappa$  es un nodo de la red recíproca  $\mathcal{L}^*$ , definida por aquellos puntos que cumplen  $e^{i\kappa \cdot \lambda} = 1$  para cualquier nodo  $\lambda \in \mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}^* = \left\{ \left( m_1 \frac{2\pi}{q_1}, \dots, m_J \frac{2\pi}{q_J} \right) \in \mathbb{R}^J : m_1, \dots, m_J \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (1.47)$$

Podemos ver la fórmula de sumación de Poisson como una forma de aproximar su miembro izquierdo añadiendo sucesivas aproximaciones a su miembro derecho. Por ejemplo, la aproximación más simple que podemos hacer es tomar sólo el primer nodo de la red recíproca (orden cero):

$$\mathcal{N}_S \approx \frac{\widehat{f}(0)}{\text{vol } Q} = \frac{1}{\text{vol } Q} \int_{\mathbb{R}^J} \chi_{[0,\sigma(x)]}(\rho(x)) d^J x. \quad (1.48)$$

La interpretación de la ecuación anterior es aparente si la expresamos en coordenadas esféricas mediante el cambio  $x = (R_0 + r)v$  con  $v \in S^{J-1}$ :

$$\mathcal{N}_S \approx \frac{1}{\text{vol } Q} \int_{S^{J-1}} d\Omega_{J-1}(v) \int_0^{\sigma(v)} (R_0 + \rho)^{J-1} d\rho. \quad (1.49)$$

La expresión (1.49) representa el número de estados secantes como el volumen de una capa de espesor  $\sigma(v)$  en la dirección  $v$  por encima de la esfera de radio  $R_0$  dividido entre el volumen de una sola celdilla. Por tanto, los resultados basados en esta fórmula son por completo equivalentes al contaje mediante cociente de volúmenes.

También se desprende de (1.49) que, bajo la condición de que  $\rho$  sea pequeño comparado con  $R_0$ , podemos escribir

$$\mathcal{N}_S \approx \frac{R_0^{J-1}}{\text{vol } Q} \int_{S^{J-1}} \sigma(v) d\Omega_{J-1}(v), \quad (1.50)$$

que es exactamente equivalente a las fórmulas (1.35, (1.36)) que expresan el número de estados secantes en términos de una densidad direccional de estados, excepto el factor 2, ausente porque aquí consideramos sólo los estados secantes con constante cosmológica positiva. Vemos así que la aproximación de orden cero en la fórmula de Poisson, junto con la hipótesis  $\rho \ll R_0$ , es equivalente al modelo del hiperplano aleatorio descrito en la sección 1.5.2. La diferencia es que podemos añadir a estas expresiones un número arbitrario de correcciones simplemente añadiendo más términos en la fórmula de sumación de Poisson.

Podemos elaborar un poco más la condición de validez de la aproximación que reproduce el modelo del hiperplano aleatorio,  $\rho < R_0$ , como

$$\rho \leq \sigma_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^J q_i^2} \ll R_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{J\bar{q}^2}{R_0^2} \ll 4, \quad (1.51)$$

donde el valor medio cuadrático de las cargas se define como  $\bar{q}^2 = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J q_i^2$ . Esta condición es similar a la obtenida en (1.28): Simplemente cambia el método de cálculo del valor medio cuadrático de las cargas, pero el orden de magnitud del parámetro adimensional

$$h = \frac{J\bar{q}^2}{R_0^2} \quad (1.52)$$

es análogo: Cuando este parámetro es pequeño, los resultados del conteo mediante el cociente de volúmenes, los obtenidos del modelo del hiperplano aleatorio y los derivados de la aproximación de orden cero en la fórmula de sumación de Poisson son todos ellos válidos y equivalentes.

Como ya se ha mencionado, la ventaja de enfocar el problema de esta forma radica en poder añadir correcciones a las fórmulas básicas. No obstante, pueden usarse métodos más eficientes para contar usando la fórmula exacta (1.41) en una representación diferente que se considera en la siguiente sección. Además, el método de la fórmula de sumación permite verificar la equivalencia de las diferentes aproximaciones, justificar la validez del modelo del hiperplano aleatorio, explicando así por qué funciona, y por qué el método de conteo de volúmenes funciona bien dentro de la condición (1.51).

Por último, el enfoque considerado en esta sección puede generalizarse a los estados frontera en lugar de a los estados secantes. La diferencia entre ambos puede ponerse de manifiesto reescribiendo la condición que caracteriza a un estado frontera en la misma forma que para un estado secante,  $\rho \leq \sigma(v)$ , pero con una función  $\sigma(v)$  diferente, la *frontera del espacio de hiperplanos-frontera*. Dicha función  $\sigma$  puede encontrarse usando que un estado frontera posee un hiperplano que es secante a una celda diferente a la celda de Voronoi  $Q$  usada hasta ahora. La nueva celda es un rombo para  $J = 2$  y un octaedro para  $J = 3$ ; su expresión general se obtiene detalladamente en el capítulo 3. Merece la pena mencionar que todo el formalismo desarrollado para los estados secantes puede entonces aplicarse a los estados frontera, pero la expresión que se obtiene para el número de estados en la ventana de Weinberg, ecuación (1.40), es idéntica debido a que todos esos estados son a la vez secantes y frontera. La distribución de valores de  $\Lambda_{\text{eff}}$  será en general distinta de la obtenida en (1.37), pero ambas coinciden cerca de  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ , de modo que los cálculos no se ven afectados por el uso de estados secantes en lugar de estados frontera: esta equivalencia es otra más de las ventajas de este enfoque.

Para concluir, podemos señalar que, puesto que este enfoque no está basado en un modelo probabilístico, no necesita ningún tipo de validación estadística mediante simulaciones numéricas además de la condición de validez dada en (1.50), lo cual supone una considerable ventaja conceptual y computacional.

#### 1.5.4 Conteo exacto

Si bien el método de contar mediante la fórmula de sumación de Poisson mejora notablemente el introducido con el modelo del hiperplano aleatorio, la manera de añadir mejoras

contando la contribución de nuevos nodos de la red recíproca no es adecuada para obtener fórmulas cerradas, y por esa razón se considera en esta sección, y con más detalle en el capítulo 4, otra forma de tratar la fórmula exacta que permite resolver otra clase de problemas de manera más eficiente. En concreto, poder prescindir de la limitación (1.50) que valida el conteo mediante el cociente de volúmenes resulta complicado mediante la fórmula de sumación de Poisson.

¿Y por qué es deseable poder prescindir de la limitación antedicha? La cuestión es que las compactificaciones típicas de la teoría de cuerdas en variedades de Calabi-Yau pueden poseer centenares de tres-ciclos, y para valores tan elevados de  $J$  encontramos fenómenos contrarios a la intuición que invalidan el conteo mediante el cociente de volúmenes. Hay dos ejemplos bastante claros de esto que pasamos a exponer.

### *Bolas y celdillas en dimensión elevada*

El volumen interior de una bola de radio  $R_0$  en el espacio de  $J$  dimensiones es

$$\text{vol } \mathcal{B}_J(R_0) = \int_{r < R_0} r^{J-1} dr \int_{S^{J-1}} d\Omega_{J-1}(v) = \frac{R_0^J}{J} \text{vol } S^{J-1} = \frac{\pi^{\frac{J}{2}} R_0^J}{\Gamma(1 + \frac{J}{2})}. \quad (1.53)$$

Nótese que la dependencia del volumen anterior con el número de dimensiones,  $J$ , es no-trivial: Para un radio  $R_0$  fijo, el volumen de la bola aumenta con  $J$  hasta alcanzar un máximo en  $J \approx 2\pi R_0^2$ , después del cual decrece a un ritmo superexponencial (es decir, su logaritmo disminuye más rápidamente que una recta).

Por otra parte, el volumen de una celdilla con lados  $\{q_i\}_{i=1, \dots, J}$  es

$$\text{vol } Q = \prod_{i=1}^J q_i = \bar{q}^J, \quad (1.54)$$

donde  $\bar{q}$  es la media geométrica de las cargas que definen la celdilla. Manteniendo fija la media  $\bar{q}$ , si la celdilla es grande,  $\bar{q} > 1$ , su volumen aumenta exponencialmente al aumentar  $J$ . Para  $\bar{q} < 1$ , este volumen disminuye exponencialmente, pero no tan deprisa como lo hace el volumen de la bola, de manera que existe un valor de  $J$  para el cual el volumen de la bola cae por debajo del volumen de la celdilla:

$$\text{vol } \mathcal{B}_J(R_0) < \text{vol } Q \quad \Rightarrow \quad h = \frac{J\bar{q}^2}{R_0^2} > 2\pi e \gtrsim 17. \quad (1.55)$$

El valor anterior asume que  $J$  es grande para poder usar la aproximación de Stirling de la función gamma en la fórmula (1.53) y poder eliminar términos subdominantes en  $J$ .

Vemos así que, no importa lo pequeñas que sean las dimensiones lineales medias de la celdilla,  $\bar{q}$ , ni lo grande que sea el radio de la esfera  $R_0$  en comparación: Cuando el parámetro  $h = \frac{J\bar{q}^2}{R_0^2}$  rebasa el valor 17, hay un valor de la dimensión  $J$  para el cual el volumen de la celdilla excede el volumen de la bola.

Otro ejemplo de este comportamiento curioso para dimensión  $J$  elevada es la longitud de la diagonal mayor de la celdilla. La distancia al origen de la esquina de la celdilla localizada en el primer cuadrante es

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^J q_i^2} = \frac{1}{2} \sqrt{J \bar{q}^2}, \quad (1.56)$$

donde la media se ha definido ahora como  $\bar{q}^2 = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J q_i^2$ . Esta distancia diagonal  $d$  alcanza y sobrepasa el radio de la esfera  $R_0$  cuando

$$h = \frac{J\bar{q}^2}{R_0^2} > 4, \quad (1.57)$$

condición que se cumple antes que (1.55) en general. Nótese que el valor medio de las cargas se define de manera diferente en cada fórmula; no obstante, si la dispersión de las cargas no es demasiado extrema, los valores medios calculados de forma diferente no difieren mucho entre sí. En estas circunstancias, cuando el parámetro  $h$  alcanza el valor 4, no importa lo pequeñas que sean las dimensiones lineales de la celdilla en comparación con  $R_0$ , todas sus esquinas tocan la superficie de la esfera, y cuando  $h$  alcanza el valor 17, el volumen de la celdilla alcanza el volumen de la bola. Nótese que cerca de los ejes, las caras de la celdilla están bien en el interior de la esfera: tal estructura es difícil de imaginar debido al elevado número de dimensiones que son necesarias para que ocurran estos fenómenos.

Por supuesto, cuando los volúmenes obedecen relaciones tan extremas es imposible utilizarlos para contar. El hecho de que la esquina de una pequeña celdilla pueda sobrepasar el radio de la esfera hace pensar que la densidad de estados va a ser muy pequeña en la dirección de la diagonal principal de la celdilla, y por tanto esa región de la esfera no va a tener estados cerca. Esta situación invalida todas las conclusiones basadas en el conteo por cociente de volúmenes, y es necesario buscar otras formas de contar válidas en esas condiciones.

#### *Contaje analítico de nodos dentro de una esfera*

De forma análoga a como se hizo en la sección 1.5.3, para obtener fórmulas sobre el número de estados en la ventana de Weinberg válidas para un rango amplio del parámetro  $h$  partimos de una representación exacta del número de nodos del retículo  $\mathcal{L}$  que hay en el interior de la esfera de radio  $r$ :

$$\Omega_J(r) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \theta(r^2 - \|\lambda\|^2), \quad (1.58)$$

donde  $\lambda$  representa un nodo del retículo (1.42) y la función escalón  $\theta$  simplemente añade un 1 cuando el nodo posee una longitud menor o igual que el radio  $r$  de la esfera. Derivando la distribución (1.58) obtenemos la densidad de estados asociada:

$$\omega_J(r) = 2r \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \delta(r^2 - \|\lambda\|^2). \quad (1.59)$$

Podemos escribir la delta de Dirac como una integral de contorno compleja:

$$\delta(r^2 - \|\lambda\|^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{s(r^2 - \|\lambda\|^2)} ds, \quad (1.60)$$

donde el camino de integración  $\gamma$  es una línea vertical que discurre desde  $c - i\infty$  hasta  $c + i\infty$  cruzando el eje real por su mitad positiva,  $c > 0$ . Introduciendo esta representación integral en (1.59) obtenemos, tras algunas manipulaciones,

$$\omega_J(r) = \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2} \left[ \prod_{j=1}^J \vartheta(sq_j^2) \right] ds, \quad (1.61)$$

es decir, la densidad de estados  $\omega_J(r)$  es la transformada inversa de Laplace de un producto de funciones- $\vartheta$  con un factor por cada flujo. La función- $\vartheta$  que aparece aquí se define como

$$\vartheta(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-sn^2}, \quad (1.62)$$

que es un caso particular de las funciones- $\vartheta$  de Jacobi. Estas funciones satisfacen ecuaciones funcionales que permiten extraer los comportamientos asintóticos

$$\vartheta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad \text{and} \quad \vartheta(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1 + 2e^{-s}. \quad (1.63)$$

Como es bien sabido, la transformada de Laplace es una buena herramienta para obtener comportamientos asintóticos. El comportamiento asintótico en  $s \rightarrow \infty$  determina el comportamiento de  $\omega_J(r)$  cuando  $r \rightarrow 0$ , es decir, el régimen de distancias pequeñas, mientras que el caso  $s \rightarrow 0$  controla el régimen de distancias grandes,  $r \rightarrow \infty$ . En éste último, tras sustituir el comportamiento para  $s \rightarrow 0$  dado en (1.63) en la expresión exacta (1.61), obtenemos una transformada inversa de Laplace que puede expresarse en forma exacta:

$$\omega_J(r) \approx \frac{2\pi^{\frac{J}{2}}}{\Gamma(\frac{J}{2})} \frac{r^{J-1}}{\text{vol } Q}. \quad (1.64)$$

La expresión anterior es exactamente la derivada respecto de la distancia  $r$  del cociente de volúmenes entre la bola de radio  $r$ , ecuación (1.53), y el volumen de la celdilla, ecuación (1.54), es decir, es precisamente el caso en el que podemos contar estados mediante el cociente de volúmenes, con lo cual recuperamos el resultado obtenido en las secciones anteriores.

Naturalmente, la condición de validez  $r \rightarrow \infty$ , distancia grande, es demasiado vaga; podemos dar una condición mucho más precisa imponiendo que la integral exacta (1.61) tenga su integrando fuertemente localizado en la región  $s \rightarrow 0$ . Una forma de hacer esto es imponer la aplicabilidad del método del punto de silla a la integral: El método es aplicable cuando el integrando está fuertemente localizado alrededor del punto de silla dominante. Ésta condición resulta ser

$$h = \frac{J\bar{q}^2}{r^2} < \frac{2}{e} \approx 0.736, \quad (1.65)$$

(con  $\bar{q} = \sqrt[3]{\text{vol } Q}$ ) que es análoga, en orden de magnitud, a las obtenidas anteriormente en (1.28) y (1.51) sobre la validez del modelo del hiperplano aleatorio, que es equivalente a la validez del conteo mediante cociente de volúmenes, y contraria a los límites en los que aparecen fenómenos poco intuitivos dados en (1.55), (1.57). No obstante, merece la pena resaltar la diferencia entre la fórmula (1.65) y las anteriores, (1.28) y (1.51): El símbolo “ $\ll$ ” que se usa en éstas últimas hace pensar que la condición estricta de validez se encuentra muy por debajo, pero no precisa cuánto: Por el contrario, en la ecuación (1.65), la desigualdad es ordinaria, lo que significa que cuando el parámetro  $h$  sea estrictamente menor que  $\frac{2}{e}$ , el conteo mediante cociente de volúmenes va a ser muy preciso, pero podemos esperar resultados contradictorios por encima de ese valor. Más adelante veremos un caso particularmente ilustrativo de este tipo de desviaciones para valores especiales del parámetro  $h$ : la representación de la densidad de estados mediante una integral compleja es especialmente efectiva para obtener resultados como (1.65).



Después de recuperar, de una forma elegante, la fórmula de contaje mediante cociente de volúmenes junto con una condición de validez muy precisa para el régimen de distancias grandes de la fórmula exacta, tenemos, en el otro extremo, el régimen de distancias pequeñas. La sustitución de la asíntota correspondiente a  $s \rightarrow \infty$  (1.63) en la expresión exacta (1.61) no produce esta vez una expresión cerrada: Sólo podemos obtener expresiones aproximadas mediante el método del punto de silla, como por ejemplo

$$\omega_J(r) = \frac{(2h-2)^{\frac{J}{h}}}{q\sqrt{2\pi h}} \left(\frac{h}{h-1}\right)^{J+\frac{1}{2}}. \quad (1.66)$$

La validez de la fórmula anterior exige

$$h > 1 + \frac{e^2}{2} \approx 4.694, \quad (1.67)$$

que es opuesta a la obtenida anteriormente en (1.65). Debe señalarse que el parámetro  $h$  tiene también un límite superior, porque si la distancia se hace demasiado pequeña sólo contribuirán a  $\omega_J(r)$  los vecinos del origen en el retículo, de modo que la expresión (1.66) tampoco es válida para distancias muy pequeñas. Pero esta limitación no es importante, dado que en ese régimen el número de estados es tan pequeño que no influye en el contaje total.

Nótese que entre ambas condiciones, (1.65) y (1.67), se encuentra un rango de valores de  $h$  para el cual ninguna de las aproximaciones es correcta. Este “régimen de cruce” debe tratarse con evaluaciones alternativas de la fórmula exacta para  $\omega_J(r)$ . Dichas evaluaciones pueden ser muy complicadas si los valores de las cargas son muy dispares; de hecho, no está claro con qué clase de promedio se calcularía el parámetro  $h$ , y podría haber diferentes valores de  $h$  en los que los regímenes superpuestos fuesen diferentes. Toda esta complejidad se pone de manifiesto mediante la representación compleja de la densidad de estados, la cual constituye también un medio para calcularla numéricamente en los casos mencionados. Se dejan los detalles para el capítulo 4.

### Aplicaciones

Con la fórmula exacta pueden calcularse cantidades como el número de estados en la ventana de Weinberg de una realización concreta del modelo de Bousso-Polchinski:

$$\mathcal{N}_{\text{WW}} = \frac{\omega_J(R_0)}{R_0} \Lambda_{\text{WW}}. \quad (1.68)$$

El valor de la densidad de estados  $\omega_J(R_0)$  debe calcularse a partir de la fórmula exacta, usando alguna de las aproximaciones dadas para los regímenes de distancia grande y pequeña, o bien calculando su valor numéricamente.

La fórmula (1.68) puede usarse también de la forma siguiente. Si tomamos  $\Lambda_{\text{WW}}$  como el valor positivo más pequeño posible de la constante cosmológica efectiva,  $\Lambda_{\text{min}}$ , entonces el número de estados que aparece en el término izquierdo será la mínima degeneración posible de un sólo estado,  $D^*$ , y tendremos

$$\Lambda_{\text{min}} = \frac{D^* R_0}{\omega_J(R_0)}. \quad (1.69)$$

Si podemos estimar la degeneración del estado fundamental,  $D^*$ , entonces podemos estimar el mínimo valor positivo de  $\Lambda_{\text{eff}}$  que cada realización del modelo de Bousso-Polchinski puede alcanzar. Para estimar dicha degeneración, podemos ponernos en el caso más sencillo en el que las cargas son diferentes e inconmensurables, para que la única degeneración sea la procedente del cambio de signo de los enteros  $n_i$ . De esta forma, si tenemos una cantidad de componentes no-nulas en el nodo  $(n_1, \dots, n_J)$  igual a  $j = J\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), la degeneración típica será  $D^* = 2^{J\alpha^*}$ , donde  $\alpha^*$  es el valor típico de la cantidad de componentes no-nulas de un nodo elegido al azar. Vemos así que una pieza fundamental para estimar correctamente el valor mínimo de la constante cosmológica efectiva es el número típico de componentes no-nulas de los nodos del retículo que cumplen una cierta condición, por ejemplo, encontrarse en la ventana de Weinberg o en el interior de una esfera de radio fijo.

En la siguiente sección detallamos el cálculo de la cantidad  $\alpha^*$  y el problema que puede suponer para un modelo que trate de incorporar el mecanismo de Bousso-Polchinski para obtener una constante cosmológica efectiva muy pequeña y el mecanismo de Kachru-Kalosh-Linde-Trivedi (KKLT) para estabilizar los módulos.

### 1.5.5 El problema $\alpha^*$

#### *Cálculo de la fracción típica de componentes no-nulas*

Del mismo modo que los ejemplos al principio de la sección 1.5.4, la fracción típica de componentes no-nulas de un nodo elegido al azar del conjunto de los nodos del retículo que caen en el interior de una cáscara esférica delgada es una cantidad difícil de entender intuitivamente debido a que se comporta de forma muy distinta cuando la dimensión del retículo  $J$  es muy alta.

Para valores pequeños de la dimensión  $J$ , la fracción típica de componentes no-nulas es simplemente 1. Para verlo, basta imaginar los nodos del retículo en el interior de una bola de radio  $R_0$ , donde el radio es mayor que las dimensiones lineales de las celdillas del retículo. Si tenemos sólo dos flujos, todos los nodos del retículo en el interior del disco tendrán sus dos componentes no nulas excepto los ubicados sobre los ejes de coordenadas, que tendrán un flujo nulo. Pero estos son minoría, de modo que la fracción típica de componentes no nulas  $\alpha^*$  vale 1. Con tres flujos, además de los nodos situados sobre los ejes, tenemos también nodos sobre los planos coordenados que tienen una componente nula. Pero nuevamente, los nodos con todas las componentes diferentes de cero son mayoría, y otra vez  $\alpha^* = 1$ . Para  $J = 4$ , además de los cuatro ejes (en los cuales sólo una componente es diferente de cero) y los seis planos coordenados (en los que dos componentes son diferentes de cero), aparecen cuatro *hiperplanos* coordenados, en los que sólo una componente se anula. Sin embargo, los nodos que tienen las cuatro componentes no-nulas son mayoría otra vez, de modo que  $\alpha^* = 1$  también para  $J = 4$ .

Es natural observar que el número de subespacios que contienen a los ejes coordenados aumenta rápidamente con el número de flujos  $J$ , así que en algún momento esa abundancia podría superar al número de nodos lejos de los planos coordenados. De hecho eso es lo que ocurre, como puede verse con el siguiente cálculo.

Vamos a suponer que elegimos un nodo al azar de entre todos los nodos del retículo que están dentro de una cáscara esférica muy delgada situada sobre el radio  $R_0$ , asumiendo que todos los nodos son igualmente probables. Nos preguntamos por cuál es la probabilidad

de que  $j$  de las  $J$  componentes sean diferentes de cero. Una vez hayamos calculado esa probabilidad, definiendo la fracción de componentes no nulas como  $\alpha = \frac{j}{J}$ , encontramos su valor típico  $\alpha^*$  simplemente calculando el valor medio de  $\alpha$  con su distribución de probabilidad obtenida  $P(\alpha)$ :

$$\alpha^* = \int_{\alpha \in [0,1]} \alpha P(\alpha) d\alpha. \quad (1.70)$$

Para obtener la distribución  $P(\alpha)$ , deben contarse los nodos con exactamente  $j = \alpha J$  componentes no-nulas dentro de la cáscara. Ello puede hacerse usando el principio combinatorio de inclusión-exclusión, suponiendo que todas las cargas son iguales  $q_i = q$  por simplicidad, y usando la expresión integral exacta de la densidad de estados (1.61). Los detalles técnicos aparecen en el capítulo 4. Se obtiene la siguiente representación integral de la distribución  $P(\alpha)$ :

$$P(\alpha) = \frac{2R_0}{\omega_J(R_0)} \binom{J}{\alpha J} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{J \left\{ \frac{z}{h} + \alpha \log[\vartheta(z)-1] \right\}} dz, \quad (1.71)$$

donde  $h = \frac{Jq^2}{R_0^2}$  es el parámetro que regula la validez del contaje mediante cociente de volúmenes y  $\gamma$  es el camino vertical usual en el plano complejo. A partir de la expresión anterior puede estimarse  $P(\alpha)$  aproximando la integral en la variable compleja  $z$  mediante el método del punto de silla. La fórmula resultante posee un pico acusado en una posición que identificamos con  $\alpha^*$ , distinta para diferentes valores del parámetro  $h$ . En particular, puesto que la aproximación de la integral mediante el método del punto de silla sólo es válida para  $J$  grande, encontramos que  $\alpha^*$  se aproxima a 1 sólo cuando  $h$  tiende a cero. No obstante, un cálculo numérico muestra que  $\alpha^*$  es la unidad para valores pequeños de  $J$ , pero ya para  $J = 9$  su valor desciende acercándose a la curva  $\alpha^*(h)$  calculada con la aproximación del punto de silla. La comparación de la curva aproximada  $\alpha^*(h)$  con los resultados de las simulaciones numéricas se muestra en la figura 1.7, tomada del capítulo 4, y repetida aquí para conveniencia del lector.

La figura 1.7 revela que el acuerdo entre la curva  $\alpha^*(h)$  teórica y los experimentos numéricos es muy satisfactorio. Las búsquedas numéricas se han llevado a cabo fijando la carga  $q = 0.15$  y el radio  $R_0 = \sqrt{2}$  y variando el número de flujos  $J$  para obtener distintos valores del parámetro  $h$ . En cada caso se han muestreado los nodos y se ha contado el número de componentes no-nulas de cada uno, extrayendo de esos datos el valor de  $\alpha^*$ . Tanto el método de muestreo como el cálculo de la fracción  $\alpha^*$  para cada valor de  $h$  se ha llevado a cabo usando dos simulaciones distintas:

- En la primera, se han tomado los nodos del interior de una cáscara de espesor  $q/2$  sobre la esfera de radio  $R_0$ , y se ha calculado  $\alpha^*$  como el valor máximo del número de componentes no-nulas de todos los nodos muestreados. Este método tiene la ventaja de muestrear mejor la ventana de Weinberg, pero por el contrario las muestras son de menor tamaño y no puede evitarse muestrear estados secantes alejados. En esta muestra, representada mediante puntos azules huecos en la figura 1.7, se pueden apreciar los detalles de la red y el efecto de tomar valores pequeños de  $J$ : hasta  $J = 8$  se encuentra  $\alpha^* = 1$ . No obstante, los datos fluctúan alrededor de la curva teórica. Se muestran valores de  $J$  entre 2 y 200, y para calcular el valor de  $h$  se ha usado el valor medio de la distancia de los nodos de la muestra.

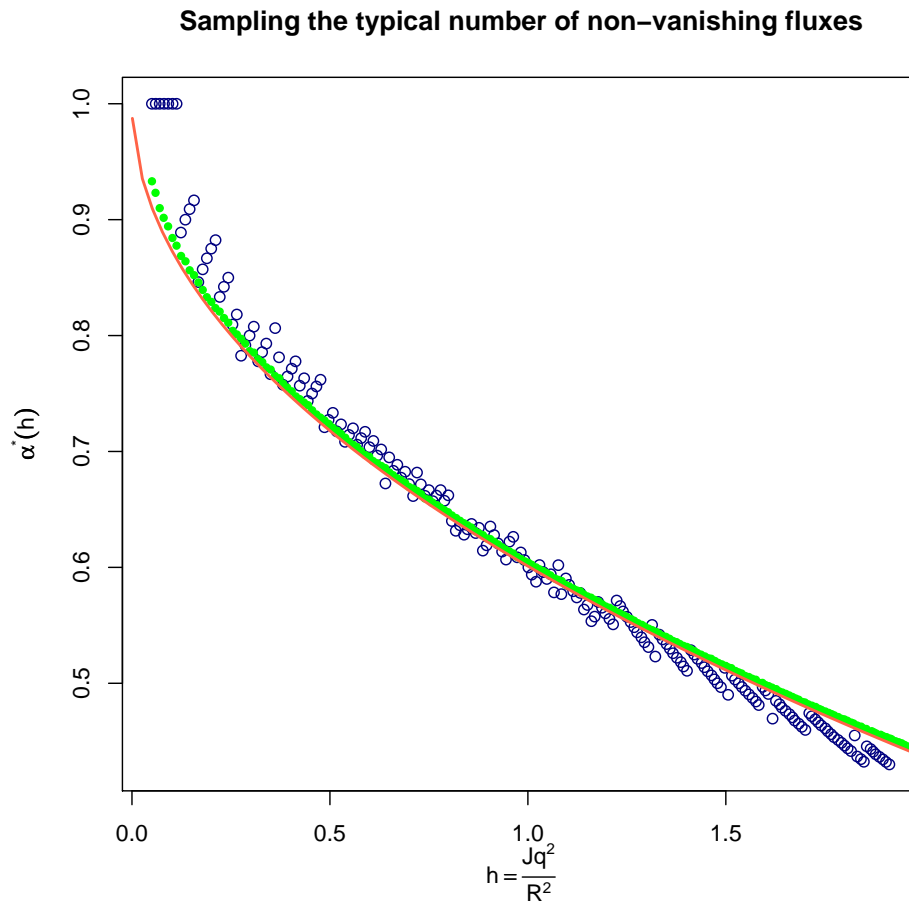


Figura 1.7: Comparación entre la curva  $\alpha^*(h)$  calculada sobre la expresión integral de  $P(\alpha)$  mediante la aproximación del punto de silla (línea roja continua) y el cálculo numérico de la fracción típica de componentes no-nulas (puntos). Para la diferencia entre los métodos empleados en la obtención de los datos numéricos (puntos verdes rellenos y puntos azules huecos) ver el texto.

- En la segunda, se han tomado los nodos del interior de la bola de radio  $R_0$ , y se ha calculado su valor típico  $\alpha^*$  promediando el número de componentes no-nulas de los nodos de la muestra. Las distancias también se han promediado para obtener el valor del parámetro  $h$ . Los estados que se miden de esta forma no están dentro de la cáscara cercana, pero los tamaños muestrales son mucho mayores y el promediado elimina la dependencia con los detalles de la red, produciendo un resultado mucho más acorde con la curva teórica, como puede verse en la figura 1.7, en la que estos datos se representan mediante puntitos verdes rellenos. En este método se han usado valores de  $J$  entre 2 y 275.

Ambos métodos de muestreo son difíciles de llevar a cabo para valores elevados de la dimensión, porque entonces hay muy pocos estados dentro de la esfera y las muestras se vuelven demasiado pequeñas.

También debe subrayarse que el pico de la distribución  $P(\alpha)$  es bastante estrecho: de hecho, la distribución es aproximadamente gaussiana alrededor de  $\alpha = \alpha^*$  con una desviación típica  $\sigma < \frac{1}{2\sqrt{J}}$ , que es pequeña para valores altos de  $J$ .

Por último, si bien el cálculo que se ha llevado a cabo sobre  $\alpha^*$  utiliza la simplificación de cargas iguales, su resultado es robusto en el sentido en que si se usan otros estados en lugar de los estados dentro de una cáscara se obtiene la misma curva  $\alpha^*(h)$ . Además, el uso de la fórmula exacta para  $\omega_J(r)$  es esencial: si se repite el cálculo de  $P(\alpha)$  tomando la expresión derivada del cociente de volúmenes (1.64), se obtiene una distribución de probabilidad con la misma curva  $\alpha^*(h)$  hasta un valor  $h = \frac{8\pi}{27} \approx 0.93$ , pero por encima de este valor los puntos de silla dejan de ser reales y la expresión para  $P(\alpha)$  se vuelve oscilatoria, invalidando así la aproximación (1.64).

### *Influencia en el mecanismo KKLT*

Si llega a probarse que la curva  $\alpha^*(h)$  es una propiedad robusta del paisaje de la Teoría de Cuerdas más allá del papel que juega en el modelo de Bousso-Polchinski estaremos ante un punto débil que debe considerarse con cuidado.

Por una parte, sabemos que el mecanismo de Bousso-Polchinski para neutralizar la constante cosmológica necesita que el número de flujos  $J$  sea elevado. Por otra parte, el mecanismo de estabilización KKLT necesita que el valor del flujo en cada tres-ciclo sea elevado,  $n_i \gg 1$ . Por tanto, en un modelo completo que presumiblemente llegue a construirse en el que se implementen ambos mecanismos, van a estar presentes muchos flujos con valores elevados. Pero acabamos de ver que cuando  $J$  es grande, el valor típico de componentes no-nulas es menor que la unidad, y por lo tanto los nodos del paisaje que poseen valores elevados del flujo se vuelven peligrosamente escasos. Esto puede interpretarse de dos maneras: o bien los nodos no poseen suficiente flujo y el mecanismo KKLT no es capaz de estabilizarlos, o bien hay muy pocos y no es posible encontrar alguno que tenga una constante cosmológica lo suficientemente pequeña. Éste compromiso difícil de alcanzar es lo que denominamos *problema- $\alpha^*$*  del modelo de Bousso-Polchinski: La posibilidad de perder el mecanismo de estabilización KKLT debido a una fracción típica pequeña de flujos ocupados, o la posibilidad de perder estados antrópicos debido a la escasez de estados con muchos flujos de valor elevado.

Este problema, que no ha sido identificado con anterioridad en el paisaje de la Teoría de Cuerdas, puede ser un serio obstáculo a cualquier esquema que trate de dotar al modelo de Bousso-Polchinski de un análisis completo de estabilidad.

Naturalmente, si hay pocos nodos que verifican las dos condiciones, todas las predicciones sobre el número de estados antrópicos y el valor mínimo alcanzable por la constante cosmológica han de recalcularse, lo cual puede bien resultar en un modelo con pocos estados estables, o pocos estados antrópicos, o quizá todo lo contrario. La única manera de saberlo es, por supuesto, construir ese modelo, pero el problema- $\alpha^*$  nos está diciendo que los cálculos efectuados en el paisaje de Bousso-Polchinski no pueden extrapolarse al caso en el que el análisis de estabilidad se haya completado.

Por esta razón, el siguiente paso es ver qué ocurre en un modelo de paisaje lo bastante sencillo como para ser exactamente soluble, pero lo bastante rico como para tener muchos flujos estabilizados. El análisis de este modelo nos dirá si el problema- $\alpha^*$  se presenta o no, y en todo caso será una indicación de cómo podría ser un paisaje con muchos flujos y un análisis de estabilidad. Consideramos la construcción de dicho modelo en la siguiente sección.

## 1.6 El paisaje de Einstein-Maxwell

En esta sección describimos la construcción de un modelo con muchos flujos estabilizados para tener un marco en el que juzgar el efecto del problema- $\alpha^*$  encontrado en el modelo de Bousso-Polchinski. El contenido de esta sección se considera brevemente en el capítulo 7, y se expone con todo detalle en el capítulo 6.

En lo referente al problema- $\alpha^*$ , podemos adelantar que no se presenta en el modelo que se describe a continuación, porque los estados estables se encuentran muy alejados de los hiperplanos coordinados y por lo tanto todos esos estados cumplen el requisito necesario para el mecanismo KKLТ: los valores de los flujos son grandes. Sin embargo, este modelo presenta una característica especial: los estados antrópicos podrían aparecer aleatoriamente cerca de la hipersuperficie  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ , pero además aparecen en largas cadenas cuya constante cosmológica es compatible con las observaciones. Por lo tanto, el estudio de estabilidad completo restringe fuertemente los estados que deben considerarse, mientras que el modelo exacto contiene un nuevo mecanismo para obtener valores pequeños de la constante cosmológica.

Así, podemos interpretar la presencia del problema- $\alpha^*$  en el modelo de Bousso-Polchinski como una indicación de su incompletitud, puesto que no tiene impacto cuando se lleva a cabo el estudio de estabilidad en el modelo de Einstein-Maxwell multi-esfera, pero cambia por completo la manera de contar estados y por tanto el paisaje es radicalmente diferente.

### 1.6.1 El paisaje Einstein-Maxwell multi-esfera

El modelo de Einstein-Maxwell contiene sólo gravedad y campo electromagnético, junto con una constante cosmológica  $\Lambda$ . En  $D$  dimensiones espacio-temporales, el modelo queda completamente descrito por la acción

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} (R - F^2 - 2\Lambda) d^D x, \quad (1.72)$$

donde  $R$  es el escalar de curvatura en  $D$  dimensiones,  $g$  es el determinante de la métrica,  $F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  es la densidad lagrangiana del campo electromagnético y  $\Lambda$  es la constante cosmológica que se tiene a priori.  $\Lambda$ , junto con la carga elemental de las partículas de prueba  $e$ , son los únicos parámetros del modelo.

La elección de la métrica que define la compactificación multi-esfera del modelo anterior es

$$ds^2 = e^{2\phi(t,x)}(-dt^2 + dx^2) + \sum_{i=1}^J e^{2\psi_i(u_i,v_i)}(du_i^2 + dv_i^2). \quad (1.73)$$

La métrica anterior representa una variedad de la forma  $(A)dS_2 \times [S^2]$ , es decir, una cosmología que puede ser de Sitter o anti-de Sitter en  $1 + 1$  dimensiones compactificada sobre un producto de  $J$  dos-esferas, de modo que  $D = 2 + 2J$ . Las funciones  $\phi(t, x)$  y  $\psi_i(u_i, v_i)$  que figuran en los exponentes en la fórmula (1.73) proveen representaciones conformes de la métrica de la parte cosmológica y de la parte compacta. Dichas funciones satisfacen ecuaciones de Liouville

$$\lambda = e^{-2\phi}(\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi), \quad K_i = -e^{-2\psi_i}(\partial_{u_i}^2\psi_i + \partial_{v_i}^2\psi_i), \quad (1.74)$$

que simplemente establecen que las curvaturas gaussianas de la parte cosmológica y de cada factor de la parte compacta son constantes. Las cantidades así introducidas son la constante cosmológica efectiva  $\lambda$  de la parte cosmológica y las curvaturas  $K_i$  de las esferas que forman la parte compacta, cada una con su radio  $\frac{1}{\sqrt{K_i}}$ . Mientras que sólo consideramos curvaturas internas positivas  $K_i > 0$ , el valor de  $\lambda$  puede ser positivo (en el caso dS), negativo (en el caso AdS) o nulo (en el caso de Minkowski). La posibilidad  $K_i < 0$  puede también considerarse, pero en ese caso no aparecen estados dS, y por tanto es un sector de paisaje con mucha menos riqueza.

El campo electromagnético se toma en la configuración

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^J \frac{Q_i}{V_i} e^{2\psi_i} du_i \wedge dv_i, \quad (1.75)$$

donde  $Q_i$  es el flujo del campo a través de la  $i$ -ésima esfera, y  $V_i = \frac{4\pi}{K_i}$  es su área. Naturalmente, una configuración de campo en la que las componentes espaciales del tensor electromagnético, interpretadas como componentes magnéticas, presentan flujo a través de superficies cerradas, es análoga a la configuración del campo coulombiano, cuyo flujo es precisamente la carga eléctrica. Por esa razón, al flujo  $Q_i$  se le llama también *carga magnética*, y la configuración (1.75) es análoga al campo de un monopolo magnético. Sin embargo, hay que notar que la distribución de carga magnética no está localizada en ningún punto, sino que está uniformemente distribuída por todo el espacio-tiempo.

Cuando variamos la acción respecto de la métrica obtenemos las ecuaciones de Einstein, y al variar el campo electromagnético obtenemos las ecuaciones de Maxwell. La configuración (1.75) es una solución de éstas últimas, mientras que las ecuaciones de Einstein reducen a ecuaciones algebraicas que relacionan las curvaturas con los flujos:

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left(J\lambda + \sum_{i=1}^J K_i\right), \quad 2\left(\frac{Q_j K_j}{4\pi}\right)^2 - K_j + \lambda = 0. \quad (1.76)$$

Nótese que la segunda ecuación en (1.76) posee dos soluciones,

$$K_i^{(\pm)} = \frac{4\pi^2}{Q_i^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 2\lambda \frac{Q_i^2}{4\pi^2}} \right], \quad (1.77)$$

y por tanto dos ramas con diferentes curvaturas. Al sustituir la solución (1.77) en (1.76), obtenemos una sola ecuación que determina  $\lambda$  en función de los flujos  $Q_j$ . Dicha ecuación es la *ecuación de existencia* de un estado, porque especifica los posibles valores de las curvaturas, que son los módulos del modelo, para que tengamos una solución de las ecuaciones de Einstein con los flujos fijados de antemano.

Los flujos magnéticos  $Q_j$  satisfacen una condición de cuantización de Dirac cada uno por separado:

$$Q_j e = 2\pi n_j, \quad \text{con } n_j \in \mathbb{Z}, \quad (1.78)$$

donde  $e$  es la carga de las partículas de prueba. Cuando se introduce esta condición de cuantización en la ecuación de existencia, se obtiene

$$\Lambda = L_{\{n_j\}}(\lambda) = \frac{1}{2} \left[ J\lambda + \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} \left( 1 + s_j \sqrt{1 - 2\lambda n_j^2} \right) \right], \quad (1.79)$$

donde hemos redefinido los parámetros  $\lambda/e^2 \rightarrow \lambda$ ,  $\Lambda/e^2 \rightarrow \Lambda$ , para que todas las magnitudes sean adimensionales. Las cantidades  $s_j = \pm 1$  son signos que seleccionan una de las posibles ramas de la curvatura. Una vez elegida la rama para cada esfera, se eligen los enteros  $\{n_j\} \equiv n$  que forman el nodo, y se resuelve la ecuación (1.79). Si existe una solución a esa ecuación, entonces existe un estado en ese nodo; de lo contrario, el nodo no tiene asociado un estado. Pero además, para que dicho estado forme parte del paisaje, debe probarse que es estable, lo que consideramos más abajo.

Nótese que si encontramos una solución de la ecuación de existencia (1.79) con  $\lambda < 0$ , entonces, en caso de que alguno de los signos de las ramas sea negativo, su correspondiente curvatura será negativa también, como se aprecia en la ecuación (1.77). Esos estados no están bien definidos, porque la relación entre su curvatura y su volumen no es la misma que la de la esfera. Por tanto, aunque podrían incluirse, sólo poseen  $\lambda < 0$ , y por tanto se excluyen deliberadamente. Así, sólo elegir  $s_j = +1$  para todo  $j$  produce estados de anti-de Sitter con curvaturas positivas en la parte compacta. La rama en la que todos los signos son positivos se denomina **rama principal** de la ecuación: vemos así que la rama principal es la única fuente de estados AdS con curvaturas positivas en la parte compacta.

### 1.6.2 Estabilización de los módulos

Para estudiar si una solución de la ecuación de existencia produce un nodo estable, debemos perturbar la solución obtenida. Para ello, modificamos la métrica (1.73) según

$$ds^2 = e^{2\phi - 2\sum_{i=1}^J \xi_i} (-dt^2 + dx^2) + \sum_{i=1}^J e^{2\psi_i + 2\xi_i} (du_i^2 + dv_i^2). \quad (1.80)$$

Cada nueva función  $\xi_i(t, x)$  describe el cambio en el radio de la  $i$ -ésima esfera, por eso las perturbaciones se denominan *campo multi-radión*. Al sustituir la métrica perturbada (1.80) en las ecuaciones de movimiento, usamos los valores para  $\lambda$  y  $K_i$  obtenidos como solución de la ecuación de existencia para un nodo dado  $n$ . De esta manera, estamos despreciando la reacción que la perturbación tendría sobre la parte cosmológica de la solución. Esta aproximación sólo es válida si los valores de los radiones permanecen pequeños, pero naturalmente dejará de serlo cuando su valor crezca sin cota, como sucede cuando un estado es inestable.



Puesto que las perturbaciones son pequeñas, podemos linealizar las ecuaciones de Einstein alrededor de su solución  $\xi_i = 0$ . El resultado es la ecuación de movimiento del campo multi-radión:

$$e^{-2\phi} [\partial_t^2 \boldsymbol{\xi} - \partial_x^2 \boldsymbol{\xi}] = -H \boldsymbol{\xi}, \quad (1.81)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}$  es el vector columna de los radiones, y  $H$  es la matriz de estabilidad formada a partir de la solución sin perturbar de la ecuación de existencia:

$$H = 2 \begin{pmatrix} K_1 - 3\lambda & -\lambda & \cdots & -\lambda \\ -\lambda & K_2 - 3\lambda & \cdots & -\lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda & -\lambda & \cdots & K_J - 3\lambda \end{pmatrix}. \quad (1.82)$$

Si consideramos la evolución del campo multi-radión en intervalos de tiempo suficientemente cortos como para suponer que el prefactor  $e^{-2\phi}$  cambia lentamente, y además consideramos intervalos espaciales pequeños para poder despreciar la variación espacial del multi-radión, obtenemos que la condición de estabilidad se reduce a que la matriz  $H$  dada en (1.82) sea definida positiva. Para ello, basta con que el menor de sus valores propios sea positivo. En el caso  $J = 1$ , la matriz  $H$  es simplemente un número, y es positivo cuando  $\lambda < \frac{\Lambda}{2}$ . Sin embargo, cuando  $J > 1$ , la condición de estabilidad no es tan sencilla como un valor umbral para  $\lambda$ : Depende del nodo, y no sólo del valor de  $\lambda$  en él.

Puesto que no puede diagonalizarse la matriz  $H$  de forma exacta, debemos examinar la estabilidad de cada estado por separado. Sin embargo, el polinomio característico de  $H$  sí que puede calcularse de forma exacta, y a partir de él pueden establecerse algunos resultados generales sobre la estabilidad:

- Todos los estados AdS (que proceden de la rama principal) son siempre estables.
- Todos los estados dS que tengan al menos un número cuántico  $n_i = 0$  son inestables.
- Todos los estados dS que procedan de una rama que no sea la principal son inestables.

Así, la rama principal queda como la principal fuente de estados del paisaje de Einstein-Maxwell multi-esfera. También, confirmamos nuestras sospechas vertidas durante el estudio del paisaje de Bousso-Polchinski: Los nodos que tienen al menos una componente no-nula siempre dan lugar a estados inestables. Así, el problema- $\alpha^*$  tiene razón de ser en el paisaje de Bousso-Polchinski, pero, puesto que todos esos estados están ausentes en el paisaje de Einstein-Maxwell multi-esfera, concluimos que el problema- $\alpha^*$  no se presenta aquí.

Los estados dS estables y los AdS proceden ambos de la rama principal de la ecuación de existencia (1.79). Si  $\lambda$  es pequeña, los estados con  $\lambda < 0$  y  $\lambda > 0$  se aproximan a la superficie dada por la ecuación siguiente, obtenida haciendo  $\lambda = 0$  en (1.79):

$$\sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} = \Lambda. \quad (1.83)$$

Sin embargo, los estados con  $\lambda > 0$  están ubicados sobre una hipersuperficie y los estados con  $\lambda < 0$  sobre otra situada *bajo* la primera; ambas hipersuperficies coinciden sobre (1.83). La ecuación de existencia implica que siempre debe tenerse  $\sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} \leq \Lambda$ , por lo

tanto dicha superficie pone un límite a la región del espacio de flujos en la que puede haber estados. En particular, debe tenerse siempre  $n_j > \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ .

La ecuación (1.83) reemplaza a la relación (1.20) con  $\Lambda_{\text{eff}} = 0$ , que representa una esfera. La superficie (1.83) no es compacta, y los estados dS estables están colocados muy cerca de ella. No obstante, su forma especial da lugar a la presencia de largas cadenas de estados que pasamos a describir.

### 1.6.3 Estados antrópicos del paisaje multi-esfera

Cuando se tiene más de una esfera, la ecuación (1.83) presenta un comportamiento curioso: posee asíntotas. Nótese que, formalmente, podemos hacer todos los números  $n_i$  infinitos excepto uno,  $n_1$  por ejemplo, que, sobre la superficie (1.83), tendrá que valer  $n_1 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ . Puesto que  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  no tiene en general por qué ser entero, esta elección da lugar a un hiperplano asíntótico de la superficie. En  $J = 2$ , tomando el entero

$$n_1 = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right\rceil, \quad (1.84)$$

obtenemos una cadena de nodos que termina cuando la recta vertical  $x = n_1$  toca a la curva  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \Lambda$ ; puesto que ese punto de corte tampoco tiene por qué ser entero, obtenemos un entero tomando su función suelo,

$$n_2 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda - \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right\rceil^2}}} \right\rfloor. \quad (1.85)$$

En la ecuación (1.85) podemos apreciar que, cuando  $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$  se aproxima a un entero desde abajo, entonces la cantidad  $n_2$  definida en (1.85) se hace arbitrariamente grande. Por tanto, afinando el valor de  $\Lambda$ , podemos obtener una cadena de nodos tan larga como queramos. Sobre esa cadena, los resultados del paisaje de una sola esfera,  $J = 1$ , son aplicables, de modo que podemos decir que la cadena representa un paisaje con  $J = 1$  con una constante cosmológica efectiva

$$\Lambda_2 = \Lambda - \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right\rceil^2}. \quad (1.86)$$

La constante anterior es tanto más pequeña como más cerca se encuentra  $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$  de un entero, y la condición de estabilidad para los estados de la cadena, es decir, que señala el comienzo de la misma, sería simplemente  $\lambda < \frac{\Lambda_2}{2}$ , que es la condición válida para  $J = 1$ .

Sin embargo, la presencia de cadenas largas en  $J = 2$  sólo es posible si se elige  $\Lambda$  de manera que  $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$  esté muy próximo a un entero. Obtener valores de  $\lambda$  muy pequeños de esta forma exige un elevado refinamiento injustificado de  $\Lambda$ , y por tanto esas cadenas, de forma genérica, no poseen valores muy pequeños de la constante cosmológica efectiva  $\lambda$ .

Cuando el valor de  $J$  es moderado encontramos que el proceso de pasar de un paisaje  $J = 2$  a otro  $J = 1$  sustituyendo  $\Lambda$  por el valor  $\Lambda_2$  dado en (1.86) puede también llevarse a cabo de forma reiterada. La idea es ir obteniendo, partiendo de un paisaje con cualquier valor de  $J$ , una secuencia  $\Lambda_1 = \Lambda$ ,  $\Lambda_2$  (dado en (1.86)),  $\Lambda_3$ , etcétera, que termine en una

cadena  $J = 1$  con un valor efectivo  $\Lambda_J$  tan pequeño como se quiera. Las fórmulas que implementan este procedimiento iterativo son

$$\Lambda_1 = \Lambda, \Lambda_{j+1} = \Lambda_j - \frac{1}{n_j^2}, \quad n_j = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\Lambda_j}} \right\rceil, \quad (1.87)$$

$$\Lambda_{J+1} = \Lambda - \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} < 0, \quad n_J = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\Lambda_J}} \right\rceil. \quad (1.88)$$

Nótese que el resto  $\Lambda_{J+1}$  debe ser negativo para que la ecuación de existencia (1.79) tenga soluciones para valores pequeños de  $\lambda$ , es decir, debemos tener

$$\sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} \leq \Lambda. \quad (1.89)$$

El último entero de la relación de recurrencia (1.87) se define usando la función suelo en lugar de la función techo para garantizar que en el último paso de la relación de recurrencia se obedece la condición de existencia (1.89).

Puesto que el último paso de la relación de recurrencia da lugar a una cadena de estados, que es de forma efectiva un paisaje con  $J = 1$  con  $\Lambda$  reemplazada por el valor  $\Lambda_J$ , podemos usar los resultados válidos para tal caso. En particular, usando una aproximación continua a la densidad de estados, podemos encontrar que el valor mínimo estimado de la constante cosmológica efectiva  $\lambda$  es

$$\hat{\lambda}_{\min} = 2\sqrt{2}\Lambda_J^{\frac{5}{4}}, \quad (1.90)$$

y el número de estados de la cadena así obtenida es

$$\mathcal{N} \approx \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) n_J. \quad (1.91)$$

Para apreciar el orden de magnitud de las cantidades así obtenidas, podemos reemplazar la relación de recurrencia exacta (1.87) por una versión continua que represente una cota superior. Al hacer eso, obtenemos una relación de recurrencia aproximada que describe el peor caso de la exacta; y aún así, su solución es una doble exponencial:

$$\Lambda_J \approx 2^{\sum_{j=0}^{J-2} \left(\frac{3}{2}\right)^k} \Lambda_1^{\left(\frac{3}{2}\right)^{J-1}}. \quad (1.92)$$

Esta solución sugiere que valores moderados de  $J$  permiten alcanzar valores de  $\lambda$  tan pequeños como se quiera. Si llamamos  $\lambda_A$  al valor “antrópico” de referencia, un número del orden de  $10^{-120}$ , entonces podemos preguntarnos cuántos pasos debemos progresar en la relación de recurrencia (1.87) para que el valor mínimo estimado en (1.90) alcance  $\lambda_A$ . Usando la solución (1.92), obtenemos

$$J = 1 + \log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{4 \log(2\lambda_A)}{5 \log(4\Lambda)} \right). \quad (1.93)$$

Las cadenas largas de estados producen picos de anchura  $\Lambda_J/2$  en la densidad continua de estados del paisaje con  $J = 1$ . Exigir que uno de esos picos estuviera contenido en el intervalo  $[0, \lambda_A]$  produce un valor de  $J$  dado por

$$J = 1 + \log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{\log(\lambda_A/2)}{\log(4\Lambda)} \right). \quad (1.94)$$

Ambas expresiones poseen un doble logaritmo, que va a producir valores moderados de  $J$  incluso con un  $\lambda_A$  tan pequeño como  $10^{-120}$ , para cualquier valor de  $\Lambda$ , sin requerir ningún tipo de ajuste fino. Por ejemplo, tomando  $\Lambda = 0.1$ , la fórmula (1.93) produce  $J = 14.5$  y la fórmula (1.94) produce  $J = 15.08$ . Tomando  $J = 15$ , obtenemos una constante mínima de  $10^{-146}$  (usando (1.90)) con un umbral de estabilidad de  $10^{-117}$ , y la cantidad de  $2.43 \cdot 10^{58}$  estados en la cadena, (usando (1.91)). Por tanto, vemos que un  $\Lambda$  elevado puede producir valores antrópicos de  $\lambda$  tomando sólo  $J = 15$  esferas, y que la cantidad de estados en la cadena correspondiente es enorme.

Podemos ver que valores moderados de  $J$  sin necesidad de ajustar el valor de  $\Lambda$  permiten obtener un elevado número de estados con una constante cosmológica efectiva compatible con las observaciones. Esta construcción es genérica, por lo que estos estados están siempre presentes en el paisaje de Einstein-Maxwell. Sin embargo, aunque son numerosos, estos estados antrópicos no son genéricos, ni tampoco podemos asegurar que son los estados de menor constante cosmológica de todo el paisaje. A pesar de ello, el pronunciado pico en la densidad de estados que generan estas cadenas antrópicas dominaría la predicción de los valores de la constante cosmológica, y por tanto tendríamos una vía alternativa para resolver el problema de la constante cosmológica en las cadenas antrópicas del paisaje de Einstein-Maxwell.

Por supuesto, el valor de  $J$  calculado mediante (1.93, 1.94) no se obtiene mediante ninguna ley dinámica, sino que es fenomenológico, es decir, simplemente indica que los estados antrópicos existen, pero dentro del modelo clásico aquí expuesto no se justifica de ningún modo la razón por la cual el multiverso tenga que dar lugar a esos estados en lugar de a cualesquiera otros elegidos de la enorme cantidad que contiene. La justificación a esta cuestión suele darse en forma del principio antrópico, pero la mayor parte de la comunidad científica está de acuerdo en que la teoría que incorpore la gravedad con la mecánica cuántica deberá dar cuenta de una distribución de probabilidad que explique por qué son estos valores y no otros los que se observan. Hasta el momento, la teoría de cuerdas no ha sido capaz de dar una explicación satisfactoria a esta cuestión, así que queda como un reto para los físicos teóricos encontrar la explicación de por qué, habiendo como hay tantos estados diferentes en el paisaje, nuestro Universo ha terminado en el que observamos.



## Chapter 2

# A geometric-probabilistic method for counting low-lying states in the Bousso-Polchinski Landscape

We propose an accurate method to count states of close to zero and positive cosmological constant in the Bousso-Polchinski Landscape. This method is based on simple geometrical considerations on the high-dimensional lattice of quantized fluxes and on a probabilistic model (the “random hyperplane” model) which provides a distribution of the cosmological constant’s values. Evidence of the assumptions made in this model are offered by means of numerical experiments.

### 2.1 Introduction

One of the most recent proposal to solve the cosmological constant problem in cosmology is provided by string theory. By dimensional reduction from M-theory to 3+1 dimensions, vacua of the effective theory are classified by a big number of quantized fluxes leading to an enormous amount of metastable vacua, the Bousso-Polchinski (BP) Landscape [90]. The cosmological constant problem, namely the smallness of the observed vacuum energy density in the universe [34, 35], can be solved by the presence in this model of a huge number of states of very small, positive cosmological constant, together with a dynamical mechanism given by eternal inflation [10] which allows the system to visit all the vacua. An anthropic selection is then advocated to explain the smallness of the observed cosmological constant [98, 84, 48].

In order to quantify this selection a counting of accessible states in the Landscape is needed. So far, two ways of counting have been introduced:

- The Bousso-Polchinski count, which computes the volume of a spherical shell of small thickness in flux space and divides it by the volume of a cell.
- The entropy count of Bousso-Yang, which computes the entropy of the occupation number of each flux assuming that they are independent.

In the following subsections we will briefly review these two counting methods, and draw on them a proposal for an alternative one.

### 2.1.1 The Bousso-Polchinski count

The first estimate of this number is given by the BP count. We will now review this argument (see [90]). A vacuum of the BP Landscape is a node in a  $J$ -dimensional lattice  $\mathcal{L}$  generated by  $J$  charges  $q_1, \dots, q_J$  determined by the sizes of the three-cycles in the compactification manifold. The lattice  $\mathcal{L}$  is

$$\mathcal{L} = \{(n_1 q_1, \dots, n_J q_J) \in \mathbb{R}^J : n_1, \dots, n_J \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.1)$$

The  $j$ -th coordinate of a point in the lattice is an integer multiple of the charge  $q_j$ , and therefore a vacuum is characterized by the integer  $J$ -tuple  $n = (n_1, \dots, n_J)$ .

A *fundamental cell* (also called *Voronoi cell*<sup>1</sup>)  $Q_n$  around a node  $n$  in a lattice  $\mathcal{L}$  is the subset of  $\mathbb{R}^J$  whose points have  $n$  as its closest node. Thanks to the discrete translational symmetry of our lattice (2.1), all fundamental cells in  $\mathcal{L}$  are translates of the fundamental cell around the origin  $Q_O \equiv Q$ , which we can parametrize in Cartesian coordinates as a product of symmetric intervals

$$x \in Q \iff x = (x_1, \dots, x_J) \text{ with } x_j \in \left[-\frac{q_j}{2}, \frac{q_j}{2}\right], \quad (2.2)$$

i.e.

$$Q = \prod_{j=1}^J \left[-\frac{q_j}{2}, \frac{q_j}{2}\right]. \quad (2.3)$$

The cosmological constant of vacuum  $n$  in the BP model is<sup>2</sup>

$$\Lambda(n) = \Lambda_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J n_j^2 q_j^2. \quad (2.4)$$

In (2.4),  $\Lambda_0$  is an *a priori* cosmological constant or order  $-1$ . Each value of  $\Lambda > \Lambda_0$  defines a spherical ball on the  $J$ -dimensional flux space of radius  $R_\Lambda = \sqrt{2(\Lambda - \Lambda_0)}$ . We call this ball  $\mathcal{B}^J(\Lambda)$ . We take small values of the charges  $q_j$  (natural values expected by BP are of order  $\frac{1}{6}$ ) in such a way that the ball can contain a huge number of fundamental cells.

The number of states in the Weinberg Window, the range of values of the cosmological constant allowing the formation of structures (like galaxies) needed for the formation of life as we know it [48], is obtained by computing the volume of a thin spherical shell in flux space (the realization of the Weinberg Window in the BP Landscape) divided by the volume of a cell in the lattice:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\text{WW}} &= \frac{\text{vol } \mathcal{B}^J(\Lambda_{\text{WW}}) - \text{vol } \mathcal{B}^J(0)}{\text{vol } Q} \approx \frac{1}{\text{vol } Q} \frac{d}{d\Lambda} \left( \text{vol } \mathcal{B}^J(\Lambda) \right) \Big|_{\Lambda=0} \Lambda_{\text{WW}} \\ &= \frac{1}{\text{vol } Q} \frac{d}{d\Lambda} \left( \frac{R_\Lambda^J}{J} \text{vol } S^{J-1} \right) \Big|_{\Lambda=0} \Lambda_{\text{WW}} = \text{vol } S^{J-1} \frac{R_0^{J-2} \Lambda_{\text{WW}}}{\text{vol } Q}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

where  $R_0 = R_{\Lambda=0} = \sqrt{2|\Lambda_0|}$ , and the volume of the  $J - 1$  dimensional sphere is

$$\text{vol } S^{J-1} = \frac{2\pi^{\frac{J}{2}}}{\Gamma(\frac{J}{2})}. \quad (2.6)$$

<sup>1</sup>Also called Wigner-Seitz cell in solid state physics. The Voronoi cell of a point  $P$  in a discrete set  $S$  of a metric space  $M$  is the set containing those points of  $M$  which are closer to  $P$  than to any other point of  $S$ .

<sup>2</sup>We use reduced Planck units in which  $8\pi G = \hbar = c = 1$ .

This method can be naively expected to yield a good estimate when the cell's linear dimensions are small in comparison to the shell's thickness; but this condition is not satisfied in the BP Landscape. Nevertheless, the result of this counting formula is very good when compared to actual numerical experiments. We will derive the true validity condition of the BP count in our own framework below, in section 2.2.

### 2.1.2 The Bousso-Yang count

The second estimate is given by the Monte Carlo numerical simulation by Bousso-Yang (BY) in ref. [93]. They compute the number of states using the Shannon entropy of each flux's occupation number distribution in a sample of states obtained in the following two ways:

- Drawing the states from a canonical ensemble distribution with spherical symmetry.
- Drawing the states as the output of a decay chain using a dynamical relaxation mechanism.

This method has an advantage: it incorporates the dynamical relaxation mechanism of Brown-Teitelboim (BT) [95, 94], thus quantifying the dynamical selection effect, but two drawbacks should be pointed out:

- It makes it necessary to choose particular values for the charges, thereby providing no explicit dependence of the computed number of states with the charges or the dimension.
- The authors of ref. [93] assume that the states of low positive cosmological constant (referred to as *penultimate* states) have fluxes which are considered independent random variables. They accept this hypothesis as false, but they suggest its correction.

We will briefly review the Shannon entropy argument used for counting.

For any subset  $\Sigma$  having  $\mathcal{N}_\Sigma$  nodes in the Landscape (for example,  $\Sigma$  can be the set of penultimate states), we can define the uniform probability over  $\Sigma$  as follows:

$$P_\Sigma(\hat{n} = n) = \begin{cases} \text{const} & \text{if } n \in \Sigma, \\ 0 & \text{if } n \notin \Sigma, \end{cases} \quad (2.7)$$

where  $\hat{n}$  is a random variable which takes values over the whole Landscape  $\mathcal{L}$  viewed as a subset of  $\mathbb{Z}^J$ . Thus,  $\hat{n}$  can be any integer  $J$ -tuple  $n = (n_1, \dots, n_J) \in \Sigma \subset \mathcal{L}$  with equal probability, namely  $\frac{1}{\mathcal{N}_\Sigma}$ . The Shannon entropy  $S_\Sigma$  of the uniform distribution  $P_\Sigma$  satisfies

$$\mathcal{N}_\Sigma = e^{S_\Sigma} = \exp\left[-\sum_{n \in \mathbb{Z}^J} P_\Sigma(\hat{n} = n) \log P_\Sigma(\hat{n} = n)\right], \quad (2.8)$$

as can be seen by substituting (2.7) into (2.8) taking  $\text{const} = \frac{1}{\mathcal{N}_\Sigma}$ . If  $P_\Sigma$  were not constant over  $\Sigma$ , then it must have a larger support than  $\Sigma$  in order to satisfy eq. (2.8).

If the fluxes were independent, this joint probability would split:

$$P_\Sigma(\hat{n} = n) = \prod_{j=1}^J P_j(\hat{n}_j = n_j), \quad (2.9)$$



and therefore the correspondent Shannon entropy would be simplified to

$$S_{\Sigma}^{\text{indep}} = - \sum_{j=1}^J \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_j(\hat{n}_j = n) \log P_j(\hat{n}_j = n). \quad (2.10)$$

Unlike  $P_{\Sigma}$ , the distributions  $P_j(\hat{n}_j = n)$  are much simpler to estimate by sampling a small portion of  $\Sigma$ . But, as long as they are not constant, its support covers a much larger region than  $\Sigma$ , and furthermore this region has the symmetry of the cell  $Q$  rather than the symmetry of  $\Sigma$ , so we can expect the simplified entropy  $S_{\Sigma}^{\text{indep}}$  of eq. (2.10) to be *much* larger than the true entropy  $S_{\Sigma}$ .

A numerical experiment can be illustrative. Needless to say, the only way to compute the correct uniform probability  $P_{\Sigma}$  is to compile all the elements of the set  $\Sigma$ , and this is *not* possible over a realistic Landscape. We have taken a very simple model of  $J = 3$  fluxes with  $\Lambda_0 = -1$  and charges  $q_1 = 0.02988$ ,  $q_2 = 0.04988$ ,  $q_3 = 0.06988$ , and as the set  $\Sigma$  we have considered the *secant* states (see next subsection). A brute-force count of this set is easily carried out by enumerating all states in it, resulting in

$$\mathcal{N}_{\Sigma} = 17,894 \quad \text{states, or} \quad S_{\Sigma} \approx 9.79. \quad (2.11)$$

The same enumeration of all states allows us to compute the three probability distributions  $P_j(\hat{n}_j = n_j)$ , and, from these, we obtain

$$\mathcal{N}_{\Sigma}^{\text{indep}} = e^{S_{\Sigma}^{\text{indep}}} \approx 2.15 \times 10^5 \quad \text{states, or} \quad S_{\Sigma}^{\text{indep}} \approx 12.28. \quad (2.12)$$

which indicates an enormous difference.

It should be stressed that the BY work's goal is to quantify the dynamical selection effect of the BT decay chain, and they do this by computing the quotient of the number of states with and without dynamics. While both numbers are affected by the independency error, their quotient may be free of errors. We are interested in studying this point in our future research.

### 2.1.3 Our method of counting

Our proposal is based on the following kinds of states one may encounter near the null cosmological constant surface in flux space:

- **Boundary** (or **penultimate** after BY) are those states in which a BT decay chain can end before jumping into the negative cosmological constant sea. We define a boundary state as one having:
  - (1) positive cosmological constant, and
  - (2) at least one neighbour of negative cosmological constant.
- **Secant** states have the property that their Voronoi cell in flux space has non-empty intersection with the null cosmological constant surface in flux space. Note that a secant state may have a negative cosmological constant.

These two categories are not equivalent; a boundary state may not be secant if it is far enough from the null cosmological constant surface, and a secant state may not be

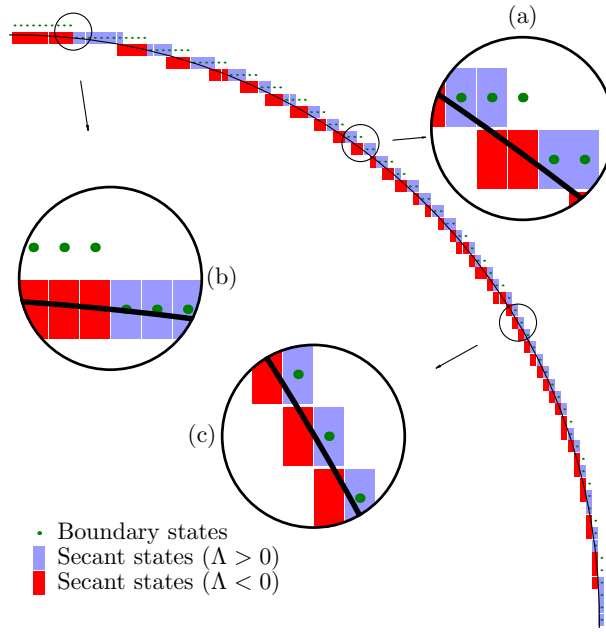


Figure 2.1: States are shown on the  $\Lambda = 0$  surface in a  $J = 2$  BP Landscape. We see secant states which are not boundary and viceversa (a), regions in which S:B are in a 1:1 ratio (b) and regions in which S:B are in a 2:1 ratio (c).

boundary if it has negative cosmological constant. So we are interested mainly in the states which are both secant **and** boundary, because all the states in the Weinberg Window are in this category. Figure 2.1 illustrates the differences between these two kinds of cells.

Our strategy would be as follows. We will count the states in the Weinberg Window using the following elementary formula:

$$\mathcal{N}_{\text{WW}} = \frac{1}{2} \mathcal{N}_{\text{S}} P(\Lambda \in \text{WW}), \quad (2.13)$$

where

- $\mathcal{N}_{\text{WW}}$  is the number of states in the Weinberg Window,
- $\mathcal{N}_{\text{S}}$  is the total number of secant states,
- the  $\frac{1}{2}$  factor is the (first-order) approximate fraction of positive cosmological constant secant states,
- $P(\Lambda \in \text{WW})$  is the probability that a random secant state has a positive cosmological constant in the Weinberg Window. If we call a number of the size of  $10^{-120}$   $\Lambda_{\text{WW}}$ , then

$$P(\Lambda \in \text{WW}) = P(0 < \Lambda < \Lambda_{\text{WW}}), \quad (2.14)$$

where the probability must be computed using the distribution of the cosmological constant as a random variable over all the secant states.

In section 2.2 we firstly compute the number  $\mathcal{N}_{\text{S}}$  and then check it with simple models with two or three fluxes, where brute-force counting is feasible. In section 2.3 we propose a probabilistic model (and check it against numerical data) which leads to the distribution

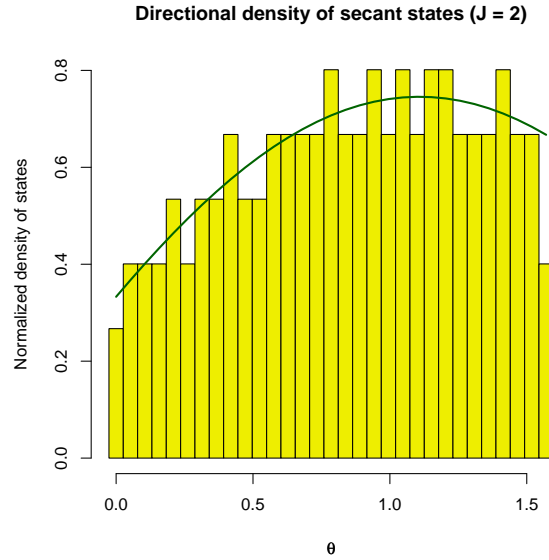


Figure 2.2: Directional density of states in the BP Landscape shown in figure 2.1 computed numerically in comparison to the continuous version  $\nu(\theta)$  of equation (2.16). All plots in this paper regarding statistical analysis were done using R [99].

of the values of the cosmological constant restricted to the secant states. We use this distribution to compute the probability (2.14) in section 2.4. Surprisingly, our results show that this more precise counting method yields the same result as the BP count. Finally, the conclusions are summarized in section 2.5.

## 2.2 Counting secant states

We begin with the observation that the number of secant states found by looking from the origin in a given direction is not a constant, as it can be seen in the histogram shown in figure 2.2. In this figure, we can also see the theoretical density of states which we now derive for the  $J = 2$  case.

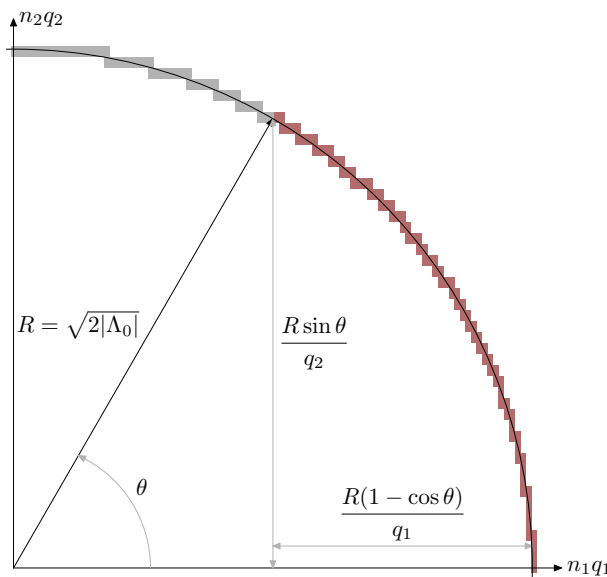
Let  $N(\theta)$  be the number of secant states on the first quadrant of a BP Landscape which are between the 1-axis and a straight line drawn at an angle  $\theta$ , as in figure 2.3. The number of states along the arc between the 1-axis and the  $\theta$ -angle line can be accurately approximated by the length of the segments which the states along the  $\Lambda = 0$  circle are covering. These lengths can be straightened as shown in figure 2.3, to yield (here we call  $R = R_0 = \sqrt{2|\Lambda_0|}$  for convenience)

$$N(\theta) = \frac{R \sin \theta}{q_2} + \frac{R(1 - \cos \theta)}{q_1}. \quad (2.15)$$

Its derivative is the directional density of states:

$$\nu(\theta) = \frac{dN}{d\theta} = R \left( \frac{\cos \theta}{q_2} + \frac{\sin \theta}{q_1} \right) = \frac{R}{\text{vol } Q} (q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta) = \frac{Rq \cdot v}{\text{vol } Q}. \quad (2.16)$$

In equation (2.16),  $\text{vol } Q = q_1 q_2$ ,  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$  and  $q = (q_1, q_2)$ . Only the first quadrant is considered here and the absolute value on the components of  $v$  must be taken if we

Figure 2.3: Construction of  $N(\theta)$ , equation (2.15).

want to extend equation (2.16) to all quadrants. The formula thus obtained is plotted in figure 2.2 over the numerical data, giving an accurately approximated density. Of course we can estimate the total number of secant states by

$$\mathcal{N}_S^{\text{theo}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \nu(\theta) d\theta = \frac{4R(q_1 + q_2)}{q_1 q_2}. \quad (2.17)$$

Using the  $J = 2$  values  $q_1 = 0.01494$ ,  $q_2 = 0.02994$  and  $\Lambda_0 = -1$ , we have  $\mathcal{N}_S^{\text{theo}} = 567.58$ , being the correct number, obtained by an exhaustive search, of 143 states, 2 of them on the axes, which gives a total of

$$\mathcal{N}_S^{\text{num}} = 4 \times 141 + 4 = 568 \approx 567.58 = \mathcal{N}_S^{\text{theo}}, \quad (2.18)$$

The two results clearly agree.

For a model with  $J = 3$ , we can see that the Voronoi cells of the secant states on the first octant project their faces over the first quadrants of planes 1-2, 1-3 and 2-3. The area of these quadrants is  $\frac{\pi}{4}R^2$  and the number of states needed to cover this total area is

$$\mathcal{N}_S^{\text{theo}} = \frac{\pi R^2}{4q_1 q_2} + \frac{\pi R^2}{4q_1 q_3} + \frac{\pi R^2}{4q_2 q_3} = \frac{\pi R^2}{4 \text{vol} Q} (q_1 + q_2 + q_3). \quad (2.19)$$

If we now take the density (2.16) and extend it to  $J = 3$ , the correct scaling will be

$$\nu(v) = \frac{R^2}{\text{vol} Q} q \cdot v, \quad (2.20)$$

where  $v$  is a norm-one vector on the  $S^2$  sphere. We can integrate this function on the first octant:

$$\frac{1}{8} \int_{S^2} \nu(v) d\Omega_2(v) = \frac{R^2}{q_1 q_2 q_3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi (q_1 \sin \theta \cos \phi + q_2 \sin \theta \sin \phi + q_3 \cos \theta). \quad (2.21)$$

The  $\phi$ -integrals have the values 1, 1,  $\frac{\pi}{2}$ , and the  $\theta$ -integrals have the values  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ , so that all integrals coincide and the result is (2.19).

Using the values  $q_1 = 0.01494$ ,  $q_2 = 0.02494$ ,  $q_3 = 0.03494$ ,  $\Lambda_0 = -1$  for the  $J = 3$  model, we have an 8-octant total number of secant states of

$$\mathcal{N}_S^{\text{theo}} = \frac{8\pi R^2}{4 \text{vol } Q} (q_1 + q_2 + q_3) \approx 72220. \quad (2.22)$$

A brute-force search of the secant states gives 9205 states on the first octant. But 3 are on the axes,  $96+135+152 = 383$  on the coordinate planes and the rest ( $9205 - 383 - 6 = 8819$ ) outside, so the total number of secant states found in this model is

$$\mathcal{N}_S^{\text{num}} = 2 \times 3 + 4 \times 383 + 8 \times 8819 = 72090. \quad (2.23)$$

In this case, the agreement is not complete but satisfactory.

The discrepancy may be caused by the sampling method of the secant states in the brute-force search. It consists on uniformly sampling the  $S_0^2$  sphere of radius  $\sqrt{2|\Lambda_0|}$  corresponding to  $\Lambda = 0$ ; each point thus sampled hits on the intersection between the sphere  $S_0^2$  and the Voronoi cell  $Q_n$  of certain secant state  $n$ . Therefore, the probability for this secant state  $n$  to be selected by this method is proportional to the *area* ( $(J-1)$ -volume) of the intersection:

$$P(n) = \frac{\text{vol}(Q_n \cap S_0^2)}{\text{vol } S_0^2}. \quad (2.24)$$

If we call the set of secant states  $\mathcal{S}$ , the complete and disjoint partition (tessellation) which the Voronoi cells induce on the sphere guarantees that this probability is normalized:

$$\sum_{n \in \mathcal{S}} P(n) = 1. \quad (2.25)$$

Thus, only the states with a bigger intersection area will be selected in a sample taken by this method. In addition, the intersection volume is positive but it does not have a positive lower bound, so in principle there can be arbitrarily small intersections which will *not* be detected by this method. In the  $J = 2$  case,  $10^4$  points were needed to find the existing 143 secant states (see figure 2.1), but using  $10^8$  points on the  $J = 3$  case yielded 9134 states of the 9205 revealed in the  $10^9$  sample. If the set  $\mathcal{S}$  contains states with a probability below  $10^{-9}$ , these will **not** be found using this method. So the agreement may increase by taking a sample size greater than  $10^9$ .

Let us extend the directional density of states (2.20) to an arbitrary dimension  $J$  and to all “quadrants”:

$$\nu(v) = \frac{R^{J-1}}{\text{vol } Q} q \cdot |v|, \quad (2.26)$$

where  $v = (v_1, \dots, v_J) \in S^{J-1}$ ,  $|v| = (|v_1|, \dots, |v_J|)$  and  $q = (q_1, \dots, q_J)$ . The number of secant states is

$$\mathcal{N}_S = \int_{S^{J-1}} \nu(v) d\Omega_{J-1}(v) = \frac{R^{J-1}}{\text{vol } Q} \sum_{i=1}^J q_i \int_{S^{J-1}} |v_i| d\Omega_{J-1}(v). \quad (2.27)$$

The integration measure on the sphere  $d\Omega_{J-1}(v)$  does not vary under  $SO(J)$  rotations, and there is a rotation which can transform a given coordinate  $v_i$  in the simplest of them,  $v_J$ , in the following choice of coordinates for the sphere:

$$v = w \sin \theta + e_J \cos \theta, \quad w \in S^{J-2}, \quad \theta \in [0, \pi], \quad (2.28)$$

where  $e_J$  is the last vector in a  $\mathbb{R}^J$  basis. The integration measure is reduced to

$$d\Omega_{J-1}(v) = \sin^{J-2} \theta d\theta d\Omega_{J-2}(w), \quad (2.29)$$

so that

$$\int_{S^{J-1}} |v_i| d\Omega_{J-1}(v) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin^{J-2} \theta d\theta \int_{S^{J-2}} d\Omega_{J-2}(w) = \frac{2 \operatorname{vol} S^{J-2}}{J-1}. \quad (2.30)$$

We then have:

$$\mathcal{N}_S = \frac{2R^{J-1} \operatorname{vol} S^{J-2}}{(J-1) \operatorname{vol} Q} \sum_{i=1}^J q_i = \frac{2R^{J-1} \bar{q} \operatorname{vol} S^{J-2}}{\operatorname{vol} Q}. \quad (2.31)$$

In a nonstandard way, we have defined the quantity

$$\frac{1}{J-1} \sum_{i=1}^J q_i = \bar{q}. \quad (2.32)$$

Equations (2.22) and (2.17) are special cases of (2.31). A more explicit form of (2.31), using  $R = \sqrt{2|\Lambda_0|}$  and  $\operatorname{vol} S^{J-2} = 2\pi^{\frac{J-1}{2}}/\Gamma(\frac{J-1}{2})$  is

$$\mathcal{N}_S = 2 \frac{[2\pi|\Lambda_0|]^{\frac{J-1}{2}} \sum_{i=1}^J q_i}{\Gamma(\frac{J+1}{2}) \prod_{i=1}^J q_i}. \quad (2.33)$$

Let us now derive the condition of validity of formulae (2.31, 2.33). Note that we are summing the number of times that a fundamental cell fits in a  $(J-1)$ -quadrant. In order for this number to represent the actual number of secant states, the excess  $(J-1)$ -volume of the cells trying to fit the boundary must be very small in comparison to the  $(J-1)$ -volume of the  $(J-1)$ -quadrant. The  $(J-1)$ -volume of the cell projection differs in each direction, so we are able to compute a kind of mean value of the projection volume as

$$\mu^{J-1} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^J q_i = \frac{\hat{q}^J}{q_H}, \quad (2.34)$$

where  $\hat{q}$  and  $q_H$  are respectively the geometric and harmonic means of the charges. This projection volume must be much less than the  $(J-1)$ -volume of a single  $(J-1)$ -quadrant:

$$\mu^{J-1} \ll \frac{1}{2^{J-1}} \frac{R^{J-1}}{J-1} \operatorname{vol} S^{J-2}. \quad (2.35)$$

After substituting  $R = \sqrt{2|\Lambda_0|}$  and  $\operatorname{vol} S^{J-2} = 2\pi^{\frac{J-1}{2}}/\Gamma(\frac{J-1}{2})$ , we find

$$J \frac{\mu^2}{|\Lambda_0|} \ll \pi e \approx 8.54. \quad (2.36)$$

### 2.3 The random hyperplane model

We assume two basic features of the secant states in a BP Landscape:

- The Voronoi cells of the secant states are small enough to replace the  $\Lambda = 0$  sphere which intersects the cell by its tangent hyperplane.
- The orientations of the hyperplane intersecting the cell are random if a secant state is randomly selected.

In this way, we propose to study the set of secant states by choosing a probability measure on the secant hyperplane set. In this section we firstly parametrize the hyperplane space, and we then choose a probability measure on it.

### 2.3.1 The hyperplane space

We define  $H$  as the set of all hyperplanes in  $\mathbb{R}^J$  and  $H_Q$  as the set of all hyperplanes with non-empty intersection with  $Q$ :

$$H_Q = \{h \in H : Q \cap h \neq \emptyset\}. \quad (2.37)$$

In order to specify a hyperplane  $h \in H_Q$  we must choose, first of all, a normal vector of unit norm,  $v \in S^{J-1}$ . A point in  $h$  must also be given; but there is an infinity of possible choices here, and we must provide a unique prescription, for example the point  $z \in h$  closest to the origin  $O$  (chosen here as the center of  $Q$ ). Note that this point  $z$  can lie inside or outside  $Q$ .

The pair  $(z, v)$  has a lot of redundant information, because the vectors  $Oz = (z_1, \dots, z_J)$  and  $v = (v_1, \dots, v_J)$  are parallel, that is,  $Oz = \pm|Oz|v$ . Therefore, we must retain only the norm of  $Oz$  and the whole  $v$ ; calling  $\rho = |Oz|$ , we can identify  $h$  with the pair  $(\rho, v)$ . We must also take into account the fact that  $v$  and  $-v$  represent different hyperplanes if  $\rho \neq 0$ , but the same hyperplane if  $\rho = 0$ , so the vector  $v$  is defined up to a sign in the case  $\rho = 0$ .

An alternative equivalent prescription is to consider directions up to a sign for all  $\rho$  (the point  $v$  is on  $S^{J-1}$  with antipodal points identified, i.e. a point on the projective space  $\mathbb{P}^{J-1}$ ). In this case,  $\rho$  does not only represent the minimum distance from the hyperplane to the origin  $O$ , but also the position of the hyperplane “above” or “below” the origin. We believe the former point of view is more adequate.

The domain of definition of  $\rho$  is a direction-dependent positive interval  $I_v = [0, \sigma(v)]$ , and is determined by the restriction that the hyperplane represented by the pair  $(\rho, v)$  with  $\rho \in I_v$  has a non-empty intersection with  $Q$ . In particular, the point  $z$  of minimum distance can lie outside  $Q$ ; thus, the “hyperplane space”, when compared with “physical” space, comprises a larger region than  $Q$ .

We will now compute  $\sigma(v)$ , defined as the maximum distance to the origin of the closest point to the origin of a hyperplane with non-empty intersection with the cell  $Q$ . Clearly, the corners of the cell are the furthest away points in  $Q$ , so for each  $v$  direction, the last or most distant hyperplane orthogonal to  $v$  and with non-empty intersection with  $Q$  must contain one of the  $2^J$  cell’s corners. Such a hyperplane is defined by the equation

$$v \cdot (x - c_v) = 0, \quad (2.38)$$

where  $c_v = \frac{1}{2}(s_1 q_1, \dots, s_J q_J)$  is the unique corner out of  $2^J$  which belongs to the same  $J$ -quadrant as  $v$ , and the  $s_j$  are signs  $\pm 1$ , indeed the same signs of the components of

$v$ , that is,  $v = (s_1|v_1|, \dots, s_J|v_J|)$ . This hyperplane is already in its normal form, so its minimum distance to the origin is

$$\sigma(v) = v \cdot c_v = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J q_j s_j^2 |v_j| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J q_j |v_j| = \frac{1}{2} q \cdot |v|. \quad (2.39)$$

Given a direction  $v$ , the closest point can be found as the intersection of the line  $x = vt$  with the hyperplane (2.38). This method is used to construct the hyperplane space for the  $J = 2$  case in figure 2.4, where it is compared with formula (2.39). The function  $\sigma(v)$

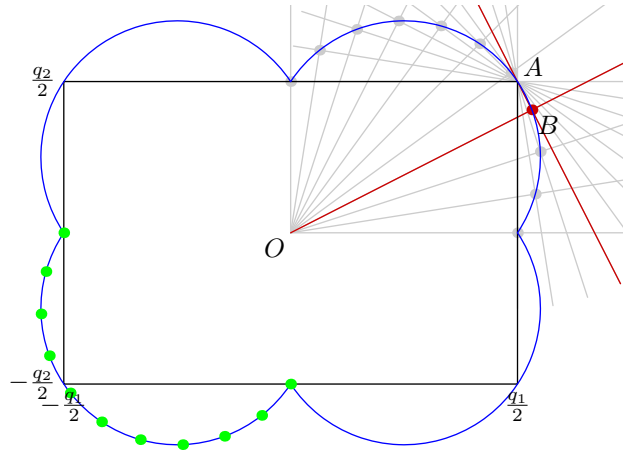


Figure 2.4: Construction of the hyperplane space in the  $J = 2$  case. The blue contour comprises all points which represent a different hyperplane intersecting the cell. Here, the corner  $A$  is used to construct the first quadrant part of the contour, and  $\sigma = |OB|$ . The green points have been generated using formula (2.39) on the third quadrant.

can be plotted for  $J = 2$  and  $q_1 = 0.01494$ ,  $q_2 = 0.02994$ , versus a polar angle  $\theta$  defined as  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ , see figure 2.5.

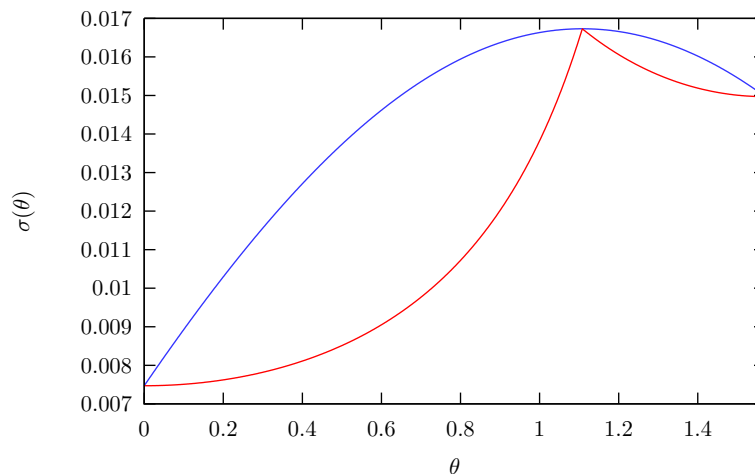


Figure 2.5: The function  $\sigma$  (blue) in the  $J = 2$  case, with  $q_1 = 0.01494$ ,  $q_2 = 0.02994$  and  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ . The cell boundary is also displayed (red). The corner is at  $\theta_0 = \arctan \frac{q_2}{q_1}$ , and is the maximum of  $\sigma$ .



### 2.3.2 A probability measure in the hyperplane space

Now we need to define a probability measure on the hyperplane space just parametrized. The simplest choice is the uniform probability on  $H_Q$ :

$$dP(h) = dP(\rho, v) = K^{-1} \chi_{H_Q}(h) d\rho d\Omega_{J-1}(v), \quad (2.40)$$

where  $\chi_{H_Q}(h)$  is the characteristic function on  $H_Q$ , whose effect is simply to restrict the integration domain to  $H_Q$ , and  $d\Omega_{J-1}(v)$  is the volume measure in  $S^{J-1}$ .  $K$  is a normalization constant:

$$K = \int_{H_Q} d\rho d\Omega_{J-1}(v). \quad (2.41)$$

We can compute  $K$  by firstly integrating out the  $\rho$  variable in (2.41):

$$K = \int_{S^{J-1}} \int_0^{\sigma(v)} d\rho d\Omega_{J-1}(v) = \int_{S^{J-1}} \sigma(v) d\Omega_{J-1}(v). \quad (2.42)$$

By comparing equations (2.26) and (2.39) we observe the following relation between the maximum distance of a hyperplane in a given direction  $\sigma(v)$  and the directional density of states  $\nu(v)$ :

$$\sigma(v) = \frac{1}{2} \frac{\text{vol } Q}{R^{J-1}} \nu(v), \quad (2.43)$$

so that using the definition of the density of states

$$\mathcal{N}_S = \int_{S^{J-1}} \nu(v) d\Omega_{J-1}(v) \quad (2.44)$$

we have

$$K = \int_{S^{J-1}} \sigma(v) d\Omega_{J-1}(v) = \frac{\mathcal{N}_S \text{vol } Q}{2 R^{J-1}} = \bar{q} \text{vol } S^{J-2}. \quad (2.45)$$

In the last formula we have substituted the expression for  $\mathcal{N}_S$  found in equation (2.31).

The main reason for choosing the uniform probability measure is its simplicity. The physical reason is that among all measures in a given compact space, the uniform measure has maximum Shannon entropy. In the following, we will justify our choice by more quantitative means.

First of all, the marginal probability in the  $v$  variable associated with the uniform measure is proportional to the directional density of states  $\nu(v)$ , with a normalization-to-one factor:

$$\int_{\rho \in [0, \sigma(v)]} dP(\rho, v) = \frac{d\Omega_{J-1}(v)}{K} \int_0^{\sigma(v)} d\rho = \frac{2 R^{J-1}}{\mathcal{N}_S \text{vol } Q} \sigma(v) d\Omega_{J-1}(v) = \frac{\nu(v)}{\mathcal{N}_S} d\Omega_{J-1}(v). \quad (2.46)$$

Therefore, the uniform probability reproduces the correct directional density of states as observed in the numerical experiments.

On the other hand, we can plot instances of the set of secant hyperplanes and compare them with simulated uniform points in hyperplane space. The simplest of such plots is for  $J = 2$ ; with  $\Lambda_0 = -1$  and charges  $q_1 = 0.001494$ ,  $q_2 = 0.002994$ , we show the  $(\theta, \rho)$  points from the actual secant hyperplanes versus a simulated set of uniform points of equal sample size in figure 2.6.

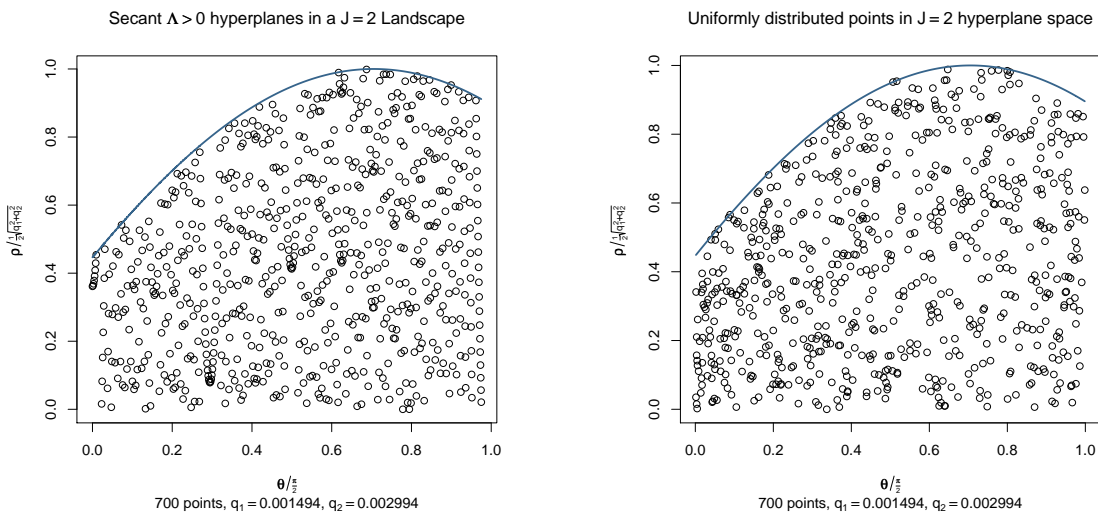


Figure 2.6: Actual secant hyperplane plot of a  $J = 2$  Landscape in hyperplane space (*geometric* sample, left) and a uniformly distributed sample in the same domain (*simulated* sample, right). Note the structures in the former, and the bigger voids and clusters in the latter.

The geometrical nature of the secant hyperplane sample is revealed in the structures shown in fig. 2.6 (left), which introduces correlations in the spatial sequence. In contrast, a uniform sample in hyperplane space (fig. 2.6, right) shows no correlations, and the only structures which we can see are bigger voids and clusters than the ones present in the former case.

Both samples thus obtained (the secant hyperplane set, or *geometric* sample, and the uniformly distributed points, or *simulated* sample) cover the hyperplane space, so we can approximate the distribution of the former set of points by a uniform probability, thus neglecting the spatial correlations.

But the efficiency of the covering is not equal in both cases: the geometrical sample shows smaller voids and clusters than the simulated one. This can be seen by counting the number of points inside a circle of random position and given radius inside the hyperplane space in both cases (fig. 2.7 illustrates this “circle method”). When this is done for a big number of such circles, the voids and clusters induce a fluctuation in the number of “inner” points, which will be greater if the inhomogeneities are bigger. Fig. 2.8 shows the result presented as two histograms of the number of inner points for  $10^3$  circles. These can be well approximated by Gaussians, and we can see that the variance of the simulated sample is bigger than the variance of the geometric one: that is, the geometric points cover hyperplane space with a more regular (less random) pattern, in such a way that each point tries to avoid the clusters and tends to fill the gaps, a characteristic behavior of the so-called quasi Monte Carlo (qMC) sequences [100].

Putting the comparison in a more quantitative fashion, the mean and standard deviation of the geometric and simulated samples are

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Geo}} &= 6.697, & \mu_{\text{Sim}} &= 5.787, \\ \sigma_{\text{Geo}} &= 2.185, & \sigma_{\text{Sim}} &= 2.474. \end{aligned} \quad (2.47)$$

The different mean values with the same number of points indicate that the density of points is not the same in both samples. This happens because the spatial correlations

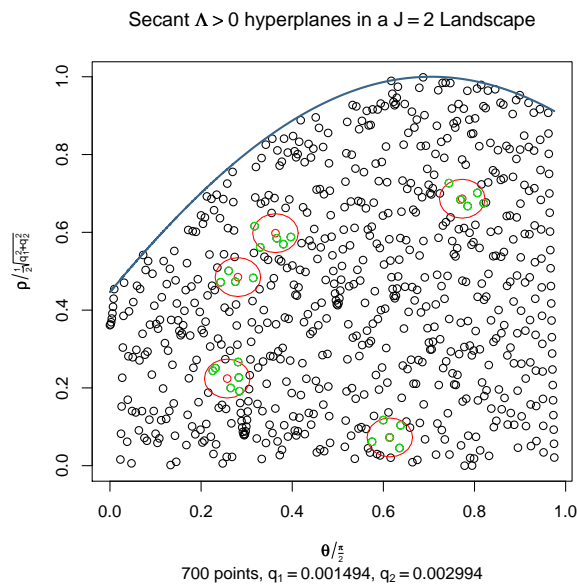


Figure 2.7: Illustration of the circle method to measure the distribution of the voids and clusters. Small circles are thrown randomly inside hyperplane space. Green points are the sample points inside the circles; red points are the random centers of the circles.

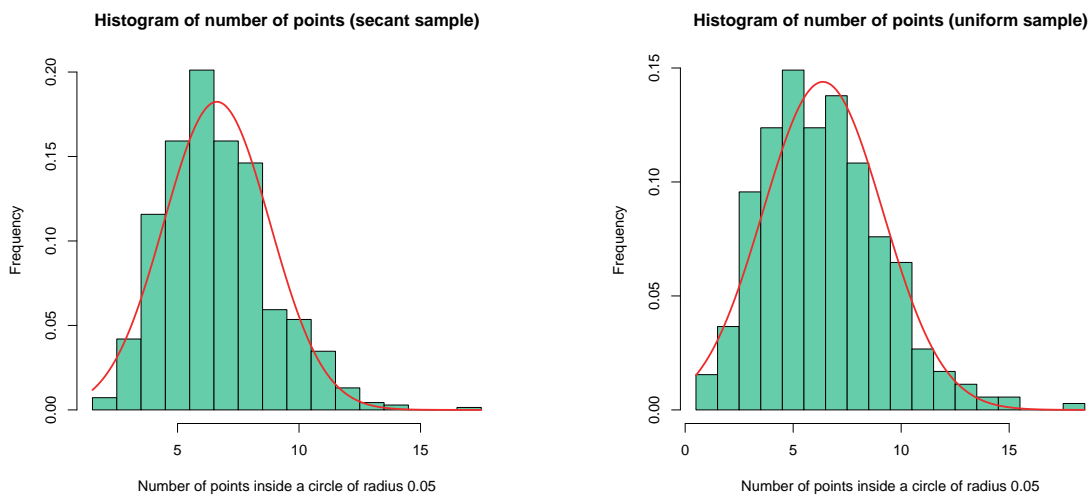


Figure 2.8: Histograms of the number of points inside a random circle in the geometric (left) and simulated (right) cases. Both are well described by a Gaussian; for a comparison, see text.

in the geometric case make the left and right sides underpopulated (see fig. 2.6), so that the effective volume covered in this case is smaller. We can take this into account by considering the quotient between the standard deviation and the mean as a measure of the clustering of the data, which is an effective scaling of the data to have mean value 1. This leads to

$$\frac{\sigma_{\text{Geo}}}{\mu_{\text{Geo}}} = 0.326, \quad \frac{\sigma_{\text{Sim}}}{\mu_{\text{Sim}}} = 0.428. \quad (2.48)$$

This means that the fluctuation in the point density is greater for the simulated sample. The relative difference is considerable (near 30%). This indicates that the covering of the hyperplane space by the geometric sample is much more efficient than the covering made by the simulated one, and thus its randomness is much smaller.

Summarizing, the approximation made by assuming uniformity in the distribution of secant hyperplanes is equivalent to neglecting the spatial correlations present in the geometric case, and we can expect this approximation to work well because of the more efficient covering of hyperplane space in this case.

## 2.4 Number of states in the Weinberg Window

The next step in our calculation is to compute the distribution of values of the cosmological constant. The random hyperplane model allows us to do this by means of the marginal probability distribution in the  $\rho$  variable, whose density will be called  $\omega(\rho)$ :

$$\int_{v \in S^{J-1}} dP(\rho, v) \equiv \omega(\rho) d\rho. \quad (2.49)$$

Using the following relation between  $\rho$  (the minimum distance from a tangent hyperplane to their secant state),  $R = \sqrt{2|\Lambda_0|}$  (the radius of the  $\Lambda = 0$  sphere) and the Euclidean norm of the secant state in flux space (which in turn is related to the cosmological constant)

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\sum_{i=1}^J q_i^2 n_i^2} = R + \rho \\ \Lambda = \Lambda_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^J q_i^2 n_i^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho(\Lambda) = \sqrt{2(\Lambda - \Lambda_0)} - \sqrt{2|\Lambda_0|}, \quad (2.50)$$

the  $\Lambda$  distribution can be found once the function  $\omega(\rho)$  is computed:

$$f(\Lambda) d\Lambda = \omega[\rho(\Lambda)] \frac{d\rho}{d\Lambda} d\Lambda = \omega[\rho(\Lambda)] \frac{d\Lambda}{\sqrt{2(\Lambda - \Lambda_0)}}. \quad (2.51)$$

The  $\omega$  function is easily computed once the integration of the characteristic function in the  $(\rho, v)$  variables is reversed. The  $\rho$  variable takes a maximum value  $\sigma_{\text{max}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^J q_i^2}$ , and the  $v$  variable can range across  $S^{J-1}$ . So we define the integral of an arbitrary test function  $\phi(h)$  on the hyperplane space  $H_Q$  against the probability measure  $dP(h)$  as

$$\int_{H_Q} \phi(h) dP(h) = \frac{1}{K} \int_{(\rho, v) \in [0, \sigma_{\text{max}}] \times S^{J-1}} \chi_{H_Q}(\rho, v) \phi(\rho, v) d\rho d\Omega_{J-1}(v). \quad (2.52)$$

For the iterated integrals, we have the following identity<sup>3</sup> (Fubini's theorem):

$$\int_0^{\sigma_{\max}} d\rho \int_{\mathcal{J}_\rho} d\Omega_{J-1}(v) \phi(\rho, v) = \int_{S^{J-1}} d\Omega_{J-1}(v) \int_{\mathcal{I}_v} d\rho \phi(\rho, v), \quad (2.53)$$

where the sets  $\mathcal{I}_v \subset [0, \sigma_{\max}]$  and  $\mathcal{J}_\rho \subset S^{J-1}$  appear owing to  $\chi_{H_Q}$ , and are defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_v &= \{\rho \in [0, \sigma_{\max}]: (\rho, v) \in H_Q\} = \{\rho \in [0, \sigma_{\max}]: 0 \leq \rho \leq \sigma(v)\} = [0, \sigma(v)], \\ \mathcal{J}_\rho &= \{v \in S^{J-1}: (\rho, v) \in H_Q\} = \{v \in S^{J-1}: \sigma(v) \geq \rho\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Note that the restrictions in both sets are the same,  $\rho \leq \sigma(v)$ , but in  $\mathcal{I}_v$  the direction  $v$  remains fixed, and in  $\mathcal{J}_\rho$  the distance  $\rho$  remains fixed. So,  $\mathcal{I}_v$  is simply the interval  $[0, \sigma(v)]$  used in the integral (2.46), and  $\mathcal{J}_\rho$  is a set which is the whole sphere when  $\rho \leq \frac{1}{2} \min\{q_j\}$  and a  $2^J$ -connected-component set when  $\rho > \frac{1}{2} \max\{q_j\}$ . If we carry out the  $v$  integration of  $dP(\rho, v)$  but we stop before the  $\rho$  integration, we have

$$\omega(\rho) = \frac{1}{K} \int_{\mathcal{J}_\rho} d\Omega_{J-1}(v). \quad (2.55)$$

To compute the integral in (2.55) in closed form is a difficult task, and even if it were easy, it would be useless, because the function  $\omega$  is built by gluing polynomial functions in a  $J$ -dependent number of intervals.

Let us compute  $\omega$  for the simplest  $J = 2$  case. The set  $\mathcal{J}_\rho$  is an interval, which can be computed from the  $\sigma$  function which represents the upper boundary of hyperplane space, see fig. 2.5. A horizontal line at height  $\rho$  has two, one or no intersection with  $\sigma(v)$  in the first quadrant depending on  $\rho$ . Taking  $q_1 < q_2$ , there are no intersection points if  $\rho < \frac{q_1}{2}$ , there is a single intersection point if  $\frac{q_1}{2} < \rho < \frac{q_2}{2}$  and there are two intersection points if  $\frac{q_2}{2} < \rho < \sigma_{\max}$ . The equation to be solved for the intersection points in the first quadrant is (remember that in  $J = 2$  we have  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ )

$$\rho = \frac{1}{2} [q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta]. \quad (2.56)$$

Setting  $x = \cos \theta$ , we have a quadratic equation whose solution has two branches:

$$x_{\pm} = \frac{1}{\sigma_{\max}^2} \left[ \frac{q_1}{2} \rho \pm \frac{q_2}{2} \sqrt{\sigma_{\max}^2 - \rho^2} \right]. \quad (2.57)$$

These branches only make sense for  $\rho \geq \frac{q_1}{2}$  (for  $x_+$ ) and for  $\rho \geq \frac{q_2}{2}$  (for  $x_-$ ). We define  $\theta_{\pm} = \cos^{-1} x_{\pm}$ , so we have, only in the first quadrant,

$$\mathcal{J}_\rho = \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}] & \text{if } \rho \leq \frac{q_1}{2}, \\ [\theta_+, \frac{\pi}{2}] & \text{if } \frac{q_1}{2} \leq \rho \leq \frac{q_2}{2}, \\ [\theta_+, \theta_-] & \text{if } \frac{q_2}{2} \leq \rho \leq \frac{1}{2} \sqrt{q_1^2 + q_2^2} = \sigma_{\max}. \end{cases} \quad (2.58)$$

The  $\omega$  function is, then,

$$\omega(\rho) = \frac{1}{K} \begin{cases} 2\pi & \text{if } \rho \leq \frac{q_1}{2}, \\ 2\pi - 4\theta_+(\rho) & \text{if } \frac{q_1}{2} \leq \rho \leq \frac{q_2}{2}, \\ 4[\theta_-(\rho) - \theta_+(\rho)] & \text{if } \frac{q_2}{2} \leq \rho \leq \frac{1}{2} \sqrt{q_1^2 + q_2^2} = \sigma_{\max}. \end{cases} \quad (2.59)$$

<sup>3</sup>In equation (2.53), we drop the constant  $K$  computed in (2.45).

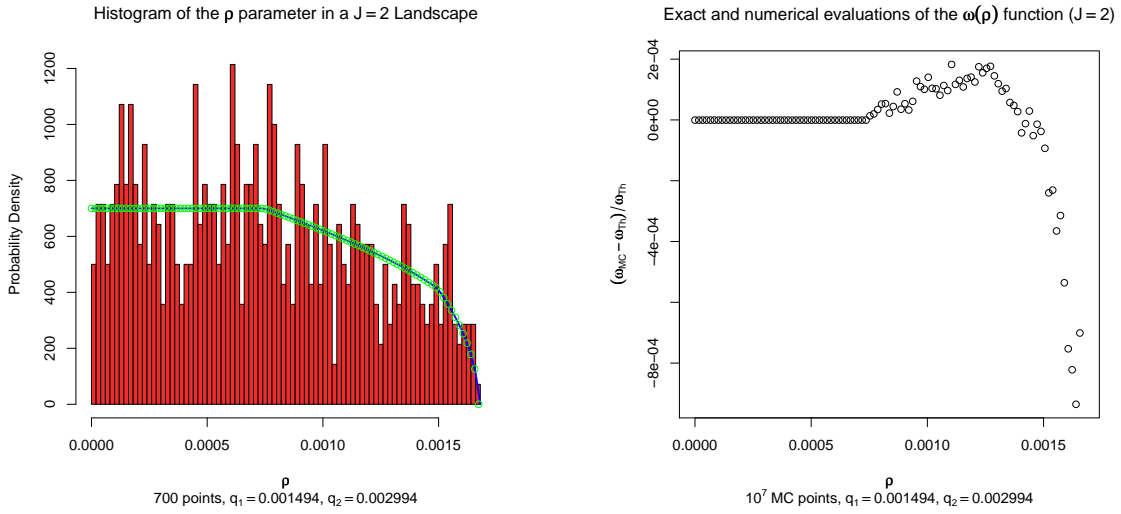


Figure 2.9: Histogram of the  $\rho$  parameter in a  $J = 2$  Landscape. The solid line is the  $\omega$  function computed using eq. (2.59), the points represent the Monte Carlo computation of the  $\omega$  integral (left). Relative error between the numerical and exact evaluations of the  $\omega$  function in the  $J = 2$  case. The MC integration used  $10^7$  points in the circle  $S^1$  (right).

With  $J = 2$ ,  $K = 2(q_1 + q_2)$ , and taking  $\Lambda_0 = -1$  and charges  $q_1 = 0.001494$ ,  $q_2 = 0.002994$ , we can plot this function and compare it with the true  $\rho$  histogram of the secant states; this is done in figure 2.9 (left), where we see big fluctuations of the number of states versus the theoretical  $\omega$  function. This strong fluctuation is a consequence of the relative sparsity of this Landscape. The small sample size makes the histogram oscillate around the theoretical curve; we believe that this effect is only present in  $J = 2$ , as can be seen in the subsequent figures.

In figure 2.9 (right) we can see the relative error between the exact formula (2.59) and the Monte Carlo evaluation explained below (eq. (2.61)). They agree in the constant region, and the error remains smaller than  $10^{-3}$  for all values.

We can compute the values of the  $\omega$  function numerically by rewriting it in the following way, using the unit step function  $\theta(x)$  for restricting the integrand to  $\mathcal{J}_\rho$  and the formula (2.45) for the normalization constant  $K$ :

$$\omega(\rho) = \frac{\text{vol } S^{J-1}}{\bar{q} \text{vol } S^{J-2}} \int_{S^{J-1}} \theta[\sigma(v) - \rho] \frac{d\Omega_{J-1}(v)}{\text{vol } S^{J-1}}. \quad (2.60)$$

Thus,  $\omega$  is proportional to the mean value of the step function with respect to the uniform probability measure on the sphere. This mean value is easily computed using a simple Monte Carlo technique, that is, sampling the unit sphere with a large number  $N$  of points  $v^{(i)}$ , we have

$$\omega(\rho) \approx \frac{\text{vol } S^{J-1}}{\bar{q} \text{vol } S^{J-2}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta[\sigma(v^{(i)}) - \rho]. \quad (2.61)$$

The Monte Carlo evaluation is well suited for this task, because the integrand is bounded and the integration domain is compact.

In fig. 2.10 we can see the MC-computed  $\omega$  distribution for Landscapes with  $J = 3$  and  $J = 4$ , where brute-force data are available. The  $J = 3$  oscillates much more than

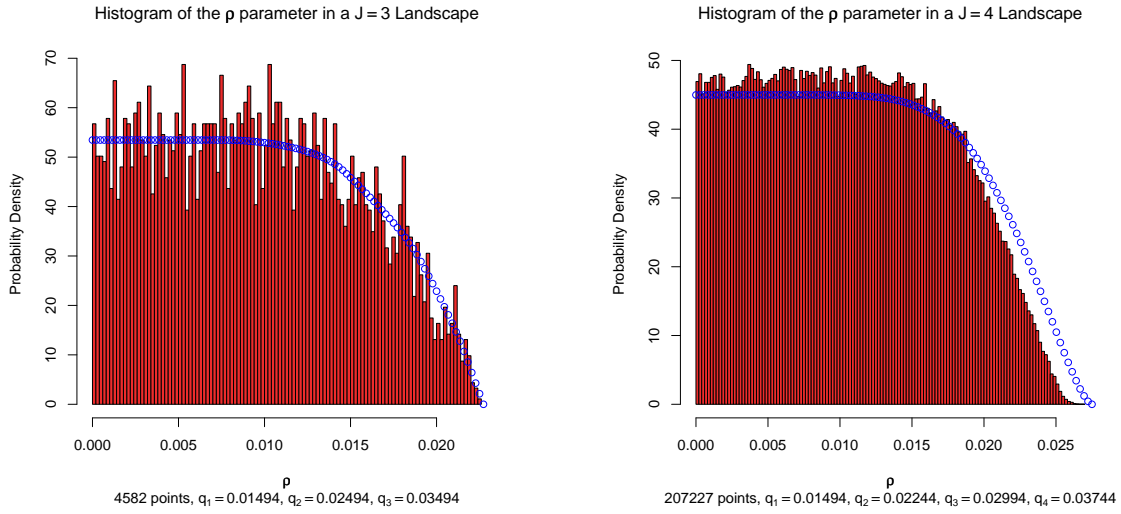


Figure 2.10: Histograms of brute-force search for secant states compared with the MC-computed  $\omega$  curve for Landscapes with  $J = 3$  (left) and  $J = 4$  (right). See text for an explanation of the differences.

the  $J = 4$  one, due in part to the bin width, which contributes to make the histogram smoother with a bigger sample size. But the mean value in the constant region (as well as the global fit to the entire theoretical curve) seems to be better adjusted in the  $J = 3$  case. The reason for this apparent disagreement between the brute-force data in  $J = 4$  and the theoretical MC-computed  $\omega$  curve is the sampling method used to find the secant states in this case. This sampling method, described above (see section 2.2), has the disadvantage of missing the states with a very small area of the intersection polytope between the  $\Lambda = 0$  sphere and the Voronoi cell of the secant state. Using eq. (2.31), we can estimate the number of missing states; with  $\Lambda_0 = -1$ ,  $q_1 = 0.01494$ ,  $q_2 = 0.02244$ ,  $q_3 = 0.02994$ ,  $q_4 = 0.03744$ , we have

$$\mathcal{N}_{S,J=4}^{\text{theo}} = 6,605,383 \text{ secant states.} \quad (2.62)$$

The brute force calculation yielded 406,715 states in the first 4-quadrant; taking into account degeneracies (the degeneracy of each state is  $g = 2^{4-z}$ , being  $z \in \{0, 1, 2, 3\}$  the number of zero-flux components), we obtain

$$\mathcal{N}_{S,J=4}^{\text{brute-force}} = 6,245,948 \text{ secant states.} \quad (2.63)$$

Their difference divided by the mean degeneracy is

$$\frac{\mathcal{N}_{S,J=4}^{\text{theo}} - \mathcal{N}_{S,J=4}^{\text{brute-force}}}{\langle g \rangle} = 23,405 \text{ first 4-quadrant secant states.} \quad (2.64)$$

These states amount to 5.4% of the total, and they lie completely in the high- $\rho$  region. This is the reason why the theoretical curve disagrees with the histogram in the  $J = 4$  case: the histogram is normalized to have total area one and it misses 5% of states of higher  $\rho$ , so we must conclude that the data range of the histogram must be shorter and its constant region must be higher, as shown in fig. 2.10.

But we don't need the numerical evaluation to analyze the  $\omega$  function. From eq. (2.59) we can see that when  $\rho \leq \frac{1}{2} \min \{q_i\}$ , the value of the step function is always 1, so we have the following exact result

$$\omega(\rho) = \frac{\text{vol } S^{J-1}}{\bar{q} \text{ vol } S^{J-2}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{J-1}{2}\right)}{\bar{q} \Gamma\left(\frac{J}{2}\right)} \quad \text{for } \rho \leq \frac{1}{2} \min \{q_i\}, \quad (2.65)$$

that is, the distribution of  $\rho$  values is *exactly* constant at small  $\rho$ ,  $\rho \leq \frac{1}{2} \min \{q_i\}$ . Beyond this value, the step function finds regions where  $\sigma(v) < \rho$ , and the mean value begins to decrease monotonically. When  $\rho \geq \sigma_{\max}$ , no point in the sphere is captured by the step function, and  $\omega$  vanishes. We have checked this general behavior on high-dimensional BP models before and after performing the BT decay chain and this qualitative profile is quite robust [101].

As the authors of [91] point out, actual histograms of  $\Lambda$  on particular BP Landscapes show a ‘‘jagged’’ behavior which gets smoothed when the bin width increases, but the mean value of these oscillations is given by  $\omega$ . Note that  $\Lambda$  is a really *discrete* variable, and  $\omega$  is the density of a continuous one. Furthermore, note that in [91] the authors compile statistics on entire Landscape instances, while our statistics refer to the positive  $\Lambda$  secant state sector only.

So we find that  $\omega$  behaves as a Fermi-like distribution on the  $\rho$  values, with a medium filling level and a decreasing interval which depend on the values of the charges. Further quantitative analysis must be done through the numerical estimation procedure described above.

Now, we can compute the probability for the cosmological constant to lie in the Weinberg Window, using the properties of  $\omega$  and formula (2.51):

$$\begin{aligned} P(0 \leq \Lambda \leq \Lambda_{\text{WW}}) &= \int_0^{\Lambda_{\text{WW}}} f(\Lambda) d\Lambda = \frac{\text{vol } S^{J-1}}{\bar{q} \text{ vol } S^{J-2}} \underbrace{\int_0^{\Lambda_{\text{WW}}} \frac{d\Lambda}{\sqrt{2(\Lambda - \Lambda_0)}}}_{\rho(\Lambda_{\text{WW}}) \approx \frac{\Lambda_{\text{WW}}}{\sqrt{2|\Lambda_0|}} = \frac{\Lambda_{\text{WW}}}{R}} \\ &= \frac{\text{vol } S^{J-1} \Lambda_{\text{WW}}}{R \bar{q} \text{ vol } S^{J-2}}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

After inserting this in formula (2.13), together with eq. (2.31), we have

$$\mathcal{N}_{\text{WW}} = \frac{1}{2} \times \frac{2R^{J-1} \bar{q} \text{ vol } S^{J-2}}{\text{vol } Q} \times \frac{\text{vol } S^{J-1} \Lambda_{\text{WW}}}{R \bar{q} \text{ vol } S^{J-2}} = \frac{R^{J-2} \text{ vol } S^{J-1} \Lambda_{\text{WW}}}{\text{vol } Q}. \quad (2.67)$$

This result coincides exactly with the BP count (eq. (2.5)).

One may wonder if the approximations made by the random hyperplane model are too crude to achieve a better result than the BP count, or if the BP count is a better result than expected. In order to clarify this point, we have performed again a numerical experiment to compare the number of states predicted by the BP (and our) count with a brute-force search of states in a shell of variable width (that is, varying  $\Lambda_{\text{WW}}$ ) in a  $J = 3$  Landscape with 2,333 secant states in the first octant. In our opinion, the nature of the example chosen would render the approximations made too crude, but we find a remarkable agreement, as shown in fig. 2.11, and in a range of shell widths much wider than expected.



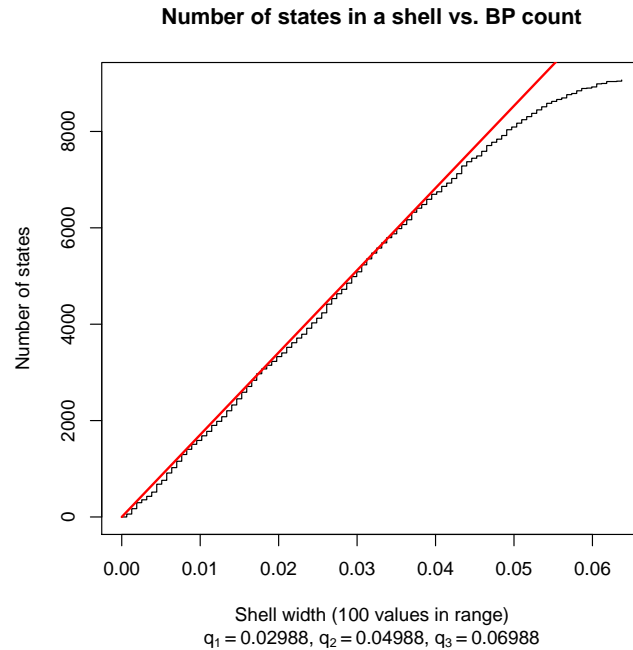


Figure 2.11: Comparison between an actual count of the number of states in a shell of variable width (stair-like line) and the number predicted by the BP count (plain line).

We are forced to conclude that the BP count has proved to be a successful way of counting states in the BP Landscape, in fact better than expected. The geometric interpretation is curious; if we sum up the volume of the Voronoi cells of the secant states whose center is inside a shell of prescribed width, we obtain the volume of the shell with very good approximation. In figure 2.12 we illustrate the spatial location of the states inside the shell for chosen shell widths in the  $J = 3$  Landscape of the previous example. These locations are uncorrelated for low values of the shell width.

## 2.5 Conclusions and future directions

We have modeled the BP Landscape by means of the random hyperplane model (RHM), validated by several numerical experiments like brute-force search and precise state counting. The RHM provides us with a distribution of values of the cosmological constant and reproduces the BP count in a very different way. The numerical experiments performed suggest that the BP count is much more precise than expected, far better than the BY count, for example, and is applicable to a wide range of parameters of the Landscape.

Further corrections of this formula can take into account the asymmetry of the  $\Lambda > 0$  and  $\Lambda < 0$  states due to the curvature of the  $\Lambda = 0$  sphere (neglected here), which is a second order effect which depends on the precise values for the charges. For us, it is certainly more difficult to take into account the spatial correlations, which would require a completely different approach.

All these considerations lie in the context of finding an *a priori* distribution of the cosmological constant, without any reference to the dynamics of the BT decay chain. In our future research we will try to incorporate the dynamical effects as well, in order to count also the states selected by dynamics and to quantify the dynamical selection

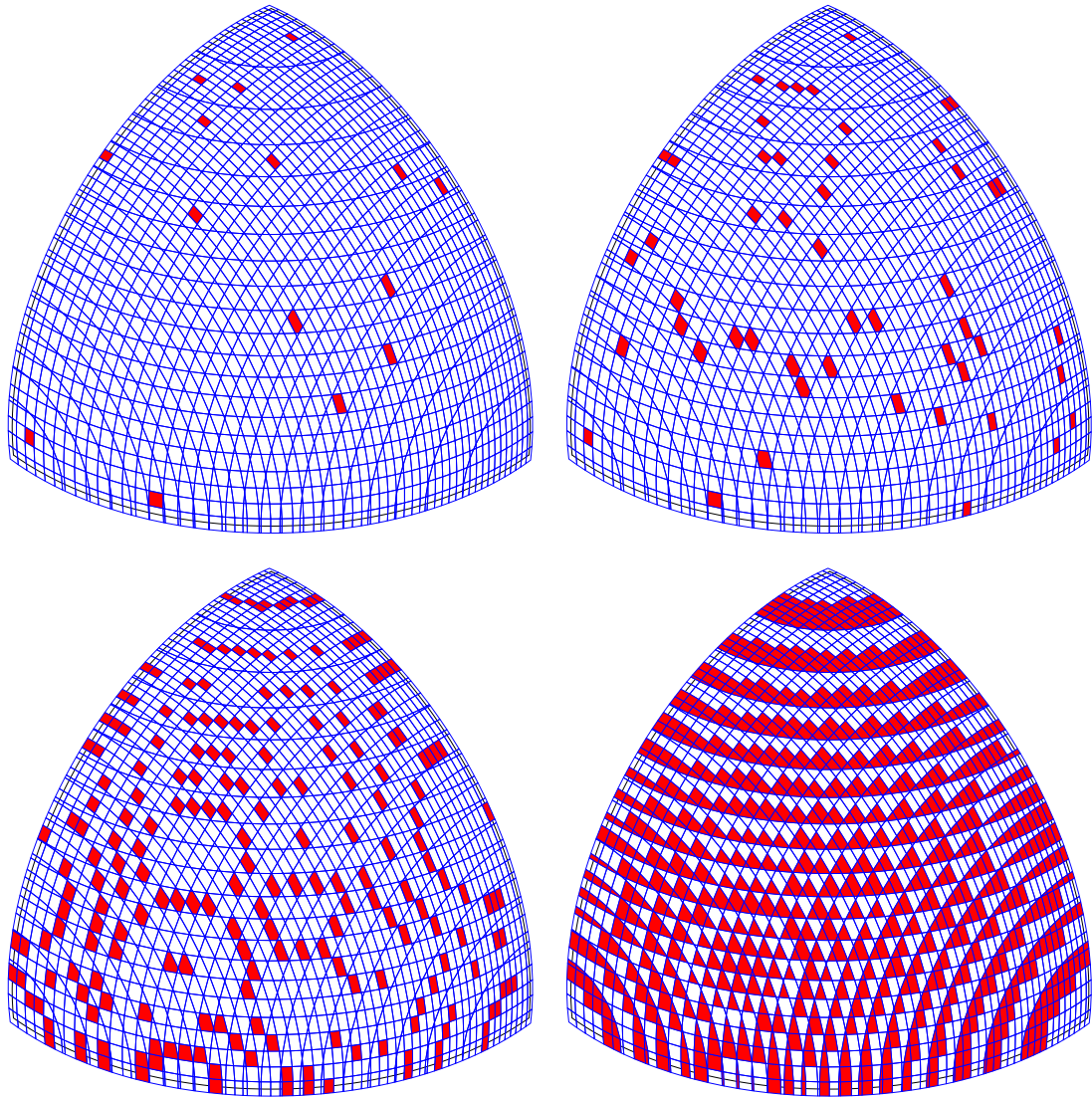


Figure 2.12: The blue lines represent the tessellation induced by the Voronoi cells of the secant states in the first octant (whose boundary is depicted by a black line) of the  $\Lambda = 0$  sphere. Each tessella corresponds to a secant state. The red tessellas have centers inside a shell of width 0.001 (top left), 0.003 (top right), 0.01 (bottom left) and 0.07 —all secant states with  $\Lambda > 0$ — (bottom right).

effect within this framework. In this respect, we have checked by extensive numerical simulations that the Fermi-like profile of the  $\omega$  distribution on the secant states persists even on a subset selected by the BT decay chain [101]. If this effect reveals a feature of the dynamical selection or is caused by the geometric structure of the set of secant states is a point which is worth of further investigation.

## 2.6 Improving the BP count

We can slightly improve the result obtained using eq. (2.13) and the random hyperplane model (RHM) described above. The first heuristic approach is to replace the  $\frac{1}{2}$  factor in (2.13) by a measure of the volume of a shell above and below the  $\Lambda = 0$  surface in flux space. This surface is a sphere of radius  $R = \sqrt{2|\Lambda_0|}$ . We will call the inside region of this sphere  $\mathcal{B}^J(R)$  and its volume  $\text{vol } \mathcal{B}^J(R) = V^J(R) = \frac{R^J}{J} \text{vol } S^{J-1}$ . We can draw a shell of width  $\epsilon$  above the sphere and another shell of the same width below. Then, the relative volume  $\eta$  of the positive- $\Lambda$  region in the shell is given by the quotient of the volume of the upper shell and the total volume of the two shells:

$$\eta = \frac{V^J(R + \epsilon) - V^J(R)}{V^J(R + \epsilon) - V^J(R - \epsilon)} = \frac{\left(1 + \frac{\epsilon}{R}\right)^J - 1}{\left(1 + \frac{\epsilon}{R}\right)^J - \left(1 - \frac{\epsilon}{R}\right)^J}. \quad (2.68)$$

In the limit  $\epsilon \rightarrow 0$  or  $R \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow \frac{1}{2}$  which is eq. (2.13), and for the special case  $\epsilon = R$  (when the inner shell completely fills  $\mathcal{B}^J(R)$ )  $\eta = 1 - 2^{-J}$ , which is arbitrarily close to 1 for high enough  $J$ . So we are replacing the  $\frac{1}{2}$  by a quantity  $\frac{1}{2} < \eta < 1$ , and therefore the improvement is small.

It remains to determine what the relevant width  $\epsilon$  is. To this end we use the RHM: the distribution  $\omega(\rho)$  has a Fermi-like profile, and thus we can define a kind of ‘‘Fermi level’’ as the width  $\rho_0$  of a step function distribution that has the same height  $\omega_0 = \omega(0)$  as  $\omega$  and is also normalized to one, that is,  $\omega_0 \rho_0 = 1$ . Thus  $\epsilon = \rho_0 = \frac{1}{\omega_0}$  can play the role of the effective width of the secant state set.

Another possible approach which also takes into account the difference in the volumes of the inner and outer shells is to modify the probability measure in hyperplane space (2.40) and so the RHM itself. Note that the  $\rho$  variable is the distance between the tangent hyperplane and the secant state, so that  $R + \rho$  is the radial spherical coordinate in flux space of the point in the hyperplane closest to the secant state. Therefore the natural modification in the probability measure (2.40) would be

$$dP(h) = dP(\rho, v) = K^{-1} \chi_{H_Q}(h) (R + \rho)^{J-1} d\rho d\Omega_{J-1}(v). \quad (2.69)$$

In this alternative viewpoint of the RHM the  $\rho$  variable can be positive or negative, but the weights of the two possibilities are different because the marginal distribution in the  $\rho$  variable is not symmetric:

$$\int_{v \in S^{J-1}} dP(\rho, v) = K^{-1} (R + \rho)^{J-1} \omega(\rho) d\rho, \quad (2.70)$$

where  $\omega$  is the same function as before extended to negative values of  $\rho$  by symmetry  $\omega(-\rho) = \omega(\rho)$ . Now, we change eq. (2.13) by

$$\mathcal{N}_{\text{WW}} = \mathcal{N}_S P(0 < \Lambda < \Lambda_{\text{WW}}), \quad (2.71)$$

because the new probability distribution carries the difference between the positive and negative  $\Lambda$  states.

As long as  $\rho \ll R$ , this modification will be harmless and the new probability will be exactly half the old one, recovering (2.13). But if  $\rho$  takes on high values, then the asymmetry will be enormous: the distribution (2.70) will develop a sharp peak in the positive  $\rho$  region, far away from the Weinberg Window.

To see how this phenomenon can happen, we can remember that  $\rho$  is bounded by its maximum value  $\sigma_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_i q_i^2}$ , which behaves as  $\frac{1}{2}\sqrt{J}\tilde{q}$ , being  $\tilde{q}$  the square root of the second moment of the charges. The extreme case  $\sigma_{\max} \sim R$  can be written as

$$J \frac{\tilde{q}^2}{|\Lambda_0|} \sim (2\sqrt{2})^2 = 8. \quad (2.72)$$

But then we are leaving the condition of validity (2.36), where we have replaced  $\mu$  by  $\tilde{q}$ .

Note that unfamiliar things happen when conditions like (2.36) are violated. We can see this by choosing a fixed small typical charge  $\tilde{q} \ll R$  and increasing the dimension  $J$ . The distance from the cell's corner and its center,  $\frac{1}{2}\tilde{q}\sqrt{J}$ , can thus reach the radius  $R$ , that is, the Voronoi cell around the origin in flux space will eventually find its corners touching the surface of the sphere<sup>4</sup> of radius  $R$ . At this point all states inside the  $\Lambda = 0$  sphere will be secant; of course many states outside the sphere will also be secant, and a huge fraction of them will be in the corners of a parallelotope enclosing the sphere. But the vast majority of these states will not have negative cosmological constant neighbors, and therefore the typical value of  $\Lambda$  in these states will be large, hence the peak in the  $\rho$  distribution mentioned above.

We see that once the validity condition is violated, the majority of the secant states are no more boundary states, and thus the secant states in this regime have no special relation with the Weinberg Window. But the secant state set  $\mathcal{S}$  is simply a tool to study the boundary state set  $\mathcal{P}$ , which comprises the states selected by dynamics, and we can use  $\mathcal{S}$  instead of  $\mathcal{P}$  only when they significantly overlap. We believe that this is the case when the validity conditions are satisfied.

A systematic improvement can be achieved by recasting the RHM as the first order approximation in a Poisson expansion of the exact counting formula [102]. This approach generalizes and unifies these improvements. Finally, an asymptotic analysis of the exact counting formula can be carried out, showing an additional regime very different from the BP count considered here [101].

## Acknowledgments

We would like to thank Roberto Emparan for useful discussions. We also thank Concha Orna and M<sup>a</sup> Carmen Paz for carefully reading this manuscript. This work has been supported by CICYT (grant FPA-2006-02315) and DGIID-DGA (grant 2007-E24/2). We thank also the support by grant A9335/07 (Física de alta energía: Partículas, cuerdas y cosmología).

---

<sup>4</sup>The cell acquires a kind of “dendritic” structure, with its  $2J$  faces lying far away from the sphere and its  $2^J$  corners touching it. An enormous fraction of the volume of such a small,  $J$ -dimensional cell is located at its corners.



## Chapter 3

# Counting states in the Bousso-Polchinski Landscape

Starting from an exact counting of small and positive cosmological constant states in the Bousso-Polchinski Landscape we recover a well-known approximate formula and a systematic method of improvement by means of the Poisson summation formula. This is a contribution to the special Volume published by the University of Zaragoza in honor of Julio Abad Antoñanzas. En memoria de nuestro amigo, compañero y maestro Julio.

### 3.1 Introduction

One of the recent proposals to solve the cosmological constant problem in cosmology is provided by string theory. By dimensional reduction from M-theory to 3+1 dimensions, vacua of the effective theory are classified by means of a big number of quantized fluxes leading to an enormous amount of metastable vacua, the Bousso-Polchinski (BP) Landscape [90]. The cosmological constant problem, namely the smallness of the observed vacuum energy density in the universe [34, 35], can be solved by the presence in this model of a huge number of states of very small, positive cosmological constant, together with a dynamical mechanism given by eternal inflation [10] which allows the system to visit all the vacua. An anthropic selection is then advocated to explain the smallness of the observed cosmological constant [84, 48].

In order to quantify this selection a counting of accesible states in the Landscape is needed. The simplest one is the Bousso-Polchinski count, which computes the volume of a spherical shell of small thickness in flux space and divides it by the volume of a cell. We will now briefly review this argument (see [90]).

A vacuum of the BP Landscape is a node in a  $J$ -dimensional lattice  $\mathcal{L}$  generated by  $J$  charges  $q_1, \dots, q_J$  determined by the sizes of the three-cycles in the compactification manifold. The lattice  $\mathcal{L}$  is

$$\mathcal{L} = \{(n_1 q_1, \dots, n_J q_J) \in \mathbb{R}^J : n_1, \dots, n_J \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.1)$$

The  $j$ -th coordinate of a point in the lattice is an integer multiple of the charge  $q_j$ , and therefore a vacuum is characterized by the integer  $J$ -tuple  $n = (n_1, \dots, n_J)$ .

A *fundamental cell* (also called *Voronoi cell*<sup>1</sup>)  $Q_n$  around a node  $n$  in a lattice  $\mathcal{L}$  is the subset of  $\mathbb{R}^J$  which contains the points which are closer to  $n$  than to any other node of  $\mathcal{L}$ . Thanks to the discrete translational symmetry of our lattice (3.1), all fundamental cells in  $\mathcal{L}$  are translates of the fundamental cell around the origin  $Q_O \equiv Q$ , which we can parametrize in Cartesian coordinates as a product of symmetric intervals

$$Q = \prod_{j=1}^J \left[ -\frac{q_j}{2}, \frac{q_j}{2} \right]. \quad (3.2)$$

The cosmological constant of vacuum  $n$  in the BP model is<sup>2</sup>

$$\Lambda(n) = \Lambda_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J n_j^2 q_j^2. \quad (3.3)$$

In (3.3),  $\Lambda_0$  is an *a priori* cosmological constant or order  $-1$ . Each value of  $\Lambda > \Lambda_0$  defines a spherical ball on the  $J$ -dimensional flux space of radius  $R_\Lambda = \sqrt{2(\Lambda - \Lambda_0)}$ . We call this ball  $\mathcal{B}^J(\Lambda)$ . We take small values of the charges  $q_j$  (natural values expected by BP are of order  $\frac{1}{6}$ ) in such a way that the ball can contain a huge number of fundamental cells.

The number of states in the Weinberg Window, that is the range of values of the cosmological constant allowing the formation of structures (like galaxies) needed for the formation of life as we know it [48], is obtained by computing the volume of a thin spherical shell in flux space (the realization in the BP Landscape of the Weinberg Window) divided by the volume of a cell in the lattice:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\text{WW}} &= \frac{\text{vol } \mathcal{B}^J(\Lambda_{\text{WW}}) - \text{vol } \mathcal{B}^J(0)}{\text{vol } Q} \approx \frac{1}{\text{vol } Q} \left. \frac{d}{d\Lambda} (\text{vol } \mathcal{B}^J(\Lambda)) \right|_{\Lambda=0} \Lambda_{\text{WW}} \\ &= \frac{1}{\text{vol } Q} \left. \frac{d}{d\Lambda} \left( \frac{R_\Lambda^J}{J} \text{vol } S^{J-1} \right) \right|_{\Lambda=0} \Lambda_{\text{WW}} = \text{vol } S^{J-1} \frac{R_0^{J-2} \Lambda_{\text{WW}}}{\text{vol } Q}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

where  $R_0 = R_{\Lambda=0} = \sqrt{2|\Lambda_0|}$  (we will call it henceforth  $R$ ), and the volume of the  $J - 1$  dimensional sphere is

$$\text{vol } S^{J-1} = \frac{2\pi^{\frac{J}{2}}}{\Gamma(\frac{J}{2})}. \quad (3.5)$$

This method can be naively expected to yield a good estimate when the linear dimensions of the cell are small when compared to the thickness of the shell; but this condition is not satisfied in the BP Landscape. Nevertheless, the result of this counting formula is very good when compared to actual numerical experiments. In the following, we will re-derive the BP count, systematic improvements and a condition of validity.

Our proposal is based on the following kinds of states one may encounter near the null cosmological constant surface in flux space:

- **Boundary** (or **penultimate** after Bousso and Yang [93]) are those states in which a Brown-Teitelboim [95, 94] decay chain can end before jumping into the negative cosmological constant sea. So we define a boundary state as one having

<sup>1</sup>Also called Wigner-Seitz cell in solid state physics, the Voronoi cell of a point  $P$  in a discrete set  $S$  of a metric space  $M$  is the set of points of  $M$  which are closer to  $P$  than to any other point of  $S$ .

<sup>2</sup>We use reduced Planck units in which  $8\pi G = \hbar = c = 1$ .

- (1) positive cosmological constant, and
  - (2) at least one neighbor of negative cosmological constant.
- **Secant** states have the property that their Voronoi cells in flux space have non-empty intersection with the null cosmological constant surface in flux space. Note that a secant state may have negative cosmological constant.

These two categories are not equivalent; a boundary state may not be secant if it is far enough from the null cosmological constant surface, and a secant state may not be boundary if it has negative cosmological constant. So we are interested mainly in the states which are both secant **and** boundary, because all the states in the Weinberg Window are in this category.

Our strategy will be as follows. We will count the states in the Weinberg Window using the secant states instead of the boundary states. We approximate the exact count using the Poisson summation formula in section 3.2. The same technique is used to obtain a distribution of values of the cosmological constant and the number of states in the Weinberg Window in section 3.3. Our results yield the BP count as the lowest order approximation as well as systematic improvements. In section 3.4 we sketch the difficulties encountered while extending the method to the boundary states. Finally, we summarize the conclusions in section 3.5.

This work is a continuation of the counting method introduced in [103].

## 3.2 Counting secant states

If  $\lambda = (n_1 q_1, \dots, n_J q_J)$  is a secant state of the lattice  $\mathcal{L}$ , the  $\Lambda = 0$  sphere intersects its Voronoi cell. The line which links the origin with  $\lambda$  hits the sphere in a single point,  $z$ . The directions of  $\lambda$  and  $z$  are the same,  $v \in S^{J-1}$ , and their norms are  $\|z\| = R$  and  $\|\lambda\| = R + \rho$ . The parameter  $\rho$  is simply the distance between the sphere and  $\lambda$  (see figure 3.1), and has a close relation with the cosmological constant:

$$\rho = \sqrt{2(\Lambda - \Lambda_0)} - \sqrt{2|\Lambda_0|}. \quad (3.6)$$

In particular,  $\Lambda$  is positive if and only if  $\rho$  is positive, and  $\Lambda = 0$  if and only if  $\rho = 0$ .

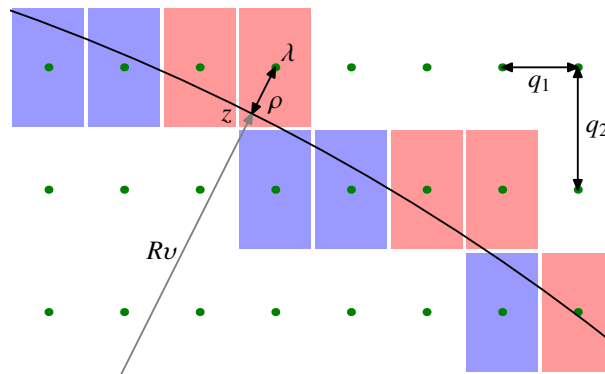


Figure 3.1: Secant states are shown in a  $J = 2$  BP model along with the definition of the  $\rho$  and  $v$  parameters.



Note that the pair  $(\rho, v)$  determines the tangent hyperplane on the  $\Lambda = 0$  sphere at  $z$ , and therefore can be identified with this hyperplane  $h = (\rho, v)$ . Note that  $h$  intersects the Voronoi cell of  $\lambda$ , but  $z$  is not necessarily inside the cell. The set of possible  $z$  points, each corresponding to a secant hyperplane, can be specified by computing the maximum value which  $\rho$  can have for a fixed direction  $v$ . We will call this quantity  $\rho_{\max} = \sigma(v)$ , which is given by the distance of the most distant secant hyperplane

$$v \cdot (x - c_v) = 0, \quad (3.7)$$

where  $c_v = \frac{1}{2}(s_1 q_1, \dots, s_J q_J)$  is the unique corner out of  $2^J$  which belongs to the same  $J$ -quadrant as  $v$ , and the  $s_j$  are signs  $\pm 1$ , indeed the same signs of the components of  $v$ . We find

$$\sigma(v) = v \cdot c_v = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J q_j s_j^2 |v_j| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J q_j |v_j| = \frac{1}{2} q \cdot |v|. \quad (3.8)$$

In (3.8),  $|v| = (|v_1|, \dots, |v_J|)$ . Note that the function  $\sigma(v)$  defines a surface in flux space which contains the possible  $z$  points, equivalently, the possible secant hyperplanes. We call the interior of this surface the (*secant*) *hyperplane space* associated to the cell,  $H_Q$ , and a hyperplane  $h = (\rho, v)$  is in  $H_Q$  if and only if  $\rho \leq \sigma(v)$ .

If we take all secant states of a given lattice and we gather all their cells into one, the  $z$  points seem to be randomly distributed inside  $H_Q$  (see figure 3.2). So our suggestion is to provide an explicit form for the probability measure which governs this random distribution. We call the choosing of a particular measure  $dP(\rho, v)$  in  $H_Q$  a *random hyperplane model* (RHM).

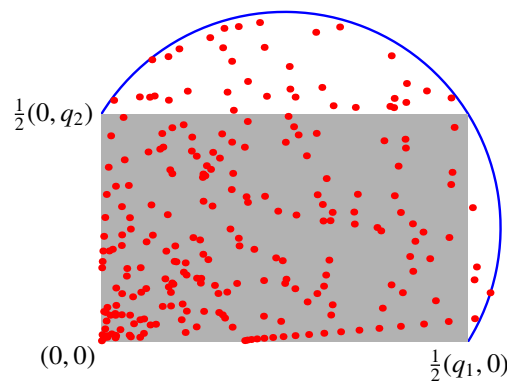


Figure 3.2: Secant hyperplanes of positive  $\rho$  in a  $J = 2$  BP landscape. Each dot is a  $z$  point of a secant state. The shaded region is the first quadrant of the cell  $Q$ , and all dots lie inside the blue contour, which is the (first quadrant) boundary of hyperplane space  $H_Q$ .

In our previous work [103] we chose the uniform probability measure, and we will justify this assumption as an approximation in section 3.3.

We start using an exact expression for the number of secant states of positive cosmological constant. We call this number  $\mathcal{N}_S$ . For each secant state  $\lambda$ , we denote by  $\rho(\lambda)$  and  $\sigma(\lambda)$  the parameters of its associated secant hyperplane, being simply

$$\rho(\lambda) = \|\lambda\| - R, \quad \sigma(\lambda) = \frac{1}{2} q \cdot \frac{|\lambda|}{\|\lambda\|}. \quad (3.9)$$

Using the restriction  $\rho \leq \sigma(v)$  and the indicator function  $\chi_I(x)$  of an interval  $I \subset \mathbb{R}$  (which is 1 if  $x \in I$  and 0 otherwise), we can write

$$\mathcal{N}_S = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \chi_{[0, \sigma(\lambda)]}[\rho(\lambda)]. \quad (3.10)$$

Direct use of (3.10) is unfeasible; we would have to compile all secant states to count them. But it has the form

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}} f(\lambda) \quad \text{with} \quad f(x) = \chi_{[0, \sigma(x)]}[\rho(x)] \quad (x \in \mathbb{R}^J), \quad (3.11)$$

and therefore we can obtain an alternative representation using the Poisson summation formula:

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{L}} f(\lambda) = \frac{1}{\text{vol } Q} \sum_{\kappa \in \mathcal{L}^*} \hat{f}(\kappa) \quad (3.12)$$

where we use the Fourier transform of  $f(x)$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^J} f(x) e^{-i\xi \cdot x} d^J x, \quad (3.13)$$

and the dual lattice of  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}^* = \left\{ \left( m_1 \frac{2\pi}{q_1}, \dots, m_J \frac{2\pi}{q_J} \right) \in \mathbb{R}^J : m_1, \dots, m_J \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (3.14)$$

determined by the condition  $e^{i\lambda \cdot \kappa} = 1$ . In fig. 3.3 a  $J = 2$  lattice and its dual are shown.

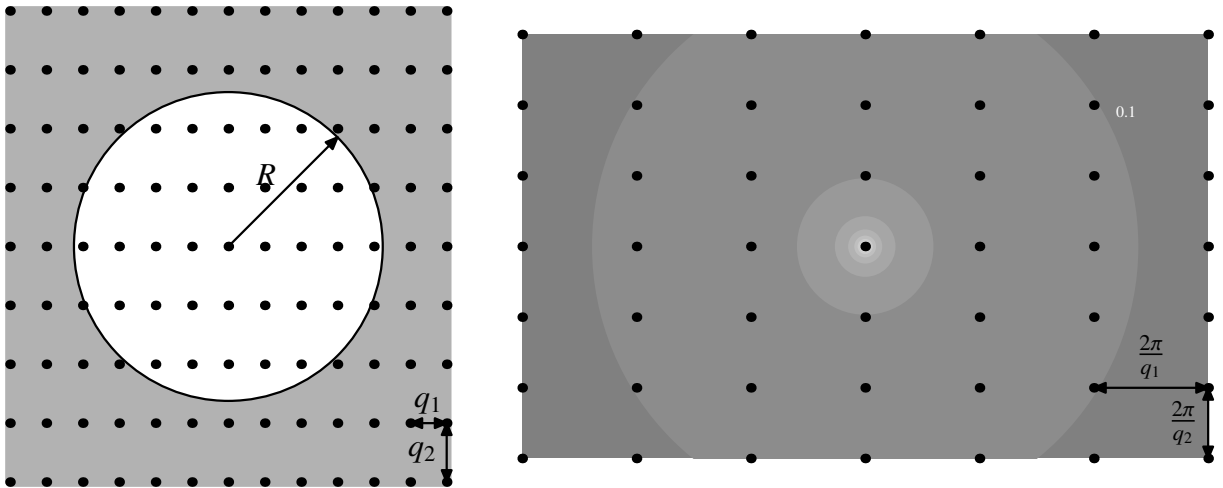


Figure 3.3:  $J = 2$  lattice with a typical scale  $R$  (left). Dual lattice (right). The shaded circles show decreasing amplitude of the envelope of the Bessel function  $J_0(R\|\xi\|)$ , which is the Fourier transform of the normalized indicator function of the circle of radius  $R$  in the former lattice. The 0.1 label signals the distance in dual space where the amplitude at the origin is reduced to 1/10.

In order to use eq. (3.12) we need to compute

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^J} \chi_{[0, \sigma(x)]}[\rho(x)] e^{-i\xi \cdot x} d^J x. \quad (3.15)$$

Switching to spherical variables and then using  $\rho$  as integration variable, we obtain

$$\hat{f}(\xi) = \int_{S^{J-1}} d\Omega_{J-1}(v) e^{-iR(\xi \cdot v)} \int_0^{\sigma(v)} (\rho + R)^{J-1} e^{-i\rho(\xi \cdot v)} d\rho. \quad (3.16)$$

Exact evaluation of this integral is difficult, as might be expected. The lowest order approximation in (3.12) yields the following formula for the number of positive  $\Lambda$  secant states:

$$\mathcal{N}_S = \frac{\hat{f}(0)}{\text{vol } Q} = \frac{1}{\text{vol } Q} \int_{S^{J-1}} d\Omega_{J-1}(v) \int_0^{\sigma(v)} (\rho + R)^{J-1} d\rho. \quad (3.17)$$

We can expect this to be an accurate approximation from the following qualitative argument. The function  $f(x)$  is supported at a compact domain whose extent is proportional to some average charge  $\bar{q}$  times a  $J$ -dependent constant. The Fourier transform  $\hat{f}(\xi)$  will be then concentrated at a domain of dimensions proportional to  $1/\bar{q}$ . But the spacings between neighboring nodes of the dual lattice are the inverses of the charges, and thus only a few of these nodes will enter the domain with significant amplitude.

In this approximation, we can rewrite eq. (3.17) as

$$\frac{1}{\mathcal{N}_S \text{vol } Q} \int_{S^{J-1}} d\Omega_{J-1}(v) \int_0^{\sigma(v)} (\rho + R)^{J-1} d\rho = 1, \quad (3.18)$$

which asserts that the following probability measure is normalized:

$$dP(\rho, v) = \chi_{[0, \sigma(v)]}(\rho) \frac{(\rho + R)^{J-1} d\rho d\Omega_{J-1}(v)}{\mathcal{N}_S \text{vol } Q}. \quad (3.19)$$

The  $\chi$  function simply restricts the range of integration to the secant hyperplane set  $H_Q$ . The previous measure can be expressed using the  $z$  points mentioned above translated to a single cell  $Q$ , that is, considering  $z \pmod{\mathcal{L}}$ , the measure (3.19) is

$$dP(z) = \chi_{H_Q}(z) \frac{d^J z}{\mathcal{N}_S \text{vol } Q}, \quad (3.20)$$

that is, the uniform probability in  $H_Q$ . So the random hyperplane model obtained to the lowest order in the Poisson summation formula is simply the uniform probability measure over  $H_Q$ . This is the choice we made in [103].

Integrating out the  $\rho$  variable in (3.17) we find

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_S &= \frac{1}{J \text{vol } Q} \int_{S^{J-1}} [(R + \sigma(v))^J - R^J] d\Omega_{J-1}(v) \\ &= \frac{1}{J \text{vol } Q} \sum_{k=1}^J \binom{J}{k} R^{J-k} \int_{S^{J-1}} \sigma(v)^k d\Omega_{J-1}(v). \end{aligned} \quad (3.21)$$

The first term in this expansion can be computed exactly (this is done in [103]):

$$\int_{S^{J-1}} \sigma(v) d\Omega_{J-1}(v) = \frac{\text{vol } S^{J-2}}{J-1} \sum_{j=1}^J q_j, \quad (3.22)$$

so that we recover the formula obtained in [103] with a completely different approach:

$$\mathcal{N}_S = \frac{\text{vol } S^{J-2}}{J-1} \frac{R^{J-1}}{\text{vol } Q} \sum_{j=1}^J q_j. \quad (3.23)$$

Note the absence of a factor 2 here because of the counting of *positive*  $\Lambda$  states only.

The validity condition of formula (3.23) is

$$\sigma(v) \leq \sigma_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{j=1}^J q_j^2} \lll R. \quad (3.24)$$

Using a mean square charge  $\tilde{q}^2 = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J q_j^2$ , condition (3.24) can be rewritten as<sup>3</sup>

$$J \frac{\tilde{q}^2}{|\Lambda_0|} \lll 8. \quad (3.25)$$

### 3.3 Number of states in the Weinberg Window

We can follow the same steps for the number of states of very low cosmological constant. If  $\Lambda_{\text{WW}}$  is a very small number characterizing the anthropic range (which comprises the experimental value  $\Lambda_{\text{exp}} \approx 10^{-123}$ ), we will call  $\rho_a$  the corresponding value of the  $\rho$  parameter computed using eq. (3.6), that is

$$\rho_a = \sqrt{2(\Lambda_{\text{WW}} - \Lambda_0)} - \sqrt{2|\Lambda_0|} \approx \frac{\Lambda_{\text{WW}}}{R}. \quad (3.26)$$

The number of states in the BP lattice having  $0 \leq \rho(\lambda) \leq \tau$  for fixed  $\tau$  is

$$\Omega(\tau) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \chi_{[0, \sigma(\lambda)] \cap [0, \tau]}[\rho(\lambda)]. \quad (3.27)$$

Note that  $\Omega(\tau) = \mathcal{N}_S$  if  $\tau > \sigma_{\max}$ , so that interpreting each secant state as a random equiprobable event we obtain the general formula

$$\Omega(\tau) = \mathcal{N}_S P(0 \leq \rho \leq \tau). \quad (3.28)$$

On the other hand, if  $\tau < \frac{1}{2} \min_j \{q_j\} = \sigma_{\max}$ , then  $[0, \sigma(\lambda)] \cap [0, \tau] = [0, \tau]$  and we have  $f(x) = \chi_{[0, \tau]}[\rho(x)]$ , which simplifies the Fourier transform (3.16) to

$$\hat{f}(\xi) = \int_{S^{J-1}} d\Omega_{J-1}(v) e^{-iR(\xi \cdot v)} \int_0^\tau (\rho + R)^{J-1} e^{-i\rho(\xi \cdot v)} d\rho. \quad (3.29)$$

For  $\tau$  as small as  $\rho_a$ , a first order Taylor expansion around  $\tau = 0$  yields

$$\hat{f}(\xi) = R^{J-1} \tau \int_{S^{J-1}} d\Omega_{J-1}(v) e^{-iR(\xi \cdot v)}. \quad (3.30)$$

<sup>3</sup>Incidentally, the adimensional parameter occurring in (3.25) resembles the so-called *planar limit* in field theory, in which the number  $N$  characterizing the gauge group tends to infinity and the Yang-Mills coupling constant  $g_{\text{YM}}$  vanishes with the product  $N g_{\text{YM}}^2$  (the t'Hooft coupling) held fixed.

Taking only the first term in the Poisson summation formula we obtain

$$\Omega(\tau) \approx \frac{\hat{f}(0)}{\text{vol } Q} = \frac{R^{J-1}}{\text{vol } Q} \text{vol } S^{J-1} \tau, \quad (3.31)$$

which is the number of states in the Weinberg Window once we specialize  $\tau = \rho_a = \frac{\Lambda_{\text{WW}}}{R}$  in equation (3.31):

$$\mathcal{N}_{\text{WW}} = \frac{R^{J-2}}{\text{vol } Q} \text{vol } S^{J-1} \Lambda_{\text{WW}}. \quad (3.32)$$

This formula is exactly the Bousso-Polchinski count given in [90] and rederived in [103] using the RHM.

It turns out that the Fourier transform (3.30) can be given in closed form, allowing systematic improvements to be added to (3.32). To show this, we rewrite (3.30) as

$$\hat{f}(\xi) = R^{J-1} \tau \int_{S^{J-1}} d\Omega_{J-1}(v) e^{-iR(\xi \cdot v)} = \tau \frac{\partial}{\partial R} \int_{\mathbb{R}^J} \theta(R^2 - \|x\|^2) e^{-i\xi \cdot x} d^J x. \quad (3.33)$$

Now, we use the following integral representation for the  $\theta$  function:

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{st}}{s} ds, \quad (3.34)$$

where  $\gamma$  is a contour running from  $c - i\infty$  to  $c + i\infty$  for real  $c$  located to the right side of all singularities of the integrand. We have

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{\tau}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{ds}{s} \frac{\partial}{\partial R} \int_{\mathbb{R}^J} e^{s(R^2 - \|x\|^2) - i\xi \cdot x} d^J x \\ &= \frac{2R\tau}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sR^2} ds \prod_{j=1}^J \int_{\mathbb{R}} e^{-sx_j^2 - i\xi_j x_j} dx_j \\ &= \frac{2R\tau}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sR^2} ds \prod_{j=1}^J \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-\frac{\xi_j^2}{4s}} \\ &= \frac{2R\tau \pi^{\frac{J}{2}}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sR^2 - \frac{\|\xi\|^2}{4s}} \frac{ds}{s^{\frac{J}{2}}} \\ &= 2R\tau \pi^{\frac{J}{2}} \left( \frac{2R}{\|\xi\|} \right)^{\frac{J}{2}-1} J_{\frac{J}{2}-1}(R\|\xi\|). \end{aligned} \quad (3.35)$$

The last step is an inverse Laplace transform resulting in a Bessel function. Let us write this result in a slightly more convenient form, using  $\nu = \frac{J}{2} - 1$ :

$$\hat{f}(\xi) = R\tau R^{J-2} \frac{2\pi^{\frac{J}{2}}}{\Gamma(\frac{J}{2})} L_{\nu}(R\|\xi\|), \quad \text{with} \quad L_{\nu}(t) = \Gamma(\nu + 1) 2^{\nu} \frac{J_{\nu}(t)}{t^{\nu}}. \quad (3.36)$$

The function  $L_{\nu}(t)$  satisfies  $L_{\nu}(0) = 1$  and has a gaussian shape near  $t = 0$ ,  $L_{\nu}(t) \approx e^{-\frac{t^2}{4(\nu+1)}}$ , followed by a regime of damped oscillations with an envelope proportional to  $t^{-\nu-\frac{1}{2}}$ . We can use this expression to write the first correction to (3.32) by choosing the

$2J$  neighbors of the origin in the dual lattice. For these,  $\|\xi\| = \frac{2\pi}{q_j}$  for each axis, so we have

$$\mathcal{N}_{\text{WW}} = \Lambda_{\text{WW}} \frac{R^{J-2}}{\text{vol } Q} \text{vol } S^{J-1} \left[ 1 + 2 \sum_{j=1}^J L_\nu(2\pi R/q_j) \right]. \quad (3.37)$$

The first correction will be small when compared to (3.32) if

$$2 \left| \sum_{j=1}^J L_\nu(2\pi R/q_j) \right| \ll 1. \quad (3.38)$$

Condition (3.38) will be satisfied as long as the  $J$  numbers  $2\pi \frac{R}{q_j}$  are scattered along regions of different sign of the Bessel function, allowing a huge cancellation in the sum. The worst case will occur when all charges are equal (let  $q$  be their common value), and then we must demand that  $2\pi \frac{R}{q}$  is very far from the gaussian regime of the function  $L_\nu(t)$ , that is,

$$2\pi \frac{R}{q} \gg k\sqrt{J} \quad \Rightarrow \quad J \frac{q^2}{|\Lambda_0|} \ll \frac{8\pi^2}{k}, \quad (3.39)$$

where the number  $k$  is  $J$ -dependent. For  $J = 2$  ( $\nu = 0$ ), taking  $10^{-2}$  as a reference amplitude for a relative error of 1%, we need a value of  $k\sqrt{2}$  large enough to be in the asymptotic regime of the Bessel function, so we have

$$4 \sqrt{\frac{2}{\pi k \sqrt{2}}} = 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad k \approx 72025.3, \quad (3.40)$$

which implies  $q \ll 0.01655R$  from (3.39), but for  $J = 22$  ( $\nu = 10$ ) the value  $10^{-2}$  is in the gaussian regime, and we have

$$44e^{-\frac{k^2}{2}} = 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad k \approx 4.09618, \quad (3.41)$$

which implies  $q \ll 0.66188R$ . We see that the requirements in the charges are not too restrictive so that the Bousso-Polchinski count (3.32) can be reasonably accurate.

We can also expect the subsequent corrections to be small when compared to the first one because of the cancellations in the sum of Bessel functions.

### 3.4 Replacing secant by boundary states

If we want to use boundary states to count the low- $\Lambda$  states, we must find a condition satisfied by them which is analogous to  $\rho < \sigma(\nu)$  for the secant states. A boundary state has positive  $\Lambda$  but some neighbors (possibly only one) of negative  $\Lambda$ , which means that the  $\Lambda = 0$  sphere must cut the segment joining both states. The segments joining a boundary state with its  $2J$  neighbors constitute the skeleton of a cell which have these neighbors as vertices and a face for each “ $J$ -quadrant” determined by the  $J$  vertices in it. For  $J = 2$ , such a cell is simply a rhombus with the neighbors at its corners, and for  $J = 3$  the cell is an octahedron. We will call this cell a  $J$ -rhombus.

These cells are not disjoint, and do not cover the whole flux space, so we cannot use them for tessellate flux space in order to count states naively. But we can reformulate

the condition of a boundary state as being secant with respect to this cell instead of its Voronoi cell. Note that the  $\Lambda = 0$  surface intersecting a  $J$ -rhombus will have its  $\rho$  and  $v$  parameters defined, so the boundary condition is again  $\rho < \sigma(v)$  for a different<sup>4</sup>  $\sigma$  interpreted as the boundary of the space of hyperplanes associated to boundary states.

Again,  $\sigma(v)$  is the maximum distance that a hyperplane associated to a boundary state (“boundary hyperplane” henceforth) can reach in a given direction  $v$ . The distance will be maximum if the hyperplane contains at least one vertex of the  $J$ -rhombus. If we assume the center of the  $J$ -rhombus to be at the origin, the vertices are the points  $s_i q_i e_i$ , where  $s_i = \pm 1$  and  $e_i$  is the unit vector of the  $i^{\text{th}}$  axis. The equation of a maximum distance boundary hyperplane is

$$v \cdot (x - s_i q_i e_i) = 0, \quad (3.42)$$

so that the maximum distance is  $\sigma(v) = |v_i| q_i$ . The value of  $i$  and  $s_i$  are chosen in the following way. Let  $u$  be the normal unit vector to the face of the  $J$ -rhombus in the first (all positive components)  $J$ -quadrant,  $S_+^{J-1}$ :

$$u = \frac{(q_1^{-1}, \dots, q_J^{-1})}{\sum_{j=1}^J q_j^{-2}}. \quad (3.43)$$

Point  $u$  decomposes  $S_+^{J-1}$  in the following  $J$  regions:

$$\Xi_i = \left\{ v \in S_+^{J-1} : v_i \geq u_i, v_j \leq u_j \text{ for } j \neq i \right\}. \quad (3.44)$$

Now, let us move  $v$  to  $S_+^{J-1}$  by removing the signs:  $|v| = (|v_1|, \dots, |v_J|)$ . Choose the label  $i$  for the set  $\Xi_i$  which  $v$  belongs to, and choose the sign  $s_i$  to be that of  $v_i$ . Thus, we find

$$\sigma(v) = \sum_{i=1}^J q_i |v_i| \chi_{\Xi_i}(|v|). \quad (3.45)$$

For  $J = 2$  we have  $u \propto (\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2})$  and this determines an angle  $\theta_0 = \tan^{-1} \frac{q_1}{q_2}$ .  $\Xi_1$  comprises the directions  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$  for which  $\theta \leq \theta_0$  and  $\Xi_2$  the converse  $\theta \geq \theta_0$ . An example of this boundary is shown in figure 3.4.

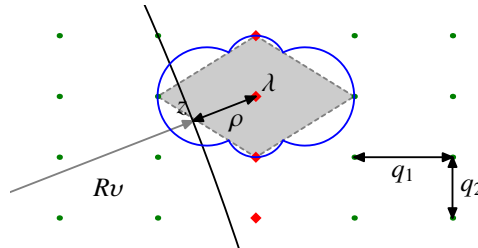


Figure 3.4: Boundary states (diamonds) in a  $J = 2$  BP landscape. The shaded region is the 2-rhombus. The boundary of the boundary hyperplane space is also displayed. Note that the  $z$  point is slightly outside the rhombic cell.

<sup>4</sup>We will call also  $\sigma$  to this function in this section; this should not lead the reader to confusion.

Once the  $\sigma$  function has been found, we can write a formula analogous to (3.21) for the number of boundary states, whose first term is

$$\mathcal{N}_B = \frac{R^{J-1}}{\text{vol } Q} \int_{S^{J-1}} \sigma(v) \, d\Omega_{J-1}(v). \quad (3.46)$$

The validity condition now is

$$\sigma(v) \leq \sigma_{\max} = \max_{1 \leq j \leq J} \{q_j\} \lll R. \quad (3.47)$$

But we do not need to evaluate formula (3.46) if we only want to count states in the Weinberg Window. Note that equation (3.27) does not involve  $\sigma$  because of the smallness of the shell width, and therefore the number  $\mathcal{N}_{\text{WW}}$  computed in section 3.3 remains unchanged. Only a difference must be stressed in this regard: the shell width must be smaller than the minimum distance  $\sigma_{\min}$ , which now depends on  $J$ . It is simply the distance to the cell center of one of its faces. The face at  $S_+^{J-1}$  has equation  $\sum_{j=1}^J \frac{x_j}{q_j} = 1$  or  $u \cdot x = \sigma_{\min}$ , so we have the condition

$$\sigma_{\min} = \left[ \sum_{j=1}^J q_j^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\tilde{q}}{\sqrt{J}} \gg \rho_a = \frac{\Lambda_{\text{WW}}}{R}, \quad (3.48)$$

where  $\tilde{q}$  is a ‘‘square-harmonic’’ average of the charges. Note that this condition is met for natural values of the charges and dimension  $J$ , so that considering secant or boundary states may change the probability distribution of  $\Lambda$  in equation (3.28) but it has no effect on the number of states in the Weinberg Window.

### 3.5 Conclusion

We have developed a general method for counting low-lying states in the Bousso-Polchinski Landscape with the help of the Poisson summation formula without any statistical validation of the assumptions made. This approach provides a firm foundation of the random hyperplane model previously used by the authors. It also allows us to derive validity conditions as well as systematic improvements, and can be used in different problems which can be formulated on a lattice in flux space. Furthermore, the validity condition (3.48) relates an experimental quantity (the cosmological constant) to a microscopic one (an average charge). We believe that this relation can be pursued in this context.

### Acknowledgments

We would like to thank Concepción Orna for carefully reading this manuscript. This work has been supported by CICYT (grant FPA-2006-02315) and DGIID-DGA (grant 2007-E24/2).





## Chapter 4

# Applications of an exact counting formula in the Bousso-Polchinski Landscape

The Bousso-Polchinski (BP) Landscape is a proposal for solving the Cosmological Constant Problem. The solution requires counting the states in a very thin shell in flux space. We find an exact formula for this counting problem which has two simple asymptotic regimes, one of them being the method of counting low  $\Lambda$  states given originally by Bousso and Polchinski. We finally give some applications of the extended formula: a robust property of the Landscape which can be identified with an effective occupation number, an estimator for the minimum cosmological constant and a possible influence on the KKLT stabilization mechanism.

### 4.1 Introduction

The eternal inflation picture of the multiverse consists of de Sitter bubbles nucleating in certain vacuum state of very high energy density [8, 9, 104, 105, 10]. Bubbles can be created inside other bubbles, and this provides a dynamical relaxation mechanism which gives rise to an average neutralization of the cosmological constant [95, 94]. We may wonder if it's possible to formulate a model of eternal inflation with relaxation containing vacuum states of a cosmological constant as small as the observed value<sup>1</sup> [12, 11]

$$\Lambda_{\text{obs}} = 1.5 \times 10^{-123}, \quad (4.1)$$

without fine-tuning the parameters of the model and avoiding the need of invoking the anthropic principle [98, 48, 84], which has been used to explain why we are living in such a special region of the multiverse. The smallness of the number in (4.1) is the *cosmological constant problem* [34, 35]. An attempt for a solution is given in the Bousso-Polchinski Landscape [90], in which a large amount  $J$  of quantized fluxes of charges  $\{q_j\}_{j=1,\dots,J}$  leads to an effective cosmological constant

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J n_j^2 q_j^2. \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>We use reduced Planck units in which  $8\pi G = \hbar = c = 1$ .

In (4.2),  $\Lambda_0$  is a negative number of order  $-1$ , and the integer  $J$ -tuple  $(n_1, \dots, n_J)$  characterizes each of the vacua of the Landscape. Without fine-tuning, for large  $J$  and incommensurate charges  $\{q_j\}$  this model contains states of small  $\Lambda$ . The problem arises now as how to count them. Unfortunately, the amount of these *anthropic* states is expected to be very small as compared to the total number of vacua in the Landscape [93], and therefore it seems not to be other way out but invoking the anthropic principle to explain the value (4.1).

The states in the Bousso-Polchinski Landscape can be viewed as nodes of a lattice in flux space  $\mathbb{R}^J$ . We call this lattice  $\mathcal{L}$  and the charges  $q_i$  are the periods of  $\mathcal{L}$ , that is,

$$\mathcal{L} = \{(n_1 q_1, \dots, n_J q_J) \in \mathbb{R}^J : n_1, \dots, n_J \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.3)$$

A single state  $\lambda$  in this lattice is characterized by the quantum numbers  $(n_1, \dots, n_J)$ , and its cosmological constant is, according (4.2),

$$\Lambda(\lambda) = \Lambda_0 + \frac{1}{2} \|\lambda\|^2. \quad (4.4)$$

Vacuum states in the Bousso-Polchinski Landscape are defined in the semiclassical approximation as stationary points of an effective action. If we consider two neighbor states of very high  $\Lambda$  (neighbor states have quantum numbers  $\{n_j\}$  which are different at one place and by one unit) we find that the energy barrier separating them is small, that is, the mediating Brown-Teitelboim instanton has a comparatively low action. These states are not isolated and consequently the semiclassical approximation breaks down for them. Moreover, when  $\Lambda$  reaches a value near the Planck energy density (of order  $\Lambda \approx 1$ ), quantum gravity effects become important, and some approximations made in the Bousso-Polchinski model (as neglecting the backreaction effect, for example) are no longer valid.

Thus the Bousso-Polchinski Landscape is a finite subset (yet an enormous one, a commonly quoted number being  $10^{500}$  [106, 107, 108, 109]) of the lattice (4.3), comprising the nodes with cosmological constant smaller than some value  $\Lambda_1 = \mathcal{O}(1)$ .

We will review the counting argument of Bousso and Polchinski [90, 92]. Around each node  $\lambda$  of the lattice  $\mathcal{L}$  we have a Voronoi cell which is a translate of the parallelotope  $Q = \prod_{i=1}^J [-\frac{q_i}{2}, \frac{q_i}{2}]$  of volume  $\text{vol } Q = \prod_{i=1}^J q_i$ . On the other hand, each value of the cosmological constant  $\Lambda_0 \leq \Lambda \leq \Lambda_1$  defines a ball  $\mathcal{B}^J(R_\Lambda)$  in flux space of radius  $R_\Lambda = \sqrt{2(\Lambda - \Lambda_0)}$ , and whose volume is

$$\text{vol } \mathcal{B}^J(R_\Lambda) = \frac{R_\Lambda^J}{J} \text{vol } S^{J-1}, \quad (4.5)$$

where the volume of the  $J - 1$  sphere is

$$\text{vol } S^{J-1} = \frac{2\pi^{\frac{J}{2}}}{\Gamma(\frac{J}{2})}. \quad (4.6)$$

The BP counting argument consists of computing the number of states inside a ball of any radius  $r$ , which will be called  $\Omega_J(r)$ , by taking the quotient between the volume of the ball and the volume of the cell of a single state:

$$\Omega_J(r) = \frac{\text{vol } \mathcal{B}^J(r)}{\text{vol } Q}. \quad (4.7)$$

Plugging in some numbers, if  $\Lambda_0 = -1$ ,  $\Lambda_1 = 1$ ,  $J = 300$  and  $q_i = \frac{1}{10}$ , we have a BP Landscape with

$$\Omega_{300}(2) = 1.3 \times 10^{202} \quad \text{states.} \quad (4.8)$$

This is certainly very small when compared with  $10^{500}$ . But if we take a charge ten times smaller  $q_i = 0.01$ , we obtain  $\Omega_{300}(2) = 1.3 \times 10^{502}$ . Nevertheless, there is another argument which gives a more impressive number. The quotient between  $2R_{\Lambda_1}$  and  $q_i$  gives the number of nodes that fit in axis  $i$ . So, the total number of nodes is the product of all these quotients, which is also the volume of the hypercube of side  $2R_{\Lambda_1}$  divided by the volume of the cell. With the same numbers this quantity is  $4.1 \times 10^{480}$ . This argument is wrong though, because the vast majority of the nodes of the hypercube lie outside the sphere of radius  $R_{\Lambda_1}$ , and thus they are not states of the Landscape.

We may wonder how many states there are with values of  $\Lambda$  comprised between 0 and a small positive value of the cosmological constant  $\Lambda_\varepsilon$ . Following the same argument as in the preceding paragraph, we compute the quotient between the volume of the shell comprised between radii  $R_0 = \sqrt{2|\Lambda_0|}$  and  $R_\varepsilon = \sqrt{2(\Lambda_\varepsilon - \Lambda_0)} \approx R_0 + \frac{\Lambda_\varepsilon}{R_0}$  and we obtain

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \Omega_J(R_\varepsilon) - \Omega_J(R_0) \approx R_0^{J-2} \frac{\text{vol } S^{J-1}}{\text{vol } Q} \Lambda_\varepsilon. \quad (4.9)$$

If  $\Lambda_\varepsilon$  is of the order of the observed value (4.1), with the previous numbers we obtain  $\mathcal{N}_\varepsilon = 2.1 \times 10^{36}$ . Thus, if the degeneracy of these states is smaller than this number, we can find states with a realistic cosmological constant.

Nevertheless, as the authors of [90] point out, this argument is not valid when any of the charges  $q_i$  exceed  $R_0/\sqrt{J}$ . We can see that strange things happen as  $J$  grows with all the charges fixed. There is a critical value of  $J$  above which the volume of the sphere is smaller than the volume of a single cell,

$$\text{vol } \mathcal{B}^J(R_0) < \text{vol } Q, \quad (4.10)$$

and thus computing their quotient is not useful for counting. From inequality (4.10) we have

$$\frac{Jq^2}{R_0^2} > 2\pi e > 17 \quad (4.11)$$

with  $q = \sqrt[3]{\text{vol } Q}$ . Other strange things happen for large  $J$ . Let's assume for simplicity that all charges are equal to  $q$ . The corner of the cell centered at the origin is located at a distance  $\frac{q}{2}\sqrt{J}$  from it, and it reaches (and surpasses) the radius  $R_0$  when

$$\frac{Jq^2}{R_0^2} > 4, \quad (4.12)$$

so we can expect the angular region near the corner to be devoid of states. Thus, the distribution of low  $\Lambda$  states is not isotropic in flux space, and in particular, it has no spherical symmetry.

All these conditions coincide: when the parameter  $h = \frac{Jq^2}{R_0^2}$  is large we cannot count by dividing volumes<sup>2</sup>. But there are instances of the BP Landscape in which the parameter  $h$  can be large and nevertheless the model contains a huge amount of states. In such cases

<sup>2</sup>With the numbers given above,  $h = 0.75$ , so we can trust eq. (4.7).

the formula (4.7) should not be used, and another formula is needed. Other counting methods in the BP Landscape have been proposed so far [92, 93, 91, 103, 102], but all of them have a limited range of validity.

The remainder of the paper is organized as follows. In section 4.2 we will propose an exact counting formula which is reduced to (4.7) for small  $h$ . We will also provide an asymptotic formula for the regime of large  $h$ . In section 4.3 we extend the method used previously to the study of other properties of the BP Landscape, in particular the counting of low-lying states, an estimate of the minimum value of the cosmological constant and the possible influence of the non-trivial fraction of nonvanishing fluxes in the KKLT moduli stabilization mechanism. The conclusions are summarized in section 4.4.

## 4.2 The BP Landscape degeneracy

In this section, we will obtain an exact integral representation for the number of nodes of the lattice inside a sphere of arbitrary radius, and we will analyze its main asymptotic regimes.

### 4.2.1 The exact representation

We start with the number of nodes in the lattice inside a sphere in flux space of radius  $r$ . This magnitude is called  $\Omega_J(r)$  above:

$$\Omega_J(r) = |\{\lambda \in \mathcal{L} : \|\lambda\| \leq r\}|. \quad (4.13)$$

In the previous equation, vertical bars denote cardinality. An alternative expression can be given in terms of the characteristic function of an interval  $I$

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in I, \\ 0 & \text{if } t \notin I, \end{cases} \quad (4.14)$$

so that

$$\Omega_J(r) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \chi_{[0,r]}(\|\lambda\|). \quad (4.15)$$

Expression (4.15) is exact, and the sum is extended to the full lattice, without any problem given that  $\chi$  function adds 1 for each node inside the sphere, and therefore the result is always finite. Clearly, (4.15) is equivalent to directly counting the nodes (the ‘‘brute-force’’ counting method), hence it cannot be used in order to obtain numbers as in (4.7).

The density of states associated to (4.15) is

$$\omega_J(r) = \frac{\partial \Omega_J(r)}{\partial r}. \quad (4.16)$$

which will be called the ‘‘BP Landscape degeneracy’’. By writing the characteristic function in terms of the Heaviside step function

$$\chi_{[0,r]}(\|\lambda\|) = \theta(\|\lambda\|) - \theta(\|\lambda\|^2 - r^2), \quad (4.17)$$

we obtain

$$\omega_J(r) = 2r \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \delta(r^2 - \|\lambda\|^2). \quad (4.18)$$

The counting function  $\Omega_J(r)$  is a stepwise monotonically non-decreasing function, and thus its derivative  $\omega_J(r)$  is a sum of Dirac deltas. It is supported at those values of  $r$  which correspond to the values that are actually attained by the norms of the lattice nodes. Let  $\mathcal{M}$  be the set of these values; we have

$$\omega_J(r) = 2r \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varpi_J(\mu) \delta(r^2 - \mu^2) \quad (4.19)$$

where we have defined the true degeneracy  $\varpi_J(\mu)$  as the integer-valued function which counts the number of nodes in the lattice  $\mathcal{L}$  whose norm is  $\mu$ , that is, the number of decompositions of a number  $\mu^2$  as a sum  $\sum_{j=1}^J q_j^2 n_j^2$ , for  $n_1, \dots, n_J$  integers and  $q_1, \dots, q_J$  arbitrary real numbers.

We can express the Dirac delta which appears in (4.18) as a contour integral:

$$\delta(r^2 - \|\lambda\|^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{s(r^2 - \|\lambda\|^2)} ds, \quad (4.20)$$

where the contour is a vertical line crossing the positive real axis,

$$\gamma = \{c + i\tau : \tau \in \mathbb{R}, c > 0\}. \quad (4.21)$$

Substituting (4.20) in (4.18), we obtain

$$\omega_J(r) = \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2} \left[ \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} e^{-s\|\lambda\|^2} \right] ds. \quad (4.22)$$

This particular representation allows us to perform the sum extended to the whole lattice:

$$\begin{aligned} \omega_J(r) &= \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2} \left[ \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{n_J \in \mathbb{Z}} \prod_{j=1}^J e^{-sq_j^2 n_j^2} \right] ds \\ &= \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2} \left[ \prod_{j=1}^J \sum_{n_j \in \mathbb{Z}} e^{-sq_j^2 n_j^2} \right] ds \\ &= \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2} \left[ \prod_{j=1}^J \vartheta(sq_j^2) \right] ds. \end{aligned} \quad (4.23)$$

The sum is hidden in the function

$$\vartheta(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-sn^2} \equiv \theta_3(0; e^{-s}), \quad (4.24)$$

valid for  $\operatorname{Re} s > 0$ , which is a particular case of a Jacobi theta function:

$$\theta_3(z; q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} e^{2\pi i n z}, \quad (4.25)$$

for complex  $z$  and  $q$  with  $|q| < 1$ <sup>3</sup>. It satisfies the functional equation

$$\vartheta(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-sn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 m^2}{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \vartheta\left(\frac{\pi^2}{s}\right), \quad (4.26)$$

<sup>3</sup>The second argument  $q$  of Jacobi theta functions, the so-called *nome*, shouldn't be mistaken with the charge  $q$ .

which is a consequence of the Poisson summation formula.

Our exact formula for the BP Landscape degeneracy is then

$$\omega_J(r) = \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2} \left[ \prod_{j=1}^J \vartheta(sq_j^2) \right] ds, \quad (4.27)$$

which is an inverse Laplace transform, that is,

$$\int_0^{\infty} e^{-sr^2} \omega_J(r) dr = \prod_{j=1}^J \vartheta(sq_j^2). \quad (4.28)$$

The integration of (4.27) with the initial condition  $\Omega_J(0) = 1$  gives

$$\Omega_J(r) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{sr^2} - 1}{s} \left[ \prod_{j=1}^J \vartheta(sq_j^2) \right] ds. \quad (4.29)$$

We will close this subsection with a final remark. By Laplace transforming (4.19) and comparing it with its alternative form (4.28) we obtain

$$\sum_{\mu \in \mathcal{M}} \varpi_J(\mu) e^{-s\mu^2} = \prod_{j=1}^J \vartheta(sq_j^2). \quad (4.30)$$

Substituting all  $q_j = 1$ , we can see that the possible values of the numbers  $\mu^2$  when  $\mu \in \mathcal{M}$  are those which can be represented as the sum of  $J$  integer squares. These are all the non-negative integers, obtaining in this case

$$1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varpi_J(n) e^{-sn} = \vartheta(s)^J. \quad (4.31)$$

Formula (4.31) is the generating function of the number of different decompositions of a positive integer  $n$  as the sum of  $J$  integer squares<sup>4</sup>. Thus, (4.30) can be taken as a generalization of (4.31).

#### 4.2.2 The large distance (or BP) regime

Now we will turn to the approximate evaluations of integrals (4.27) and (4.29). For this purpose we need the asymptotic behavior of  $\vartheta$  function.

Function  $\vartheta(s)$  has two simple asymptotic regimes for real and positive  $s$ , as can be seen from the functional equation (4.26):

$$\vartheta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad \text{and} \quad \vartheta(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1 + 2e^{-s}. \quad (4.32)$$

We can visualize these asymptotes by plotting the logarithm of the quotient between  $\vartheta$  and each of them. This is done in figure 4.1, where we can see that the limit  $s \rightarrow 0$  is (reasonably) valid for  $s < 1$  and the limit  $s \rightarrow \infty$  is valid for  $s > 2$ . In the middle regime

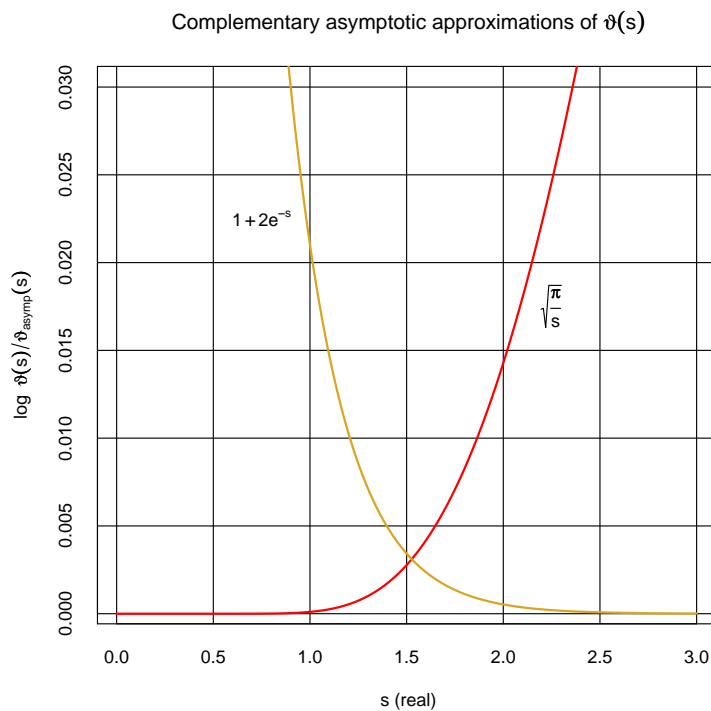


Figure 4.1: Complementary asymptotic regimes of the  $\vartheta$  function. Logarithms of the quotient of  $\vartheta$  and its asymptotes are shown. A good approximation can be seen as a flat line at zero height. Both regimes cross near 1.5, which is the center of the interval  $[1, 2]$  where the accuracy is lower. Note that the horizontal line at 0.01 signals that the quotient is 1% different from 1. All plots in this paper were done using R [99].



$s \in [1, 2]$  none of the two former cases is accurate enough, and we will have a mixed, interpolating regime between them.

The first case we will consider is  $s \rightarrow 0$ . In this regime, we simply make the integration contour  $\gamma$  pass near the origin in the complex plane, where  $\vartheta$  has a singularity. Assuming that the main contribution to the integral will come from this region, we can replace  $\vartheta$  by its asymptotic value when  $s \rightarrow 0$  and write

$$\omega_J(r) \approx \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2} \left[ \prod_{j=1}^J \sqrt{\frac{\pi}{q_j^2 s}} \right] ds. \quad (4.33)$$

This integral is an elementary inverse Laplace transform:

$$\omega_J(r) \approx \frac{\pi^{\frac{J}{2}}}{\text{vol } Q} \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2} \frac{ds}{s^{\frac{J}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{J}{2}}}{\Gamma(\frac{J}{2})} \frac{r^{J-1}}{\text{vol } Q}. \quad (4.34)$$

Equation (4.34) is the derivative of (4.7), that is, BP count. It is valid for large  $r$  distances, because it has been obtained using small  $s$  region (note that a well known property of Laplace transform pairs is that the asymptotic behaviour of a signal for large  $r$  is determined by the small  $s$  behaviour of its transform and vice versa). For this reason we call the formula (4.34) the *large distance* regime, or BP regime.

But we can make the restriction imposed on the distance more quantitative in the following way. The best choice for the real part of the contour is the saddle point of integral (4.34), which is the stationary point of the function

$$\phi(s) = sr^2 - \frac{J}{2} \log s. \quad (4.35)$$

This saddle point is

$$s^* = \frac{J}{2r^2}, \quad (4.36)$$

and in its vicinity we find the most important contribution to the integral. But the replacement of the  $\vartheta(s)$  functions by its small- $s$  behavior is valid only if the argument  $s$  is less than 1 (see figure 4.1), so we must have

$$s^* q_j^2 = \frac{J q_j^2}{2r^2} < 1 \quad \text{for all } j. \quad (4.37)$$

Nevertheless, condition (4.37) does not guarantee the validity of the replacement  $\vartheta(s) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{s}}$  on the integration contour away from the real axis. A stronger restriction is imposed by demanding the applicability of the saddle point method in this regime. If the steepest descent approximation is valid, then the main contribution to the integral comes from the vicinity of the saddle point, which justifies the replacement of the asymptote. The exact and approximate evaluations of (4.34) will have the same validity if both methods reach the same result. But the saddle point approximation on (4.34) has the effect of using Stirling's approximation on the gamma function. Thus, both methods agree if  $J$  is large enough.

---

<sup>4</sup>In number theory, the number of decompositions of a positive integer  $n$  as the sum of  $J$  squares is called  $r_J(n)$  and its generating function is usually written using a variable  $x = e^{-s}$  with  $|x| < 1$ .

The correctness of the saddle point approximation of (4.34) can be assessed by rewriting it in the form

$$\omega_J(r) \approx \pi^{\frac{J}{2}} \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2 - \frac{J}{2} \log(q^2 s)} ds \quad \text{with} \quad \log q = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J \log q_i. \quad (4.38)$$

The change of variable  $q^2 s = w$  transforms the exponent  $\phi$  of the integrand into

$$\phi(w) = J \left[ \frac{w}{h} - \frac{1}{2} \log w \right], \quad (4.39)$$

where  $h = \frac{Jq^2}{r^2}$ . The validity condition of the saddle point approximation is  $\phi(w^*) \gg 1$  with  $w^* = h/2$  the stationary point of  $\phi$ . This condition is fulfilled if  $J$  is large and

$$\frac{w^*}{h} - \frac{1}{2} \log w^* = \frac{1}{2} \left( 1 - \log \frac{h}{2} \right) > 1 \quad \Rightarrow \quad h < \frac{2}{e} \approx 0.736, \quad (4.40)$$

which is analogous to the condition stated by Bousso and Polchinski for the validity of their formula. We have derived it as a validity condition for the small- $s$  asymptotic regime of the exact counting formula<sup>5</sup>.

Finally, the large  $J$  condition controls the validity of Stirling's approximation for the gamma function. But this restriction is not needed because the integral has been done in closed form. Thus, only condition (4.40) remains.

### 4.2.3 The small distance regime

In this case we are in the regime in which the asymptotic expansion of  $\vartheta$  for large values of its argument is valid. We can write  $\Omega_J(r)$  in (4.29) as

$$\Omega_J(r) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(s) e^{\phi(s)} ds, \quad \text{with} \quad \begin{cases} f(s) = \frac{1 - e^{-sr^2}}{s}, \\ \phi(s) = sr^2 + \sum_{i=1}^J \log(1 + 2e^{-q_i^2 s}). \end{cases} \quad (4.41)$$

The saddle-point approximation to this integral is given by

$$\Omega_J(r) \approx 1 + \frac{1}{2\pi i} i f(s^*) e^{\phi(s^*)} \sqrt{\frac{2\pi}{\phi''(s^*)}}, \quad (4.42)$$

where  $s^*$  is the stationary point of  $\phi(s)$ . The saddle point  $s^*$  is a minimum for real  $s$ ; hence, the steepest descent contour crosses vertically the real axis and coincides locally with  $\gamma$ . Unfortunately, we cannot solve the saddle point equation in closed form for arbitrary charges. Nevertheless, in the simplest case in which all charges are equal  $q_1 = \dots = q_J = q$ , we obtain

$$r^2 = \frac{2Jq^2}{e^{s^*q^2} + 2} \quad \Rightarrow \quad s^*q^2 = \log 2 \left( \frac{Jq^2}{r^2} - 1 \right). \quad (4.43)$$

---

<sup>5</sup>Incidentally, the adimensional parameter  $h = \frac{Jq^2}{r^2}$  occurring in (4.39) resembles the t'Hooft coupling in the so-called *planar limit* of field theory, in which the number  $N$  characterizing the gauge group tends to infinity and the Yang-Mills coupling constant  $g_{\text{YM}}$  vanishes with the product  $N g_{\text{YM}}^2$  (the t'Hooft coupling) held fixed.

The saddle point computed through (4.43) is consistent with the regime of large argument of  $\vartheta$  if

$$s^*q^2 = \log 2 \left( \frac{Jq^2}{r^2} - 1 \right) > 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{Jq^2}{r^2} > 1 + \frac{e^2}{2} \approx 4.694. \quad (4.44)$$

This condition is satisfied for fixed charge  $q$  and dimension  $J$  if the distance is small enough; for this reason this regime is called the *small distance* regime.

In terms of the parameter  $h = \frac{Jq^2}{r^2}$ , the approximate saddle point (which will be called  $u(h) = q^2 s^*(h)$ ) is, gluing together eqs. (4.37, 4.43)

$$u(h) = q^2 s^*(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}h & \text{if } h < 2, \\ \log 2(h-1) & \text{if } h > 5. \end{cases} \quad (4.45)$$

Eq. (4.45) is plotted in figure 4.2, along with the numerical solution obtained in a range of  $h$  which is not covered so far, but will be considered in the next subsection.

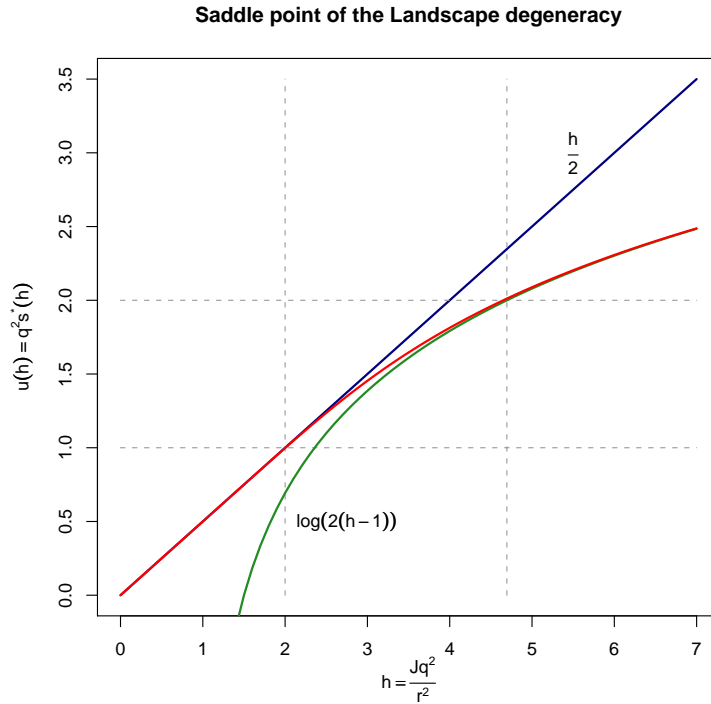


Figure 4.2: Numerical saddle point  $u(h)$  of the  $\omega_J(r)$  integrand for equal charges. For  $h < 2$  it agrees with its low- $h$  asymptote, and for  $h > 5$  it agrees with its high- $h$  asymptote. The mixed regime, where the numerical solution smoothly interpolates between the asymptotes, is shown in the central rectangle.

Substituting the large  $h$  regime for  $u(h)$  leads to

$$\begin{aligned} \phi(s^*) &= \frac{r^2}{q^2} u(h) + J \log(1 + 2e^{-u(h)}) = J \left[ \frac{\log 2(h-1)}{h} + \log \left( \frac{h}{h-1} \right) \right], \\ \phi''(s^*) &= \frac{2Jq^4 e^{-u(h)}}{(1 + 2e^{-u(h)})^2} = Jq^4 \left( \frac{h-1}{h} \right), \\ f(s^*) &= q^2 \frac{1 - e^{-\frac{Ju(h)}{h}}}{u(h)} = q^2 \frac{1 - e^{-J \frac{\log 2(h-1)}{h}}}{\log 2(h-1)}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

and the saddle-point approximations for  $\Omega_J(r)$  and  $\omega_J(r)$  result in

$$\Omega_J(r) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi J}} \frac{(2h-2)^{\frac{J}{h}} - 1}{\log(2h-2)} \left(\frac{h}{h-1}\right)^{J+\frac{1}{2}}, \quad (4.47a)$$

$$\omega_J(r) = \frac{(2h-2)^{\frac{J}{h}}}{q\sqrt{2\pi h}} \left(\frac{h}{h-1}\right)^{J+\frac{1}{2}}. \quad (4.47b)$$

We must note that these magnitudes depend on  $r$  through  $h = \frac{Jq^2}{r^2}$ . It should be stressed that (4.47b) has been obtained by using the saddle point approximation of (4.27) and not by differentiating (4.47a); although these two results are asymptotically equivalent, they differ in subleading terms.

We will now consider the validity of formulae (4.47a, 4.47b). The saddle-point approximation is good if  $\phi(s^*) \gg 1$ . We could rewrite  $\phi(s^*)$  as follows:

$$\phi(s^*) = J\psi(h) \quad \text{with} \quad \psi(h) = \frac{\log 2(h-1)}{h} + \log\left(\frac{h}{h-1}\right), \quad (4.48)$$

and, for large  $J$ , demand  $\psi(h) > 1$  as we did before. But this would contradict (4.44), so we better choose some  $J_0 > 2$  and write

$$\phi(s^*) = \frac{J}{J_0} J_0 \psi(h), \quad (4.49)$$

which satisfies  $\phi(s^*) \gg 1$  if  $J/J_0$  is large and  $J_0\psi(h) > 1$ . For example, we have

$$J_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad h < \{2.2, 7.2, 12.5, 18.3, 24.3, 30.6\}. \quad (4.50)$$

This restriction implies that the distance cannot be too small in order to preserve the validity of the saddle-point approximation.

For very small  $r$ , we can choose a large real part of  $s$  and approximate  $(1 + 2e^{-q^2s})^J \approx 1 + 2Je^{-q^2s}$ , and then  $\Omega_J(r)$  is reduced to

$$\Omega_J(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \theta(r^2) + 2J\theta(r^2 - q^2), \quad (4.51)$$

that is, only the node at the origin and its  $2J$  neighbors contribute to  $\Omega_J$ . The formula (4.47a) cannot reproduce this result, and therefore there must exist a validity condition which forbids too small distances. This is exemplified in (4.50). However, that restriction turns out to be of no importance because close-to-the-origin nodes represent a negligible fraction of the whole.

#### 4.2.4 The middle distance regime

When  $h$  takes a value in which no accurate asymptotic approximation of  $\vartheta$  is available, we are in the *middle distance* or *crossing* regime. In this situation the saddle point can be computed only numerically. This has been done in figure 4.2 by solving the following equation

$$-\frac{\vartheta'(w)}{\vartheta(w)} = \frac{1}{h}, \quad (4.52)$$

whose solution  $u(h)$  is the saddle point. This solution can always be obtained, with no condition on the value of  $h$ , but it coincides with (4.45) in the specified ranges. Using this

solution, the saddle-point approximation of  $\omega_J(r)$  can be computed, but only for large  $J$ , and only for not too small distances.

In figure 4.3, we compare equations (4.34) and (4.47b), displaying between them the crossing regime. Both small and large distance regimes show up for constant  $J$  and  $q$  at different distances  $r$ . Note that small  $h$  corresponds to large  $r$  and vice versa, but “small” and “large” distances are  $J$ -dependent concepts, so that both regimes can have their own range of validity. Moreover, for sufficiently high  $J$  almost all relevant distances in flux space can be considered “small”. In such cases, the BP formula (4.7,4.34) should be replaced by the correct asymptotic one given in (4.47a,4.47b).

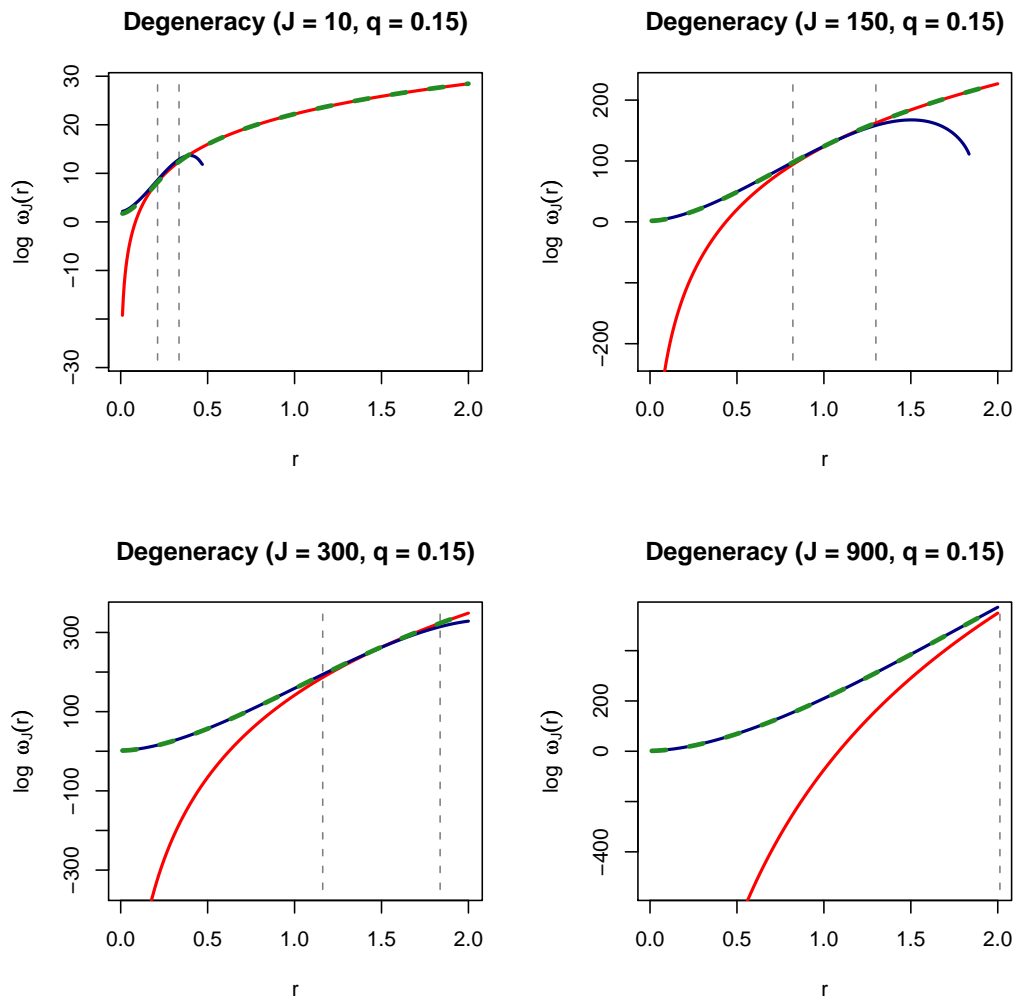


Figure 4.3: Asymptotic regimes of the Landscape degeneracy  $\omega_J(r)$  for equal charges  $q = 0.15$  and different  $J$  as functions of  $r$ . The actual  $\omega_J(r)$  is close to the upper envelope of both curves (green dashed line). For small  $J$  the large distance or BP regime dominates (red line), but for large  $J$  the small distance regime (blue line) spans the whole  $[0, 2]$  interval. Vertical dashed lines delimit the crossing regime, corresponding to  $h \in [2, 5]$ , which is above  $r = 2$  in the  $J = 900$  panel.

In the case of different charges in the small distance regime, the approximate saddle-point equation cannot be exactly solved. Thus, one needs to solve the complete saddle-

point equation

$$r^2 + \sum_{j=1}^J q_j^2 \frac{\vartheta'(q_j^2 s)}{\vartheta(q_j^2 s)} = 0. \quad (4.53)$$

The  $h$  parameter does not appear in this equation, and it is not clear what kind of average charge must be used to define it.

However, there is a class of models in which the crossing regime dominates over the small and large distance regimes. It is enough to consider a charge distribution in which the smallest and biggest charges are well separated. In such cases, there will be regions in the  $s$  plane where every  $\vartheta$  factor could in principle lie in a different asymptotic regime, and thus we will obtain a plethora of intermediate regimes in which neither BP nor small distance regimes will be accurate enough. For large  $J$ , the degeneracy density  $\omega_J(r)$  can be obtained by computing the numerical solution of (4.52) and then using it in the saddle point approximation of the exact integral (4.27).

### 4.3 Applications

In this section, we will show how  $\omega_J(r)$  helps to estimate other properties of BP models. We will consider the number of states in the anthropic window, the distribution of non-vanishing fluxes of a typical state, the minimum cosmological constant and a possible consequence on the KKLT moduli stabilization mechanism.

#### 4.3.1 Number of states in the Weinberg Window

The number of states of positive cosmological constant bounded by a small value  $\Lambda_\varepsilon$  is the number of nodes of the lattice in flux space whose distance to the origin lies in the interval  $[R_0, R_\varepsilon]$ , where  $R_0 = \sqrt{2|\Lambda_0|}$  and  $R_\varepsilon = \sqrt{2(\Lambda_\varepsilon - \Lambda_0)} \approx R_0 + \frac{\Lambda_\varepsilon}{R_0}$  so that the width of the shell is  $\varepsilon = \frac{\Lambda_\varepsilon}{R_0}$ :

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \Omega_J(R_\varepsilon) - \Omega_J(R_0) \approx \omega_J(R_0) \frac{\Lambda_\varepsilon}{R_0}. \quad (4.54)$$

We remind the reader that  $\Omega_J(r)$  is the number of states inside a sphere of radius  $r$  in flux space and  $\omega_J(r) = \frac{\partial \Omega_J(r)}{\partial r}$ . If  $\Lambda_\varepsilon$  is the width of the anthropic range  $\Lambda_{\text{WW}}$  (the so-called Weinberg Window), then the number of states in it is

$$\mathcal{N}_{\text{WW}} = \frac{\omega_J(R_0)}{R_0} \Lambda_{\text{WW}}. \quad (4.55)$$

Computation of  $\omega_J(R_0)$  should be done along the lines of the previous section. Thus, the expression (4.55) can be used for all values of  $h$  using the relevant approximation of the exact formula (4.27), which includes the BP regime as well as the small distance and crossing regimes.

#### 4.3.2 Typical number of non-vanishing fluxes

As before, consider the nodes of the lattice  $\mathcal{L}$  having cosmological constant between 0 and  $\Lambda_\varepsilon$ . They will lie inside a thin shell of width  $\varepsilon = R_\varepsilon - R$  above radius  $R$  (former radius

$R_0$  will be called  $R$  in this section). The set of nodes inside the shell will be called  $\Sigma_\varepsilon$ :

$$\Sigma_\varepsilon = \{\lambda \in \mathcal{L}: R \leq \|\lambda\| \leq R_\varepsilon\} \quad |\Sigma_\varepsilon| = \mathcal{N}_\varepsilon. \quad (4.56)$$

We will assume that  $\varepsilon$  is smaller than the charges  $q_i$  so that (4.54) is valid but  $\mathcal{N}_\varepsilon \gg 1$ .

Taking  $J = 2$ , we will find at most four nodes in the shell with one vanishing component. Thus, the remaining states will have two nonzero components. In the  $J = 3$  case, the states in the shell are located at the axes (at most six) with only one nonzero component, at the coordinate planes with two nonzero components (a larger charge-dependent number) and at the ‘‘bulk’’ of the sphere with all three nonzero components (the most abundant). In this way, we find that the typical number of non-vanishing components is  $J$  for the cases  $J = 2, 3$ .

Thus, after drawing a node of the shell at random (assuming that all nodes have the same chances of being selected), the probability of all fluxes being different from zero will be very high. In this section we wonder whether it happens for all  $J$ .

We will answer this question by computing the fraction of states in the shell having a fixed number  $j$  of non-vanishing components. If all states are equiprobable, the quotient between this number and the total number of nodes in the shell will yield the probability distribution of the values  $j$  taking into account only abundances of states.

We can expect this probability distribution to have a peak at certain value  $j^*$ . This  $j^*$  will be taken as the typical number of non-vanishing fluxes of the states in the shell. For small values of  $J$  we know that  $j^* = J$ . We will see that this is not true for sufficiently high  $J$ .

We will now outline the calculation and give the results. The details can be found in appendix 4.5.

For any state  $\lambda \in \Sigma_\varepsilon$  having exactly  $j$  non-vanishing components, we define  $\alpha = \frac{j}{J}$ . When  $\lambda$  is selected at random from  $\Sigma_\varepsilon$  with uniform probability,  $\alpha$  becomes a discrete random variable taking values in the  $[0, 1]$  interval whose probability distribution is given by

$$P(\alpha) = \frac{\mathcal{N}_\varepsilon(j)}{\mathcal{N}_\varepsilon}, \quad (4.57)$$

where  $\mathcal{N}_\varepsilon(j)$  is the number of nodes in the shell  $\Sigma_\varepsilon$  having exactly  $j$  non-vanishing components. The formula (4.57) takes into account only the abundances of states in the shell, and hence we are assuming that all states in  $\Sigma_\varepsilon$  are equally probable.

Computation of the quantity  $\mathcal{N}_\varepsilon(j)$  can be achieved using the principle of inclusion-exclusion. For simplicity, we will assume equal charges  $q_1 = \dots = q_J = q$ . In the general expression (4.102) we substitute the number of nodes in the shell (4.54) and the exact density of states (4.27), obtaining (4.107). After normalization, it results in the following exact representation for the probability distribution (see (4.108) in appendix 4.5):

$$P(\alpha) = \frac{2R}{\omega_J(R)} \binom{J}{\alpha J} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\phi(s,\alpha)} ds \quad \text{with} \quad \phi(s,\alpha) = sR^2 + \alpha J \log[\vartheta(q^2 s) - 1]. \quad (4.58)$$

With the assumptions made, we find that  $P(\alpha)$  depends on the radius of the  $\Lambda = 0$  sphere but it is independent of  $\varepsilon$ . The same method can be used for analyzing the distribution  $P(\alpha)$  over the whole Landscape, that is, inside the sphere of radius  $R_1$ . The resulting expression and the subsequent analysis are analogous, and the result is quite similar; in appendix 4.6 the calculation is carried out in the BP regime.

Using the saddle-point method again, we can approximate the exact formula (4.58) by (see (4.115) in appendix 4.5)

$$P(\alpha) \propto e^{Js(\alpha)} \quad \text{with} \quad s(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha) + \frac{1}{J} \phi(v, \alpha), \quad (4.59)$$

where  $v = q^2 s^*$ , and  $s^*$  is the stationary point of the function  $\phi(s, \alpha)$  defined in (4.58). The saddle point  $v$  is a function of a single variable  $h\alpha$  with  $h = \frac{Jq^2}{R^2}$ , and it has two well-defined asymptotic regimes and a crossing regime which requires numerical computation. This is plotted in appendix 4.5, figure 4.9.

The distribution (4.59) has a pronounced peak located at  $\alpha^*(h)$ . This is the typical number of non-vanishing fluxes in the shell  $\Sigma_\epsilon$  (and essentially also in the whole Landscape). Its computation must be done numerically by solving the following equation (see (4.117) in appendix 4.5):

$$\vartheta[v(h\alpha)] = \frac{1}{1 - \alpha}. \quad (4.60)$$

For each positive value of  $h$ , (4.60) has a unique solution  $\alpha^*(h)$  with its own regimes, which is plotted in figure 4.4.

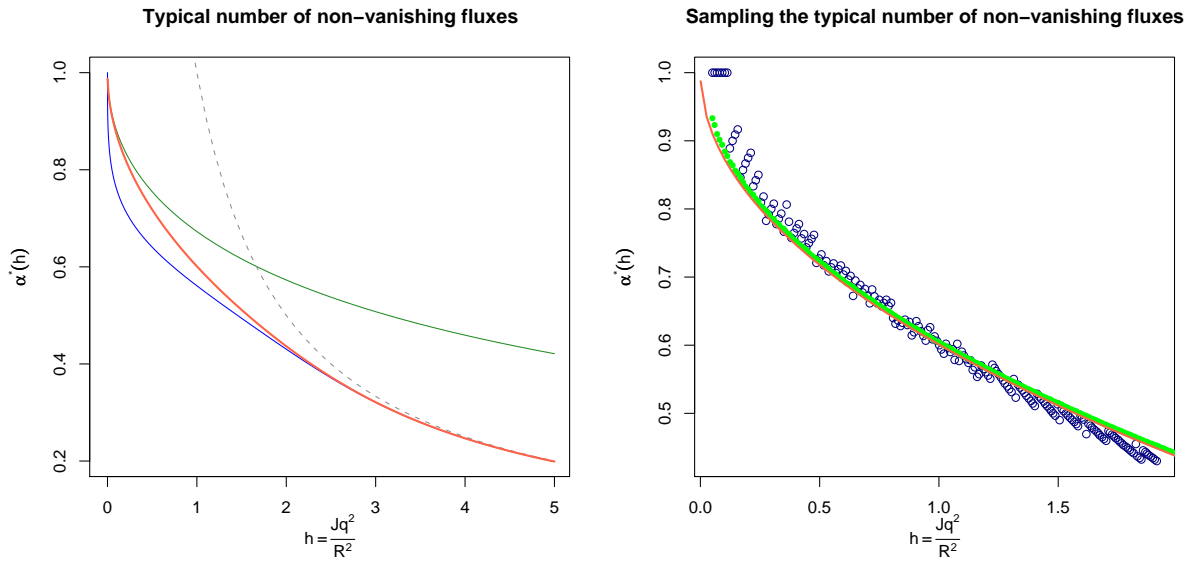


Figure 4.4: (Left) Numerical solution  $\alpha^*(h)$  along with its asymptotic regimes shown in equations (4.119) (small  $h$ ) and (4.121) (large  $h$ ). The dashed line is the curve  $\alpha^* = \frac{1}{h}$ . (Right) Samples of the typical number of non-vanishing fluxes. The two sampling methods described in the text have been used: The inside-shell, maximum-frequency method (blue hollow circles) and the inside-ball, average-frequency method (green bullets). The saddle point solution displayed in the left panel is also shown (red line).

Thus,  $P(\alpha)$  is locally Gaussian around its peak,

$$\log P(\alpha) \approx \log P(\alpha^*) - \frac{1}{2} J |s''(\alpha^*)| (\alpha - \alpha^*)^2, \quad (4.61)$$

with standard deviation

$$\frac{1}{\sqrt{J |s''(\alpha^*)|}} = \sqrt{\frac{\alpha^*(1 - \alpha^*)}{J}} \leq \frac{1}{2\sqrt{J}}. \quad (4.62)$$



Therefore, for large  $J$  the peak at  $\alpha^*$  is very narrow. We can conclude that an overwhelming fraction of states in the shell (and in the whole Landscape) have  $J\alpha^*$  non-vanishing fluxes, and that for high dimensions this typical number is far from  $J$ , which is the typical value for the low-dimensional case considered at the beginning of this subsection.

We should emphasize that the calculation outlined here uses the saddle-point approximation, and therefore it is not valid for small  $J$ .

Numerical searches have been carried out varying  $J$  for constant  $q$  and  $R$ , estimating  $\alpha^*(h)$  by counting states. Results are shown in figure 4.4 versus the saddle point curve described above. Two sampling methods have been used:

- The inside-shell, maximum-frequency method samples states inside a shell and computes the typical number of non-vanishing fluxes as the value of maximum frequency. Some advantages can be mentioned, such as the possibility of performing a better sampling of the true set we are describing, but also some disadvantages: the size of the sample is smaller, there is an unavoidable intrusion of exterior secant states in the shell [103, 102], and the sample shows a stronger dependence with the details of the lattice.
- The inside-ball, average-frequency method samples states inside a ball and computes the typical number of non-vanishing fluxes using the average frequency. When compared with the previous method, this method has the disadvantage of sampling mostly secant states, but it has the advantage of accounting for bigger sample sizes. It also averages over the lattice details, giving a satisfactory agreement with the saddle point computation.

Data used in both samples are a shell of radius  $R = \sqrt{2}$  and width  $\frac{q}{2}$  with  $q = 0.15$ , and dimensions  $J$  between 2 and 200 in the first method and between 2 and 275 in the second. In both cases, the  $h$  parameter has been computed using averaged distances, and the lattice details can be observed in the first sample in the form of a jagged curve. Note that for dimensions up to 7 the typical number of non-vanishing fluxes is  $J$  (that is,  $\alpha^* = 1$ ) but this abruptly changes to fit the saddle point curve.

We will close this section with two remarks. First, as the different sampling methods considered above suggest,  $\alpha^*(h)$  curve is very robust as a property of the BP Landscape, in the sense that generic subsets of the lattice have  $\alpha^*(h)$  curves which differ only in subleading terms. We can see an example of this feature in appendix 4.6. And finally, the role played by the exact formula (4.27) for  $\omega_J(r)$  in the computation of  $P(\alpha)$  is essential: replacing it with the BP estimate (the “pure BP regime”) results in a probability distribution valid only for  $h < \frac{8\pi}{27}$  with the same typical fraction  $\alpha^*(h)$ . Details of this calculation are given in appendix 4.6.

### 4.3.3 Estimating the minimum positive cosmological constant

In this subsection we will estimate the explicit dependence of the minimum positive cosmological constant with respect to the parameters of the Landscape. We will call  $\Lambda^*$  the actual minimum value, and  $\Lambda_\epsilon$  the corresponding estimator. We will assume that all

charges are equal, for simplicity. In this case, we have

$$\Lambda^* = \Lambda_0 + \frac{q^2}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^J n_i^2}_N, \quad (4.63)$$

and we should choose the smallest integer  $N$  satisfying two conditions: it should yield  $\Lambda^* \geq 0$ , and it should be representable as a sum of  $J$  integer squares. If we call such a number  $N_J(q)$ , we have the exact formula

$$\Lambda^* = \Lambda_0 + \frac{q^2}{2} N_J(q). \quad (4.64)$$

The computation of  $N_J(q)$  can be avoided as we change it by another integer  $N$  satisfying only the first condition:

$$\Lambda_0 + \frac{q^2 N}{2} \geq 0 \quad \text{but} \quad \Lambda_0 + \frac{q^2(N-1)}{2} < 0, \quad (4.65)$$

that is,

$$\frac{2|\Lambda_0|}{q^2} \leq N < \frac{2|\Lambda_0|}{q^2} + 1. \quad (4.66)$$

Thus,  $N$  is the smallest integer greater than or equal to  $\frac{2|\Lambda_0|}{q^2}$ , also called *ceiling*:

$$N = \left\lceil \frac{2|\Lambda_0|}{q^2} \right\rceil. \quad (4.67)$$

If  $N$  is decomposable as the sum of  $J$  squares, we have  $N_J(q) = N$ , but in general the inequality

$$\left\lceil \frac{2|\Lambda_0|}{q^2} \right\rceil \leq N_J(q) \quad (4.68)$$

holds. So we have a lower bound for the minimum value of the cosmological constant, and this is our estimator:

$$\Lambda^* \geq \Lambda_\epsilon = \Lambda_0 + \frac{q^2}{2} \left\lceil \frac{2|\Lambda_0|}{q^2} \right\rceil. \quad (4.69)$$

It should be noted that this lower bound is independent of  $J$ , even though we can expect it to work better when the error for the replacement is small, that is, for large  $J$ . In figure 4.5 we show the lower bound along with the actual, brute-force computed minimum, and we find a very good agreement for  $J = 4$  and greater. In the figure we can see a straight upper envelope of the lower bound, which can be obtained by noting that  $\lceil x \rceil < 1 + x$ , and thus  $\Lambda_0 + \frac{q^2}{2} \lceil \frac{2|\Lambda_0|}{q^2} \rceil < \frac{q^2}{2}$ .

Generalizing the preceding argument is not easy, because for different charges we have

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{q^2}{2} \sum_{i=1}^J \frac{q_i^2}{q^2} n_i^2, \quad (4.70)$$

where  $q$  is some average value of the charges. The sum in (4.70) is not an integer, and its possible values near  $\Lambda = 0$  depend strongly on the particular charge values.

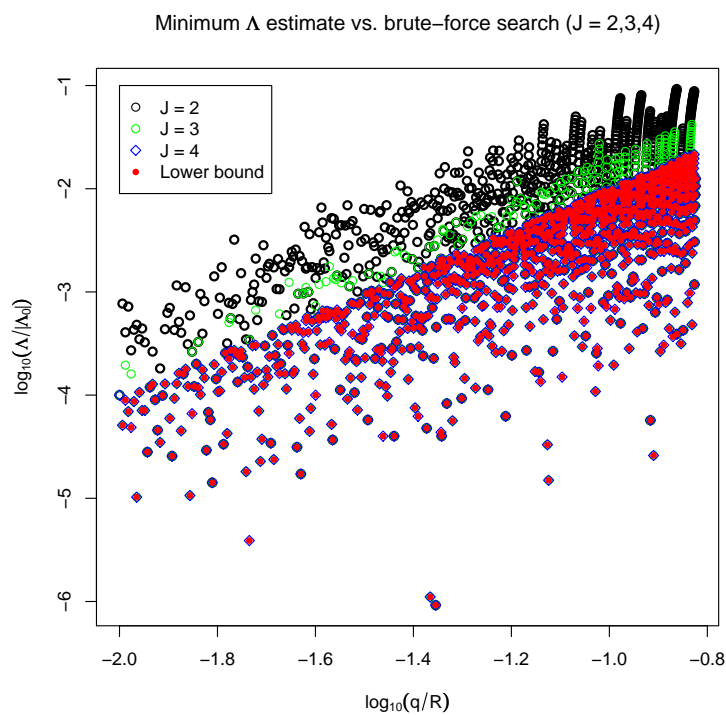


Figure 4.5: Actual brute-force computation of the minimum positive cosmological constant for equal charges in  $J = 2, 3, 4$  (hollow circles), along with the lower bound given in (4.69) versus charge values. The agreement is almost complete for  $J = 4$ , and therefore for greater  $J$  as well.

We also lack a reasonable upper bound for the minimum value, because the replacement of  $N_J(q)$  by  $N_J(q) + 1$  in (4.65) gives a window of width  $\frac{q^2}{2}$ . The corresponding distance in flux space is of the order of the cell spacing, which is too big to be a good upper bound.

We will adopt another approach from now on. Our strategy will consist of computing the number of states of cosmological constant between 0 and  $\Lambda_\varepsilon$  and equate it to the degeneracy of the minimum positive  $\Lambda$  states computed in a different way.

Let  $\lambda^*$  be a minimum cosmological constant state, that is,  $\Lambda(\lambda^*) = \Lambda^*$ . There are other valid minima of equal value  $\Lambda^*$ . Some of them can be derived from  $\lambda^*$  using lattice symmetries, but there will be a set of minima which cannot be related by any symmetries. We will call the set of minima modulo lattice symmetries  $\Sigma^*$ , and its cardinality  $|\Sigma^*|$  the *essential degeneracy*. For small  $J$ ,  $\Sigma^*$  can contain only one state, but we can expect  $\Sigma^*$  to grow with  $J$ .

Consider a state  $\lambda^* = q(n_1^*, \dots, n_J^*)$  in  $\Sigma^*$ , and let  $f_k(\lambda^*)$  be the frequency of the non-negative number  $k$  in the sequence  $|n_1^*|, \dots, |n_J^*|$ . Note that  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k = J$ , and the number of different nodes in  $\mathcal{L}$  that can be derived from  $\lambda^*$  using the lattice symmetries is

$$\frac{J! 2^{J-f_0}}{\prod_{k=0}^{\infty} f_k!}. \quad (4.71)$$

The rationale behind equation (4.71) is to count permutations of the  $J$  components except for the components which have the same absolute value, and multiply them by the number of different “ $J$ -quadrants” which can contain such a state (different signs of its components), which depend on the number  $J - f_0$  of non-vanishing components.

Of course, knowing the sequence  $\{f_k\}_{k=0, \dots, \infty}$  is equivalent to knowing the exact state  $\lambda^*$ , which is a very difficult problem for large  $J$ . So we can bound the true value of the degeneracy (4.71) between the two extreme cases of states having different values in all non-vanishing components (and then, all values are non-degenerate except 0,  $f_k = 1$  if  $k \neq 0$ ) and states having all non-vanishing components equal (and then, all frequencies vanish  $f_k = 0$  except for two values  $k \in \{0, \ell\}$  for some  $\ell$ ). Then, taking the same number of null components  $f_0$ ,

$$\frac{J! 2^{J-f_0}}{f_0! (J - f_0)!} \leq \frac{J! 2^{J-f_0}}{\prod_{k=0}^{\infty} f_k!} \leq \frac{J! 2^{J-f_0}}{f_0!}. \quad (4.72)$$

The degeneracy of the minimum  $\Lambda^*$  is obtained by adding all degeneracies of the different states  $\lambda^* \in \Sigma^*$ , and thus we obtain the bound:

$$\sum_{\lambda^* \in \Sigma^*} \frac{J! 2^{J-f_0(\lambda^*)}}{f_0(\lambda^*)! (J - f_0(\lambda^*))!} \leq \sum_{\lambda^* \in \Sigma^*} \frac{J! 2^{J-f_0(\lambda^*)}}{\prod_{k=0}^{\infty} f_k(\lambda^*)!} \leq \sum_{\lambda^* \in \Sigma^*} \frac{J! 2^{J-f_0(\lambda^*)}}{f_0(\lambda^*)!}. \quad (4.73)$$

Equating the degeneracy (middle term of (4.73)) to the number of states in the shell (4.55), we have

$$\frac{R}{\omega_J(R)} \sum_{\lambda^* \in \Sigma^*} \frac{J! 2^{J-f_0(\lambda^*)}}{f_0(\lambda^*)! (J - f_0(\lambda^*))!} \leq \Lambda_\varepsilon \leq \frac{R}{\omega_J(R)} \sum_{\lambda^* \in \Sigma^*} \frac{J! 2^{J-f_0(\lambda^*)}}{f_0(\lambda^*)!}. \quad (4.74)$$

Note that the shell’s width is taken as  $\Lambda_\varepsilon$  in (4.74) instead of  $\Lambda^*$ , because the number of states in the shell is an estimate. Therefore, (4.74) can be taken as a definition of the minimum estimator  $\Lambda_\varepsilon$ .

So we are faced with estimating  $f_0(\lambda^*)$ , or equivalently, the fraction of non-vanishing components  $\alpha(\lambda^*) = \frac{J-f_0(\lambda^*)}{J}$ , in terms of which

$$\frac{R}{\omega_J(R)} \sum_{\lambda^* \in \Sigma^*} \frac{J! 2^{J\alpha(\lambda^*)}}{[J\alpha(\lambda^*)!] [J(1-\alpha(\lambda^*))!]} \leq \Lambda_\varepsilon \leq \frac{R}{\omega_J(R)} \sum_{\lambda^* \in \Sigma^*} \frac{J! 2^{J\alpha(\lambda^*)}}{[J(1-\alpha(\lambda^*))!]} \quad (4.75)$$

The sum extended to  $\Sigma^*$  can be replaced by averaging over a probability measure of  $\alpha$  restricted to  $\Sigma^*$ :

$$\frac{R|\Sigma^*|}{\omega_J(R)} \int_0^1 \frac{J! 2^{J\alpha}}{[J\alpha!] [J(1-\alpha)]!} dP(\alpha|\Sigma^*) \leq \Lambda_\varepsilon \leq \frac{R|\Sigma^*|}{\omega_J(R)} \int_0^1 \frac{J! 2^{J\alpha}}{[J(1-\alpha)]!} dP(\alpha|\Sigma^*). \quad (4.76)$$

The conditional distribution  $P(\alpha|\Sigma^*)$  is not known, because the set  $\Sigma^*$  is very difficult to enumerate. We must assume the robustness of the distribution  $P(\alpha)$  computed in the previous subsection, and approximate  $P(\alpha|\Sigma^*) \approx P(\alpha)$ . We then use the Gaussian nature of  $P(\alpha)$  for large  $J$ , and we perform the average simply by taking the most probable value:

$$\frac{R|\Sigma^*|}{\omega_J(R)} \frac{J! 2^{J\alpha^*}}{[J\alpha^*!] [J(1-\alpha^*)!]} \leq \Lambda_\varepsilon \leq \frac{R|\Sigma^*|}{\omega_J(R)} \frac{J! 2^{J\alpha^*}}{[J(1-\alpha^*)!]} \quad (4.77)$$

This equation is not useful because we lack an estimate for  $|\Sigma^*|$ . Nevertheless, for equal charges we can replace  $\Lambda_\varepsilon$  with (4.69) and use (4.77) to obtain a lower bound for the essential degeneracy  $|\Sigma^*|$ :

$$|\Sigma^*| \geq \frac{\omega_J(R)}{R} \frac{[J(1-\alpha^*)!]}{J! 2^{J\alpha^*}} \left( \Lambda_0 + \frac{q^2}{2} \left\lceil \frac{2|\Lambda_0|}{q^2} \right\rceil \right). \quad (4.78)$$

Thus, for the special case of equal charges, we have estimates for the minimum value of the cosmological constant and for its essential degeneracy. Figure 4.6 compares the estimate given in (4.78) with actual brute-force computations for low  $J$ .

As said above, generalizing (4.69) to the case of distinct charges is difficult. Nevertheless, we can assume that for charges not only distinct but incommensurate, the essential degeneracy will be  $|\Sigma^*| = 1$ . Furthermore, the symmetry degeneracy is reduced to  $2^{J\alpha}$ , so that we have the estimate

$$\Lambda_\varepsilon \approx \frac{2^{J\alpha^*} R}{\omega_J(R)}. \quad (4.79)$$

Note that this formula is equivalent to the number of states in the Weinberg Window, (4.55), where  $\mathcal{N}_{\text{WW}}$  should be replaced by the symmetry degeneracy and solved for the width  $\Lambda_\varepsilon$ . But we can improve this by replacing the degeneracy  $2^{J\alpha^*}$  by its mean value computed using the Gaussian distribution  $P(\alpha)$  given in formulae (4.61) and (4.62):

$$\langle 2^{J\alpha} \rangle_{P(\alpha)} = \int_0^1 2^{J\alpha} dP(\alpha) \approx \int_{\mathbb{R}} 2^{J\alpha} e^{-\frac{J(\alpha-\alpha^*)}{2\alpha^*(1-\alpha^*)}} \frac{\sqrt{J} d\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha^*(1-\alpha^*)}} = 2^{J\alpha^* [1 + \frac{\log 2}{2}(1-\alpha^*)]}. \quad (4.80)$$

We can check this estimate with the brute-force data for low  $J$  (and thus  $\alpha^* = 1$ ) by choosing charges with constant geometric mean. In the BP regime  $\omega_J(R)$  depends only on the geometric mean and therefore it does not fluctuate. Figure 4.7 shows that (4.79) is a good estimator for the mean value of such fluctuations.

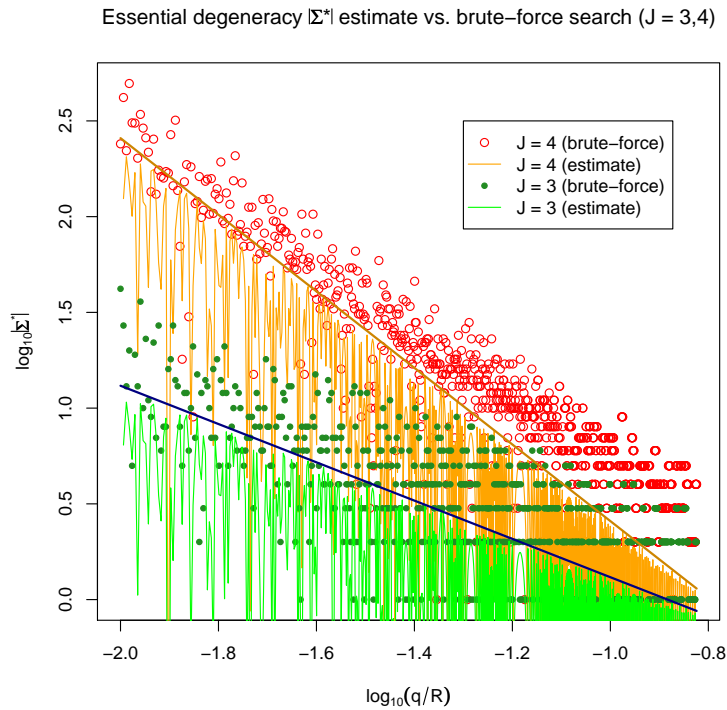


Figure 4.6: Actual brute-force computation of the essential degeneracy  $|\Sigma^*|$  of the minimum positive cosmological constant states for equal charges in  $J = 3, 4$  (circles) along the lower bound given in (4.78) (thin lines) versus charge values. The strong oscillations of the lower bound are caused by the ceiling function (note logarithmic scale). Thick lines are obtained replacing the lower bound of  $\Lambda_\varepsilon$  by its upper envelope, and they represent an average asymptotic regime which is better followed in the  $J = 4$  sample.

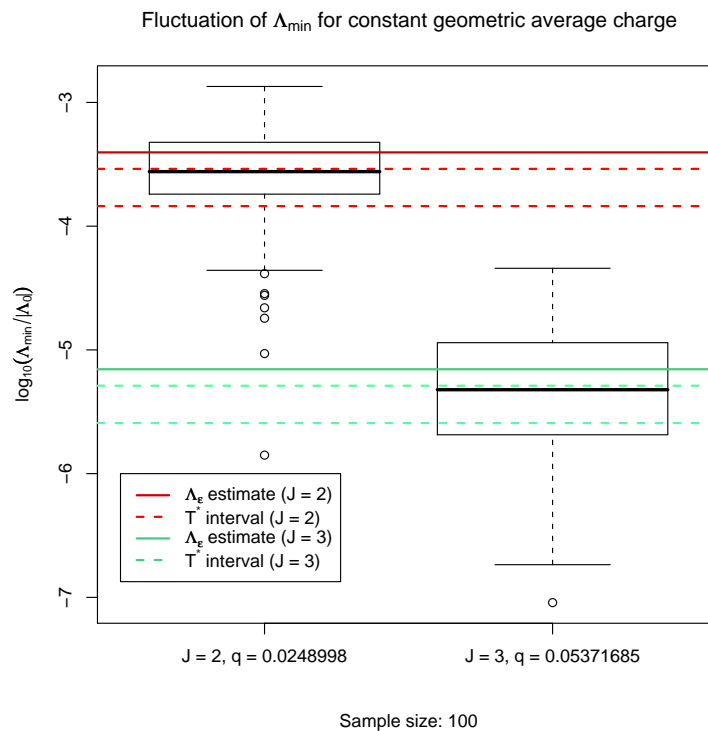


Figure 4.7: Each box plot represents a sample of 100 choices of  $J$  charges with constant geometric average charge for which  $\Lambda_{\min}$  has been computed by brute-force search. Thick lines correspond to estimate (4.79), which does not fluctuate (at least in the BP regime). These lines cross inside the boxes in good agreement with numerical data. Dashed lines enclose the values provided by the “thermodynamic” estimator  $T^*$ , which show even better agreement.

We can derive another estimator with an additional parameter which allows some control of the bias by providing an interval instead of a single value. Nevertheless, the interval is not a confidence interval and we lack a rigorous proof of strict inclusion.

We begin by considering the following partition function of the Landscape:

$$Z = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \theta[\Lambda(\lambda)] e^{-\frac{\Lambda(\lambda)}{T}}. \quad (4.81)$$

Here, the sum is carried out over all lattice nodes, but the step function excludes all negative cosmological constant states.  $\Lambda$  plays the role of the energy, and  $T$  is the associated temperature. Low lying states constitute the dominant contribution to the partition function at very low temperatures, that is,

$$Z \xrightarrow{T \rightarrow 0} e^{S^*} e^{-\frac{\Lambda^*}{T}} + e^{\hat{S}} e^{-\frac{\hat{\Lambda}}{T}} + \dots, \quad (4.82)$$

where  $\Lambda^*$  is the actual minimum positive value of the cosmological constant of degeneracy  $e^{S^*}$ , and  $\hat{\Lambda}$  is the first excited state of degeneracy  $e^{\hat{S}}$ . Introducing the gap  $\delta\Lambda = \hat{\Lambda} - \Lambda^*$ , the low temperature free energy is

$$F = -T \log Z \xrightarrow{T \rightarrow 0} \Lambda^* - TS^* - T \log \left( 1 + e^{\hat{S} - S^*} e^{-\frac{\delta\Lambda}{T}} + \dots \right), \quad (4.83)$$

and, at sufficiently low temperatures, namely  $T \ll \delta\Lambda$ , we have the linear dependence

$$F \approx \Lambda^* - TS^*. \quad (4.84)$$

At first sight, this equation can be used to estimate the ground state energy  $\Lambda^*$  and its entropy  $S^*$  by computing the free energy in another way. For this, we use the counting measure in the Landscape  $\Omega_J(r)$  given in (4.29), and write

$$Z = \int_R^\infty e^{-\frac{\Lambda(r)}{T}} d\Omega_J(r), \quad (4.85)$$

where we have used the step function to cut off the interval of integration.  $\Lambda$  depends on the radial variable  $r$  in flux space:

$$\Lambda(r) = \frac{1}{2}(r^2 - R^2). \quad (4.86)$$

Note that the counting measure is reminiscent of the spherical volume element (divided by  $\text{vol} Q$ ) in  $J$  dimensions, and in fact reduces to it in the BP regime, but it is really a discrete distribution whose properties are crucially different from the continuous ones, as will be seen below.

Replacing  $d\Omega_J(r) = \omega_J(r) dr$  and using the exact contour integral (4.27) for  $\omega_J(r)$  we obtain, upon reversing the order of integration and changing the variable  $r$  to  $u = \Lambda(r)$ ,

$$\begin{aligned} Z &= \int_R^\infty e^{-\frac{\Lambda(r)}{T}} \omega_J(r) dr = \int_R^\infty e^{-\frac{r^2 - R^2}{2T}} \left\{ \frac{2r}{2\pi i} \int_\gamma e^{sr^2} \prod_{i=1}^J \vartheta(q_i^2 s) ds \right\} dr \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left\{ \int_R^\infty e^{-\frac{r^2 - R^2}{2T} + sr^2} 2r dr \right\} \prod_{i=1}^J \vartheta(q_i^2 s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left\{ 2 \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{T} - 2s)u} du \right\} e^{sR^2} \prod_{i=1}^J \vartheta(q_i^2 s) ds, \end{aligned} \quad (4.87)$$



and the radial integral converges provided  $\text{Re}\{s\} < \frac{1}{2T}$ , that is, if the pole at  $\frac{1}{2T}$  is located to the right of the integration contour  $\gamma$ . Then, we have a contour integral representation for the partition function:

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{sR^2}}{\frac{1}{2T} - s} \prod_{i=1}^J \vartheta(q_i^2 s) ds, \quad (4.88)$$

We can see that (4.88) gives the initial expression (4.81) by expanding the  $\vartheta$  sums under the product sign. Interchanging sum and integral, and evaluating each integral, it turns

$$Z = \sum_{(n_1, \dots, n_J) \in \mathbb{Z}^J} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{sR^2 - s \sum_{i=1}^J n_i^2 q_i^2}}{\frac{1}{2T} - s} ds. \quad (4.89)$$

If the factor multiplying  $s$  in the exponent is negative (thus  $\Lambda$  is positive), then we can close the contour by a large half circle to the right; the integral on the circle vanishes, and the contour encloses the pole at  $\frac{1}{2T}$  with negative orientation, resulting in a residue  $e^{-\frac{\Lambda}{T}}$ . On the other hand, if  $\Lambda$  is negative, the contour can be closed on the left, but the integrand has no poles in this region, and therefore the integral vanishes. Thus, we recover (4.81).

Equation (4.88) provides an independent evaluation of the partition function by numerical computation of the contour integral. Then we can use the values obtained in the low temperature region to fit equation (4.84) and estimate  $\Lambda^*$  and  $S^*$ . Nevertheless, the expected straight line (4.84) is not obtained this way, but a rather different behavior, as we now explain (see figure 4.8).

Assume that we want to approximate expression (4.85) at low temperatures. Changing the integration variable to  $u = \Lambda(r)$  again we obtain

$$Z = \int_R^{\infty} e^{-\frac{\Lambda(r)}{T}} \omega_J(r) dr = \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{T}} \omega_J(\sqrt{R^2 + 2u}) \frac{du}{\sqrt{R^2 + 2u}}, \quad (4.90)$$

which expresses  $Z$  as the Laplace transform of  $\frac{\omega_J(\sqrt{R^2 + 2u})}{\sqrt{R^2 + 2u}}$ . If this function is continuous near  $u = 0$ , the asymptotic behavior of  $Z$  is simply

$$Z \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{T\omega_J(R)}{R}, \quad (4.91)$$

and the thermodynamic magnitudes are, when  $T \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} F &= -T \log \frac{T\omega_J(R)}{R}, \\ S &= 1 + \log \frac{T\omega_J(R)}{R}, \\ \langle \Lambda \rangle &= F + TS = T. \end{aligned} \quad (4.92)$$

As seen in figure 4.8, the numerically computed partition function is a good approximation for curves computed assuming continuity, suggesting that the numerical quadrature rule works as if the density of states were continuous, and therefore it is not useful to estimate the ground state of the discrete spectrum,  $\Lambda^*$  and  $S^*$ .

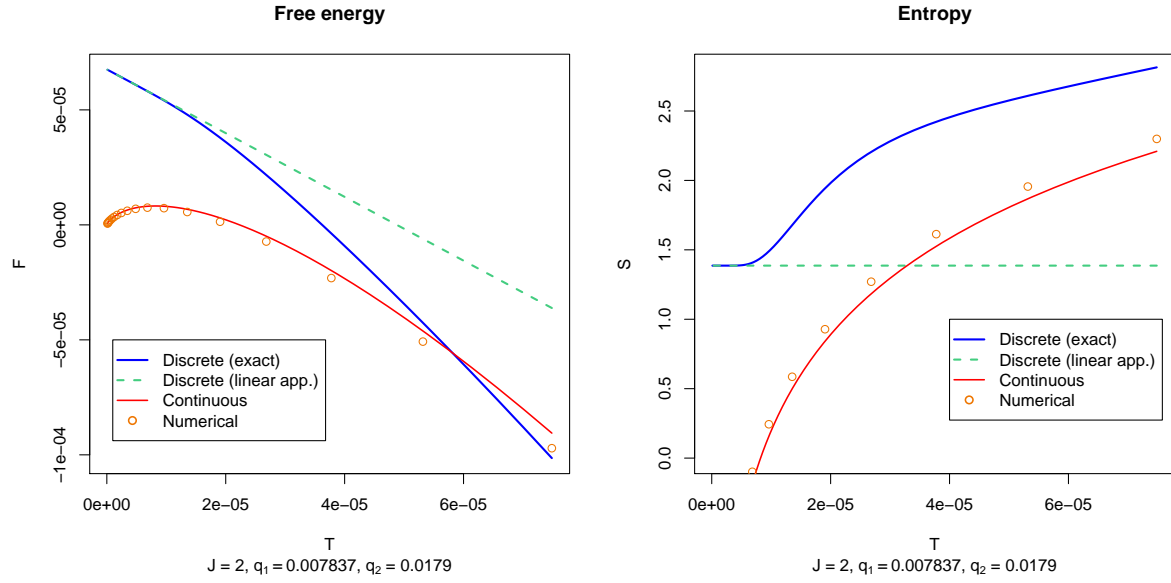


Figure 4.8: Comparison between thermodynamic magnitudes preserving discreteness or assuming continuity of the density of states. Near  $T = 0$ , the exact free energy is locally linear (left panel), and the exact entropy reaches the value  $\log(4)$  (right panel). Note that the numerical computation of the contour integral (4.88) follows the continuous curves in both panels. The exact entropy (solid thick blue line) and the continuously approximated one (solid thin red line) never intersect, but the linear approximation (green dashed horizontal line) does, defining the estimator  $T^*$  given in (4.95).

It is worth emphasizing the different behavior of the thermodynamic magnitudes between the discrete and continuous systems. Any computation method for  $Z$  should respect the discrete nature of the spectrum. Otherwise the method would accurately compute the result (4.92).

Nevertheless, the two behaviors coincide at high temperatures, suggesting that there is a crossing temperature  $T^*$  below which the difference becomes drastic. Of course, in figure 4.8 (right) we can see that the entropy of the discrete system (obtained by exact computation of  $Z$  using brute-force compilation of states) and the approximate one (that of the continuous system) never cross. But if we approximate the former using the approximated free energy (4.83), then we can find a temperature at which the continuous and discrete entropies coincide. This temperature  $T^*$  signals the point of a drastic deviation of the discrete system from the continuous one, and it will be interpreted as an estimator for the ground state  $\Lambda^*$ .

Thus, we need the entropy in (4.92), which will be termed  $S_{\text{cont}}$ , and the entropy derived from (4.83), which is

$$S_{\text{disc}} = S^* + \log\left(1 + e^{\hat{S}-S^*} e^{-\frac{\delta\Lambda}{T}}\right) + \frac{\delta\Lambda e^{\hat{S}-S^*} e^{-\frac{\delta\Lambda}{T}}}{T(1 + e^{\hat{S}-S^*} e^{-\frac{\delta\Lambda}{T}})}. \quad (4.93)$$

The crossing temperature is defined by the equation  $S_{\text{disc}} = S_{\text{cont}}$ , but (4.93) contains the degeneracy entropies  $S^*$ ,  $\hat{S}$  and the gap  $\delta\Lambda$  as additional parameters. Of course, we cannot use a single equation to fix four parameters; we will compute the degeneracies as  $2^{J\alpha^*}$  for the case of incommensurate charges (that is,  $S^* = \hat{S}$ ), and we will introduce the

parameter  $\eta = \frac{\delta\Lambda}{T^*}$ , so that the equation for  $T^*$  reads

$$S^* + \log(1 + e^{-\eta}) + \frac{\eta}{1 + e^\eta} = 1 + \log \frac{T^* \omega_J(R)}{R} \quad (4.94)$$

and gets solved as

$$T^* = e^{S^*} \frac{R}{\omega_J(R)} (1 + e^{-\eta}) e^{\frac{\eta}{1+e^\eta} - 1}. \quad (4.95)$$

In terms of the previous estimator  $\Lambda_\varepsilon$  (4.79), we have

$$T^*(\eta) = f(\eta)\Lambda_\varepsilon, \quad \text{with} \quad f(\eta) = (1 + e^{-\eta}) e^{\frac{\eta}{1+e^\eta} - 1}, \quad (4.96)$$

where the prefactor  $f(\eta)$  is of order  $\mathcal{O}(1)$  for  $0 < \eta < \infty$ : it is a monotonically decreasing function with  $f(0) = 2e^{-1}$  and  $f(\infty) = e^{-1}$ . Thus, when we let  $\eta$  run across its range, the estimator  $T^*(\eta)$  spans the interval  $[1, 2]e^{-1}\Lambda_\varepsilon$  instead of the single value  $\Lambda_\varepsilon$ . Nevertheless, we cannot give an argument which favours the inclusion of the true value inside this interval. Despite this uncertainty, our numerical searches validate the given interval for  $J = 2$  and  $J = 3$ : it contains the median and its width is smaller than the interquartile range (see figure 4.7).

Thus, we can conclude that  $T^*$  is a good estimator of the charge-averaged minimum cosmological constant.

#### 4.3.4 A possible influence on the KKLT mechanism

The exposition in this paper is restricted to the Bousso-Polchinski Landscape, which is an oversimplification of the string theory Landscape. The Giddings-Kachru-Polchinski model [110] is a more realistic approach to the true Landscape, and it can be endowed with a mechanism for fixing the moduli of the compactification manifold, the so-called KKLT mechanism [97]. In this model, the compactification moduli are fixed by the presence of fluxes and corrections to the superpotential coming from localized branes. The fixing of the moduli lead to metastable dS states by the addition of anti-branes and exceeding flux. The model can be further corrected to yield inflation of the noncompact geometry by the repulsion between a brane and an antibrane, both located at a Klebanov-Strassler throat [111]. The important point is that both moduli fixing and brane inflation need the presence of flux quanta.

As far as we know, there is no combination between the BP Landscape and the KKLT mechanism, in the sense that there is no known realistic model in which all moduli are fixed and a large amount of three-cycles lead to an anthropic value of the cosmological constant without any fine-tuning at all. Nevertheless, there are some toy models as the six-dimensional Einstein-Maxwell theory [112, 113] in which it is possible to identify a Landscape with all moduli fixed, and it has a dual model with flux; or the more sophisticated (yet unrealistic as well) models coming from F-theory flux compactification [96] or IIB compactifications with fluxes [114], to name a few. Thus, it is plausible that a complete, realistic model exhibiting all these features will be built in the near future.

Let us assume that such a model exists. Furthermore, let us assume that the  $\alpha^*(h)$  curve discussed in the section 4.3.2 can be generalized, in the sense that, as a characteristic feature of this conjecturally realistic model of the string theory Landscape, there is a typical occupation number of the fluxes that is generically different from 1 and that

vanishes when the number of fluxes  $J$  is too large. Then, we should conclude that, generically, there will be a finite fraction  $1 - \alpha^*$  of three-cycles with vanishing flux, which may be dominant if  $J$  is large and the charges  $q_i$  are not too small. This fraction of vanishing fluxes can spoil the stabilization mechanism of the corresponding moduli and can also spoil the brane inflation scenario if the three-cycles located at the tip of the KS throats are devoid of flux.

Thus, the  $\alpha^*$  fraction we have found in the BP Landscape can be an obstacle for the commonly accepted KKLT mechanism if it is also present in a realistic Landscape model.

## 4.4 Conclusions

We have developed an exact formula for counting states in the Bousso-Polchinski Landscape which reduces to the volume-counting one in certain (BP) regime. The formula might be useful in BP Landscape examples when the parameter  $h = \frac{Jq^2}{r^2}$  is large enough to invalidate the BP count. Applications of the formula are given which avoid volume-counting: counting low-lying states, computing the typical fraction of non-vanishing fluxes or estimating the minimum value of the cosmological constant which can be achieved in the BP Landscape. Numeric computations and brute-force searches have been carried out to check the results of our analytic approximations, and we have found remarkable agreement in all explored regimes.

In particular, we have discovered a robust property of the BP Landscape, the curve  $\alpha^*(h)$ , the typical fraction of non-vanishing fluxes, which reveals the structure of the lattice inside a sphere for large  $J$  as the union of hyperplane portions of effective dimension near  $J\alpha^*$ . This result is important in computing degeneracies, which are used in estimating the minimum cosmological constant. We have not developed a formula for this minimum, not even a probability distribution, but rather an estimator which can produce acceptable results in predicting the mean value of the minimum for fluctuating different charges around its geometric mean, or essential degeneracies in the case of equal charges.

Finally, we have pointed out that if we can generalize the typical number of non-vanishing fluxes in a realistic model describing the string theory Landscape, then it could be an obstacle for the implementation in the same hypothetical model of the KKLT moduli stabilization mechanism.

Thus, the exact formula improves the way of counting as compared to previous proposals, and should be considered in all those problems which require state enumeration in the BP Landscape.

## Acknowledgments

We would like to thank Pablo Diaz, Concha Orna and Laura Segui for carefully reading this manuscript. We also thank Jaume Garriga for useful discussions and encouragement. This work has been supported by CICYT (grant FPA-2006-02315 and grant FPA-2009-09638) and DGIID-DGA (grant 2007-E24/2). We thank also the support by grant A9335/07 and A9335/10 (Física de alta energía: Partículas, cuerdas y cosmología).

## 4.5 Detailed computation of the typical fraction of non-vanishing fluxes

Consider an arbitrary subset of nodes in the lattice  $\Sigma \subset \mathcal{L}$ . We will decompose its cardinality  $|\Sigma| = \mathcal{N}_\Sigma$  as

$$\mathcal{N}_\Sigma = \sum_{j=0}^J \mathcal{N}_\Sigma(j), \quad (4.97)$$

where  $\mathcal{N}_\Sigma(j)$  is the number of states in  $\Sigma$  with exactly  $j$  non-vanishing components. If  $\alpha$  is the fraction  $\frac{j}{J}$  then its probability distribution over  $\Sigma$  is

$$P_\Sigma(\alpha = \frac{j}{J}) = \frac{\mathcal{N}_\Sigma(j)}{\mathcal{N}_\Sigma}. \quad (4.98)$$

This formula takes into account only abundances of states in  $\Sigma$ , and hence it assumes that all states in  $\Sigma$  are equally probable.

Let us introduce some notation. We will call the set of indexes of components  $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, J\}$  and  $L, M$  will denote any subset of  $\mathcal{J}$ . The symbol  $\Sigma_L$  will denote the set of states of  $\Sigma$  having (at least) vanishing components *outside*  $L$  or, in other words, the intersection between  $\Sigma$  and the subspace spanned by the directions in  $L$ .  $\mathcal{N}_L$  will be the number of elements of  $\Sigma_L$ . Thus,  $\Sigma_{\mathcal{J}}$  comprises all  $\Sigma$  states, that is,  $\mathcal{N}_{\mathcal{J}} = \mathcal{N}_\Sigma$ , and  $\Sigma_\emptyset$  only contains the node at the origin, so that  $\mathcal{N}_\emptyset = 1$ . The inclusion-exclusion principle in Combinatorics allows us to write

$$\mathcal{N}_\Sigma(j) = \sum_{\substack{L \subset \mathcal{J} \\ |L|=j}} \sum_{\ell=1}^j (-1)^{j-\ell} \sum_{\substack{M \subset L \\ |M|=\ell}} \mathcal{N}_M. \quad (4.99)$$

The idea behind (4.99) is that we cannot simply sum all states lying inside every  $\Sigma_L \in \Sigma$ , that is, equation  $\mathcal{N}_\Sigma(j) = \sum_{\substack{L \subset \mathcal{J} \\ |L|=j}} \mathcal{N}_L$  is not true, because of the intersections between different subsets  $\Sigma_L$ . The nodes inside these intersections are removed twice, and they should be added again, and so on. This is the cause of the alternating sign in (4.99).

Now, we must deal with expressions of the form

$$\sum_{\substack{L \subset \mathcal{J} \\ |L|=j}} \sum_{\substack{M \subset L \\ |M|=\ell}} \mathcal{N}_M. \quad (4.100)$$

All the subsets  $M \subset \mathcal{J}$  occur in the previous sum the same number of times, which coincides with the number of supersets  $L$  inside  $\mathcal{J}$  (with  $|L| = j$ ) of a given  $M$  (with  $|M| = \ell < j$ ). This can be computed as the number of subsets of  $\mathcal{J} \setminus M$  of exactly  $j - \ell$  elements, that is,

$$\sum_{\substack{L \subset \mathcal{J} \\ |L|=j}} \sum_{\substack{M \subset L \\ |M|=\ell}} \mathcal{N}_M = \binom{J-\ell}{j-\ell} \sum_{\substack{M \subset \mathcal{J} \\ |M|=\ell}} \mathcal{N}_M. \quad (4.101)$$

By substituting (4.101) in (4.99), we get

$$\mathcal{N}_\Sigma(j) = \sum_{\ell=1}^j (-1)^{j-\ell} \binom{J-\ell}{j-\ell} \sum_{\substack{M \subset \mathcal{J} \\ |M|=\ell}} \mathcal{N}_M. \quad (4.102)$$

We can check that equation (4.102) satisfies the normalization condition (4.97):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^J \mathcal{N}_\Sigma(j) &= \sum_{j=0}^J \sum_{\ell=1}^j (-1)^{j-\ell} \binom{J-\ell}{j-\ell} \sum_{\substack{M \subset \mathcal{J} \\ |M|=\ell}} \mathcal{N}_M \\
&= \sum_{\ell=0}^J \underbrace{\left[ \sum_{j=\ell}^J (-1)^{j-\ell} \binom{J-\ell}{j-\ell} \right]}_{\sum_{k=0}^{J-\ell} (-1)^k \binom{J-\ell}{k} = \delta_{J,\ell}} \sum_{\substack{M \subset \mathcal{J} \\ |M|=\ell}} \mathcal{N}_M \\
&= \sum_{\substack{M \subset \mathcal{J} \\ |M|=J}} \mathcal{N}_M = \mathcal{N}_\mathcal{J} = \mathcal{N}_\Sigma.
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Now, we will take the  $\Sigma$  set as the states of the lattice  $\mathcal{L}$  near the  $\Lambda = 0$  surface, inside a thin shell of width  $\Lambda_\varepsilon$ , whose number is (4.100)

$$\mathcal{N}_\Sigma = \frac{\omega_J(R)}{R} \Lambda_\varepsilon. \tag{4.104}$$

With different charges  $q_i$ , different subsets  $M \in \mathcal{J}$  with the same cardinality  $|M| = \ell$  will not have the same number of states  $\mathcal{N}_M$ . However, in the simplest case where all charges are equal, all the number of states coincide:

$$\sum_{\substack{M \subset \mathcal{J} \\ |M|=\ell}} \mathcal{N}_M = \binom{J}{\ell} \frac{\omega_\ell(R)}{R} \Lambda_\varepsilon, \tag{4.105}$$

where we have used that there is  $\binom{J}{\ell}$  different subsets  $M \in \mathcal{J}$  with  $|M| = \ell$ . Substituting (4.105) in (4.102) and reordering the binomial coefficients we have

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\Sigma(j) &= \sum_{\ell=1}^j (-1)^{j-\ell} \binom{J-\ell}{j-\ell} \binom{J}{\ell} \frac{\omega_\ell(R)}{R} \Lambda_\varepsilon \\
&= \frac{\Lambda_\varepsilon}{R} \binom{J}{j} \sum_{\ell=1}^j \binom{j}{\ell} (-1)^{j-\ell} \omega_\ell(R).
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Now, we can substitute the exact integral representation (4.27) specialized for equal charges for  $\omega_\ell(R)$  and perform the binomial sum:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\Sigma(j) &= \frac{\Lambda_\varepsilon}{R} \binom{J}{j} \frac{2R}{2\pi i} \int_\gamma e^{sR^2} \left[ \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} (-1)^{j-\ell} \vartheta(q^2 s)^\ell \right] ds \\
&= \frac{2\Lambda_\varepsilon}{2\pi i} \binom{J}{j} \int_\gamma e^{sR^2} [\vartheta(q^2 s) - 1]^j ds.
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Normalization provides the probability distribution of  $\alpha = \frac{j}{J}$  we are looking for:

$$P(\alpha) = \frac{2R}{\omega_J(R)} \binom{J}{\alpha J} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\phi(s,\alpha)} ds \quad \text{with} \quad \phi(s,\alpha) = sR^2 + \alpha J \log[\vartheta(q^2 s) - 1]. \tag{4.108}$$

The next step is estimating  $P(\alpha)$  using the steepest descent method again. The equation for the saddle point is

$$\phi'(s) = R^2 + \alpha J q^2 \frac{\vartheta'(q^2 s)}{\vartheta(q^2 s) - 1} = 0. \quad (4.109)$$

As we did before, we can find approximate expressions for the saddle point in the two regimes of  $\vartheta$  function. If  $s^*$  is the saddle point, convenient variables are  $v = q^2 s^*$  and  $h = \frac{Jq^2}{R^2}$ , in terms of which we have

$$\phi(v) = \frac{R^2}{q^2} \left[ v + h\alpha \log[\theta(v) - 1] \right]. \quad (4.110)$$

In the large  $v$  regime, we have  $\vartheta(v) \approx 1 + 2e^{-v} + 2e^{-4v}$ , so that

$$\begin{aligned} \phi(v) &\approx \frac{R^2}{q^2} \left[ v + h\alpha(-v + \log 2 + \log(1 + e^{-3v})) \right] \\ &\approx \frac{R^2}{q^2} \left[ v(1 - h\alpha) + h\alpha \log 2 + h\alpha e^{-3v} \right], \end{aligned} \quad (4.111)$$

and the corresponding saddle point equation has a solution

$$v(h\alpha) = -\frac{1}{3} \log \frac{1}{3} \left( \frac{1}{h\alpha} - 1 \right). \quad (4.112)$$

In the small  $v$  regime, we simply have  $\vartheta(v) \approx \sqrt{\frac{\pi}{v}}$ , so that

$$\begin{aligned} \phi(v) &\approx \frac{R^2}{q^2} \left[ v + h\alpha \left[ \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} \log v + \log \left( 1 - \sqrt{\frac{v}{\pi}} \right) \right] \right] \\ &\approx \frac{R^2}{q^2} \left[ v + h\alpha \left[ \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} \log v - \sqrt{\frac{v}{\pi}} - \frac{v}{2\pi} \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.113)$$

The corresponding saddle point equation is quadratic in  $\frac{1}{\sqrt{v}}$ , and its solution is

$$v(h\alpha) \approx \frac{4\pi}{\left( \sqrt{\frac{8\pi}{h\alpha}} - 3 - 1 \right)^2} \approx \frac{h\alpha}{2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(h\alpha)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3(h\alpha)^2}{8\pi} + \dots \quad (4.114)$$

Both approximate solutions (4.112) and (4.114), as well as a numerical one, are plotted in figure 4.9. Note the logarithmic divergence at  $h\alpha = 1$  of the saddle point. For larger values,  $v(h\alpha)$  becomes complex, and the integral  $P(\alpha)$  begins to oscillate, losing its probabilistic meaning.

Using the asymptotic form of the binomial coefficient, we can write

$$P(\alpha) \propto e^{Js(\alpha)} \quad \text{with} \quad s(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha) + \frac{1}{J} \phi(v, \alpha), \quad (4.115)$$

where  $\phi(v, \alpha)$  also depends implicitly on  $\alpha$  through  $v$ . The exponent  $s(\alpha)$  has a maximum  $\alpha^*$ , given by the equation

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\alpha} &= -\log \alpha + \log(1 - \alpha) + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{dv}{d\alpha}}_{=0} + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \\ &= \log \frac{1 - \alpha}{\alpha} + \log[\vartheta(v(h\alpha)) - 1] = 0. \end{aligned} \quad (4.116)$$

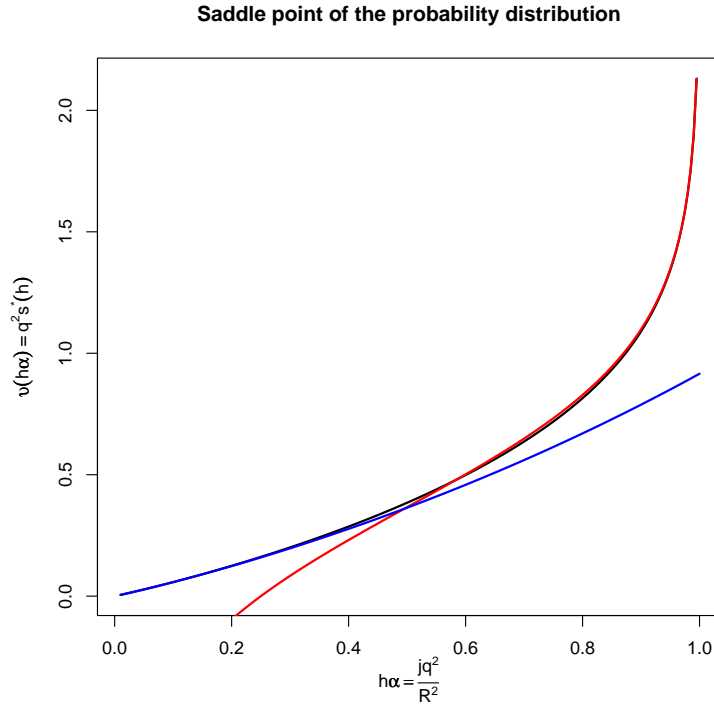


Figure 4.9: Numerical saddle point  $v(h\alpha)$  of the  $P(\alpha)$  integrand for equal charges along with its two asymptotic regimes.

In the first equality of (4.116) we have used the definition of the saddle point  $v$ , and in the second we have used equation (4.110). We obtain  $\alpha^*$  as the unique real solution in the  $[0, 1]$  interval of

$$\vartheta[v(h\alpha)] = \frac{1}{1-\alpha}. \quad (4.117)$$

Note that the saddle point  $v(h\alpha)$  is defined only for  $h\alpha \leq 1$  (see fig. 4.9), so that the right hand side of equation (4.117) as a function of  $\alpha$  has domain  $\alpha \in [0, \frac{1}{h}]$ . In this interval,  $\vartheta[v(h\alpha)]$  decreases from  $\infty$  to 1, while the right hand side increases from 1 to  $\infty$  in  $\alpha \in [0, 1]$ . These conditions guarantee the existence of a unique real solution  $\alpha^*(h) \in [0, 1]$  for all positive  $h$ . Figure 4.10 shows the construction of  $\alpha^*(h)$ .

For small  $h$ , we can use the small  $h\alpha$  regime for  $v(h\alpha)$  (eq. (4.114)) and  $\vartheta$  (eq. (4.32)), in which equation (4.117) reads

$$\sqrt{\frac{2\pi}{h\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}, \quad (4.118)$$

and has the solution

$$\alpha^*(h) \approx 1 - \frac{1}{4\pi} [\sqrt{h(h+8\pi)} - h]. \quad (4.119)$$

For  $h\alpha$  approaching 1, we can use (4.112) for  $v(h\alpha)$  and the corresponding regime for  $\vartheta$ , so that (4.117) simplifies to

$$1 + 2e^{\frac{1}{3} \log \frac{1}{3} (\frac{1}{h\alpha} - 1)} = \frac{1}{1-\alpha}. \quad (4.120)$$



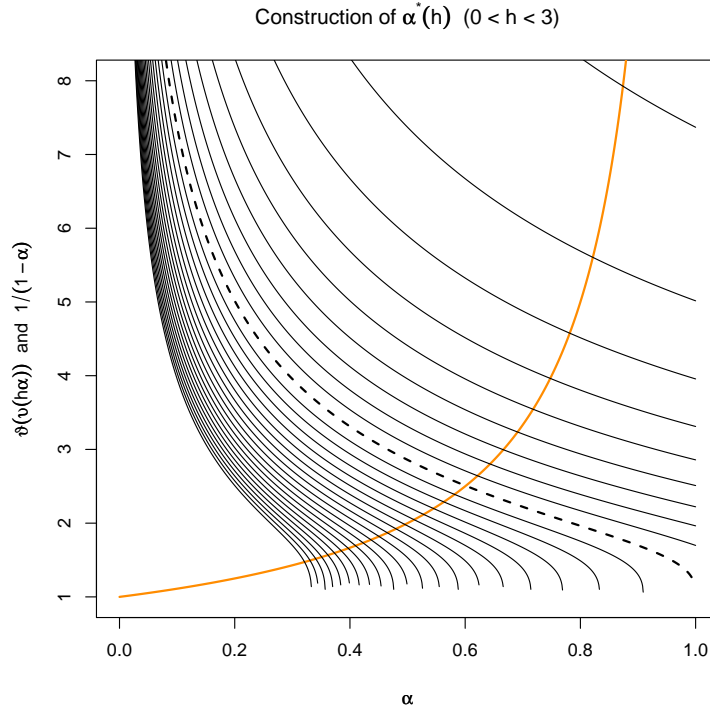


Figure 4.10: Construction of the solution  $\alpha^*$  of equation (4.117) for  $0 < h < 3$ . Dashed curve corresponds to  $h = 1$ . For  $h \ll 1$ , the solution is near  $\alpha = 1$ , and for  $h \gg 1$  the solution approaches zero.

We can isolate  $h(\alpha^*)$  in (4.120), obtaining

$$h(\alpha^*) \approx \frac{1}{\alpha^* \left(1 + \frac{3}{8} \left(\frac{\alpha^*}{1-\alpha^*}\right)^3\right)}, \quad (4.121)$$

which for large  $h$  is simply  $\alpha^* \approx \frac{1}{h}$ . All these regimes are shown in figure 4.4 along with the numerical solution of equation (4.117).

## 4.6 Typical fraction of non-vanishing fluxes in the pure BP regime

We can repeat the computation of the probability distribution of the fraction of non-vanishing fluxes  $P(\alpha)$  (given in appendix 4.5) in the pure BP regime step by step. Using the previous notation, we will consider all states inside a sphere of radius  $r$  as the set  $\Sigma \subset \mathcal{L}$ , but we will use the BP formula (4.7) instead of the exact integral representation of the number of such states (hence the name “pure BP”):

$$\mathcal{N}_\Sigma = \Omega_J(r) \approx \frac{2\pi^{\frac{J}{2}} r^J}{J\Gamma(\frac{J}{2}) \text{vol } Q}. \quad (4.122)$$

The computation of the probability distribution is based in the decomposition (4.97), which we repeat here for convenience:

$$\mathcal{N}_\Sigma = \sum_{j=0}^J \mathcal{N}_\Sigma(j), \quad (4.123)$$

After using the inclusion-exclusion principle, we have (4.102)

$$\mathcal{N}_\Sigma(j) = \sum_{\ell=1}^j (-1)^{j-\ell} \binom{J-\ell}{j-\ell} \sum_{\substack{M \subset \mathcal{J} \\ |M|=\ell}} \mathcal{N}_M. \quad (4.124)$$

As before, we will assume that all charges are equal vol  $Q = q^J$ . Thus we have an equation analogous to (4.105)

$$\sum_{\substack{M \subset \mathcal{J} \\ |M|=\ell}} \mathcal{N}_M = \binom{J}{\ell} \frac{\pi^{\frac{\ell}{2}} r^\ell}{\Gamma(\frac{\ell}{2} + 1) q^\ell} = \binom{J}{\ell} \frac{\xi^\ell}{\Gamma(\frac{\ell}{2} + 1)}, \quad (4.125)$$

where we have used the parameter

$$\xi = \frac{r\sqrt{\pi}}{q}. \quad (4.126)$$

Plugging (4.125) in the decomposition (4.124),

$$\mathcal{N}_\Sigma(j) = \sum_{\ell=1}^j (-1)^{j-\ell} \binom{J-\ell}{j-\ell} \binom{J}{\ell} \frac{\xi^\ell}{\Gamma(\frac{\ell}{2} + 1)} = \binom{J}{j} \sum_{\ell=1}^j (-1)^{j-\ell} \binom{j}{\ell} \frac{\xi^\ell}{\Gamma(\frac{\ell}{2} + 1)}. \quad (4.127)$$

Now we take the Hankel definition of the gamma function:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^z z^{-x} dz, \quad (4.128)$$

where the contour  $C$  in complex  $z$  plane encloses the origin coming from  $-\infty$  below the negative real axis, turning around the origin and leaving towards  $-\infty$  over the negative real axis. By substituting

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{\ell}{2} + 1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^z z^{-(\frac{\ell}{2}+1)} dz \quad (4.129)$$

in (4.127), we can interchange the sum and the integral and the binomial theorem allows us to write

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\Sigma(j) &= \binom{J}{j} \sum_{\ell=1}^j (-1)^{j-\ell} \binom{j}{\ell} \xi^\ell \frac{1}{2\pi i} \int_C e^z z^{-(\frac{\ell}{2}+1)} dz \\ &= \binom{J}{j} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^z \frac{dz}{z} \sum_{\ell=1}^j (-1)^{j-\ell} \binom{j}{\ell} \left(\frac{\xi}{\sqrt{z}}\right)^\ell \\ &= \binom{J}{j} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^z \left(\frac{\xi}{\sqrt{z}} - 1\right)^j \frac{dz}{z}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

By changing the  $z$  variable to  $s = z/\xi^2$  the contour only gets scaled and can be deformed back to its original form, resulting in

$$\mathcal{N}_\Sigma(j) = \binom{J}{j} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\xi^2 s} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - 1\right)^j \frac{ds}{s} = \binom{J}{j} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{J\phi(s)} \frac{ds}{s}. \quad (4.131)$$

We have defined the function

$$\phi(s) = \frac{\pi s}{h} + \alpha \log\left(\frac{1}{\sqrt{s}} - 1\right), \quad (4.132)$$

which depends on the two parameters mainly used in the remainder of the paper:

$$h = \frac{Jq^2}{r^2} \quad \text{and} \quad \alpha = \frac{j}{J}. \quad (4.133)$$

Note that  $\xi = \sqrt{\frac{J\pi}{h}}$ .

We can normalize  $\mathcal{N}_\Sigma(j)$  dividing by  $\mathcal{N}_\Sigma$  in (4.122), thus obtaining the following integral representation for the probability distribution:

$$P(\alpha) = \Gamma\left(\frac{J}{2} + 1\right) \xi^{-J} \binom{J}{j} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{J\phi(s)} \frac{ds}{s}. \quad (4.134)$$

We can evaluate the integral using the steepest descent method, assuming that  $J$  is large and that  $h$  and  $\alpha$  are constant parameters. Furthermore,  $h$  cannot be too large for the saddle point approximation to remain valid.

Thus, for large  $J$ ,  $P(\alpha)$  is

$$P(\alpha) \propto e^{Js(\alpha)} \quad \text{with} \quad s(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha) + \phi(s^*), \quad (4.135)$$

where we have used the asymptotic expression for large  $J$  of  $\binom{J}{j}$  and  $s^*$  is the saddle point of  $\phi(s)$  which is compatible with the integration contour  $C$ . We compute  $s^*$  as a solution of

$$\phi'(s) = \frac{\pi}{h} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{s(1 - \sqrt{s})} = 0, \quad (4.136)$$

which can be rewritten as

$$s\sqrt{s} - s + \nu = 0, \quad (4.137)$$

with the new parameter  $\nu = \frac{h\alpha}{2\pi}$ . Let us assume for simplicity that  $\nu$  is small (that is,  $h$  is small); then (4.137) has two solutions in the positive real axis, one of them near 0 and the other near 1. Near  $s \approx 0$ ,  $\phi''(s) \approx \frac{\alpha}{2s^2} > 0$  and near  $s \approx 1$ ,  $\phi''(s) \approx \frac{-\alpha}{4\sqrt{s}(1-\sqrt{s})^2} < 0$ , so the first corresponds to a local minimum over the positive real axis and the second to a local maximum. But the integration contour crosses the positive real axis vertically from lower to upper half plane, and therefore the integrand has a maximum along  $C$  if it has a minimum along the real axis. So our saddle point is near 0 for small  $\nu$ , and it follows from (4.137) that we must have

$$s^* \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \nu. \quad (4.138)$$

We can find the maximum of the ‘‘entropy’’  $s(\alpha)$  in (4.135), which we will call  $\alpha^*$ , by solving the stationary condition

$$\frac{ds(\alpha)}{d\alpha} = \log \frac{1 - \alpha}{\alpha} + \underbrace{\frac{\partial \phi(s)}{\partial s} \Big|_{s=s^*}}_0 \frac{ds^*}{d\alpha} + \frac{\partial \phi(s)}{\partial \alpha} \Big|_{s=s^*} = \log \frac{1 - \alpha}{\alpha} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{s^*}} - 1\right) = 0. \quad (4.139)$$

With the estimate (4.138) for small  $\nu$ , eq. (4.139) can be rewritten as

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} \approx \sqrt{\nu}. \quad (4.140)$$

In the preceding equation, if  $\nu$  is small, then its solution  $\alpha^*$  must be near 1; replacing  $\alpha \approx 1$  in the denominator of (4.140) we obtain exactly (4.118), which determines  $\alpha^*(h)$  for small  $h$ . So this approach ends up with the same estimate for the typical fraction of non-vanishing fluxes for small  $h$ , despite the fact that we are computing this fraction  $\alpha^*$  over the whole Landscape instead of over a thin shell. This is a strong indication that the result obtained for  $\alpha^*$  is robust, in the sense that it does not change significantly for different generic subsets of the Landscape.

We remark that the robustness of the  $\alpha^*(h)$  curve is not a feature of spherical symmetry. This is exemplified by the set of secant states, which is *not* spherically symmetric [103, 102]. If we repeat the computation in this appendix taking the set of secant states at distance  $r$  as the subset  $\Sigma \subset \mathcal{L}$  instead of the ball of radius  $r$ , we would obtain the same estimate. Thus, we should consider  $\alpha^*(h)$  a robust property of the BP Landscape.

The preceding computation used the BP regime (4.122), and we have mentioned above that  $h$  should be small for the validity of the saddle-point approximation. Now we can wonder, how big can  $h$  be before invalidating the approximation. Can we somehow continue this result to higher values of  $h$ ?

The answer to this latter question is negative, as can be seen in figure 4.11, which, in turn, answers also the former question. In figure 4.11 we show the saddle points of  $\phi(s)$

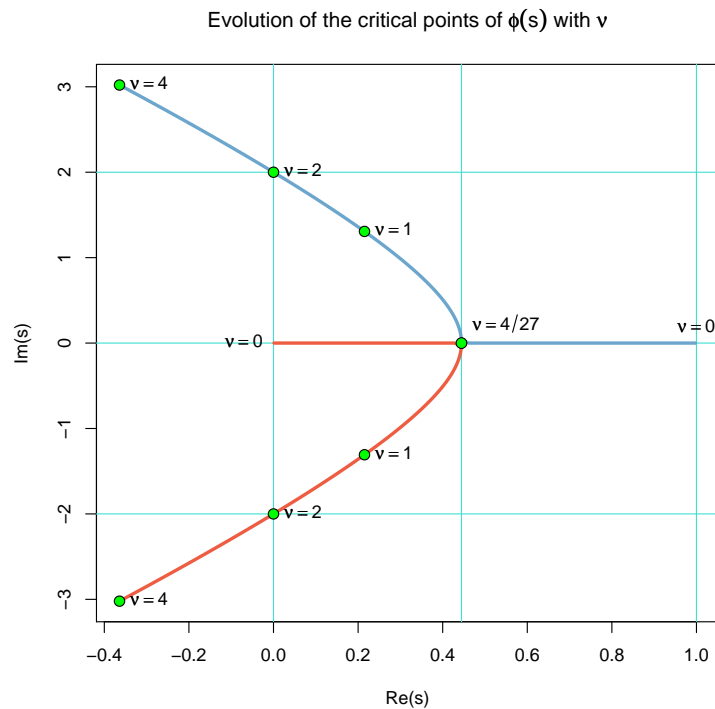


Figure 4.11: Evolution in complex  $s$ -plane of the critical points of the  $\phi$  function (4.132), exponent of the integral representation of  $P(\alpha)$  in the pure BP regime, versus the  $\nu$  parameter. The saddle point  $s^*$  plotted in red (which begins at  $s = 0$  and enters the lower half plane for  $\nu > \frac{4}{27}$ ) is compatible with the integration contour  $C$ , which means that  $C$  can be deformed to coincide with the steepest descent contour crossing trough  $s^*$ .

as they evolve in complex  $s$ -plane from  $\nu = 0$  to  $\nu = 4$ . Both of them start at  $s = 0, 1$  respectively for  $\nu = 0$  and evolve along the positive real axis until they coincide at  $s = \frac{4}{9}$

for  $\nu = \frac{4}{27}$ . This coincidence can be seen by writing (4.137) in a variable  $x = \sqrt{s}$  and considering its derivative, which is a polynomial whose roots  $x^*$  are the critical points of  $p(x)$ :

$$p(x) = x^3 - x^2 + \nu \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 3x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\} \quad \Rightarrow \quad p(x^*) \in \left\{\nu, \nu - \frac{4}{27}\right\}, \quad (4.141)$$

that is,  $p(x)$  has two critical points with values above and below the  $x$ -axis only if  $\nu < \frac{4}{27}$ . For  $\nu > \frac{4}{27}$  both critical points have positive values, and the roots of  $p(x)$  leave the real axis.

Only the root near 0 is compatible with the integration contour  $C$ , that is,  $C$  can be deformed to meet the steepest descent contour crossing by the saddle point near  $s = 0$ . For  $\nu > \frac{4}{27}$  both roots leave the real axis; as a consequence, the integral  $P(\alpha)$  remains real but becomes non-positive and rapidly oscillating, thereby losing its meaning as a probability distribution. Therefore, the pure BP regime is only valid for  $\nu < \frac{4}{27}$ , that is, for

$$h < \frac{8\pi}{27} = 0.93084. \quad (4.142)$$

This value represents the upper limit of validity of the pure BP regime in the computation of  $P(\alpha)$ . We can intuitively understand the existence of this limit by considering that the inclusion-exclusion principle (4.124), being an alternating sum, is very sensitive to inaccurate computations of the cardinals of the subsets appearing in the sum. Therefore, when we use the BP formula (4.122) for computing the cardinals of the subsets with growing  $h$ , that is, for decreasing  $r$ , the error in the formula causes strong oscillations in  $P(\alpha)$ .

## Chapter 5

# Some physical consequences of an exact vacua distribution in the Bousso-Polchinski Landscape

The Bousso-Polchinski (BP) Landscape is a proposal for solving the Cosmological Constant Problem. The solution requires counting the states in a very thin shell in flux space. We find an exact formula for this counting problem which has two simple asymptotic regimes, one of them being the method of counting low  $\Lambda$  states given originally by Bousso and Polchinski. We finally give some applications of the extended formula: a robust property of the Landscape which can be identified with an effective occupation number, an estimator for the minimum cosmological constant and a possible influence on the KKLT stabilization mechanism.

### 5.1 Introduction

The *cosmological constant problem* [34, 35] is the smallness of the observed value<sup>1</sup>  $\Lambda_{\text{obs}} = 1.5 \times 10^{-123}$  [12, 11] when compared with naive expectations from particle physics. An attempt for a solution is proposed in the Bousso-Polchinski Landscape [90], in which a large amount  $J$  of quantized fluxes of charges  $\{q_j\}_{j=1, \dots, J}$  leads to an effective cosmological constant

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J n_j^2 q_j^2. \quad (5.1)$$

In (5.1),  $\Lambda_0$  is a negative number of order  $-1$ , and the integer  $J$ -tuple  $(n_1, \dots, n_J)$  characterizes each of the vacua of the Landscape, which is a finite subset (yet an enormous one) of an infinite lattice comprising the nodes with cosmological constant smaller than some value  $\Lambda_1 = \mathcal{O}(1)$ . For large  $J$  and incommensurate charges  $\{q_j\}$  this model contains states of small  $\Lambda$ . The problem arises now as how to count them.

Each state in the Bousso-Polchinski Landscape can be viewed as a node of a lattice in flux space surrounded by a cell of volume  $\text{vol } Q = \prod_{i=1}^J q_i$ . On the other hand, each value of the cosmological constant  $\Lambda_0 \leq \Lambda \leq \Lambda_1$  defines a ball  $\mathcal{B}^J(r)$  in flux space of radius  $r = \sqrt{2(\Lambda - \Lambda_0)}$ . The BP counting argument [90, 92] consists of computing the number

---

<sup>1</sup>We use reduced Planck units in which  $8\pi G = \hbar = c = 1$ .

of states inside a ball of radius  $r$  by

$$\Omega_J(r) = \frac{\text{vol } \mathcal{B}^J(r)}{\text{vol } Q}. \quad (5.2)$$

Nevertheless, as the authors of [90] point out, this argument is not valid when any of the charges  $q_i$  exceed  $R_0/\sqrt{J}$ . Therefore, we will propose an exact counting formula which is reduced to (5.2) in the appropriate regime.

## 5.2 The BP Landscape degeneracy

### 5.2.1 The exact representation

We start with the number of nodes in the lattice inside a sphere in flux space of radius  $r$ . This magnitude is called  $\Omega_J(r)$  above. It can be given in terms of the characteristic function of an interval  $I$ ,  $\chi_I(t) = 1$  if  $t \in I$  and 0 otherwise:

$$\Omega_J(r) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \chi_{[0,r]}(\|\lambda\|). \quad (5.3)$$

Expression (5.3) is exact and finite, and it is equivalent to directly counting the nodes (the “brute-force” counting method), hence it cannot be used in order to obtain numbers as in (5.2).

The density of states associated to (5.3) is  $\omega_J(r) = \frac{\partial \Omega_J(r)}{\partial r} = 2r \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \delta(r^2 - \|\lambda\|^2)$  which will be called the “BP Landscape degeneracy”. The counting function  $\Omega_J(r)$  is a stepwise monotonically non-decreasing function, and thus its derivative  $\omega_J(r)$  is a sum of Dirac deltas. We can express these Dirac deltas as integrals in complex plane along a vertical line  $\gamma$  crossing the positive real axis in complex plane. We obtain

$$\omega_J(r) = \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2} \left[ \prod_{j=1}^J \vartheta(sq_j^2) \right] ds. \quad (5.4)$$

The sum is hidden in the function  $\vartheta(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-sn^2}$ , valid for  $\text{Re } s > 0$ .

The integration of (5.4) with the initial condition  $\Omega_J(0) = 1$  gives  $\Omega_J(r)$ .

### 5.2.2 The large distance (or BP) regime

Now we will turn to the approximate evaluation of  $\omega_J(r)$ . For this purpose we need the asymptotic behavior of  $\vartheta$  function. There is a middle regime where the asymptotic regimes are not accurate enough, and we have computed numerically all the quantities.

The first case is  $s \rightarrow 0$ . In this regime, we make the integration contour pass near the origin, where  $\vartheta$  has a singularity. Assuming that the main contribution to the integral will come from this region, we can replace  $\vartheta$  by its asymptotic value when  $s \rightarrow 0$  and we obtain

$$\omega_J(r) \approx \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2} \left[ \prod_{j=1}^J \sqrt{\frac{\pi}{q_j^2 s}} \right] ds = \frac{\pi^{\frac{J}{2}}}{\text{vol } Q} \frac{2r}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{sr^2} \frac{ds}{s^{\frac{J}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{J}{2}}}{\Gamma(\frac{J}{2})} \frac{r^{J-1}}{\text{vol } Q}. \quad (5.5)$$

Equation (5.5) is the derivative of (5.2), that is, BP count. It is valid for large  $r$  distances,  $h = \frac{Jq^2}{r^2} < \frac{2}{e} \approx 0.736$ .

### 5.2.3 The small distance regime

In this case we are in the regime in which the asymptotic expansion of  $\vartheta$  for large values of its argument is valid. We can estimate the integral using the saddle point approximation. Unfortunately, we cannot solve the saddle point equation in closed form for arbitrary charges. Nevertheless, in the simplest case in which all charges are equal  $q_1 = \dots = q_J = q$ , we obtain

$$\omega_J(r) = \frac{(2h-2)^{\frac{J}{h}}}{q\sqrt{2\pi h}} \left(\frac{h}{h-1}\right)^{J+\frac{1}{2}}. \quad (5.6)$$

The saddle point and the asymptote are in the same region if  $h = \frac{Jq^2}{r^2} > 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \approx 4.694$ .

## 5.3 Applications

### 5.3.1 Number of states in the Weinberg Window

The number of states of positive cosmological constant bounded by a small value  $\Lambda_\epsilon$  is the number of nodes of the lattice in flux space whose distance to the origin lies in the interval  $[R, R_\epsilon]$ , where  $R = \sqrt{2|\Lambda_0|}$  and  $R_\epsilon = \sqrt{2(\Lambda_\epsilon - \Lambda_0)} \approx R + \frac{\Lambda_\epsilon}{R}$  so that the width of the shell is  $\epsilon = \frac{\Lambda_\epsilon}{R}$ . If  $\Lambda_\epsilon$  is the width of the anthropic range  $\Lambda_{\text{WW}}$  (the so-called Weinberg Window), then the number of states in it is

$$\mathcal{N}_{\text{WW}} = \frac{\omega_J(R)}{R} \Lambda_{\text{WW}}. \quad (5.7)$$

Computation of  $\omega_J(R)$  should be done along the lines of the previous section.

### 5.3.2 Typical number of non-vanishing fluxes

The set of nodes inside a thin shell of width  $\epsilon = R_\epsilon - R$  above radius  $R$  will be called  $\Sigma_\epsilon$ . We will assume that  $\epsilon$  is smaller than the charges  $q_i$  so that (5.7) is valid but  $\mathcal{N}_\epsilon \gg 1$ .

We find that the typical number of non-vanishing components of a state drawn randomly from  $\Sigma_\epsilon$  is  $J$  for the cases  $J = 2, 3$ . We wonder whether it happens for all  $J$ . We will answer this question by computing the fraction of states in the shell having a fixed fraction  $\alpha$  of non-vanishing components.

When a state  $\lambda$  is selected at random from  $\Sigma_\epsilon$  with uniform probability,  $\alpha$  becomes a discrete random variable taking values in the  $[0, 1]$  interval. Assuming equal charges, its probability distribution is given by (see [101] for details)

$$P(\alpha) = \frac{2R}{\omega_J(R)} \binom{J}{\alpha J} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\phi(s, \alpha)} ds \quad \text{with} \quad \phi(s, \alpha) = sR^2 + \alpha J \log[\vartheta(q^2 s) - 1]. \quad (5.8)$$

It can be seen that  $P(\alpha)$  is locally Gaussian around its peak  $\alpha^*(h)$ , with standard deviation  $\sim 1/\sqrt{J}$ .  $\alpha^*(h)$  is the typical number of non-vanishing fluxes in the shell  $\Sigma_\epsilon$  (and essentially also in the whole Landscape). Its computation must be done numerically, either using the saddle point method on (5.8), or by statistical sampling, see [101]. The results are plotted in figure 5.1.



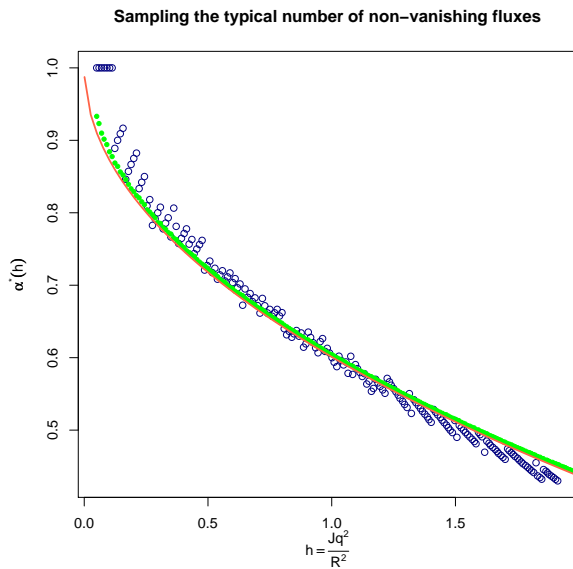


Figure 5.1: Samples of the typical number of non-vanishing fluxes. Two sampling methods have been used. The saddle point solution is also shown (red line).

### 5.3.3 Estimating the minimum positive cosmological constant

We can roughly estimate the explicit dependence of the minimum positive cosmological constant with respect to the parameters of the Landscape. We will call  $\Lambda^*$  the actual minimum value, and  $\Lambda_\varepsilon$  the corresponding estimator.

In the case of incommensurate charges, the symmetry degeneracy of a state is  $2^{J\alpha^*}$ , so that we have  $\Lambda_\varepsilon \approx \frac{2^{J\alpha^*} R}{\omega_J(R)}$ . We can check this estimate with brute-force data for low  $J$  and we find a good agreement in the statistical sense.

### 5.3.4 A possible influence on the KKLT mechanism

The Giddings-Kachru-Polchinski model [110] is a more realistic approach to the true string theory Landscape, and it can be endowed with a mechanism for fixing the compactification moduli, the so-called KKLT mechanism [97]. In this model, moduli are stabilized by the presence of fluxes and corrections to the superpotential coming from localized branes.

As far as we know, there is no combination between the BP Landscape and the KKLT mechanism, in the sense that there is no known realistic model in which all moduli are fixed and a large amount of three-cycles lead to an anthropic value of the cosmological constant. Let us assume that such a model will be built in the near future. If the  $\alpha^*(h)$  curve discussed in the section 5.3.2 can be generalized, that is, the typical occupation number of the fluxes is different from 1, then there will be a finite fraction  $1 - \alpha^*$  of three-cycles with vanishing flux. This fraction of vanishing fluxes can spoil the stabilization mechanism.

## 5.4 Conclusions

We have developed an exact formula for counting states in the Bousso-Polchinski Landscape which reduces to the volume-counting one in certain (BP) regime. Numeric computations and brute-force searches have been carried out to check the results of our analytic approximations, and we have found remarkable agreement in all explored regimes.

In particular, we have discovered a robust property of the BP Landscape, the typical fraction of non-vanishing fluxes  $\alpha^*(h)$ , which reveals the structure of the lattice inside a sphere for large  $J$  as the union of hyperplane portions of effective dimension near  $J\alpha^*$ . This result is important in computing degeneracies, which are used in estimating the minimum cosmological constant, and it could be an obstacle for a realistic implementation of the KKTL moduli stabilization mechanism.

## Acknowledgments

We would like to thank Pablo Diaz, Concha Orna and Laura Segui for carefully reading this manuscript. We also thank Jaume Garriga for useful discussions and encouragement. This work has been supported by CICYT (grant FPA-2006-02315 and grant FPA-2009-09638) and DGIID-DGA (grant 2007-E24/2). We thank also the support by grant A9335/07 and A9335/10 (Física de alta energía: Partículas, cuerdas y cosmología).



## Chapter 6

# Exploring a simple sector of the Einstein-Maxwell landscape

We explore the four dimensional Einstein-Maxwell landscape as a toy model in which we can formulate a sphere compactification stabilized by an electromagnetic field. Replacing the compactification sphere by  $J$  spheres, we obtain a simple sector of the  $(2J + 2)$ -dimensional Einstein-Maxwell landscape. In this toy model, we analyze some properties which are very difficult to uncover in the string theory landscape, including: complete moduli stabilization, stability conditions, and state counting. We also show how to construct anthropic states in this model. A detailed comparison between the main features of this landscape and the Bousso-Polchinski landscape is given. We finally speculate on the impact of these phenomena in the string theory landscape.

### 6.1 Introduction

As a candidate of a theory-of-everything, string theory has led to many striking results. Among them we find the string theory landscape [90, 84], a very complicated structure of vacuum states of the theory which raises its own questions and problems. All models of this landscape are rich and complex, and the existence of this landscape is almost beyond doubt [115]. When deriving cosmological models in a landscape we are led to the notion of multiverse [116], a quantum ensemble of different classical cosmological models. The multiverse shows very appealing features, such as inflation, which is needed to remedy the difficulties of older cosmological models [8, 9, 104, 105, 10], and it is generally believed that the cosmological constant [34, 35] and the coincidence problems can be solved with realistic models of the multiverse [117, 118]. Nevertheless, the multiverse has its own problems, which will be described briefly.

The huge amount of possible universes present in the landscape [106, 107, 108, 109] should be complemented with a probability distribution which can explain why we are living in this particular universe. The standard rule of assigning probabilities as proportional to  $e^{-S}$  for some euclidean action  $S$  breaks down in this context because the classical action of a cosmological model is divergent due to the infinite spacetime volume. To extract some useful information, the action should be regularized, but there are many different ways of regulating an infinite volume because no cut-off procedure is invariant

under a coordinate change. Different regularization procedures can lead to different probability distributions predicting different universes. This is known as the measure problem [116, 119], which consists in giving an unambiguous definition of the relative probabilities in a given landscape model. So far, the measures derived from first principles need the AdS/CFT correspondence [78] and similar ideas as a key ingredient [120, 121], which has a stringy origin, and thus the whole picture is slowly evolving towards a unified formalism of the multiverse derived from string theory.

When a multiverse model is used to explain, for example, the smallness of the observed cosmological constant ( $\lambda_{\text{obs}} \approx 10^{-120}$  in Planck units) [12, 11], theory should bring a probability distribution of  $\lambda$  values. This probability distribution should take into account the number of states of the landscape, but also its relative probability computed using a measure as stated above. This measure is derived from a mechanism by which states are populated in the landscape, for example, by some form of Euclidean Quantum Gravity, with its own difficulties as commented in the previous paragraph, or by eternal inflation, which populates all states in the landscape in a stochastic fashion. When considering the distribution of  $\lambda$  values conditioned on those states which support some form of observers (like us) [98, 48, 84], one needs to add an anthropic factor to the probability which should be provided to complete the prediction. Therefore, there are three parts which contribute to the final probability: the distribution of the states in the landscape (also known as the *prior* part), the cosmological measure (which needs a mechanism for populating the landscape), and the anthropic factor (which incorporates the condition for the existence of observers, such as galaxy formation).

Another problem is the vast complexity of the landscape. Extracting a four-dimensional cosmology from string theory requires choosing a compactification of the remaining dimensions. Each possible choice of compactification describes a sector of the entire landscape, and the number and properties of the states in different sectors can be very different. This diversity can be explored by considering different sectors separately. Thus, simplified models of some sectors of the landscape have been built, and they constitute a very important tool to understand the full implications of the string theory landscape. The reader can consult [122, 123] for a review of several models of the string theory landscape. For our purposes only the simplest models are needed. Among these models we should mention:

- The Kachru-Kalosh-Linde-Trivedi (KKLT) mechanism [110, 97, 111] is a supersymmetric string model with many stabilized AdS vacua which are lifted to dS by quantum effects. This landscape model gives inflationary states represented by brane-antibrane pairs evolving in Klebanov-Strassler throats in the compactification manifold. The model has no classical dS vacua, and thus its more controversial aspect is the quantum nature of the lifting from AdS to dS, which is uncontrollable by its very nature.
- The Bousso-Polchinski (BP) model [90] is a simplified vacuum sector of M theory compactified from eleven to four dimensions with quantized four-form fluxes and M5 branes wrapped around three-cycles in the seven-dimensional compactification manifold. The volumes of the three-cycles are the moduli of the model, and gives a fundamental charge  $q_i$  which determines the cosmological constant of the 3+1

cosmological part of the eleven-dimensional metric by the formula

$$\lambda = \Lambda + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^J q_i^2 n_i^2. \quad (6.1)$$

Here, each  $n_i$  is the number of flux units stored in the  $i^{\text{th}}$  three-cycle, and  $\Lambda$  is a bare, negative cosmological constant, a parameter of the model. Equation (6.1) provides a very elegant mechanism to deal with the cosmological constant problem. By choosing a large number  $J$  of three-cycles, we can choose the integers  $n_i$  to approximately cancel the  $\Lambda$  contribution, thus obtaining a huge landscape of AdS and dS vacua containing states with very low values of the effective cosmological constant  $\lambda$ , also known as the *discretuum*. Calabi-Yau compactifications typically have a large amount of three-cycles, so that realistic values of the cosmological constant can be obtained without any fine-tuning of the model parameters.

On one hand, unlike the KKLT mechanism, the BP model does not rely on quantum effects for producing dS states. On the other hand, BP moduli are frozen from the very beginning, and thus no stabilization mechanism analogous to KKLT is included in the BP model.

While there are some extensions of the KKLT scenario where the structure of states in the landscape has been elucidated by means of numerical searches [124], a very appealing feature of the BP landscape is that the closed expression (6.1) leads to analytically tractable counting problems. Thus, relative probabilities of different states can be computed based on combinatorics, but this leads to the conclusion that the number of states with realistic  $\lambda$  values are a very sparse minority, thus opening the door to anthropic arguments [98, 48, 84].

If we combine the computation of probabilities by naive state counting with the lack of stability analysis, we find another curious property of the BP landscape. Under a large number of three-cycles  $J$ , flux space is a very high-dimensional space. Such spaces have very counterintuitive geometric features: for example, the opposite vertexes of a unit hypercube are separated by a distance  $\sqrt{J}$ , which can be interpreted (in Planck units) as a huge energy scale. Another consequence of this elongation of diagonal distances is that the vast majority of lattice nodes inside a sphere in flux space are located on hyperplanes, that is, they always have at least one vanishing component. In fact, we have seen that as  $J$  grows, the dimension of the most populated hyperplanes is distributed in a narrow Gaussian window around a typical value  $\alpha^* J$  with  $\alpha^* < 1$  [101]. But as the KKLT mechanism shows, flux quantum numbers cannot vanish in stable states. Of course, the lack of a stabilization mechanism in the BP model prevents us from directly excluding those states from the model; if they were excluded, the states with very low  $\lambda$  values could even disappear. This “ $\alpha^*$ -problem” of the BP model is only present for large  $J$ , but a large  $J$  is certainly needed to solve the cosmological constant problem.

Thus, looking for a scenario where we can closely examine this  $\alpha^*$ -problem, we are led to consider a model with the following properties:

- It should be exactly solvable.
- It should have many moduli.
- It should have a stabilization mechanism.

The simplest landscape with the first and third requirements is the Einstein-Maxwell landscape, considered in a plethora of papers as a toy model landscape [125, 126, 112, 113]. This landscape has compactifications of the form  $(A)dS_2 \times S^4$  or  $(A)dS_4 \times S^2$  having a single modulus, namely, the radius of the compactification sphere. We have added many moduli by considering compactifications of the form

$$(A)dS_2 \times \prod_{i=1}^J S^2, \quad (6.2)$$

and thus the moduli are the radii of the  $J$  spheres. We call this sector *multi-sphere* Einstein-Maxwell compactification. We will see that dS states with low quantum numbers are always unstable, and thus they should be excluded from the landscape. This legitimates the  $\alpha^*$ -problem as an objection against naive counting arguments in the BP landscape.

The stability of states in multi-sphere compactifications has been studied previously [127], [128], [129]. In particular, in [129] it is shown that compactifications of the form  $AdS_p \times S^n \times S^{q-n}$  are unstable for  $q < 9$  but they are stable for  $q \geq 9$ . In contrast, the multi-sphere model (6.2) gives always stable  $AdS_2$  states. This example emphasizes the importance of the dimensionality in determining stability.

We have chosen the cosmological part in the multi-sphere model to be 1+1 instead of 3+1 for simplicity. On one hand, these cosmologies are unrealistic, and they have the peculiarities of two-dimensional dilatonic gravities. On the other hand, there is no theory predicting how observers form in a 1+1 universe, and no quantum measure defined on this multiverse, and therefore the prediction of the cosmological constant relies on the state counting problem only. It is also a good candidate for studying the measure problem in future papers.

The paper is organized as follows. In section 6.2, we give a detailed description of the single-modulus compactification  $(A)dS_2 \times S^2$  in the Einstein-Maxwell theory, together with the stabilization mechanism and the state counting. In section 6.3 we consider the multi-sphere model and its stabilization mechanism in detail, and give a very detailed account of the  $(A)dS_2 \times S^2 \times S^2$  sector of the six-dimensional Einstein-Maxwell theory. Section 6.4 is devoted to counting the states in the model. In section 6.5 we show how anthropic states can be constructed in this model. In section 6.6 we summarize the differences found between the multi-sphere Einstein-Maxwell sector and the Bousso-Polchinski landscape, and in section 6.7 we speculate on some consequences that those phenomena can have on the string theory landscape. The last section 6.8 summarizes our conclusions.

## 6.2 One-flux compactification in the four-dimensional Einstein-Maxwell theory

### 6.2.1 The one-flux four-dimensional Einstein Maxwell landscape

By a compactification in four-dimensional gravity we understand a solution of the Einstein field equations of the form

$$ds^2 = e^{2\phi(x,t)}(-dt^2 + dx^2) + e^{2\psi(u,v)}(du^2 + dv^2). \quad (6.3)$$

This is a particular expression of a Kantowski-Sachs cosmology [55, 130]. The metric splits in a  $(t, x)$ -spacetime part, which we will identify with a two-dimensional cosmological solution, and a  $(u, v)$ -surface  $\mathcal{K}$ , the compact part.

The Einstein field equations are, in units with  $G = c = 1$ ,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (6.4)$$

The stress-energy tensor has two contributions, the first comes from the electromagnetic field and the second from a vacuum energy density:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu}^{(M)} + T_{\mu\nu}^{(\Lambda)}, \\ T_{\mu\nu}^{(M)} &= \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} F^2 g_{\mu\nu} \right) \\ T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} &= -\frac{\Lambda}{8\pi} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

The symbol  $F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  is the electromagnetic Lagrangian density, and  $\Lambda$  is the cosmological constant of the four-dimensional theory.

The stress-energy tensor of the Maxwell field is traceless, so we have

$$T = T^{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda}{2\pi}. \quad (6.6)$$

We will assume a magnetic monopole configuration for the electromagnetic field:

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{V} e^{2\psi(u,v)} du \wedge dv, \quad (6.7)$$

where the boldface is used to denote differential forms. Here the constant  $Q$  is the magnetic charge of the monopole, and  $V$  is the volume of the compactification manifold, so that

$$V = \text{vol } \mathcal{K} = \int_{\mathcal{K}} e^{2\psi(u,v)} du \wedge dv \quad (6.8)$$

and we have

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{F} = Q. \quad (6.9)$$

In matrix notation, the Maxwell field is

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_u & E_v \\ -E_x & 0 & -B_v & B_u \\ -E_u & B_v & 0 & -B_x \\ -E_v & -B_u & B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_x \\ 0 & 0 & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad B_x = \frac{Q}{V} e^{2\psi(u,v)}. \quad (6.10)$$

This configuration solves Maxwell equations in curved spacetime

$$\nabla_{\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\nu} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0 \quad (6.11)$$

and the non-vanishing components of the corresponding stress-energy tensor are

$$\begin{aligned} T_{tt}^{(M)} &= \frac{1}{8\pi} B_x^2 e^{2\phi-4\psi} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{Q}{V} \right)^2 e^{2\phi}, \\ T_{xx}^{(M)} &= -\frac{1}{8\pi} B_x^2 e^{2\phi-4\psi} = -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{Q}{V} \right)^2 e^{2\phi}, \\ T_{uu}^{(M)} &= T_{vv}^{(M)} = \frac{1}{8\pi} B_x^2 e^{-2\psi} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{Q}{V} \right)^2 e^{2\psi}. \end{aligned} \quad (6.12)$$



The contribution of the cosmological constant is

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} - \frac{1}{2} T^{(\Lambda)} g_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi} g_{\mu\nu}. \quad (6.13)$$

Finally, the Ricci tensor has the following nonzero components:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -R_{xx} = -\phi_{tt} + \phi_{xx}, \\ R_{uu} &= -R_{vv} = -\psi_{uu} - \psi_{vv}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

where the subscripts in  $\phi_{xx}$  etc. represent partial derivatives. Einstein equations coincide in the  $tt$  and  $xx$  components, and in the  $uu$  and  $vv$  components also:

$$\begin{aligned} -\phi_{tt} + \phi_{xx} &= \left[ -\Lambda + \left( \frac{Q}{V} \right)^2 \right] e^{2\phi}, \\ -\psi_{uu} - \psi_{vv} &= \left[ \Lambda + \left( \frac{Q}{V} \right)^2 \right] e^{2\psi}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

Thus,  $\phi$  and  $\psi$  are uncoupled and satisfy Liouville equations of  $-+$  and  $++$  signatures respectively.

The Liouville equation states that the Gaussian curvature of the corresponding surface is constant. We will call these two constants  $\lambda$  and  $K$ :

$$\begin{aligned} (\phi_{tt} - \phi_{xx}) e^{-2\phi} &= \Lambda - \left( \frac{Q}{V} \right)^2 = \lambda, \\ -(\psi_{uu} + \psi_{vv}) e^{-2\psi} &= \Lambda + \left( \frac{Q}{V} \right)^2 = K. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Thus, a solution of the  $-+$  Liouville equation  $\phi(t, x)$  represents a two-dimensional space-time of constant curvature  $\lambda$ , which is de Sitter ( $dS_2$ ) if  $\lambda > 0$ , Minkowski ( $M_2$ ) if  $\lambda = 0$  and anti-de Sitter ( $AdS_2$ ) if  $\lambda < 0$ . Therefore,  $\lambda$  can be interpreted as the cosmological constant of the dimensionally reduced cosmological model. On the other hand,  $\psi$  represents a compact surface of constant curvature  $K$ . We can choose  $K$  positive, and then the surface will be a sphere of radius  $1/\sqrt{K}$ .

The positivity of the constant  $K$  is equivalent to zero genus by the Gauss-Bonnet formula, which also relates volume with curvature:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{K}} K e^{2\psi} du dv = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{KV}{2\pi} = 2 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{4\pi}{K}, \quad (6.17)$$

which leads to an algebraic equation for  $K$ :

$$K = \Lambda + \left( \frac{Q}{V} \right)^2 = \Lambda + \left( \frac{QK}{4\pi} \right)^2. \quad (6.18)$$

The previous equation has two solutions:

$$K_{\pm} = 2\Lambda \left( \frac{Q_{\max}}{Q} \right)^2 \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{Q}{Q_{\max}} \right)^2} \right], \quad Q_{\max} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Lambda}}. \quad (6.19)$$

The magnetic charge should not exceed  $Q_{\max}$ . For greater charges curvatures become complex and therefore the solution makes no sense.

The two-dimensional cosmological constant has also two branches

$$\lambda_{\pm} = 2\Lambda - K_{\mp}. \quad (6.20)$$

Assuming the usual Dirac quantization condition on the magnetic charge in terms of the elemental charge  $e$  of the particles coupled to the electromagnetic field,

$$Qe = 2\pi n, \quad \text{with } n \in \mathbb{Z}, \quad (6.21)$$

we have a maximum value of the integer  $n$ ,

$$n_{\max} = \left\lfloor \frac{e}{\sqrt{\Lambda}} \right\rfloor \quad (6.22)$$

and all integers  $n$  satisfying  $0 < |n| \leq n_{\max}$ , plus  $n = 0$ , constitute the one-flux four dimensional Einstein-Maxwell landscape<sup>1</sup>.

The case  $n = 0$  deserves further comment. In this case we have  $Q = 0$ , and we have only one branch,  $K = \lambda = \Lambda$ , which cannot be supported because the electromagnetic field vanishes. Thus we should expect this solution to be unstable, as we will see below.

Thus far, we have considered  $\Lambda > 0$ . In the case  $\Lambda < 0$ , it can be seen that the solutions of equation (6.18) yield  $K_- < 0$  and thus only the  $K_+$  branch remains as a solution, with a cosmological constant  $\lambda_- = 2\Lambda - K_+$  always negative. In addition we have no restriction in the quantum number  $n$ , and therefore this  $\Lambda < 0$  infinite landscape is less interesting than its  $\Lambda > 0$  counterpart, which we will be considering henceforth.

Equation (6.20) can be interpreted as a distribution of the  $dS_4$  curvature  $\Lambda$  between the  $(A)dS_2$  and  $S^2$  parts. The solutions obtained show that a positive curvature  $\Lambda$  can be distributed between positive  $K$  and positive or negative  $\lambda$  (two possible ways), but a negative curvature  $\Lambda$  should be distributed between a positive  $K$  and a negative  $\lambda$  (a unique way), yielding a physically less interesting landscape.

Figure 6.1 shows curvatures and cosmological constants for  $n_{\max} = 50$  for both branches. Note that this number controls the number of the states in the landscape, whereas  $\Lambda$  controls the magnitude of the moduli  $K$  and  $\lambda$ .

### 6.2.2 Modulus stabilization

The landscape considered thus far has only one modulus, namely the Gaussian curvature of the compact sphere or equivalently its radius. This is a volume modulus, which control the volume (surface area) of the compact part of the spacetime. The next question we should ask is the stability of the solutions encountered. If a value of  $K$  in one of the two branches for fixed quantum number  $n$  is not stable, a small perturbation will drive the system out of the solution. If the subsequent evolution makes the sphere radius to grow unbounded we speak of *decompactification*. An unstable state in the landscape should not be included when counting states in the resulting two-dimensional multiverse.

The one-flux compactified solution found is  $dS_2 \times S^2$  or  $AdS_2 \times S^2$  with a sphere radius which is homogeneous throughout the two-dimensional spacetime. The perturbation will

<sup>1</sup>This is the ‘‘pedestrian’’ landscape mentioned in Footnote 2 of Ref. [131].

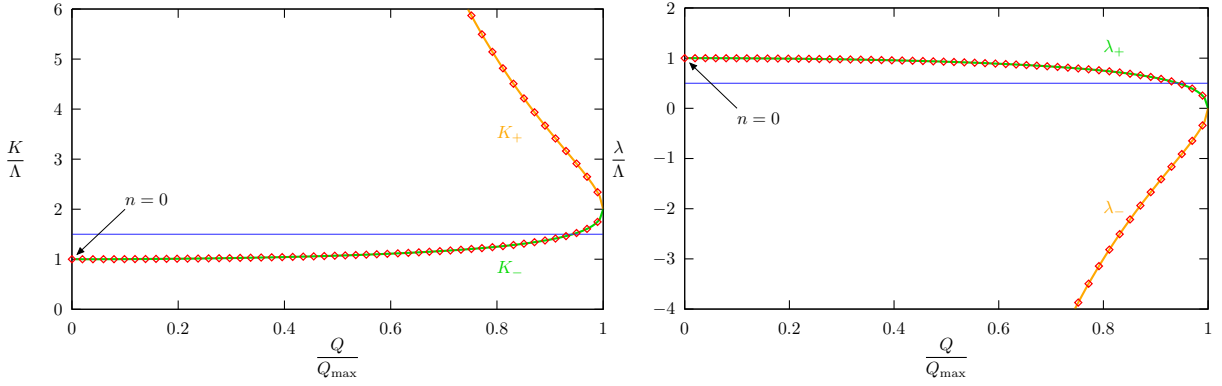


Figure 6.1: Curvature  $K$  (left) and two-dimensional cosmological constant  $\lambda$  (right) of the two branches of the one-flux four-dimensional Einstein-Maxwell landscape are shown with  $n_{\max} = 50$ , corresponding to  $\Lambda = 3.915 \times 10^{-4}$  (a random value, expressed in units such that  $e = 1$ ). The state  $n = 0$  is present only in the  $K_-$ ,  $\lambda_+$  branch. The branching point is absent because  $Q_{\max}$  is (generically) not an integer. The  $n = 1$  point on the  $K_+$ ,  $\lambda_-$  branch produces finite values  $K_+(1) \approx -\lambda_-(1) \approx 10^4 \Lambda$ . The horizontal line signals the onset of stability, all states above it in the  $\lambda_+$  branch being unstable. Thus, this landscape contains 50 AdS<sub>2</sub> states and 3 dS<sub>2</sub> states.

alter this situation, assuming that the compactification radius can be different on different  $t, x$  points, yielding an ansatz

$$ds^2 = e^{2\phi(t,x)-2\xi(t,x)}(-dt^2 + dx^2) + e^{2\psi(u,v)+2\xi(t,x)}(du^2 + dv^2). \quad (6.23)$$

The perturbation  $\xi(t, x)$  appears also on the non-compact part of the metric, and in this way the local volume element remains invariant. This reflects that the perturbation exchanges locally volume between the compact and non-compact parts of the metric. Functions  $\phi$  and  $\psi$  are solutions of the Liouville equations encountered before.

We will investigate the dynamics of the perturbation field  $\xi(t, x)$  from a two-dimensional perspective. The four-dimensional action of the Einstein-Maxwell system is

$$S^{(4)} = \frac{1}{16\pi} \int L^{(4)} dt dx du dv, \quad L^{(4)} = \sqrt{-g^{(4)}}(R^{(4)} - 2\Lambda - F^2), \quad (6.24)$$

where we use superscripts to distinguish between four- and two-dimensional quantities. The curvature scalar and the electromagnetic scalar are

$$\begin{aligned} R^{(4)} &= -2 \left[ (\phi_{xx} - \phi_{tt}) e^{-2\phi+2\xi} + (\psi_{uu} + \psi_{vv}) e^{-2\psi-2\xi} + (\xi_{xx} + 3\xi_x^2 - \xi_{tt} - 3\xi_t^2) e^{2\xi-2\phi} \right], \\ F^2 &= 2B_x^2 e^{-4\psi-4\xi}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Using  $\sqrt{-g^{(4)}} = e^{2\phi+2\psi}$  and integrating by parts the second derivatives of  $\xi$ , the four-dimensional Lagrangian is

$$\begin{aligned} L^{(4)} &= -2 \left[ (\phi_{xx} - \phi_{tt}) e^{2\psi+2\xi} + (\psi_{uu} + \psi_{vv}) e^{2\phi-2\xi} \right. \\ &\quad \left. + (\xi_x^2 - \xi_t^2) e^{2\xi+2\psi} + \Lambda e^{2\phi+2\psi} + B_x^2 e^{2\phi-2\psi-4\xi} \right] \end{aligned} \quad (6.26)$$

Now, we will substitute the sphere ansatz  $-(\psi_{uu} + \psi_{vv})e^{-2\psi} = K$  and the magnetic monopole configuration  $B_x = \frac{Q}{V}e^{2\psi}$  as backgrounds for the dynamics of the perturbation. Integrating with respect to  $u, v$  we obtain the two-dimensional action

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{V}{4\pi} \int L^{(2)} dt dx, \\ L^{(2)} &= \sqrt{-g^{(2)}} \left[ \frac{1}{4} e^{2\xi} R^{(2)} - \frac{1}{2} e^{2\xi} (g^{(2)})^{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta - U(\xi) \right], \end{aligned} \quad (6.27)$$

where the summation in  $\alpha, \beta \in \{t, x\}$  is implied, and

$$\begin{aligned} (g^{(2)})_{\alpha\beta} d\alpha d\beta &= e^{2\phi} \eta^{\alpha\beta} d\alpha d\beta = e^{2\phi} (-dt^2 + dx^2), \\ R^{(2)} &= -2(\phi_{xx} - \phi_{tt})e^{-2\phi}, \\ U(\xi) &= \frac{1}{2} \left[ \Lambda - K e^{-2\xi} + \left( \frac{QK}{4\pi} \right)^2 e^{-4\xi} \right], \end{aligned} \quad (6.28)$$

that is, a model of 1 + 1 spacetime with gravity non-minimally coupled with a scalar (called the *dilaton* or the *radion*) which experiences self-interaction through a potential. Note that the dependence with respect to the dilaton is not relegated to the potential, and so a direct stability analysis using  $U(\xi)$  is not possible.

The next step is to show that the Euler-Lagrange equations of the previous two-dimensional model are equivalent to the Einstein equations of its four-dimensional counterpart, that is, the truncation of the model is consistent. Firstly, we recast the Lagrangian (6.27) displaying explicitly all fields and removing the second derivatives of  $\phi$  by integrating by parts, which amounts to the substitution

$$\phi_{\alpha\alpha} e^{2\xi} \longrightarrow -2\phi_\alpha \xi_\alpha e^{2\xi}, \quad (6.29)$$

for  $\alpha \in \{t, x\}$ . The resulting Lagrangian is

$$\begin{aligned} L^{(2)} &= -\frac{1}{2} e^{2\xi} \eta^{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} e^{2\xi} \eta^{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta - e^{2\phi} U(\xi) \\ &= e^{2\xi} \eta^{\alpha\beta} \phi_\alpha \xi_\beta - \frac{1}{2} e^{2\xi} \eta^{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta - e^{2\phi} U(\xi). \end{aligned} \quad (6.30)$$

The equations of motion are

$$\eta^{\alpha\beta} (\phi_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha\beta} - \xi_\alpha \xi_\beta) e^{2\xi} = -e^{2\phi} U'(\xi) \quad (6.31)$$

with respect to  $\xi$ , and

$$\eta^{\alpha\beta} (\xi_{\alpha\beta} + 2\xi_\alpha \xi_\beta) e^{2\xi} = -2e^{2\phi} U(\xi) \quad (6.32)$$

with respect to  $\phi$ . The absence of perturbation  $\xi = 0$  should be a solution of the equations, so that equation (6.31) with  $\xi = 0$  reduces to

$$-e^{-2\phi} \eta^{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} = (-\phi_{xx} + \phi_{tt}) e^{-2\phi} = U'(0) = \lambda, \quad (6.33)$$

which is the two-dimensional cosmological solution, and equation (6.32) gives

$$U(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda - K + \left( \frac{QK}{4\pi} \right)^2 = 0, \quad (6.34)$$

which is the same equation previously found for  $K$ , see (6.18). We will now assume that  $\xi$  is a small perturbation, thereby neglecting the backreaction of the perturbation on the geometry of the cosmological solution. This allows us to fix  $\phi$  as another background field by means of equation (6.33). This eliminates  $\phi$  as a dynamical variable in the Lagrangian (6.30) and therefore equation (6.32) will not be used. In other words, we assume that equation (6.32) is satisfied to zeroth order, which is the content of (6.34), and we are left with (6.31) as the evolution equation for the perturbation  $\xi$  in the background  $\phi$ .

Thus, we substitute eq. (6.33) into eq. (6.31), resulting in a dynamical equation for  $\xi$  which is

$$-e^{-2\phi}\eta^{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta} + \xi_{\alpha}\xi_{\beta}) = \lambda - e^{-2\xi}U'(\xi) = -U'_{\text{eff}}(\xi). \quad (6.35)$$

The linear stability analysis of equation (6.35) requires its linearization (the effect of neglecting the non-linear derivative term does not spoil linear stability, as discussed in appendix 6.9)

$$e^{-2\phi}(\xi_{tt} - \xi_{xx}) = -U''_{\text{eff}}(0)\xi, \quad (6.36)$$

which is a 1 + 1 Klein-Gordon equation. We also consider a small spacetime region such that  $\phi$  can be treated approximately as a constant. We thus obtain the linear stability condition of the solution  $\xi = 0$  as being a minimum of the effective potential:

$$U''_{\text{eff}}(0) = 4(2K - 3\Lambda) > 0, \quad (6.37)$$

which is  $K > \frac{3}{2}\Lambda$ . All points in the  $K_+$  branch satisfy this condition, and therefore all AdS<sub>2</sub> states are stable, but this is not so in the  $K_-$  branch. The condition  $K_- > \frac{3}{2}\Lambda$  is met by all charges satisfying

$$Q > Q_{\min} = \frac{2\sqrt{2}}{3} Q_{\max}. \quad (6.38)$$

Upon quantization, the previous condition is

$$n \geq n_{\min} = \left\lceil \frac{Q_{\min}e}{2\pi} \right\rceil. \quad (6.39)$$

Thus, all states in the dS<sub>2</sub> branch characterized by a quantum number  $n < n_{\min}$  are unstable. This includes also the state  $n = 0$ , as mentioned above. We conclude that the flux number labeling true vacuum states should obey a double inequality, obtained by combining (6.22) and (6.39):

$$n_{\min} \leq n \leq n_{\max}. \quad (6.40)$$

Therefore, the number of stable states in this one-flux landscape is

$$\mathcal{N}_1 = \underbrace{n_{\max}}_{\text{AdS}_2} + \underbrace{n_{\max} - n_{\min} + 1}_{\text{dS}_2} = 2 \left\lfloor \frac{e}{\sqrt{\Lambda}} \right\rfloor - \left\lceil \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{e}{\sqrt{\Lambda}} \right\rceil + 1 \approx \frac{e}{\sqrt{\Lambda}} \left( 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right). \quad (6.41)$$

In the example shown in Figure 6.1 we have  $Q_{\max} = 317.54$  (corresponding to  $\Lambda = 3.915 \times 10^{-4}$ ) which gives  $\mathcal{N}_1 = 53$  (50 AdS<sub>2</sub> states and only 3 dS<sub>2</sub> states).

The physical description of these states is simple: The self-gravitating electromagnetic field of the monopole stabilizes a geometry (A)dS<sub>2</sub> × S<sup>2</sup> whose natural behaviour is decompactification<sup>2</sup>, that is, the curvature of the sphere part, which tends to vanish,

<sup>2</sup>Note that equation (6.36), when the state is unstable, as happens in absence of electromagnetic field, predicts an exponential increase with time of the perturbation  $\xi(t)$ . By inspecting equation (6.23), we see that it corresponds to decompactification.

is sustained by the magnetic field. The distribution of curvature contributions between the compact and non-compact parts of the geometry is whatever allowed by magnetic charge quantization in the AdS<sub>2</sub> case, while in the dS<sub>2</sub> case only large charges can sustain positive curvature of de Sitter states.

### 6.3 Adding many fluxes

Obtaining a non-trivial landscape with many fluxes is not easy. The easiest technique is to extend the electromagnetic field  $F$  to a  $SO(J)$ -invariant  $J$ -component field, in which all charges are different [90, 131]. This approach is not convenient to address the problem of stabilization, because the charges do not come from a transparent compactification scheme, and therefore nothing is known about the stabilizing potential.

In all known compactifications, the charges come from moduli describing the shape of the inner manifold. These moduli are free geometric parameters, but they are promoted to dynamical scalar fields in the perturbation analysis. The charges are considered coupling *constants*, and therefore their dynamics should be governed by a potential with at least one minimum. The stabilization problem consists of finding this potential. Different models provide a wide variety of potentials; if the potential does not possess any minimum, then the dynamics of the moduli will lead them to grow unbounded; this phenomenon is known as *decompactification*.

In an ideal model, we should expect that all moduli come from a compactification manifold which is derived from the equations of motion. Nevertheless, these equations are very difficult to solve in its full generality, and therefore the inner manifold is chosen at the very beginning of the process, and its validity is confirmed afterwards, by proving that the chosen ansatz is actually a solution. Of course, the chosen manifold may not provide a solution, or the solution may lack some desired properties.

In looking for a many-fluxes landscape, we have tried the following candidates as compactification manifold:

- The complex Riemann curves

$$w^2 = P_k(z),$$

where  $w$  and  $z$  are complex coordinates, are the simplest surfaces of known genus  $\mathbf{g} > 0$ .  $P_k(z)$  is a  $k$ -degree polynomial with real coefficients,

$$P_k(z) = z^k + a_{k-2}z^{k-2} + \cdots + a_1z + a_0,$$

which are the  $k - 1$  deformation moduli of the surface. The coefficients of  $z^k$  and  $z^{k-1}$  can be removed by rescaling and shifting  $z$  respectively. The genus of the surface is given by  $k = 2\mathbf{g} + 2$  (if  $k$  is even) or  $k = 2\mathbf{g} + 1$  (if  $k$  is odd).

These surfaces are not compact, but they can approximate locally a compact surface of the same genus. Thus, Einstein equations are to be solved only locally near the approximation region. But this ansatz turns out to yield no solutions, not even in this approximate fashion.

- The compact hyperbolic manifolds (CHM) are fundamental domains of nonabelian lattices in the Lobachevskian plane, in which the lattices are generated by discrete subgroups of  $SL_2(\mathbb{R})$ . By choosing identification of the sides of the fundamental

cell a compact surface of genus  $\mathfrak{g} \geq 2$  is obtained, which has constant negative curvature<sup>3</sup>. These surfaces are indeed solutions of Einstein equations, but only if the cosmological constant  $\Lambda$  is *negative*. This generates a sector of the Einstein-Maxwell landscape with no de Sitter states, and therefore will not be considered here.

The previous examples show that sometimes the appropriate compactification can be elusive, maybe because is far more complex than expected, or because it may not exist. So we are forced to consider another simple extension of the four dimensional Einstein-Maxwell landscape, which is discussed in the following subsections.

### 6.3.1 Multi-sphere compactification

We consider a  $J$ -sphere metric ansatz given by

$$ds^2 = e^{2\phi(x,t)} (-dt^2 + dx^2) + \sum_{i=1}^J e^{2\psi_i(u,v)} (du_i^2 + dv_i^2). \quad (6.42)$$

The metric (6.42) represents a manifold of the form

$$\mathcal{K} = (A)dS_2 \times \overbrace{S^2 \times \cdots \times S^2}^{J \text{ spheres}} = (A)dS_2 \times [S^2]^J \quad (6.43)$$

which is nothing but a sector of the Einstein-Maxwell theory in  $2J + 2$  dimensions. The  $\phi$  exponent defines the conformal factor of a two-dimensional cosmological spacetime in  $(t, x)$  coordinates. The functions  $\psi_i$  depend only on the corresponding coordinates  $(u_i, v_i)$  (but not on  $(u_j, v_j)$  with  $j \neq i$ ), and they give a conformal representation of the  $i$ -th sphere metric.

The Ricci tensor of the metric (6.42) is

$$\begin{aligned} R_{xx} &= -R_{tt} = \phi_{tt} - \phi_{xx}, \\ R_{u_i u_i} &= R_{v_i v_i} = -\Delta_i \psi_i, \end{aligned} \quad (6.44)$$

all remaining components being zero. The  $i$ -th Laplacian operator is  $\Delta_i = \partial_{u_i}^2 + \partial_{v_i}^2$ .

The metric (6.42) should be complemented with the electromagnetic field

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^J B_i(u_i, v_i) du_i \wedge dv_i \quad (6.45)$$

where the magnetic  $u_i, v_i$ -component  $B_i$  depends only on the corresponding coordinates  $(u_i, v_i)$  (but not on  $(u_j, v_j)$  with  $j \neq i$ ). Thus, the electromagnetic tensor  $F_{\mu\nu}$  is analogous to (6.10), with  $J$   $2 \times 2$  blocks along the diagonal. Maxwell equations (6.11) reduce to

$$\partial_{u_i} \sqrt{-g} F^{v_i u_i} = 0, \quad \partial_{v_i} \sqrt{-g} F^{u_i v_i} = 0. \quad (6.46)$$

Using the volume element prefactor  $\sqrt{-g} = e^{2\phi+2\sum_{i=1}^J \psi_i}$  and the relation  $F^{u_i v_i} = e^{-4\psi_i} F_{u_i v_i}$ , we find that a solution of the equations is

$$F_{u_i v_i} = B_i = \frac{Q_i}{V_i} e^{2\psi_i}, \quad (6.47)$$

<sup>3</sup>Refs. [132, 133, 134, 135, 136, 137] contain more details on hyperbolic compactifications in cosmology.

where  $V_i$  is the volume of the  $i$ -th sphere,

$$V_i = \int_{S^2} e^{2\psi_i} du_i \wedge dv_i, \quad (6.48)$$

and  $Q_i$  is an integration constant. When integrating the two-form we obtain

$$\int \mathbf{F} = \sum_{i=1}^J \frac{Q_i}{V_i} \int_{S^2} e^{2\psi_i} du_i \wedge dv_i = \sum_{i=1}^J Q_i = Q, \quad (6.49)$$

so that  $Q$  is the total magnetic charge of the configuration, and each constant  $Q_i$  can be interpreted as the magnetic charge contribution of the corresponding magnetic field component.

The most convenient way of obtaining the field equations is writing the action

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} (R - 2\Lambda - F^2) dt dx \prod_{i=1}^J du_i dv_i \quad (6.50)$$

in terms of the fields  $\phi$ ,  $\psi_i$  and  $B_i$  and then derive the equations from it. The curvature scalar of the metric ansatz (6.42) is

$$R = 2(\phi_{tt} - \phi_{xx})e^{-2\phi} - 2 \sum_{i=1}^J \Delta_i \psi_i e^{-2\psi_i}. \quad (6.51)$$

The Lagrangian density of the electromagnetic field (6.45) is

$$F^2 = 2 \sum_{i=1}^J B_i^2 e^{-4\psi_i}. \quad (6.52)$$

Thus, the action specialized to our ansatz is

$$S = \frac{1}{8\pi} \int e^{2\phi+2\sum_{i=1}^J \psi_i} \left[ (\phi_{tt} - \phi_{xx})e^{-2\phi} - \sum_{i=1}^J \Delta_i \psi_i e^{-2\psi_i} - \Lambda - \sum_{i=1}^J B_i^2 e^{-4\psi_i} \right] dt dx \prod_{i=1}^J du_i dv_i \quad (6.53)$$

The variation of the action (6.53) with respect to the vector potential  $A_\mu$  (which determines the magnetic field  $B_i = \partial_{u_i} A_{v_i} - \partial_{v_i} A_{u_i}$ ) gives the Maxwell equations (6.46). Varying with respect to  $\phi$  and  $\psi_j$  gives

$$\begin{aligned} \Lambda &= - \sum_{i=1}^J \left\{ \Delta_i \psi_i e^{-2\psi_i} + B_i^2 e^{-4\psi_i} \right\}, \\ (\phi_{tt} - \phi_{xx})e^{-2\phi} &= \Lambda + \sum_{i=1}^J \left\{ \Delta_i \psi_i e^{-2\psi_i} + B_i^2 e^{-4\psi_i} \right\} - \Delta_j \psi_j e^{-2\psi_j} - 2B_j^2 e^{-4\psi_j}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Note that the first equation in (6.54) cancels some terms in the second. Now, we recognize the Gaussian curvatures of conformally flat metrics with signatures  $-+$  and  $++$ ; so we substitute the constant curvature ansatz implied in the geometry of  $\mathcal{K}$  (6.43) as we did previously (6.16), introducing the constants

$$\lambda = (\phi_{tt} - \phi_{xx})e^{-2\phi}, \quad K_i = -\Delta_i \psi_i e^{-2\psi_i}, \quad (6.55)$$



where  $\lambda$  is the curvature of the non-compact part (the cosmological constant of the two-dimensional spacetime) and  $K_i$  is the curvature of the  $i$ -th sphere in the product  $[S^2]^J$ . If we finally substitute  $B_i$  by the solution (6.47), we obtain

$$\Lambda = \sum_{i=1}^J \left\{ K_i - \left( \frac{Q_i}{V_i} \right)^2 \right\}, \quad (6.56)$$

$$\lambda = K_j - 2 \left( \frac{Q_j}{V_j} \right)^2. \quad (6.57)$$

We can substitute equation (6.57) in (6.56), obtaining

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left( J\lambda + \sum_{i=1}^J K_i \right). \quad (6.58)$$

The relation (6.17) between volume and curvature is valid, and transforms equation (6.57) in an algebraic equation for  $K_j$ :

$$2 \left( \frac{Q_j K_j}{4\pi} \right)^2 - K_j + \lambda = 0, \quad (6.59)$$

which has two solutions

$$K_j^{(\pm)} = \frac{4\pi^2}{Q_j^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 2\lambda \frac{Q_j^2}{4\pi^2}} \right]. \quad (6.60)$$

Substituting (6.60) in equation (6.58), we obtain a single equation for  $\lambda$ , whose solution can be substituted back in equation (6.60), determining the curvatures.

It should be noted that if  $Q_j = 0$ , then equation (6.59) has a single solution, namely  $K_j = \lambda$ , which is the limit of the  $K_j^{(-)}$  solution when  $Q_j \rightarrow 0$ .

Now, the usual Dirac quantization condition is

$$Q_j e = 2\pi n_j \quad \text{with } n_j \in \mathbb{Z}, \quad (6.61)$$

which can be justified in the following way. We will use the conformal representation of the sphere metric:

$$(ds^2)_{S_j^2} = \frac{du_j^2 + dv_j^2}{K_j \cosh^2 u_j} \quad (6.62)$$

such that the  $u_j$  coordinates separate hemispheres ( $u_j > 0$  is the northern hemisphere,  $u_j = 0$  is the equator, etc.) and  $v_j$  are angles mod  $2\pi$ . A quantum wavefunction  $\Psi$  defined on the manifold  $\mathcal{K}$  depends on the coordinates  $t, x, \{u_j, v_j\}_{j=1, \dots, J}$ . The loops  $\gamma_j$  in which  $v_j$  varies along  $[0, 2\pi]$  and the remaining coordinates are fixed can be used to define holonomies  $h_j$  acting on the wavefunction:

$$h_j \Psi = \exp \left( ie \int_{\gamma_j} A \right) \Psi, \quad (6.63)$$

where the electromagnetic potential is used as the connection to parallel transport the wavefunction values along the loop. It is well known that the potential of a magnetic monopole can be defined in two patches on the sphere which overlap at the equator:

$$A = \sum_{i=1}^J A_i, \quad A_j = \begin{cases} A_j^{(+)} = \frac{Q_j}{K_j V_j} [\tanh u_j - 1] dv_j & \text{if } u_j \geq 0, \\ A_j^{(-)} = \frac{Q_j}{K_j V_j} [\tanh u_j + 1] dv_j & \text{if } u_j \leq 0. \end{cases} \quad (6.64)$$

Here,  $V_j = \frac{4\pi}{K_j}$ , as usual, and the magnetic field is

$$B_j = dA_j^{(\pm)} = \frac{Q_j}{K_j V_j} \frac{du_j \wedge dv_j}{\cosh^2 u_j} = \frac{Q_j}{V_j} e^{2\psi_j} du_j \wedge dv_j. \quad (6.65)$$

Thus, the potential is discontinuous at the equator, but the discontinuity is given by a gauge transformation  $\chi_j$ , namely

$$A_j^{(+)} - A_j^{(-)} = -\frac{2Q_j}{K_j V_j} dv_j = d\chi_j. \quad (6.66)$$

If we move the loop slightly upwards or downwards from the equator, the discontinuity in  $A$  will leave a different phase on  $\Psi$ , thus violating gauge invariance, unless the phase difference is an integer times  $2\pi$ , that is, equation (6.61).

Therefore, we can substitute (6.61) in the equation satisfied by  $\lambda$  (6.58), obtaining

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left[ J\lambda + \sum_{j=1}^J \frac{e^2}{n_j^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{\lambda}{e^2} n_j^2} \right) \right]. \quad (6.67)$$

Note that  $e^2$  is a scale which can be used to measure  $\Lambda$  and  $\lambda$ . In order to simplify the formulae, we will assume henceforth that the substitutions  $\frac{\lambda}{e^2} \rightarrow \lambda$  and  $\frac{\Lambda}{e^2} \rightarrow \Lambda$  have been made. Equation (6.67) takes the form

$$L_{\{s_j\},\{n_j\}}(\lambda) = \Lambda, \quad \text{with} \quad L_{\{s_j\},\{n_j\}}(\lambda) = \frac{1}{2} \left[ J\lambda + \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} \left( 1 + s_j \sqrt{1 - 2\lambda n_j^2} \right) \right]. \quad (6.68)$$

The function  $L_{\{s_j\},\{n_j\}}(\lambda)$  depends on the signs  $\{s_j\}$  of the curvatures involved and on the winding numbers  $\{n_j\}$  of the magnetic field. When some  $n_j$  vanishes, the curvature should be taken as  $K_j = K_j^{(-)} = \lambda$ , the  $K_j^{(+)}$  branch is absent. The solutions of equation (6.68) constitute the states of the multi-sphere Einstein-Maxwell landscape.

The set of integers  $\{n_j\}$  will be called a *node*, while the set of signs  $\{s_j\}$  will be called a *branch* of the  $L_{\{s_j\},\{n_j\}}$  function. Fixing a node with all  $n_j$  nonzero, we have  $2^J$  branches, one for each possible choice of the signs  $\{s_j\}$ . The number of solutions of the equation is different for each  $\Lambda$  value; in figure 6.2 it is shown an example with  $J = 3$ , where the eight branches of the node  $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 1)$  are shown. The displayed value of  $\Lambda$  yields eight solutions, but it is obvious from figure 6.2 that the number of solutions vary when  $\Lambda$  is moved upwards, and becomes zero when the  $\{+, +, +\}$  branch is surpassed. The highest branch will be always the all-+ branch, and will be called the *principal* branch.

Not all solutions of equation (6.68) give valid states; for example, curvatures (6.60) can become complex if  $\lambda$  is too large. The smallest value of  $\lambda$  at which some of the pairs of curvatures  $K_j^{(\pm)}$  meet is the *branching point* of the node, and is given by

$$\lambda_b = \frac{1}{2 \max_{1 \leq j \leq J} \{n_j^2\}}. \quad (6.69)$$

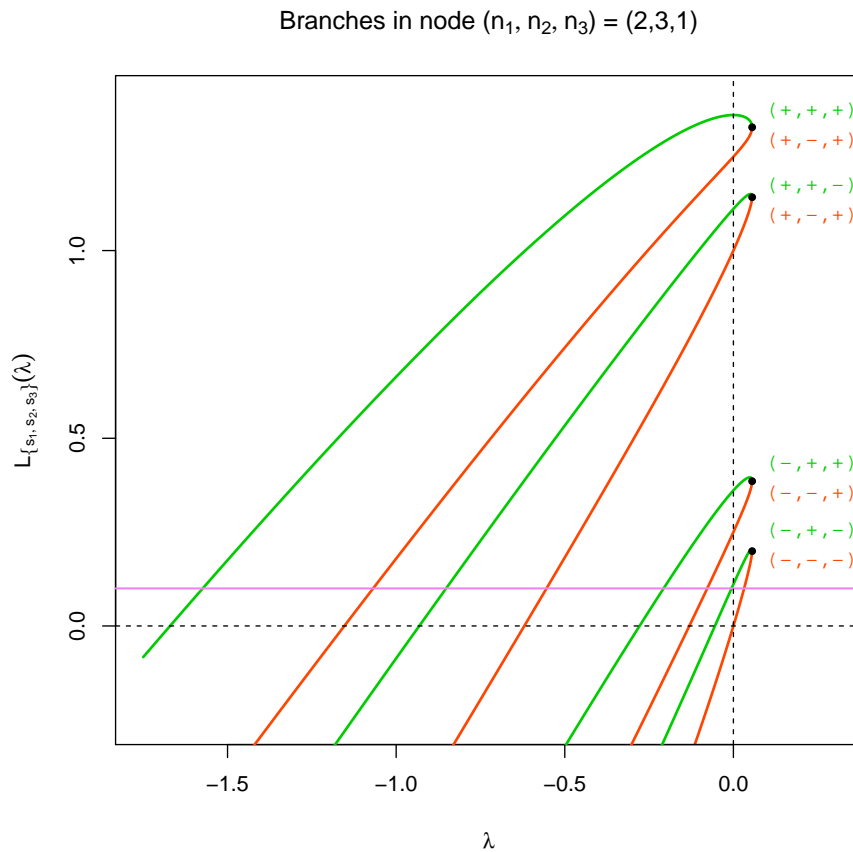


Figure 6.2: The eight branches of the  $J = 3$  multi-sphere Einstein-Maxwell landscape at the node  $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 1)$  are shown. Note that each pair of branches meet at a branching point, whose horizontal position is the same in all branches, see text. The solid horizontal line corresponds to a random value of the cosmological constant  $\Lambda$ ; with this choice, there are eight solutions of the equation  $L(\lambda) = \Lambda$ , yielding a single de Sitter state and seven anti-de Sitter states. Note that if  $\Lambda$  were at 0.5 height, there would be only four solutions, and if it were at 1.5 height, there would be no solutions at all. All statistic plots in this paper were done using R [99].

This is the maximum positive value that  $\lambda$  can achieve when all  $n_j \neq 0$ . Curvatures can also become negative; this happens when  $\lambda < 0$  in all branches except the principal one. Those states are not well defined, but we might define them in detail by replacing the corresponding sphere by a CHM. Nevertheless, to keep things simple, this sector of the landscape will be deliberately left out, because all its states are AdS. This leaves the principal branch as the only source of AdS states with positive curvature in all places of the compact part.

The problem of the stability of the states just found is addressed in subsection 6.3.2, and the problem of counting them is the subject of section 6.4.

### 6.3.2 Moduli stabilization

The next step in the analysis is to determine if the states of the multi-sphere Einstein-Maxwell landscape are stable or not. Our approach will follow closely that of subsection 6.2.2. We begin by introducing perturbations  $\xi_j(t, x)$  which represent deviations of the curvatures found as solutions of the Einstein equations; the perturbed metric ansatz in the Einstein frame is

$$ds^2 = e^{2\phi(t,x) - 2\sum_{j=1}^J \xi_j(t,x)} (-dt^2 + dx^2) + \sum_{j=1}^J e^{2\psi_j(u_j, v_j) + 2\xi_j(t,x)} (du_j^2 + dv_j^2). \quad (6.70)$$

As before,  $\phi(t, x)$  represents a 1 + 1 cosmological solution, and  $\psi_j(u_j, v_j)$  corresponds to the metric of the internal spheres in conformal coordinates. The perturbations  $\xi_j(t, x)$  describe changes in the radii of the internal spheres, and thus they will be referred to as the *multi-radion* fields.

We will proceed by writing the action (6.50) specialized for the metric (6.70). The Ricci scalar is

$$R = 2e^{-2\phi + 2\sum_{j=1}^J \psi_j} \left\{ \phi_{tt} - \phi_{xx} + \sum_{j=1}^J \left[ (\xi_j)_{tt} - (\xi_j)_{xx} + 3(\xi_j)_t^2 - 3(\xi_j)_x^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2(\xi_j)_t \left( \sum_{k \neq j} \xi_k \right)_t - 2(\xi_j)_x \left( \sum_{k \neq j} \xi_k \right)_x - e^{2\phi - 2\psi_j - 2\xi_j - 2\sum_{k=1}^J \xi_k} \Delta_j \psi_j \right] \right\} \quad (6.71)$$

Note that the previous expression involves second derivatives of the multi-radion fields. We can replace those terms by first derivatives by integrating by parts in the action. This amounts to the following replacement rule:

$$(\xi_j)_{tt} e^{2\sum_{k=1}^J \xi_k} \longrightarrow -2(\xi_j)_t \left( \sum_{k=1}^J \xi_k \right)_t e^{2\sum_{k=1}^J \xi_k}, \quad (6.72)$$

and another analogous equation with the  $x$  derivatives.

The next step is to note that the expression (6.47) for the magnetic field remains unchanged, because the perturbations appear in Maxwell equations (6.46) only as factors depending on variables  $(t, x)$ , and thus they can be factored out of the equations. Thus, the contribution of the magnetic field to the action is not exactly (6.52) but

$$F^2 = 2 \sum_{j=1}^J B_j^2 e^{-4\psi_j - 4\xi_j}, \quad (6.73)$$

with the same magnetic field  $B_j = \frac{Q_j}{V_j} e^{2\psi_j}$ .

Finally, we will insert in the action the unperturbed sphere metric ansatz  $-e^{2\psi_j} \Delta_j \psi_j = K_j$ .

Gathering all these ingredients, we obtain the following Lagrangian for the perturbed metric:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{-g}(R - 2\Lambda - F^2) \\ &= 2e^{2\phi+2\sum_{k=1}^J \psi_k} \left\{ (\phi_{tt} - \phi_{xx}) e^{-2\phi+2\sum_{k=1}^J \xi_k} - \Lambda \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^J \left[ ((\xi_j)_t)^2 - (\xi_j)_x^2 \right] e^{-2\phi+2\sum_{k=1}^J \xi_k} + K_j e^{-2\xi_j} - \left( \frac{Q_j}{V_j} \right)^2 e^{-4\xi_j} \right\}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Now, we can perform the integration in the internal variables  $\{u_j, v_j\}$  and thus obtain a dimensionally reduced model for the cosmological part together with the multi-radion fields:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int L dt dx \prod_{j=1}^J du_j dv_j = \frac{1}{4\pi} \left( \prod_{j=1}^J V_j \right) \int L^{(2)} dt dx, \quad (6.75)$$

with a 1 + 1 Lagrangian

$$L^{(2)} = \sqrt{-g^{(2)}} \left\{ \frac{1}{4} e^{2\sum_{k=1}^J \xi_k} R^{(2)} - \frac{1}{2} e^{2\sum_{k=1}^J \xi_k} \sum_{j=1}^J (g^{(2)})^{\alpha\beta} (\xi_j)_\alpha (\xi_j)_\beta - \sum_{j=1}^J U_j(\xi_j) \right\} \quad (6.76)$$

where the summation in  $\alpha, \beta \in \{t, x\}$  is implied, and we have used (see (6.28))

$$\begin{aligned} (g^{(2)})_{\alpha\beta} d\alpha d\beta &= e^{2\phi} \eta^{\alpha\beta} d\alpha d\beta = e^{2\phi} (-dt^2 + dx^2), \\ R^{(2)} &= -2(\phi_{xx} - \phi_{tt}) e^{-2\phi}, \\ U_j(\xi_j) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\Lambda}{J} - K_j e^{-2\xi_j} + \left( \frac{Q_j K_j}{4\pi} \right)^2 e^{-4\xi_j} \right]. \end{aligned} \quad (6.77)$$

It is apparent from (6.76) that all radions are coupled by the dilatonic factors. When exhibiting all fields explicitly we obtain

$$\begin{aligned} L^{(2)} &= -\frac{1}{2} e^{2\sum_k \xi_k} \eta^{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} e^{2\sum_k \xi_k} \sum_{j=1}^J \eta^{\alpha\beta} (\xi_j)_\alpha (\xi_j)_\beta - e^{2\phi} \sum_{j=1}^J U_j(\xi_j), \\ &= e^{2\sum_k \xi_k} \eta^{\alpha\beta} \phi_\alpha \sum_{j=1}^J (\xi_j)_\beta - \frac{1}{2} e^{2\sum_k \xi_k} \sum_{j=1}^J \eta^{\alpha\beta} (\xi_j)_\alpha (\xi_j)_\beta - e^{2\phi} \sum_{j=1}^J U_j(\xi_j), \end{aligned} \quad (6.78)$$

which is the generalization of the Lagrangian previously found for  $J = 1$ , see eq. (6.30). Note that a substitution rule analogous to (6.29)

$$\phi_{\alpha\alpha} e^{2\sum_k \xi_k} \longrightarrow -2\phi_\alpha \sum_{j=1}^J (\xi_j)_\alpha e^{2\sum_k \xi_k}, \quad (6.79)$$

has been used in passing from the first line to the second in (6.78). The equations of motion are as follows;  $\partial_\alpha \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \phi_\alpha} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \phi}$  is

$$e^{2\sum_k \xi_k} \eta^{\alpha\beta} \left[ 2 \left( \sum_k (\xi_k)_\alpha \right) \left( \sum_k (\xi_k)_\beta \right) + \sum_k (\xi_k)_{\alpha\beta} \right] = -2e^{2\phi} \sum_k U_k(\xi_k), \quad (6.80)$$

and  $\partial_\alpha \frac{\partial L^{(2)}}{\partial (\xi_j)_\alpha} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \xi_j}$  are

$$e^{2\sum_k \xi_k} \eta^{\alpha\beta} \left[ \phi_{\alpha\beta} - (\xi_j)_{\alpha\beta} - 2(\xi_j)_\alpha \left( \sum_k (\xi_k)_\beta \right) + \sum_k (\xi_k)_\alpha (\xi_k)_\beta \right] = -e^{2\phi} U'_j(\xi_j). \quad (6.81)$$

The absence of perturbations should be a solution of the previous equations. We can verify this requirement by substituting  $\xi_j = 0$  in (6.81):

$$-\eta^{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} e^{-2\phi} = U'_j(0) = \lambda, \quad (6.82)$$

which is the cosmological solution previously obtained (6.16),(6.55). Using eq. (6.77), eq. (6.82) is reduced to

$$U'_j(0) = K_j - 2 \left( \frac{Q_j K_j}{4\pi} \right)^2 = \lambda, \quad (6.83)$$

that is, exactly equation (6.59) determining the curvatures. By substituting  $\xi_j = 0$  in (6.80) we obtain

$$\sum_j U_j(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sum_j \left[ \frac{\Lambda}{J} - \frac{K_j}{2} - \frac{\lambda}{2} \right] = 0, \quad (6.84)$$

which is exactly equation (6.58). Thus, both equations (6.83),(6.84) are the correct, unperturbed ones.

At this point, we proceed as in subsection 6.2.2 by fixing the cosmological background  $\phi$  by means of (6.82). This fixing is equivalent to neglecting the backreaction of the perturbations  $\xi_j$  on the cosmology  $\phi$ . This being done,  $\phi$  is not a degree of freedom anymore, and the variation of the Lagrangian  $L^{(2)}$  in (6.78) with respect to  $\phi$  is meaningless. This background fixing step can also be viewed as solving equation (6.80) to zeroth order. In this approximation, the multi-radion field moves in a fixed cosmological background and its evolution is determined by equation (6.81).

We now turn to the analysis of equation (6.81). It is a strongly coupled, nonlinear system of equations with only one known solution,  $\xi_j = 0$ , which gives rise to the landscape under study. There is no hope of finding a nontrivial solution to this system; nevertheless, we are only interested in a description of the stability of the trivial solution.

To this end, we substitute (6.82) back to equation (6.81), obtaining

$$-e^{-2\phi} \eta^{\alpha\beta} \left[ (\xi_j)_{\alpha\beta} + 2(\xi_j)_\alpha \left( \sum_k (\xi_k)_\beta \right) - \sum_k (\xi_k)_\alpha (\xi_k)_\beta \right] = \lambda - e^{-2\sum_k \xi_k} U'_j(\xi_j). \quad (6.85)$$

The derivative couplings appear in a quadratic form. The linear stability analysis allows us to approximate the system of equations by Taylor-expanding to first order the right-hand

side of equation (6.85) and neglecting the quadratic derivative couplings, thus considering the much simpler linear system (written in matrix form)

$$-e^{-2\phi}\eta^{\alpha\beta}\xi_{\alpha\beta} = -H\xi. \quad (6.86)$$

We have used the symbol  $\xi$  to denote the  $J$ -component column vector of the perturbations  $\xi_j$ , and the frequency matrix  $H$  is given by

$$H_{jk} = \left. \frac{\partial}{\partial \xi_k} e^{-2\sum_\ell \xi_\ell} U'_j(\xi_j) \right|_{\xi=0} = 2[(K_j - 2\lambda)\delta_{jk} - \lambda], \quad (6.87)$$

that is,

$$H = 2 \begin{pmatrix} K_1 - 3\lambda & -\lambda & \cdots & -\lambda \\ -\lambda & K_2 - 3\lambda & \cdots & -\lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda & -\lambda & \cdots & K_J - 3\lambda \end{pmatrix}. \quad (6.88)$$

The linear stability condition is therefore that all eigenvalues of the matrix  $H$  should be positive. We will call  $\kappa$  the minimum eigenvalue of  $H$ , so that the stability criterion is simply

$$\kappa > 0. \quad (6.89)$$

In order to complete the linear stability analysis we should justify the neglecting of the derivative couplings. These non-linear terms have a generically negative sign<sup>4</sup>, as opposed to a positive sign characteristic of a dissipative force, and thus they could be interpreted as an ‘‘anti-dissipative’’ force. It is legitimate to ask if these non-linear terms can spoil the linear stability of the solution.

It turns out that these nonlinear terms do not spoil the linear stability criterion (6.89) as long as the amplitude of the perturbation is sufficiently small. The magnitude of the threshold and the corresponding heuristic argument leading to these conclusions, not being central to this discussion, have been placed in appendix 6.9.

The exact computation of the spectrum of  $H$  is not possible in the general case. Therefore, we cannot derive a formula  $\kappa(\lambda)$  to quickly establish the stability of a state. As a result, the computation of  $\kappa$  should be done numerically on each individual state. Nevertheless, we can obtain some general stability results by computing the determinant of  $H$ , a task which can be done as follows.

Firstly we note that if all  $K_j$  are equal, the determinant of  $H$  would be (we drop from now on the unimportant factor 2 of  $H$ ) the characteristic polynomial of the matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3\lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & 3\lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & 3\lambda \end{pmatrix}. \quad (6.90)$$

This matrix has an eigenvalue  $2\lambda$  with degeneracy  $(J-1)$  and a simple eigenvalue  $(J+2)\lambda$ . Its characteristic polynomial is

$$\det(K\mathbb{1} - B) = [K - (J+2)\lambda] \prod_{j=1}^{J-1} (K - 2\lambda). \quad (6.91)$$

<sup>4</sup>Note that the derivative couplings appear in a quadratic form having all negative eigenvalues except for one, see the paragraph following equation (6.175) in appendix 6.9.

Specializing the variable  $K$  at a single curvature value  $K_j$  would give the determinant of  $H$  if all curvatures were equal to  $K_j$ . This is not the value of the determinant we are seeking; but we can form a permutation-invariant superposition of all those expressions:

$$\det H = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J [K_i - (J+2)\lambda] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J (K_j - 2\lambda). \quad (6.92)$$

The factor  $1/J$  comes from a normalization condition. This turns out to be the correct expression for the determinant of  $H$ , and it is straightforwardly transformed in the characteristic polynomial of  $H$ .

$$\det(H - \mu \mathbb{1}) = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J [K_i - \mu - (J+2)\lambda] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J (K_j - \mu - 2\lambda). \quad (6.93)$$

Nevertheless, the computation of its roots is not possible in general.

Based on expression (6.93), it follows that whenever  $\lambda < 0$  the determinant  $\det H$  is positive, and furthermore  $\det(H - \mu \mathbb{1})$  cannot vanish at a negative value of  $\mu$ , and thus the stability eigenvalue should be positive. As a result, *all AdS states of the model are stable*.

Another case worth investigating is those states which have at least a vanishing quantum number  $n_j = 0$ . The corresponding  $K_j^{(+)}$  curvature is not defined in this case, because equation (6.59) is linear and it has only the solution  $K_j^{(-)} = \lambda$ . Thus, we can substitute  $K_j = \lambda + \delta_j$  ( $\delta_j > 0$ ) in  $\det H$ . Assuming we can vary independently  $\lambda$  and  $\delta_j$ , we can expand  $\det H$  for small  $\lambda$  values:

$$\det H \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \prod_{i=1}^J \delta_i - 2\lambda \sum_{i=1}^J \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \delta_j + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (6.94)$$

The previous expression shows again that a negative value value of  $\lambda$  cannot make this determinant to change sign. A positive value indeed can change the sign in the determinant, and this indicates that de Sitter states are likely to be unstable. Of course no general statement of this sort can be formulated, because this depends on the magnitude of  $\lambda$  as well as on all  $\delta_j$ : for sufficiently small  $\lambda > 0$  and fixed  $\delta_j$ , the determinant can be positive. But if a *single*  $\delta_k = 0$ , then the determinant reduces to

$$\det H \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} -2\lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^J \delta_j + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (6.95)$$

which is certainly negative for  $\lambda > 0$ ! Thus, we conclude that an odd number of eigenvalues of  $H$  have changed their signs and the state is unstable. We can suspect that in this case a single eigenvalue has reversed sign, because if we would take two vanishing  $\delta_k$  the sign of the determinant would again be positive. We can see that if all  $\delta_j = 0$ ,  $H$  has a completely negative spectrum. Thus we can expect that the vanishing of each  $\delta_j$  changes sign of an eigenvalue, and thus *all states with some  $n_j = 0$  are unstable*.



The previous reasoning is heuristic, because we cannot assume that  $\lambda$  and  $\delta_j$  vary independently. They depend on the discrete numbers  $\{n_1, \dots, n_J\}$  and thus the stability criterion should be validated numerically. Nevertheless, heuristics works in this case. As it is shown in the following subsection, all states with a single  $n_j = 0$  are unstable, at least in all searches we have carried out.

We will close this subsection by giving a perturbative argument showing that all low- $\lambda$  states lying in all non-principal branches are unstable. This way, the principal branch remains as the only source of AdS and stable dS states. We begin by splitting the  $H$  matrix (6.88) as follows:

$$H = 2 \operatorname{diag}\{K_1 - 2\lambda, \dots, K_J - 2\lambda\} - 2\lambda U, \quad (6.96)$$

where  $U$  is a  $J \times J$  matrix filled with ones. If  $\lambda$  is small, we can consider the diagonal matrix as a “dominant” term and the off-diagonal terms as a perturbation. The perturbation is permutation-invariant, and thus all eigenvalues of the diagonal matrix are shifted the same amount. The perturbative stability eigenvalue is

$$\kappa = 2[\min_j K_j - 3\lambda]. \quad (6.97)$$

If the minimum curvature is taken from the (+) branch, then  $K_j^{(+)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \frac{2}{n_j^2}$  and the state has a chance of being stable. But if some curvature is taken from a (−) branch, then we have  $K_j^{(-)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \lambda$  and the corresponding eigenvalue is negative. But then  $\kappa$  should be negative also, showing that no matter how small  $\lambda$  might be, if the state comes from a non-principal branch, it will be unstable.

The previous argument does not rule out the existence of higher  $\lambda$  stable dS states in non-principal branches, but our numerical searches have not found them.

### 6.3.3 State searching in concrete examples

Once the analysis of the model is reasonably complete, we should ask for concrete examples where we can exhibit some states and their associated magnitudes such as reduced cosmological constant  $\lambda$ , curvatures  $K_i$  and the stability eigenvalue  $\kappa$ .

We repeat here the relevant equations for the reader’s convenience. Given a  $J$ -tuple of integers  $\{n_1, \dots, n_J\}$  we compute the solutions of equation (6.68), which is

$$L_{\{s_j\}, \{n_j\}}(\lambda) = \Lambda, \quad \text{with} \quad L_{\{s_j\}, \{n_j\}}(\lambda) = \frac{1}{2} \left[ J\lambda + \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} \left( 1 + s_j \sqrt{1 - 2\lambda n_j^2} \right) \right]. \quad (6.98)$$

All solutions for each branch  $\{s_1, \dots, s_J\}$ , where the  $s_j$  are signs  $\pm 1$ , should be computed. The corresponding solutions must be real, and all its curvatures must be real and positive:

$$K_j^{(s_j)} = \frac{1}{n_j^2} \left( 1 + s_j \sqrt{1 - 2\lambda n_j^2} \right). \quad (6.99)$$

If a single curvature turns out to be real and negative or complex, then the state should be discarded. If all curvatures are positive, we form the frequency matrix  $H$  (dropping

the unimportant factor 2 which appears in (6.88)) and compute its minimum eigenvalue  $\kappa$ , called the *stability eigenvalue* of the state:

$$H = \begin{pmatrix} K_1 - 3\lambda & -\lambda & \cdots & -\lambda \\ -\lambda & K_2 - 3\lambda & \cdots & -\lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda & -\lambda & \cdots & K_J - 3\lambda \end{pmatrix}, \quad \kappa = \min_{\mu \in \text{spec}(H)} \mu. \quad (6.100)$$

The stability condition is simply  $\kappa > 0$ .

Thus, the searching method has the following steps:

- (1)** Choose  $J$  and  $\Lambda$ , the parameters of the model.
- (2)** Choose a set of integers  $\{n_1, \dots, n_J\}$ .
- (3)** Solve equation (6.98) for  $\lambda$ .
- (4)** Compute the curvatures (6.99) associated with the solutions found and accept the state if all curvatures are real and positive.
- (5)** Compute the stability eigenvalue and flag the state as stable or unstable.
- (6)** Go to step 2 until some bounding search criterion is met.

The choosing of the integers can be done in various ways. In the simplest models with  $J = 2^5$  we can scan a large square in the  $(n_1, n_2)$  plane in a brute-force search. In this way we cannot miss any state. The symmetries  $n_1 \leftrightarrow n_2$  and  $n_j \rightarrow -n_j$  allow us to restrict to  $n_2 \geq n_1 \geq 0$ . This brute-force method cannot be used for higher values of  $J$ . In those cases, we should generate states randomly in an efficient manner; but prior to the discussion on how this is done, we present some results in the  $J = 2$  case.

We have chosen two values of the 4D cosmological constant  $\Lambda$ , 0.01 and 0.005, in order to exhibit how the lowering of  $\Lambda$  causes the proliferation of states. In figure 6.3 we plot a point in each place of the  $(n_1, n_2)$  plane where a state has been found; of course, we have four branches for searching, so some states overlap here. States with negative and positive 2D cosmological constant have been separated, so that we can see AdS states at left panels and dS states at right panels. Stable states have been drawn using circles, and diamonds for unstable states. Note that all AdS states are stable, while most dS states are unstable. The colors are related with the magnitude of the cosmological constant as shown in the legend of each graphic.

Features of these models which can be seen in figure 6.3 include:

- All AdS states are stable.
- There is no AdS states with  $n_1 = 0$  or  $n_2 = 0$  because in those cases there is no curvature associated with this branch.
- All dS states with  $n_1 = 0$  or  $n_2 = 0$  are unstable, as expected by the heuristic argument exhibited at the end of the previous subsection.

---

<sup>5</sup>The two-sphere Einstein-Maxwell landscape is a sector of the six-dimensional Einstein-Maxwell not considered in Refs. [126, 113].

- There is a curve which limits the existence both of dS and AdS states. The form of this curve is easily computed by substituting  $\lambda = 0$  in equation (6.98) with all positive  $s_j$ :

$$\sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} = \Lambda. \quad (6.101)$$

Minkowski states, which ideally may be present, lie on this hypersurface which will be called *branching hypersurface* (curve in the  $J = 2$  case). In practice, Minkowski states require fine-tuning of  $\Lambda$  and thus they are generically absent.

- All dS states are located *above* AdS ones, and they are located near the branching curve. The discrete states are located on a multi-branch surface whose branches meet at the branching curve, hence its name. Thus, states of  $\lambda$  near zero from either side are located near this curve, which would contain, if present, the  $\lambda = 0$  states.
- All stable dS states are located near the branching curve, and only there, but closeness is not enough for a state to be stable, as will be seen below.

A feature of these models which cannot be seen in figure 6.3 is that all AdS states come from the  $\{+, +\}$  branch (which will be called the *principal branch*). This is so because the solutions in the remaining branches have the  $K_j^{(-)}$  curvatures negative, as can be seen in formula (6.99). Thus, only the principal branch is a source of AdS states.

In contrast, dS states can come from each of the four branches, but each branch brings in states with very different properties. For example, all dS states near the branching curve come from the principal branch. In particular, all stable dS states come from this branch. The bunch of dS states lying in the reddish square in the right panels of figure 6.3 come from the  $\{-, -\}$  branch, and they are “most” unstable in the sense that they have the greater (in absolute value) negative stability eigenvalue. All these features can be seen in the left panels in figure 6.4. These left panels show cosmological constant versus curvature, and they exhibit clearly the different nature of the states coming from different branches:

- The states coming from the principal branch (bullets) form the core of the figure, and at the bottom of this figure are located the stable states, all of them coming from the principal branch. Note that stability does not mean lower cosmological constant! In the right panels of figure 6.4 we can see that stable states are mixed with unstable ones in the cosmological constant value distribution. Nevertheless, all lowest-lying states are stable.
- The states coming from the  $\{+, -\}$  and  $\{-, +\}$  branches are at both sides of the triangle-shaped graphic shown at the left panels of figure 6.4. All of them are unstable, but the values of the cosmological constant in this subset range from lowest to highest.
- The states coming from the  $\{-, -\}$  branch are located at the cusp of the triangle (figure 6.4, left panels) and all of them have the highest values of the cosmological constant and also the highest (in absolute value) negative stability exponents (see figure 6.5). In particular, the  $n_1 = 0, n_2 = 0$  state, which is the cusp of the triangle, belongs to the  $\{-, -\}$  branch.

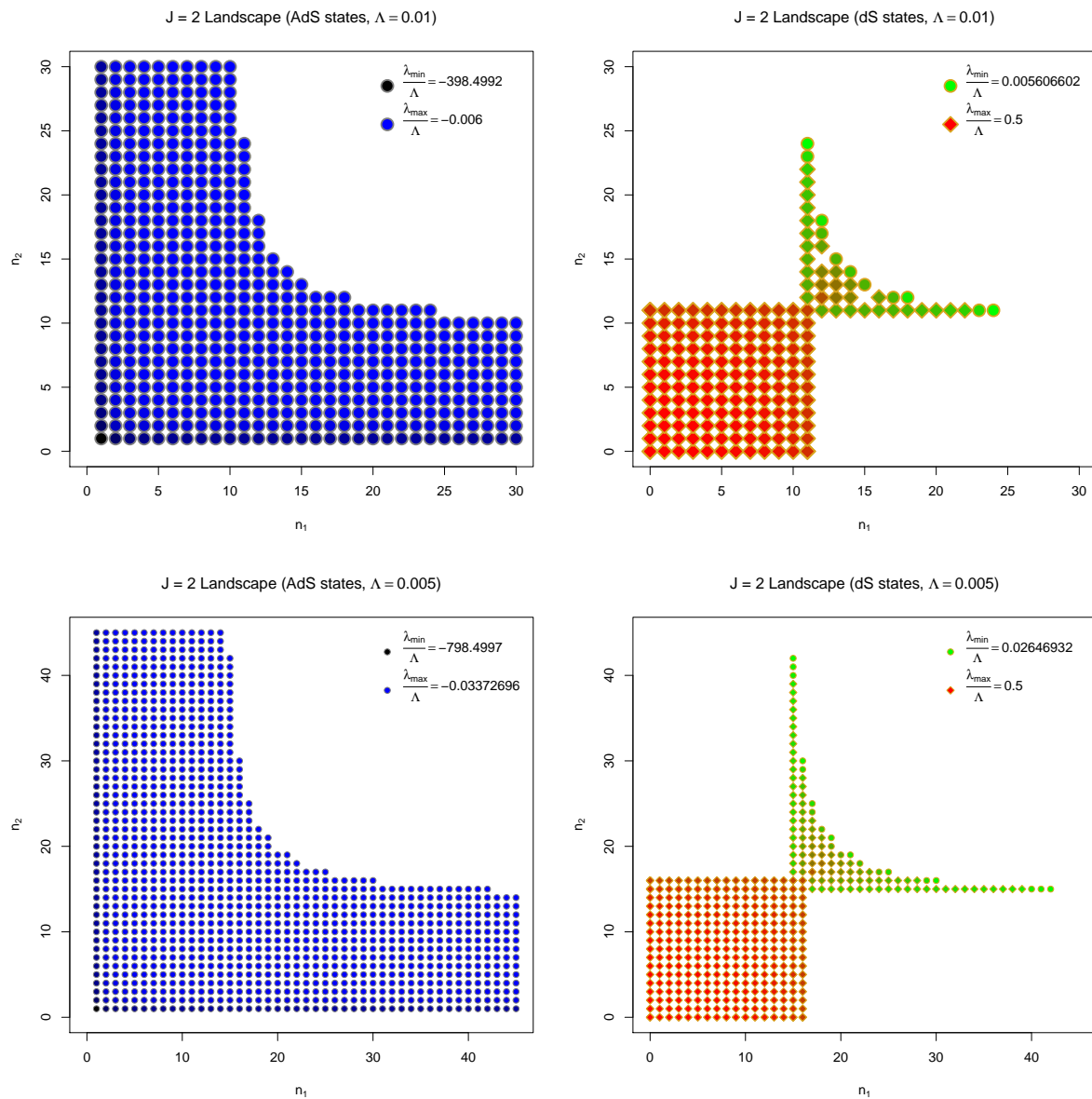


Figure 6.3: Landscape examples with  $\Lambda = 0.01$  (top panels) and  $\Lambda = 0.005$  (bottom panels). AdS (left) and dS (right) states are shown, using a circle for a stable state and a diamond for an unstable one. A state is drawn if a solution has been found for  $\lambda$  with real and positive curvatures. The magnitude of  $\lambda$  is reflected in the color of each symbol. Finally, all dS states lie above AdS ones, and meet at the branching curve, beyond which the landscape has no states.

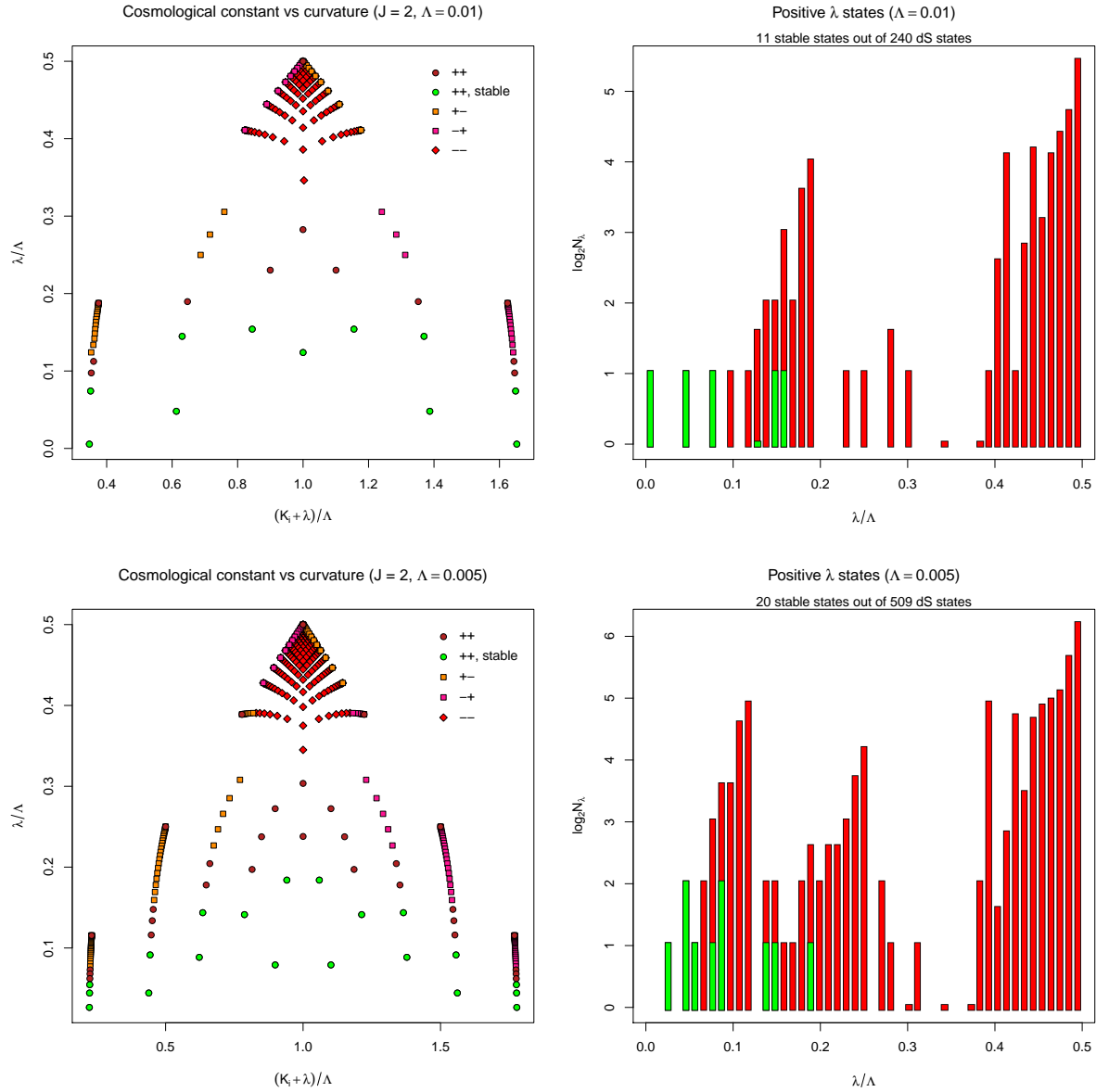


Figure 6.4: Landscape examples with  $\Lambda = 0.01$  (top panels) and  $\Lambda = 0.005$  (bottom panels). Left panels show the variation of the cosmological constant  $\lambda$  with curvature. These triangle-shaped graphics show structures which the states seem to follow, and clearly separates the different branches by the  $\lambda$  values they provide. Right panels show the  $\lambda$  distributions of dS states, whose peaks come from the different branches. The only branch that has not a peak associated to it is the principal branch, which provides all stable dS states.

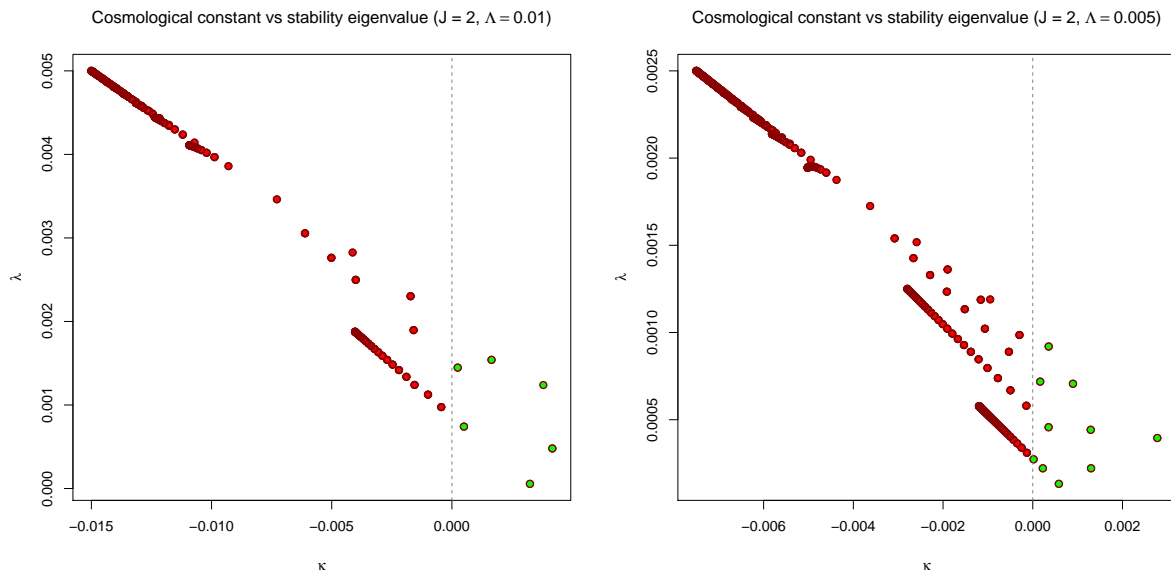


Figure 6.5: Landscape examples with  $\Lambda = 0.01$  (left panel) and  $\Lambda = 0.005$  (right panel). Dependence of the cosmological constant versus the stability eigenvalue is shown, with an almost linear behaviour. Stable states are located to the right of the vertical dashed line, which is thus the onset of stability.

In the right panels of figure 6.4 we can see the cosmological constant distribution of dS states. The contribution of the branches can be seen as different peaks; while the principal branch contributes with the stable states and other unstable distributed in the lowest range, the  $\{+, -\}$  and  $\{-, +\}$  show two peaks in the low and middle range, and the bulk of the  $\{-, -\}$  states are relegated to the high range.

Finally, in figure 6.5 is shown the behaviour of the cosmological constant versus the stability eigenvalue. Its almost linear relation can be seen to be dispersed in branches, which are the same structures showing up in left panels of figure 6.4. Here, we can see that the states with lower cosmological constant have a “less negative” stability eigenvalue than the states with higher  $\lambda$ , which include the  $\{-, -\}$  states, as said above.

Thus, the different branches provide very different states. Among them, the most interesting seem to be those coming from the principal branch, because they include AdS as well as stable and unstable dS states, which are the ingredients we need to construct a toy model of a multiverse.

For  $J > 2$ , we can exploit the fact that stable dS states are near the branching hypersurface (it is a curve only for  $J = 2$ ) and design a sampling method which looks for states in  $(n_1, \dots, n_J)$  space whose Voronoi cell (which is the cube with its center at the point in question) intersects the branching hypersurface. Those states are called *secant* states [103, 102], and all states near the branching surface belong to this category (but the reciprocal is false, that is, a secant state may not be near the branching surface if  $J$  is large enough!). Thus, we can sample the principal branch by sampling the secant states. In this way, we always find a state with a fair chance of being a true state of the model in the principal branch, that is, we have an efficient sampling method, much better than brute-force node enumeration or completely random node sampling.

The sampling of secant states is simple: we choose a uniformly random direction in

$J$ -space and find the point of intersection between the ray having the chosen direction starting from the origin and the branching hypersurface. This intersection point belongs to the Voronoi cell of a single secant state, which we find by rounding the coordinates of the intersection point. Once we have the state, we solve the equation for  $\lambda$  in the principal branch and follow the steps detailed above.

In the following section we use this sampling method to obtain a sample of the cosmological constant distribution which can be compared with an approximate formula to be obtained below.

## 6.4 State counting

As we have seen in the previous section, the states of the multi-sphere Einstein-Maxwell landscape can come from different branches, and the richest of those branches is the principal one. In this section we turn to the problem of counting states on this branch. Our main aim is to compute the distribution of cosmological constant values in this branch.

As discussed above, only the principal branch can have both AdS and dS states, both stable and unstable, and moreover the large- $J$  sampling method is especially adapted to the principal branch. Therefore, we can obtain samples to compare with the approximate formula to be obtained in subsection 6.4.2 below.

### 6.4.1 Counting states in the principal branch

Given a node  $n = (n_1, \dots, n_J)$  in  $J$ -space, there exists a state in the principal branch of the multi-sphere Einstein-Maxwell landscape with cosmological constant  $\Lambda$  if the equation

$$L_n(\lambda) = \Lambda \quad (6.102)$$

has a solution in  $\lambda$ . The principal branch  $L_n$  function is given in (6.98) with all positive signs  $s_j = +$ . In the principal branch there are no states with some  $n_j = 0$ , and thus the function  $L_n(\lambda)$  has a maximum at  $\lambda = 0$  and it is monotonically decreasing from  $\lambda = 0$  to  $\lambda = \lambda_b$ , where  $\lambda_b$ , see equation (6.69), is the branching point of the node  $n$ . A dS state exists therefore if  $\Lambda$  is between the two extremal values of the  $L_n(\lambda)$  function:

$$L_n(\lambda_b) \leq \Lambda \leq L_n(0). \quad (6.103)$$

Equation (6.103) is the existence condition for a dS state at node  $n$  in the principal branch. The corresponding equalities define two surfaces in node space: The *branching surface*

$$L_n(0) = \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} = \Lambda, \quad (6.104)$$

whose integer points, if any, have vanishing  $\lambda$ , and the *limiting surface*

$$L_n(\lambda_b) = \frac{J}{4n_{\max}^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{n_j^2}{n_{\max}^2}} \right) = \Lambda, \quad (6.105)$$

which signals the end of the principal branch. In terms of a characteristic function, the existence condition is

$$\chi_{[L_n(\lambda_b), L_n(0)]}(\Lambda) = \begin{cases} 1 & \text{if a state exists at } n, \\ 0 & \text{if a state does not exist at } n. \end{cases} \quad (6.106)$$

The previous existence condition should be supplemented with the stability condition (6.89), that is,  $\kappa(n) > 0$ , where  $\kappa(n)$  is the minimum eigenvalue of the stability matrix  $H$  at node  $n$  if a state exists there. This stability condition can also be ascribed to a surface (the *stability surface*) signaling the stability threshold. The stability surface should be comprised between the branching and limiting surfaces; unfortunately, the analytic expression of it cannot be found for general  $J > 1$ . As a consequence, we will represent this condition by adding the factor  $\theta(\kappa(n))$  to the existence condition. Therefore, the exact number of stable states with given  $\Lambda$  in the principal branch of the multi-sphere EM landscape is

$$\mathcal{N}_J(\Lambda) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^J \\ n_j \neq 0}} \chi_{[L_n(\lambda_b), L_n(0)]}(\Lambda) \theta(\kappa(n)). \quad (6.107)$$

The exact evaluation of the previous expression is possible only for  $J = 1$  as is showed in subsection 6.2.2, equation (6.41). We repeat it here for the reader's convenience, omitting from it AdS states and setting  $e = 1$ :

$$\mathcal{N}_1(\Lambda) = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\Lambda}} \right\rfloor + 1 \approx \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right). \quad (6.108)$$

We will shortly turn into the approximate evaluation of (6.107). But prior to that, we need to grasp some general ideas on the structure of the stable state set which we are willing to count.

We will emphasize two main aspects: asymptotic hyperplanes and state chains.

**Asymptotic hyperplanes** Both equations (6.104) and (6.105) corresponding to the branching and limiting surfaces, and likewise the stability surface, have asymptotic hyperplanes located at

$$|n_j| = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \quad (\text{for fixed } j), \quad |n_{k \neq j}| \rightarrow \infty, \quad (6.109)$$

and thus all states are restricted to the region

$$|n_j| > \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = \nu_0 \quad (1 \leq j \leq J). \quad (6.110)$$

Therefore, all dS states should have a charge greater than  $\nu_0$  as a necessary condition. Note that no integer  $n_j$  can be equal to  $\nu_0$  while preserving the existence condition unless all the remaining integers  $n_{i \neq j}$  are infinite, hence the name ‘‘asymptotic’’. It is easy to see that the corresponding states would have  $\lambda = 0$  and all curvatures vanishing except for one, and thus they would not represent compactified states. Moreover, the associated stability matrix has  $J - 1$  zero eigenvalues (see eq. (6.100)), and thus these states are only marginally stable. These properties suggest that they should be excluded from the landscape.



**State chains** There is also a natural upper bound on the charge, which can be obtained by considering the following straight line in flux space:

$$n_1 = \cdots = n_{J-1} = \sqrt{\frac{J-1}{\Lambda}}, \quad n_J \in \mathbb{R} \quad (\text{free parameter}). \quad (6.111)$$

The previous line is asymptotic to the branching surface, in the sense that it satisfies equation (6.104) when  $n_J \rightarrow \infty$ . This line do not contain nodes because the quotient  $\sqrt{\frac{J-1}{\Lambda}}$  is generically not an integer. But we can slightly modify the previous line:

$$n_1 = \cdots = n_{J-1} = \left\lceil \sqrt{\frac{J-1}{\Lambda}} \right\rceil = \nu_1, \quad n_J \in \mathbb{R} \quad (\text{free parameter}). \quad (6.112)$$

This modified line can contain valid states if  $n_J$  lies between  $\lceil \nu_0 \rceil$  and  $\nu_2$ , where  $\nu_2$  is the intersection height with the branching surface:

$$\nu_2 = \frac{\nu_1}{\sqrt{\Lambda \nu_1^2 - (J-1)}}. \quad (6.113)$$

All states on the line above  $\nu_2$  are beyond the branching surface. Therefore, we have the bound  $\nu_0 < n_j < \nu_2$  ( $1 \leq j \leq J$ ). All states which might happen to lie on this line are said to form a *state chain*.

It should be noted that when  $\sqrt{\frac{J-1}{\Lambda}}$  coincides with the integer  $\nu_1$ , then  $\nu_2$  diverges, which at first sight would be interpreted as an infinite dS state chain of ever decreasing  $\lambda$ . But those nodes in the chains have no states, as can be seen by explicitly writing equation (6.102) for the nodes in the line (6.112), and look for solutions with small  $\lambda$  and large  $n_J$ :

$$2\Lambda = J\lambda + (J-1) \frac{1 + \sqrt{1 - 2\lambda\nu_1^2}}{\nu_1^2} + \frac{1 + \sqrt{1 - 2\lambda n_J^2}}{n_J^2}, \quad (6.114)$$

We can consider  $\lambda \ll \frac{1}{\nu_1^2}$ , but  $\lambda \ll \frac{1}{2n_J^2}$  is not true, because  $n_J$  is large. Therefore, equation (6.114) can be rewritten as

$$2\Lambda - \frac{2(J-1)}{\nu_1^2} - \lambda = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\lambda n_J^2}}{n_J^2}. \quad (6.115)$$

The right hand side of (6.115) is positive, thus a solution to equation (6.115) can exist only if  $\Lambda - \frac{J-1}{\nu_1^2}$  is strictly positive, which leads to

$$\nu_1 = \left\lceil \sqrt{\frac{J-1}{\Lambda}} \right\rceil > \sqrt{\frac{J-1}{\Lambda}}, \quad (6.116)$$

that is, if  $\sqrt{\frac{J-1}{\Lambda}}$  is an integer then there is no solution to equation (6.115). As a consequence,  $\nu_2$  can be made as large as we want by fine-tuning  $\Lambda$  but it is never infinite. This argument shows that all state chains are finite.

This discussion on the state chains can be generalized to other asymptotic affine manifolds that the branching surface can have. For instance, asymptotic hyperplanes (6.109), as we have seen above, are likewise devoid of states, but there are close hyperplanes (having nodes) each one containing a replica of a  $(J-1)$ -dimensional landscape.

We will now consider the evaluation of the number of stable states  $\mathcal{N}_J(\Lambda)$ . Firstly, we get rid of the sign degeneracy  $2^J$ , which is always trivially present. Secondly, we invoke the permutation symmetry, which allows us to arrange the integers  $n_j$  in decreasing order. The corresponding permutation degeneracy is  $J!$  except on those nodes having repeated components. This difference will be ignored for simplicity; we will see below that it will be of little importance in the small- $\lambda$  region. Thirdly, we consider a node  $n = \{n_1, \dots, n_J\}$  with  $n_1 > n_2 > \dots > n_J$  and the corresponding equation for the existence of a state (6.102):

$$L_n(\lambda) = \frac{1}{2} \left[ J\lambda + \sum_{j=1}^J K_j(\lambda) \right] = \Lambda. \quad (6.117)$$

The  $L_n(\lambda)$  curve has a branching point  $\lambda_b$  given by (6.69), that is,  $\lambda_b = \frac{1}{2n_1^2}$ . Any approximation method we might wish to apply on the  $L_n(\lambda)$  curve should respect this branching point in order to accurately represent the existence condition. In particular, we cannot assume  $\lambda \ll \lambda_b$ . But we do have  $n_1 > n_J = \min_j \{n_j\}$ , and in the case  $n_J \ll n_1$ , we can assume  $\lambda \ll \frac{1}{2n_J^2}$  and write

$$K_J(\lambda) \approx \frac{2}{n_J^2} - \lambda, \quad (6.118)$$

which leaves equation (6.117) as

$$\frac{1}{2} \left[ (J-1)\lambda + \sum_{j=1}^{J-1} K_j(\lambda) \right] = \Lambda - \frac{1}{n_J^2}. \quad (6.119)$$

Equation (6.119) represents the solutions of a landscape in which the  $J^{\text{th}}$  curvature has been removed, and the cosmological constant  $\Lambda$  has been replaced with  $\Lambda - \frac{1}{n_J^2}$ . We can now let  $n_J$  run from  $\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor + 1$  through the diagonal node having  $n_J = \lfloor \sqrt{\frac{J}{\Lambda}} \rfloor$ , thus obtaining the recurrence law

$$\mathcal{N}_J(\Lambda) \approx J! \sum_{m=\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor + 1}^{\lfloor \sqrt{\frac{J}{\Lambda}} \rfloor} \mathcal{N}_{J-1} \left( \Lambda - \frac{1}{m^2} \right). \quad (6.120)$$

The previous formula is valid under the following conditions:

- The fraction of states with repeated components is small.
- The cosmological constant  $\lambda$  of the states included is small, so that equation (6.118) can be valid.

The states near the asymptotic hyperplanes will satisfy the previous conditions more accurately, so that the first terms in the sum (6.120) will be more precise than the terms near the diagonal. The latter states will fail to satisfy the strong inequality  $n_J \ll n_1$ . This means that the low-lying (that is, small- $\lambda$ ) states will be taken into account, but the formula can miss or overcount some high-lying (high- $\lambda$ ) states.

Equation (6.108) triggers the recurrence relation, the first consequence being

$$\mathcal{N}_2(\Lambda) \approx 2 \sum_{m=\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor + 1}^{\lfloor \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \rfloor} \left\{ \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda - \frac{1}{m^2}}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\Lambda - \frac{1}{m^2}}} \right\rfloor + 1 \right\}. \quad (6.121)$$

The previous equation can be approximated by a smoother version by removing the floor-ceiling functions inside the sum:

$$\mathcal{N}_2(\Lambda) \approx 2 \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \sum_{m=\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor + 1}^{\lfloor \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{\Lambda - \frac{1}{m^2}}}. \quad (6.122)$$

The previous formula can be refined by cutting off the chains whose lower ends pass the diagonal and counting the states on the diagonal accurately. This “diagonal corrected” formula is to be used in figures 6.6 and 6.7 below.

Further simplification can be achieved by isolating the first term (which carries the discontinuities) and estimating the remaining sum by means of an integral:

$$\mathcal{N}_2(\Lambda) \approx 2 \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \left\{ \frac{\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor + 1}{\sqrt{\Lambda (\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor + 1)^2 - 1}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + 1}^{\sqrt{\frac{2}{\Lambda}}} \frac{dx}{\sqrt{\Lambda - \frac{1}{x^2}}} \right\}. \quad (6.123)$$

Formulae (6.122) and (6.123) show clearly the effect of state chains as discontinuities at integer values of  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ . When  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  approaches an integer from below, a very long state chain develops which increases dramatically the number of states. When  $\Lambda$  is reduced, the number of “bulk” states, that is, those not in the chains, increases as reflected by the well-behaved integral contribution, which for  $\Lambda \ll 1$  is

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + 1}^{\sqrt{\frac{2}{\Lambda}}} \frac{dx}{\sqrt{\Lambda - \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{\Lambda \ll 1} \frac{1}{\Lambda} - \frac{\sqrt{2}}{\Lambda^{\frac{3}{4}}}. \quad (6.124)$$

Figure 6.6 provides a good example of the performing of equations (6.121), (6.122) and (6.123). These formulae are to be compared with brute-force determination of the number of stable states in the corresponding models. The discreteness of the lattice induces strong fluctuations in the actual number of states, which is well represented by formula (6.123), provided we interpret it as an average behaviour.

While figure 6.6 emphasizes the strongly discontinuous nature of the state number, we can also show the steady increase in the state number by avoiding the discontinuities. This can be done, for example, by sampling landscape models with half-integer values of  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ . These samples never encounter large state chains and thus a regular, well-behaved curve emerges, very well described by the formulae just obtained. This smooth component of the state number is illustrated in figure 6.7.

We will close this subsection by summarizing the properties of formula (6.123) as follows:

- It accurately captures the spikes in the state number when  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  approaches integer values from below. These spikes come from the presence of very long state chains in this regime.

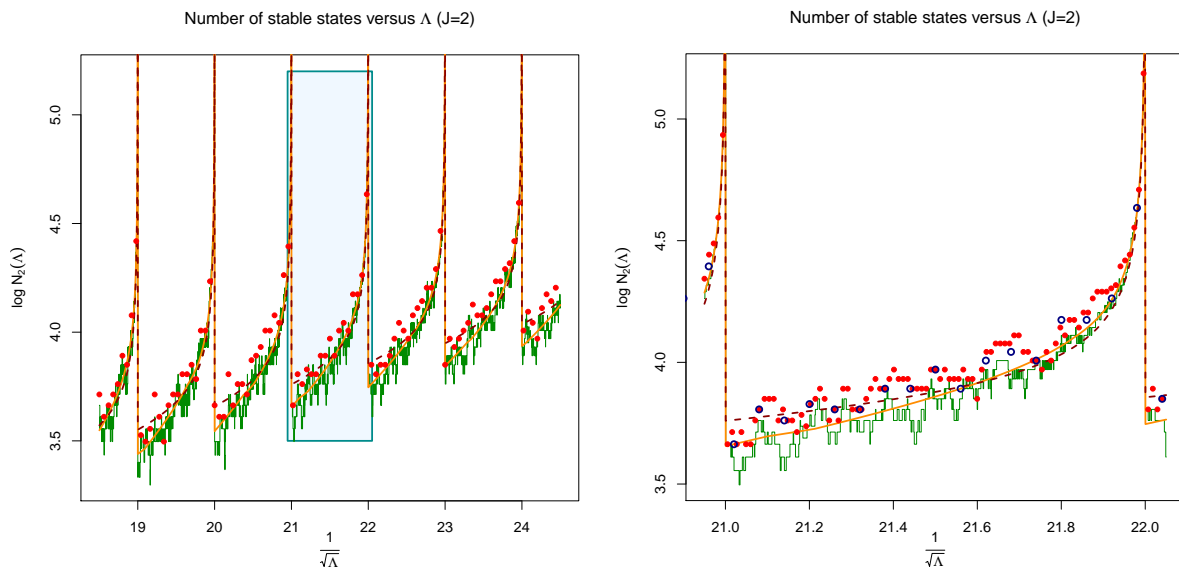


Figure 6.6: Number of stable dS states as a function of  $\Lambda$  for the two-sphere Einstein-Maxwell landscape. Left panel shows the strongly discontinuous variation of the state number when  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  crosses several integer values. Bullets are brute-force computed state numbers, thin green line is the outcome of formula (6.121), thick solid line is formula (6.122) (with diagonal corrections) and thick dashed line is formula (6.123). Right panel shows an amplification of the small rectangle shown in left panel. Data are to be interpreted as before, with the addition of hollow bullets, which mark the data displayed in left panel. Simplified formulae seem to have an averaging effect on the lattice details, which are reflected in the fast-varying nature of the discrete formula and brute-force data.

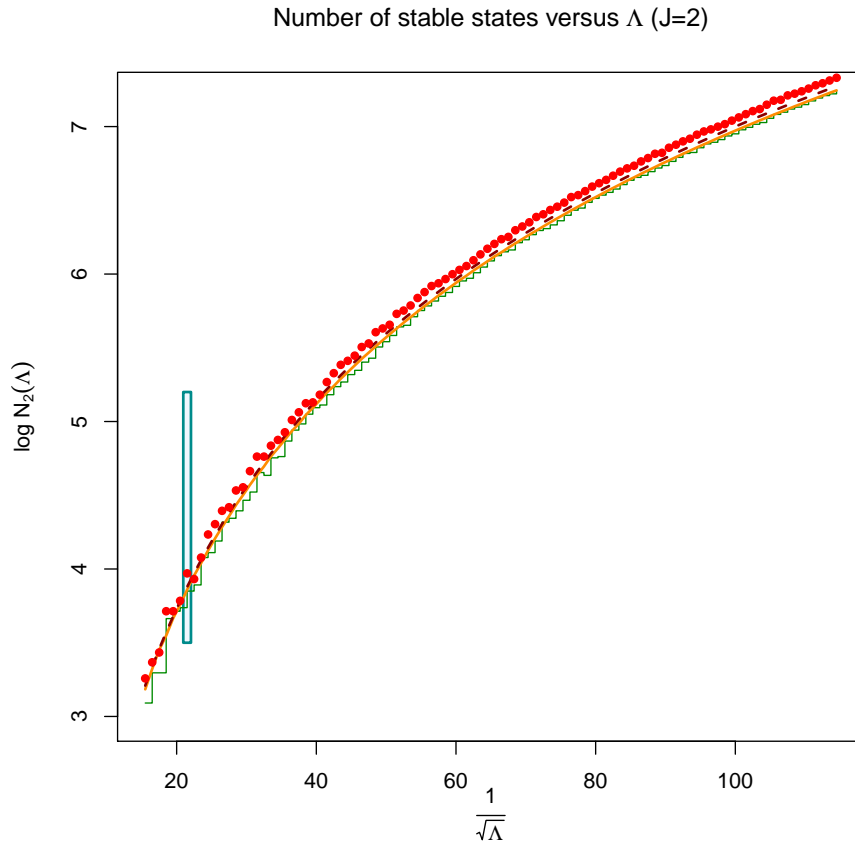


Figure 6.7: Number of stable dS states as a function of  $\Lambda$  for the two-sphere Einstein-Maxwell landscape. Only half-integer values of  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  have been considered in this plot, in order to avoid the spikes shown in figure 6.6. Bullets are brute-force computed state numbers, thin green line is the outcome of formula (6.121), thick solid line is formula (6.122) (with diagonal corrections) and thick dashed line is formula (6.123). A smooth behaviour is observed, showing a very good agreement between approximate formulae and numerical searches. The narrow vertical rectangle is at the same position as the rectangle shown in figure 6.6 (left panel).

- It correctly represents the main behaviour of the state number in a generic sense, that is, when  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  is not near integer values.
- We can interpret formula (6.123) as an average behaviour which turn the fine details of the lattice into a smooth profile while taking into account the main discontinuities.
- Finally, the approximation formulae seem to be missing some states. The reason for this is the approximation we are using to count stable states: Equation (6.120) implies using the  $J - 1$  stability criterion to count stable states in the  $J$  model, which introduces the error. In the following subsection we will see that the missing states are located near the discontinuities of the density of states, and thus they correspond to relatively high values of  $\lambda$ . This is precisely the condition which makes (6.119) to break down, so this behaviour was to be expected.

### 6.4.2 Small cosmological constant distribution

In this subsection, we will call  $\lambda(n)$  the 1+1 cosmological constant of a stable dS state at node  $n$  (assuming the state exists), and we will denote by  $\rho$  a fixed value to be compared with  $\lambda(n)$ . With this in mind, we define the distribution function of  $\rho$  in a given multi-sphere EM landscape as the number of stable dS states whose  $\lambda(n)$  value does not exceed  $\rho$ :

$$\Omega_J(\rho, \Lambda) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^J \\ n_j \neq 0}} \chi_{[L_n(\lambda_b), L_n(0)]}(\Lambda) \theta(\kappa(n)) \theta(\rho - \lambda(n)). \quad (6.125)$$

The derivative of  $\Omega_J(\rho, \Lambda)$  with respect to  $\rho$  is the density of states of the model

$$\omega_J(\rho, \Lambda) = \frac{\partial \Omega_J(\rho, \Lambda)}{\partial \rho}. \quad (6.126)$$

As a result of the discreteness of the landscape,  $\lambda$  values are drawn from a discrete set, and thus  $\Omega_J(\rho, \Lambda)$  is a stepwise-varying non-decreasing function of  $\rho$ , while  $\omega_J(\rho, \Lambda)$  has Dirac deltas at the values of  $\rho$  coincident with actual  $\lambda(n)$  of existing states at  $n$ . The amplitudes of the Dirac peaks are given by the degeneracies of the corresponding states. In this subsection we will obtain some analytic approximations of the density of states in the regime of small  $\lambda$ , and we will use the expressions thus obtained to study the  $\lambda$  spectrum.

We will denote by  $\lambda_{\max}$  the maximum  $\lambda$  value a state can have. Clearly, if  $\rho \geq \lambda_{\max}$  then

$$\Omega_J(\rho, \Lambda) = \mathcal{N}_J(\Lambda). \quad (6.127)$$

Analogously, we denote by  $\lambda_{\min}$  the minimum  $\lambda$  value a state can have. It is also clear that, if  $\rho \leq \lambda_{\min}$ , then

$$\Omega_J(\rho, \Lambda) = 0. \quad (6.128)$$

Thus, the interval  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  is the support of the density  $\omega_J$ .

The upper bound  $\lambda_{\max}$  can be computed as follows. Let us consider the gradient of the function  $\lambda(n)$  computed as if the components of  $n$  were continuous variables. We can derive equation (6.117) implicitly:

$$J \partial_{n_j} \lambda + \sum_{i=1}^J \left\{ \delta_{ij} \partial_{n_j} K_i + \partial_{n_j} \lambda \partial_\lambda K_i \right\} = 0. \quad (6.129)$$

It follows

$$\partial_{n_j} \lambda = -\frac{\partial_{n_j} K_j}{J + \sum_{i=1}^J \partial_\lambda K_i} = \frac{2}{n_j} \frac{K_j + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda n_j^2}}}{J - \sum_{i=1}^J \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda n_i^2}}}. \quad (6.130)$$

The denominator of (6.130) is clearly negative, and thus the gradient is always pointing from the branching surface to the limiting surface. Right at the branching surface  $\lambda = 0$  and the gradient is always infinite. Right at the limiting surface all components of the gradient vanish except that of maximum  $n_j$ . Thus, the gradient is always pointing towards the diagonal, except right at the diagonal, where it points towards the origin. From this gradient configuration we conclude that the maximum value of  $\lambda$  is achieved at the cusp of the limiting surface. But this point is not in the stability window, and thus the maximum  $\lambda$  should be achieved at the onset of stability along the diagonal. But right on the diagonal the stability matrix  $H$  is permutation-invariant and we can compute exactly its stability eigenvalue, which is

$$\kappa_{\text{diag}} = K - (J + 2)\lambda, \quad (6.131)$$

where  $K$  is the common value of all curvatures on the diagonal of flux space. But then, equation (6.117) reads

$$\Lambda = \frac{J}{2} [\lambda + K], \quad (6.132)$$

which allows us to eliminate  $K$  and gives the exact diagonal stability condition:

$$\lambda < \frac{2\Lambda}{J(J+3)} = \lambda_{\text{max}}. \quad (6.133)$$

Thus, we have exactly computed the maximum  $\lambda$  value.

Things are far more difficult when we address  $\lambda_{\text{min}}$ . We know that the minimum will be close to the branching surface, but its exact position is unpredictable in general. The  $J = 1$  case is easier, because the landscape is a single state chain. In this case, equation (6.132) is exact, so we can obtain the dS spectrum as

$$\lambda(n) = 2 \left( \frac{1}{|n|} - \sqrt{\frac{1}{n^2} - \Lambda} \right) \sqrt{\frac{1}{n^2} - \Lambda}. \quad (6.134)$$

The end state of this chain is at node  $n_{\text{max}} = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor$ , and this implies

$$\lambda_{\text{min}} = 2 \left( \frac{1}{|\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor|} - \sqrt{\frac{1}{\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor^2} - \Lambda} \right) \sqrt{\frac{1}{\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor^2} - \Lambda}. \quad (6.135)$$

In this case, it is possible to give an exact answer to the minimum  $\lambda$  value. When  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  is an integer, then  $\lambda_{\text{min}} = 0$ , but, as we know, this is not the generic situation.

Generalizing the result (6.135) is difficult. We can argue as in the previous subsection and approximate the  $J = 2$  case by the  $J = 1$  case just considered. Then we can assume that the longest state chains will host the minimum  $\lambda$  states at its end nodes. These end nodes have an approximate  $J = 1$  spectrum which can be computed by replacing  $\Lambda$  in (6.132) (with  $J = 1$ ) by  $\Lambda - (\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor + 1)^{-2}$ . Now the same substitution can be performed in formula (6.135), giving a fairly cumbersome expression of nested fractions, square roots and floor functions, and hence it will be omitted. This formula will approximately give

the minimum  $\lambda$  provided the corresponding state is located at the end of the longest chains. The minimum- $\lambda$  state can also be located among bulk states, but this is non-generic, as we will see shortly, because long state chains are generically low-lying states. So such a formula can be trusted, but it is neither exact, nor a bound, but rather it is an approximate expression for the particular (if generic) case when the min- $\lambda$  state is located at the end of the longest state chain.

Similar arguments can give analogous (but much more complex) expressions for higher  $J$ , with the same caveats as before.

Nevertheless,  $\lambda_{\min}$  is not quite relevant for our purposes, because a precise computation of it requires taking into account even the finest details of the lattice, and thus no continuous approximation can yield this value. Instead, we will be interested in an approximation of the density of states, whose expression will allow us to estimate  $\lambda_{\min}$  in more familiar terms.

Let us consider first the case  $J = 1$ . By inverting the relation  $\lambda(n) = \rho$ , we obtain

$$n_\rho = \frac{2\sqrt{\Lambda - \rho}}{2\Lambda - \rho}, \quad (6.136)$$

so that the condition  $\lambda(n) \leq \rho$  can be rephrased as  $n \geq n_\rho$ . Thus, the distribution function  $\Omega_1(\rho, \Lambda)$  is simply the number of integers between  $n_\rho$  and  $n_{\max}$ , that is,

$$\Omega_1(\rho, \Lambda) = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right\rceil - \left\lceil \frac{2\sqrt{\Lambda - \rho}}{2\Lambda - \rho} \right\rceil, \quad (6.137)$$

supplemented with conditions (6.128) and (6.127). This exact result can be approximated by a continuous function by simply omitting the ceiling functions. Doing this and taking the  $\rho$ -derivative afterwards, we obtain

$$\omega_1(\rho, \Lambda) = \frac{\rho \chi_{[0, \frac{\Lambda}{2}]}(\rho)}{(2\Lambda - \rho)^2 \sqrt{\Lambda - \rho}}. \quad (6.138)$$

Equation (6.138) is the  $J = 1$  density of stable dS states. It has the following properties:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(\Lambda) &\approx \int_{\mathbb{R}} \omega_1(\rho, \Lambda) \, d\rho = \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}, \\ \langle \lambda \rangle_{\omega_1} &= \frac{1}{\mathcal{N}_1(\Lambda)} \int_{\mathbb{R}} \rho \omega_1(\rho, \Lambda) \, d\rho = \frac{12 + 12 \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - 3\pi - 7\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} \Lambda, \end{aligned} \quad (6.139)$$

That is, it is consistent with equation (6.108), and the mean value of the density is around  $0.7167 \frac{\Lambda}{2}$ . This curve has a jump discontinuity at  $\rho = \frac{\Lambda}{2}$ , which is the upper limit of its support, and the position of its maximum, which is  $\frac{2\sqrt{2}}{9\Lambda^{\frac{3}{2}}}$ . Figure 6.8 illustrates this density compared with the actual spectrum of a  $J = 1$  model.

In figure 6.8 is also displayed a naive estimate of  $\lambda_{\min}$ , defined as the abscissa  $\hat{\lambda}_{\min}$  which encloses area 1 under the density's graph:

$$\int_0^{\hat{\lambda}_{\min}} \omega_1(\rho, \Lambda) \, d\rho = 1. \quad (6.140)$$



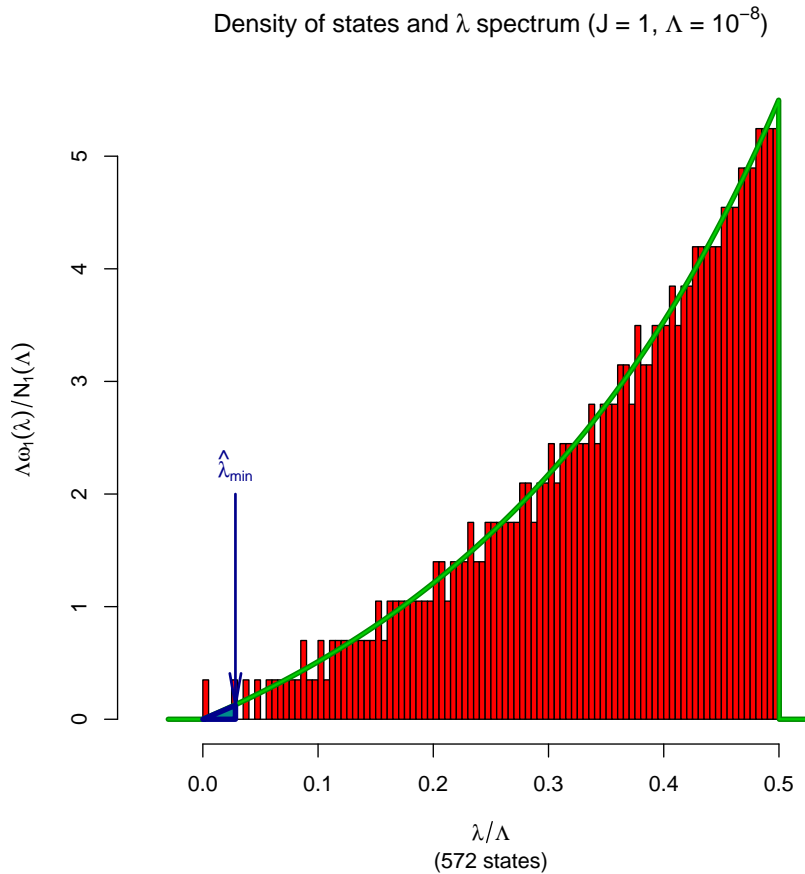


Figure 6.8: Density of states of the  $J = 1$  landscape (thick line) compared with the actual  $\lambda$ -spectrum for  $\Lambda = 10^{-8}$ . This model has 572 stable states, and the density shown is normalized to unity. The agreement between discrete data and continuous density is complete, in the sense that the histogram, which approximates a continuous curve when the spacing between neighboring states is much smaller than the bin width, accurately fits the approximation  $\omega_1(\lambda, \Lambda)$ . The construction of the estimate  $\hat{\lambda}_{\min}$  is also shown: the small triangle located at the origin has area  $1/572$  in this model, and its vertical side marks the position of the minimum- $\lambda$  estimate. This value of  $\Lambda$  allows for a  $\lambda = 0$  state, which is isolated by the bins used in the histogram.

Assuming that  $\hat{\lambda}_{\min}$  is small enough, we can approximate  $\omega_1(\rho, \Lambda) = \frac{\rho}{4\Lambda^{\frac{5}{2}}} + \mathcal{O}(\rho^2)$  and obtain

$$\hat{\lambda}_{\min} = 2\sqrt{2}\Lambda^{\frac{5}{4}}. \quad (6.141)$$

Figure 6.9 shows this estimate versus the exact minimum. Of course, this estimate does not provide the true minimum: it has neither zeros nor peaks, but it grows at the same average rate.

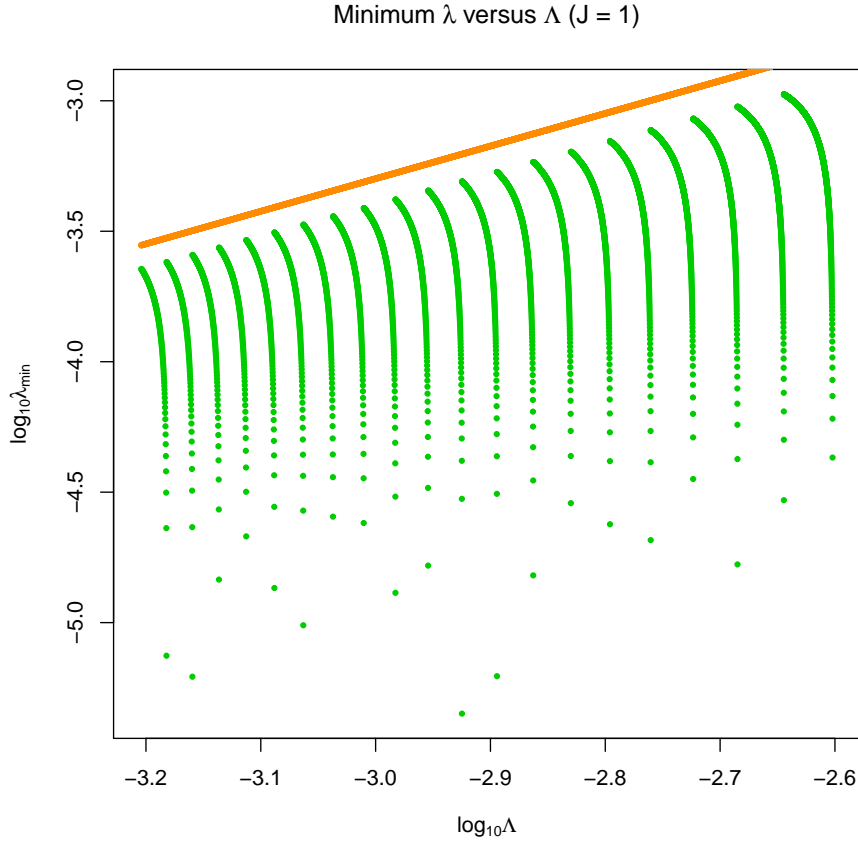


Figure 6.9: Comparison between the exactly computed minimum- $\lambda$  (equation (6.135)) and its estimate  $\hat{\lambda}_{\min}$  (equation (6.141)). The latter seems to be an upper bound of the former, closely following the decreasing of the worst-case minimum as  $\Lambda$  decreases. The spikes shown by  $\log \lambda_{\min}$  are the values for which  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  is an integer. This continuous-density-based estimate is not accurate because the value of  $\lambda_{\min}$  is dictated by the finest details of the lattice and not by the continuous density  $\omega_1(\lambda, \Lambda)$ .

We will now consider the  $J = 2$  case. The recurrence relation (6.121) extends to distributions and densities as well, and thus we have the approximation

$$\omega_2(\rho, \Lambda) = 2 \sum_{m=\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\Lambda} \rfloor} \omega_1\left(\rho, \Lambda - \frac{1}{m^2}\right). \quad (6.142)$$

We interpret this equation as a decomposition of the  $J = 2$  landscape in a superposition of several  $J = 1$  landscapes, which are state chains. Of course, the previous equation

will be only valid for small  $\rho$ . The maximum value of  $m$  in the sum (6.142), which is  $\lfloor \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \rfloor$ , gives a maximum effective cosmological constant  $\Lambda_{\text{eff,max}} = \Lambda - \lfloor \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \rfloor^{-2}$ , and the maximum  $\lambda$  of the corresponding state chain is

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{\Lambda_{\text{eff,max}}}{2} \approx \frac{\Lambda}{4}, \quad (6.143)$$

in contrast with (6.133), which gives  $\lambda_{\text{max}} = \frac{\Lambda}{5}$ . Thus, we see that this approximation gives a wrong maximum  $\lambda$  value. The origin of this discrepancy is the stability condition, because the superposition of state chains extends the validity of the  $J = 1$  stability criterion to  $J = 2$ , and this is true only for small  $\lambda$ .

An example of this density of states compared with actual  $\lambda$ -spectrum data is given in figure 6.10. We can see that the histogram shows a peak near the origin, and the density of states extends its support to  $\frac{\Lambda}{4}$  instead of the correct  $\frac{\Lambda}{5}$  value. In the logarithmic version of the histogram, we can see the first peaks resolved enough, and the correctness of the state chain approximation in the low- $\lambda$  region. Only a few peaks get resolved; the remaining peaks merge in a bulk distribution whose approximation computed from (6.142) is incorrect in the high- $\lambda$  region. We will not need this bulk distribution here.

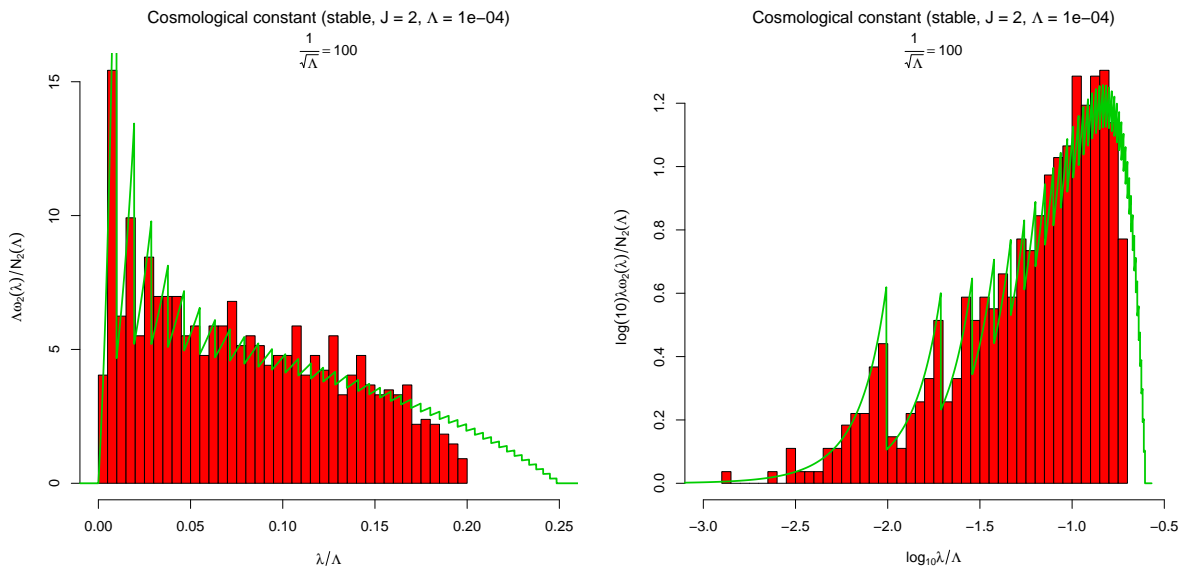


Figure 6.10: Comparison between a brute-force-computed  $\lambda$ -spectrum (histograms) and the approximated density of states (thick line) in a  $J = 2$  model of the Einstein-Maxwell landscape ( $\Lambda = 10^{-4}$ ). Left panel: The ordinary histogram shows a narrow peak near the origin (most of them come from long state chains) and a tail of bulk states. The jagged density of states accurately accounts for the first few peaks, but it fails to describe the high- $\lambda$  values. Right panel: The logarithmic histogram shows the resolved structure of the first peaks, well described by the density of states. This histogram also accumulates the bulk states in a single, broad peak. The corresponding bulk part of the density of states is shifted to the right.

The mean value of the  $\omega_2$  distribution can be directly computed from equations (6.142)

and (6.139). We denote the summation interval as  $I(\Lambda)$ :

$$I(\Lambda) = \left[ \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \right\rfloor \right], \quad (6.144)$$

and then we have

$$\begin{aligned} \langle \lambda \rangle_{\omega_2} &= \frac{1}{\mathcal{N}_2(\Lambda)} \int_{\mathbb{R}} \rho \omega_2(\rho, \Lambda) \, d\rho \\ &= \frac{2}{\mathcal{N}_2(\Lambda)} \sum_{m \in I(\Lambda)} \mathcal{N}_1\left(\Lambda - \frac{1}{m^2}\right) \langle \lambda \rangle_{\omega_1\left(\Lambda - \frac{1}{m^2}\right)} \\ &= \xi \frac{\sum_{m \in I(\Lambda)} \sqrt{\Lambda - \frac{1}{m^2}}}{\sum_{m \in I(\Lambda)} \frac{1}{\sqrt{\Lambda - \frac{1}{m^2}}}}. \end{aligned} \quad (6.145)$$

In (6.145), the constant  $\xi$  is the prefactor of  $\Lambda$  in the formula for  $\langle \lambda \rangle_{\omega_1}$  appearing in equation (6.139). An illustration of the general behavior of the mean cosmological constant is given in figure 6.11. The average  $\lambda$  diminishes towards zero when  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  approaches integer values from below, as a consequence of the development of large state chains. Formula (6.144) is not diagonal-corrected (see above), which gives small unevenly-spaced jumps. It is compared with brute-force-computed averages, which fluctuate because of lattice details. The global decreasing of the mean value as  $\Lambda$  decreases when  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  is half-integer is shown also in figure 6.11 (right panel).

Figure 6.11 also shows the minimum  $\lambda$ , computed using formula (6.141) with the longest chain of  $J = 2$  models, compared with brute-force-computed minimum values. The fluctuation here is caused by the unpredictable nature of the minimum, which can be located at any point near the branching curve. When  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  approaches an integer, the very long state chains are mainly formed out of low-lying states, and thus the approximate and exact minima approach zero. We can see a weak correlation between mean and minimum values: this happens because both values are strongly influenced by the presence of large state chains, but the minimum value depends on lattice details in an even stronger way.

Large state chains give rise also to a gap between the two lowest-lying peaks. This gap develops as  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  approaches an integer from below, giving the  $\lambda$ -spectrum a very different aspect, as shown in figure 6.12. As the longest state chain grows, the peak near the origin becomes taller and well separated from the second peak. This separation is greater than the first peak's width, so that it is effectively isolated from the second peak.

We can compute an estimate of the gap using the minimum  $\lambda$  estimate given in equation (6.141). This estimate will be reliable because the approximations leading to it are valid in the two first peaks of the distribution. We can define the gap  $\Gamma$  as the distance between the maximum  $\lambda$  of the first peak and the minimum  $\lambda$  of the second. Both of them are known (see equations (6.141) and (6.133)), so we have the following formula for the gap as a function of  $\Lambda$ :

$$\Gamma(\Lambda) = \widehat{\lambda}_{\min}^{(2\text{nd})} - \lambda_{\max}^{\text{1st}} = 2\sqrt{2} \left[ \Lambda - \left( \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right\rfloor + 2 \right)^{-2} \right]^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2} \left[ \Lambda - \left( \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right\rfloor + 1 \right)^{-2} \right]. \quad (6.146)$$

This gap is shown in figure 6.13, where it is shown with respect to the width of the first peak. This width is computed using the standard deviation  $\sigma_1(\Lambda)$  of the  $\omega_1(\rho, \Lambda)$

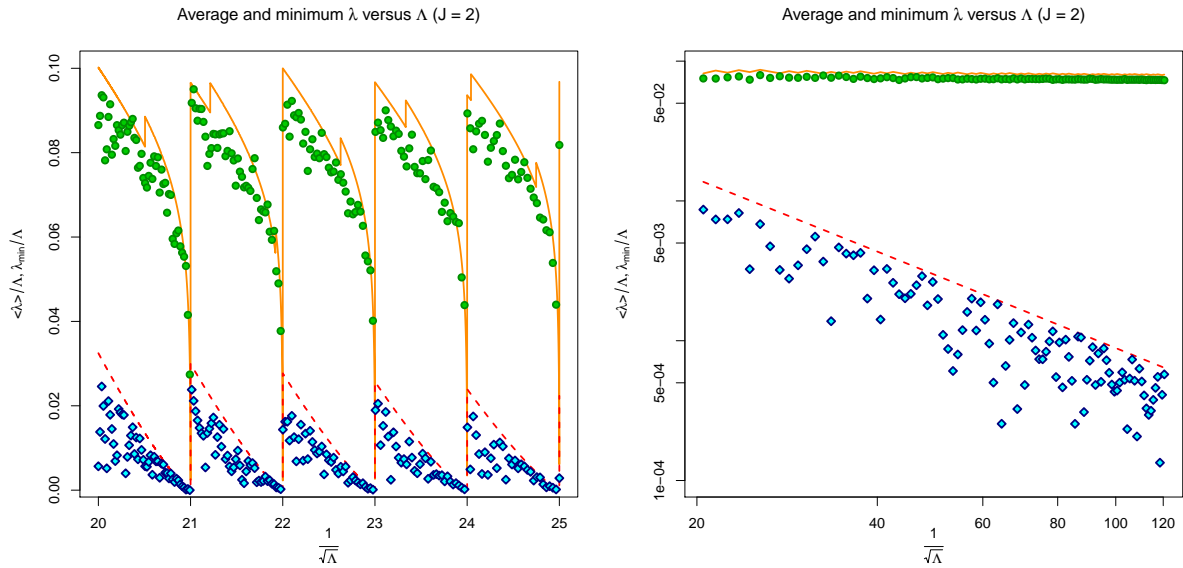


Figure 6.11: Comparison between brute-force data (bullets, diamonds) and approximate formulae (solid, dashed lines) for  $\langle \lambda \rangle_{\omega_2}$  (bullets, solid lines) and  $\lambda_{\min}$  (diamonds, dashed lines). Left panel focuses on a small interval enclosing six integer values of  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ . Valleys of both magnitudes at those integer values are caused by long state chains. The wild fluctuation of samples is a consequence of the lattice details. The small unevenly-spaced peaks of the solid line are there because formula (6.145) lacks a diagonal correction as in figure 6.6. Right panel shows a much larger interval, but samples have been taken only at half-integer values of  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ . The apparently constant profile of  $\langle \lambda \rangle_{\omega_2}$  is caused by the scale: it is actually decreasing at a rate ten times smaller than  $\lambda_{\min}$ . Note how formula (6.141) for  $\hat{\lambda}_{\min}$  (dashed line) works as an almost saturated upper bound for  $\lambda_{\min}$ .

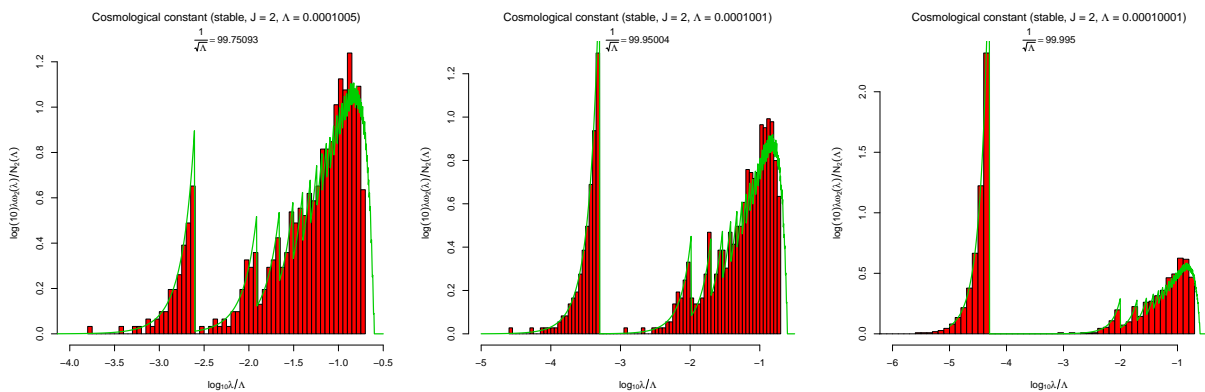


Figure 6.12: Logarithmic histograms and density of states (solid line) for three near values of  $\Lambda$  characterizing three different examples of the  $J = 2$  Einstein-Maxwell landscape. When  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  approaches an integer from below (100 in this case), the first peak shifts to the left and becomes isolated, thus creating a gap in the  $\lambda$ -spectrum.

distribution, which is

$$\begin{aligned}\sigma_1(\Lambda)^2 &= \langle (\lambda - \langle \lambda \rangle_{\omega_1})^2 \rangle_{\omega_1} \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}_1(\Lambda)} \int_{\mathbb{R}} (\rho - \langle \lambda \rangle_{\omega_1})^2 \omega_1(\rho, \Lambda) \, d\rho \\ &\approx (0.11\Lambda)^2.\end{aligned}\tag{6.147}$$

The first peak of  $\omega_2$  is a  $\omega_1$  distribution with  $\Lambda$  replaced by  $\Lambda - (\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor + 1)^{-2}$ , and thus its width is given by

$$\sigma_{1\text{st}}(\Lambda) \approx 0.11 \left( \Lambda - \left( \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right\rfloor + 1 \right)^{-2} \right).\tag{6.148}$$

or some multiple of it. Immediately we can see that this width will approach zero as  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  approaches an integer, and therefore the relative gap will become enormous. There is some values of  $\Lambda$  for which the gap becomes negative, that is, the two first peaks of  $\omega_2$  overlap. This can happen if  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} > 37$ , as can be seen in figure 6.13. This gap will never disappear for large values of  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  because the width of the first peak will always vanish at integers, but the intervals of positive gaps are smaller when  $\Lambda$  decreases. That is, the gap is positive for  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \leq 36$ , and for greater values the gap changes sign between two consecutive integer values of  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ , with the zero being closer and closer to  $\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \rfloor$  as  $\Lambda$  decreases.

## 6.5 Anthropic states in the multi-sphere Einstein-Maxwell landscape

Stable dS states in the multi-sphere Einstein-Maxwell landscape can be interpreted as inflating 1+1 cosmologies. Such states are devoid of matter, of course, and thus no real observers can live in such universes. Nevertheless, as a toy model of a multiverse, a natural question one may ask is if anthropic states are present in this model, that is, if states with very low, realistic effective cosmological constant exist, and if they are generic, or some fine-tuning is needed to obtain them. We have seen above that special values of  $\Lambda$  can yield particularly small values of  $\lambda$ , but a huge amount of fine-tuning is needed to obtain a realistic value. Surprisingly enough, anthropic states *do* exist indeed, and this section is devoted to describe how to find and count them. We also draw some conclusions regarding the multiverse prediction of the cosmological constant with these anthropic states in mind.

### 6.5.1 Step-by-step construction of anthropic states

We start by considering equation (6.101) for the branching surface, which is the  $\lambda = 0$  locus. We can try to solve this equation by successive approximations, looking for the best choice of an integer at each step in a greedy fashion:

$$\sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} = \Lambda \equiv \Lambda_1 \quad \longrightarrow \quad \sum_{j=2}^J \frac{1}{n_j^2} = \Lambda_1 - \frac{1}{n_1^2} \equiv \Lambda_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad n_1 = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}} \right\rceil.\tag{6.149}$$

We have called  $\Lambda \equiv \Lambda_1$  for the start of a recurrence relation replicating the previous step:

$$\Lambda_{j+1} = \Lambda_j - \frac{1}{n_j^2}, \quad n_j = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\Lambda_j}} \right\rceil.\tag{6.150}$$

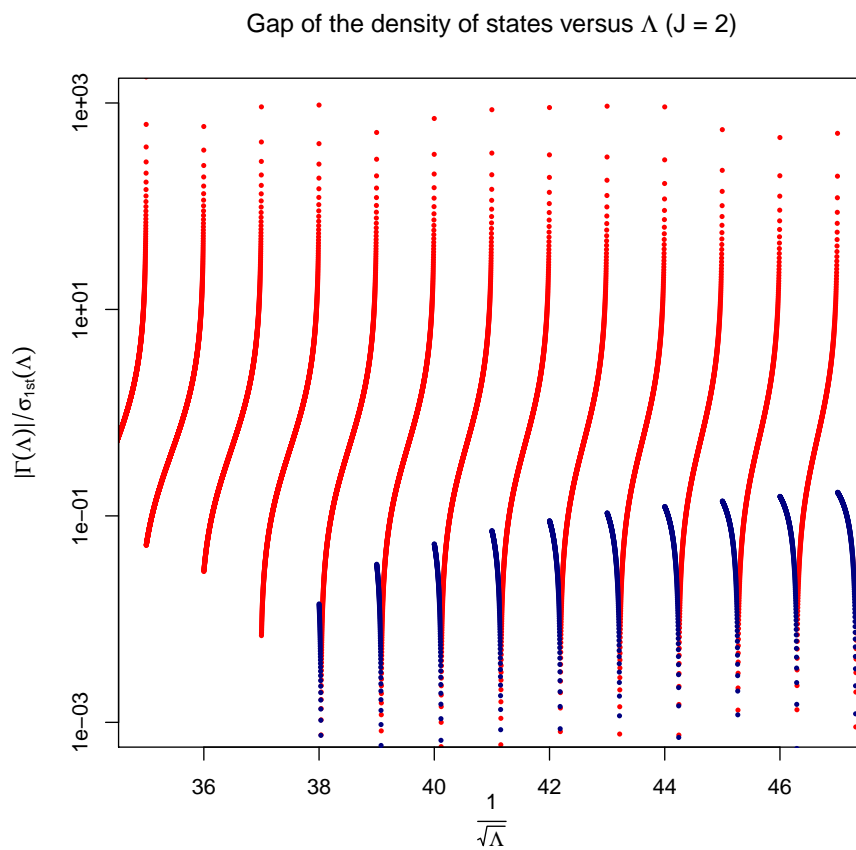


Figure 6.13: Gap of the  $J = 2$  density of states as a function of  $\Lambda$  (equation (6.146)). It is shown the quotient between the (absolute value of the) gap and the first peak width. Gaps can be negative for sufficiently low  $\Lambda$ , and the negative-gap intervals become greater when  $\Lambda$  becomes smaller. Decreasing curves represent negative values of the gap, while increasing ones represent positive values.

The recurrence relation (6.150) gives the best integer choice at each step for getting the smallest possible difference between the two sides of the formula

$$\sum_{i=j}^J \frac{1}{n_i^2} = \Lambda_j. \quad (6.151)$$

The last step of the approximation is

$$\Lambda_J - \frac{1}{n_J^2} = \Lambda - \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} \equiv \Lambda_{J+1} < 0, \quad (6.152)$$

that is, the last remainder should be negative, so that the existence condition (6.103) can be satisfied. This gives the last integer as

$$n_J = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\Lambda_J}} \right\rfloor, \quad (6.153)$$

where the floor function is taken instead of the ceiling to guarantee that the last remainder is negative. Thus, we can run the recurrence relation (6.150) starting from any positive value of  $\Lambda_1$  until some desired number of steps  $J$  is reached, and then finish it with the last step (6.153).

Before the final step closes the algorithm, we can rewrite the recurrence relation as a fixed-point iteration:

$$\Lambda_{j+1} = f(\Lambda_j), \quad \text{with} \quad f(x) = x - \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor^2}. \quad (6.154)$$

The iteration function just defined  $f(\Lambda)$  has jump discontinuities when  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  is an integer, and it is simply  $\Lambda - 1$  if  $\Lambda > 1$ . Its continuous envelope, which is easily obtained replacing  $\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor$  with  $\frac{1}{\sqrt{x}} + 1$ , gives the magnitude of the jumps, and it has a particularly attractive behaviour when  $x \rightarrow 0$ :

$$f(x) = x - \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor^2} \leq x - \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2x^{\frac{3}{2}}. \quad (6.155)$$

The iteration function, its envelope and its first-order term are plotted in figure 6.14. The figure also shows the first-quadrant diagonal, thereby proving that the only fixed point of the recurrence is at  $x = 0$ .

The super-linear behaviour of  $f(x)$  near  $x \rightarrow 0$  has the nice consequence of giving the recurrence relation a very fast convergence rate. This can be seen by replacing  $f(x)$  by its first-order approximation, which is an upper bound:

$$\Lambda_{j+1} = f(\Lambda_j) < 2\Lambda_j^{\frac{3}{2}}. \quad (6.156)$$

The resulting approximate recurrence relation is exactly solvable, and its solution starting from  $\Lambda_1$  is

$$\Lambda_j = 2^{\sum_{k=0}^{j-2} \left(\frac{3}{2}\right)^k} \Lambda_1^{\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}} \quad (j \geq 2). \quad (6.157)$$



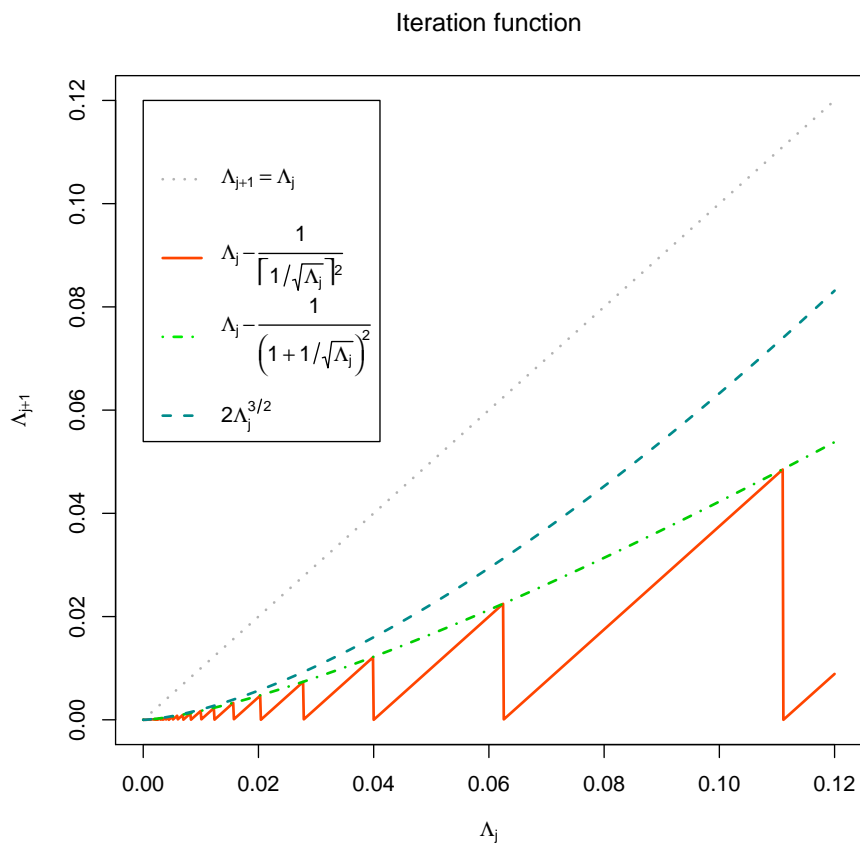


Figure 6.14: Iteration function of recurrence relation (6.154). It is shown along with its envelope and its first-order Taylor approximation, which is used as upper bound in equation (6.156). The first quadrant diagonal is also drawn, showing that the only fixed point of the iteration is at  $\Lambda = 0$ .

Thus, as long as  $\Lambda_1 < 1$ , the previous upper bound decreases at a double-exponential rate, thus providing very small values of the negative remainder  $\Lambda_{J+1}$  when the last step is taken for moderate values of  $J$ .

We have thus a recipe for obtaining a node  $\{n_1, \dots, n_J\}$  with the property of being an approximate solution of the branching surface equation with a very small negative remainder. Nevertheless, it should be shown that both inequalities of the existence condition (6.103) are satisfied, because only one of them is guaranteed by the last step (6.153). The solution of the existence equation (6.102) should be smaller than the branching point  $\lambda_b$ , which in this case is

$$\lambda_b = \frac{1}{2n_J^2} \approx \frac{\Lambda_J}{2}. \quad (6.158)$$

Equation (6.153) guarantees that  $L_n(0) > \Lambda$ , thus it remains to show that  $L_n(\lambda_b) < \Lambda$ . The  $L_n$  function evaluated at  $\lambda_b$  is

$$L_n(\lambda_b) = \frac{1}{2} \left( J\lambda_b + \sum_{j=1}^J \frac{1 + \sqrt{1 - 2\lambda_b n_j^2}}{n_j^2} \right) = \frac{J}{4n_J^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{n_j^2}{n_J^2}}}{n_j^2}. \quad (6.159)$$

The convergence rate of the approximate recurrence relation (6.156) is so fast that the integers  $n_j$  grow in such a way that  $n_J$  is overwhelmingly larger than the rest, and thus all square roots in equation (6.159) can be approximated by first-order Taylor expansions, except for the last, which is zero:

$$L_n(\lambda_b) \approx \frac{J}{4n_J^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J-1} \left[ \frac{2}{n_j^2} - \frac{1}{2n_J^2} \right] + \frac{1}{2n_J^2} = \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{4n_J^2}. \quad (6.160)$$

The difference with  $\Lambda$  is

$$L_n(\lambda_b) - \Lambda = \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2} - \Lambda - \frac{1}{4n_J^2} \approx |\Lambda_{J+1}| - \frac{\Lambda_J}{4} < 0, \quad (6.161)$$

where the last inequality follows from the recurrence relation at its final step, because  $|\Lambda_{J+1}|$  is much smaller than  $\Lambda_J$ . This proves that a state exists at the node provided by the recurrence relation.

We now estimate the corresponding solution  $\lambda$  of the existence equation  $L_n(\lambda) = \Lambda$ , and prove its stability. We can obtain a solution by using again that the integers  $\{n_1, \dots, n_J\}$  grow very fast, so that we can replace all curvatures by its first-order expansions in  $\lambda$  (we know that  $\lambda < \lambda_b$ ) except for the last, which remains untouched, thus respecting the location of the branching point:

$$\Lambda = L_n(\lambda) = \frac{1}{2} \left( J\lambda + \sum_{j=1}^J K_j \right) \approx \frac{1}{2} \left[ J\lambda + \sum_{j=1}^J \left( \frac{2}{n_j^2} - \lambda \right) + K_J \right] = \sum_{j=1}^{J-1} \frac{1}{n_j^2} + \frac{1}{2} (\lambda + K_J). \quad (6.162)$$

We can rewrite the previous equation as

$$\Lambda_J = \Lambda - \sum_{j=1}^{J-1} \frac{1}{n_j^2} = \frac{1}{2} (\lambda + K_J), \quad (6.163)$$

which is exactly the existence equation for a EM landscape with a single curvature  $K_J$  and an effective four-dimensional cosmological constant  $\Lambda_J$ . This  $J = 1$  EM landscape has been obtained by fixing the integers  $\{n_1, \dots, n_{J-1}\}$  by means of the recurrence relation (6.150). The last integer  $n_J$ , if chosen as in (6.153), gives the last node verifying the existence equation. We know that no greater value of  $n_J$  will satisfy the existence equation, but smaller values can also give valid solutions. Thus, varying  $n_J$  downwards from (6.153) provides us with a state chain embedded in the  $J$ -sphere EM landscape: This state chain is simply the single-sphere EM landscape described by equation (6.163).

The analysis of the  $J = 1$  EM landscape performed in subsections 6.2.1, 6.2.2 and 6.4.2 is now entirely applicable to (6.163). In particular, the exact minimum two-dimensional cosmological constant of this chain is given by equation (6.135) (with  $\Lambda$  replaced by  $\Lambda_J$ ) or by its continuum approximation given in equation (6.141) (with the same replacement):

$$\widehat{\lambda}_{\min} \approx 2\sqrt{2}(\Lambda_J)^{\frac{5}{4}}. \quad (6.164)$$

We know that  $\Lambda_J$  is very small, and we now see that  $\widehat{\lambda}_{\min}$  is even smaller.

The stability condition for the  $J = 1$  landscape (6.133) reads  $\lambda < \frac{\Lambda_J}{2}$ . We can see that  $\widehat{\lambda}_{\min} = 4\sqrt{2}\Lambda_J^{\frac{1}{4}}\frac{\Lambda_J}{2} \lll \frac{\Lambda_J}{2}$ , and thus this minimum- $\lambda$  state is always stable. Moreover, we can let  $n_J$  decrease until it reaches the stability limit. This generates all dS stable states in the chain, whose number is given by (6.108), which is

$$\mathcal{N}_1(\Lambda_J; n_1, \dots, n_{J-1}) \approx \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \frac{1}{\sqrt{\Lambda_J}} \approx 0.05719 \cdot n_J. \quad (6.165)$$

This is an enormous number, as we now see. We will choose a reference value  $\lambda_A$ , and we wish  $\widehat{\lambda}_{\min}$  to reach it. We can compute the value of  $J$  we need for this to happen by inserting the worst-case approximate formula (6.157) in equation (6.164) for the minimum  $\lambda$  value:

$$\lambda_A = 2\sqrt{2}(\Lambda_J)^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{5}{4}} \left[ \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{J-1-1}}{\frac{3}{2}-1} \right] \Lambda^{\frac{5}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{J-1}}. \quad (6.166)$$

Solving for  $J$ , we obtain

$$J = 1 + \log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{4 \log(2\lambda_A)}{5 \log(4\Lambda)} \right). \quad (6.167)$$

We can also demand a much more restrictive condition, that the whole chain is inside the anthropic range. The peak of the density is located at  $\frac{\Lambda_J}{2}$ , and thus the relation  $\lambda_A = \frac{\Lambda_J}{2}$  together with (6.157) leads to a value of  $J$  given by

$$J = 1 + \log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{\log(\lambda_A/2)}{\log(4\Lambda)} \right). \quad (6.168)$$

Using the emblematic number  $\lambda_A = 10^{-120}$  and  $\Lambda = 0.1$ , we obtain a non-integer  $J = 14.5$  with the first formula and 15.08 with the second; using  $J = 15$  we find  $2.43 \cdot 10^{58}$  states in the chain with a minimum of order  $10^{-146}$ . In this case, the stability limit is around  $10^{-117}$ , well inside the anthropic range. As another example, starting from  $\Lambda = 0.0008$ , we obtain  $J = 10$  almost exactly with the first formula and  $10^{47}$  states. The second formula provides  $J = 10.55$ , and with  $J = 11$  we obtain  $10^{72}$  states.

Therefore, we can see that moderate values of  $J$  and  $\Lambda$  can yield an enormous number of anthropic states in the multi-sphere EM landscape.

We may ask if the states just found are generic inside the  $J$ -dimensional landscape, because the recurrence relation (6.150), (6.153) leading to them gives very precise values for the integers  $\{n_1, \dots, n_J\}$ , and therefore they seem to be located at a very special place in flux space. We will now see that, despite being very numerous, these anthropic states are not generic.

We have just obtained a very long state chain by fixing  $n_1, \dots, n_{J-1}$  and letting  $n_J$  to vary from (6.153) downwards. This state chain is a one-dimensional landscape embedded in  $J$ -dimensional flux space. We can let  $n_{J-1}$  vary downwards as well, thus generating a two-dimensional landscape embedded in  $J$ -dimensional flux space. The effective high-dimensional cosmological constant of this landscape is  $\Lambda_{J-1}$ , and it is very small, which allows us to use formula (6.123) with the approximation (6.124) to give the number of states of this two-dimensional landscape as

$$\mathcal{N}_2(\Lambda_{J-1}; n_1, \dots, n_{J-2}) \approx 2 \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) (n_J + n_{J-1}^2), \quad (6.169)$$

where we have used that  $n_{J-1} \approx \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{J-1}}}$ . The first contribution in formula (6.169),  $n_J$ , comes from the longest state chain, while the second,  $n_{J-1}^2$ , comes from the bulk. The simplified recurrence (6.156) shows that  $n_J \approx \frac{1}{\sqrt{2}} n_{J-1}^{3/2}$ , that is, the number of states in the chain scales as  $n_{J-1}^{3/2}$  while the number of states in the bulk scales as  $n_{J-1}^2$ . Thus, the fraction of states in this two-dimensional landscape belonging to the chain scales as  $n_{J-1}^{-1/2}$ , and therefore they are non-generic.

For example, choosing  $\Lambda = 0.0008$  and  $J = 10$  we obtain  $n_J \approx 10^{48}$ , but  $n_{J-1}^2 \approx 10^{64}$ . Thus, states in the chain are in a proportion  $1 : 10^{16}$ .

We may as well let the remainder of the integers  $n_1, \dots, n_{J-2}$  vary downwards from (6.150), thus generating the entire  $J$ -dimensional landscape. In this complete landscape the proportion will be much smaller than  $n_{J-1}^{-1/2}$ , and thus we see that anthropic states are very rare, despite being very numerous. We cannot exclude the possibility that other corners of flux space may contain low- $\lambda$  states, either as isolated, randomly close nodes, or as very long chains obtained in a different way, but they will be non-generic also.

Summarizing, we have seen that for any value of  $\Lambda$  (say, between  $10^{-4}$  and  $10^{-1}$ ) moderate values of  $J$  (between 10 and 15 respectively) lead to the existence of a huge chain of anthropic states, that is, states having a two-dimensional cosmological constant of order  $10^{-120}$ . Those states represent a tiny fraction of the total number of states, and thus they are non-generic. But they are very numerous, and they can be found with no fine tuning at all, which is a very remarkable feature of the multi-sphere EM landscape.

### 6.5.2 Implications for the multiverse prediction of the cosmological constant

The very long chains of anthropic states found in the previous subsection are another form of the discretuum introduced by Bousso and Polchinski [90] as part of the solution of the cosmological constant problem. Moderate values of  $J$  can yield a 1+1 effective cosmological constant of the order of the observed value in our universe. The only parameter of the model,  $\Lambda$ , can be chosen as any positive real number to achieve that. Thus, the multi-sphere EM landscape do not need fine-tuning  $\Lambda$  to contain anthropic states in the discretuum.

There are another possibilities to produce a discretuum. A very small charge produces a finely spaced tower of states as in the Brown-Teitelboim mechanism [95, 94], or a number of different, incommensurable elemental charges can yield a BP-like discretuum. In the first case, a single, very small parameter is needed, while in the multi-sphere EM model the parameter is not restricted at all. In the second case, as commented above, a number of parameters are given from the start, thus bypassing the need for a stabilization mechanism. This mechanism works only for large  $J$ , which are easily obtained in some Calabi-Yau compactification scenarios, but large values of  $J$  give rise to the  $\alpha^*$ -problem discussed in section 6.1. Thus, no fine-tuning is needed in such cases, but the counting of states becomes tricky, because most of them might be unstable if its stability were correctly addressed, as is demonstrated in the multi-sphere Einstein-Maxwell model. Thus, we conclude that, as a discretuum-generating method, state chains circumvent some previously encountered problems.

Anthropic state chains have further implications in the prediction of the cosmological constant distribution in realistic landscapes. As stated in section 6.1, a multiverse prediction of the cosmological constant requires a prior probability distribution counting the states present in the model, a cosmological measure to weigh relative probabilities, and an anthropic factor taking into account the existence of observers [116]. Authors in [116] state that the prediction is very sensitive to changes in the prior distribution, so we may wonder how state chains can change the prediction.

The current multiverse prediction of the cosmological constant assumes that the prior distribution has a scale of variation of order the Planck scale, which is enormous when compared with the anthropic range. Thus it is safe to consider that the prior distribution is almost constant in the anthropic range, and the cosmological constant prediction is dominated by the anthropic factor.

The anthropic range, also called “Weinberg window”, is an interval of values of the cosmological constant which allow the formation of structures, such as galaxies, which may contain observers like us. The order of magnitude of such an interval is large when compared with the observed value of the cosmological constant [48]. Thus, if the prior probability has a very narrow peak inside the anthropic range of width comparable to the observed value  $\lambda_{\text{obs}}$ , then the anthropic factor, varying on a much larger scale, can be considered as almost constant. Therefore, the prediction of the cosmological constant would be dominated by the prior distribution. This is precisely the case with anthropic chains in the multi-sphere EM model.

Obviously, an anthropic factor is entirely out of question in the context of a 1+1 cosmology. Thus, the prior distribution will dominate the prediction if anthropic state chains can be shown to exist in a multi-sphere EM model with a 3+1 cosmology. The construction of such a model is left as future work.

## 6.6 Comparison between the Bousso-Polchinski and multi-sphere Einstein-Maxwell landscapes

Obviously, the multi-sphere Einstein-Maxwell landscape cannot be considered as a model of the string theory landscape, because it belongs to a completely different family of theories. Nevertheless, the features we have described in the previous sections are not excluded from the string theory landscape, and they are qualitatively different in other

simplified models, such as the Bousso-Polchinski (BP) landscape [90]. We will now provide a brief summary of the main features of the BP landscape, and then we will stress the differences with the multi-sphere EM landscape.

### 6.6.1 The Bousso-Polchinski landscape

The BP landscape is a simplified model which provides an elegant method for solving the cosmological constant problem<sup>6</sup>. The starting point is M-theory, which is formulated in 10+1 dimensions, compactified down to 3+1. One of the main ingredients of this theory is a seven-form, which is used to introduce the Brown-Teitelboim cosmological constant neutralization mechanism [95, 94], which is a generalization of the Schwinger pair creation process responsible for the spontaneous lowering of a strong electric field.

In the presence of a compactification manifold having three-cycles, the seven-form is expanded in a basis of harmonic three-forms, whose coefficients are four-forms. After dimensional reduction, the four-dimensional duals of the four-forms are zero-forms, that is, scalars, which are quantized by virtue of generalized Dirac quantization conditions. The total value of the flux of a four-form in the  $j^{\text{th}}$  three-cycle is an integer multiple of a fundamental charge  $q_j$  which is proportional to the volume of the three-cycle. These charges are moduli of the theory, whose stabilization is given *a priori* in the BP model.

A vacuum state of this model is given by specifying the integers representing the value of the four-form flux stored in each three-cycle. Transitions between the states are mediated by instantons, which can be viewed as M5-brane bubbles with two “legs” enclosing a three-dimensional interior of a different vacuum energy density, while having three remaining “legs” wrapping the flux in a three-cycle.

Thus, the vacuum states of the model are arranged in the nodes of a lattice in flux space. A given state is specified by  $J$  integers  $n_1, \dots, n_J$ , whose effective cosmological constant  $\lambda$  is given by

$$\lambda = \Lambda + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J q_j^2 n_j^2. \quad (6.170)$$

In equation (6.170),  $J$  represents the number of three-cycles inside the compactification manifold;  $\Lambda$  is the bare cosmological constant of the theory, which should be negative, so that  $\lambda$  can reach a small value; and  $q_j$  are the moduli, that is, the elementary charges of the fluxes.

There is a Minkowski surface in flux space separating AdS and dS states, which is obtained by setting  $\lambda = 0$  in (6.170). A node of the lattice can be located very close to this surface, and the number of such nodes can be huge by choosing a large enough  $J$ . The existence of these nodes, randomly close to the  $\lambda = 0$  surface, is essentially the BP mechanism solving the cosmological constant problem.

In a BP landscape with a large amount of fluxes, the vast majority of the nodes are located far away from the origin. Some criterion is needed to limit the value of the integers  $n_j$  and render the landscape finite. Usually, this is accomplished by introducing a cut-off  $\Lambda_{\text{cutoff}}$  in flux space which characterizes the maximum value of  $\lambda$  to be possibly reached. The computation of the probability of a given state among all available states based on abundance of states gives very small values for a large  $J$ , and a large  $J$  is needed to reach a value of  $\lambda$  as low as the observed value  $10^{-120}$  [12, 11]. So this model has the necessary

<sup>6</sup>Good reviews of the cosmological constant problem can be found in references [34, 35]

states, but a very low probability for them to be occupied, which leads to anthropic arguments.

The anthropic window is an interval of cosmological constant values which allow the formation of observed structures (like galaxies, stars and planets) [48]. Even inside this anthropic window, the number of states is so huge that the probability of a state having  $\lambda = 10^{-120}$  is tiny. Dynamical relaxation inside the BP landscape reduces the states to a shell wider than the anthropic window [93], and thus do not solve this problem. This requires less convincing anthropic arguments to explain the observed value of the cosmological constant.

We can rephrase this problem by saying that the distribution of  $\lambda$  values near  $\lambda = 0$  is flat [91, 103], and thus specially small values do not get rewarded. The observed value of  $\lambda$  lies in a very thin shell, very small when compared with the anthropic or dynamically relaxed shells. Thus, the flatness of the distribution gives rise to such small probabilities.

In addition, there is another complication with large values of  $J$ . When the dimension of flux space is large, the vast majority of states in *any* spherical shell are confined to coordinate hyperplanes with a dimension of near  $J\alpha^*$  with  $\alpha^* < 1$  [101]. The bulk of the spherical shell<sup>7</sup> is almost devoid of states, and the number of non-vanishing fluxes is generically less than  $J$ . Nevertheless, stability arguments often force the integers  $n_j$  to be nonzero, even large ones; this would dramatically lower the number of states in the BP landscape, resulting in an empty anthropic shell. This  $\alpha^*$ -problem of the BP landscape is not restricted to sets with spherical symmetry; secant states are not spherically distributed, and share the same problem.

### 6.6.2 Comparison between BP and ms-EM landscapes

The previously described features of the BP landscape contrast with their counterparts in the multi-sphere Einstein-Maxwell landscape. First of all, this landscape is derived from a  $2J + 2$ -dimensional theory, after its dimensional reduction to 1+1 dimensions. Therefore, the resulting cosmologies are not comparable. Nevertheless, we will focus in the distribution of states and qualitative features of the landscape.

The “bare” cosmological constant  $\Lambda$  is negative in the BP case, allowing cancellation in the effective cosmological constant  $\lambda$ ; if  $\Lambda$  were positive, no AdS nor low-lying dS states would longer exist. In the EM case,  $\Lambda$  should be positive; otherwise, dS states would not exist at all. Thus, both landscapes have twin versions with reversed  $\Lambda$  which are not physically interesting.

The BP model assumes that its moduli are frozen by some external, unspecified mechanism. Therefore, the elementary charges are parameters of the model, as well as  $\Lambda$ . On the other hand, the moduli of the EM theory, which are the radii of the internal spheres, are fixed (at least at a linear level) by an effective potential built from the magnetic field, the curvatures and the vacuum energy density. Thus, this theory needs only one parameter,  $\Lambda$ . It is generally believed that the same stabilization mechanism should work in the BP model, but as far as we know it has not been implemented yet.

The simplicity of the formula for  $\lambda$  in the BP model, (6.170), is to be compared with the equation determining  $\lambda$  in the EM model, (6.68), (6.98) or (6.102). In this equation,  $\lambda$  cannot be isolated in general, and there are several branches for each node.

<sup>7</sup>That is, the region of the spherical shell surrounding the diagonals of flux space, where states are located far away from the coordinate hyperplanes.

Nevertheless, only the principal branch has solutions with positive curvatures, and these are the only ones with a chance of being stable. Moreover, this equation can have zero, one or two solutions, depending on  $\Lambda$ , giving zero, one or two states per node in flux space. In contrast, (6.170) always has one solution, and no more, per node. Thus, the correspondence between nodes and states is one-to-one in the BP model, but this is not the case in the EM model.

The finiteness of the BP landscape is a consequence of a cutoff introduced in flux space. As commented above, were this cutoff absent, the theory would have an infinite family of states with infinitely high- $\Lambda$ , which would raise the problem of choosing initial conditions. The EM model has a finite amount of stable dS states because of the presence of a branching point in the equation determining  $\lambda$ . The number of unstable dS states is much greater, but these states are excluded from the landscape. Thus, the stability analysis gets rid of the majority of dS states, and so we expect this situation to be analogous in the BP model completed with a stability analysis. This ingredient can thus significantly change a lot the general properties of the BP model, because it would exclude a huge amount of states from the landscape. This might be a feature, though, because it might raise the probability for the system to be in an anthropic state, which is currently very small because of the enormous amount of dS states present. But it is impossible to establish this claim or the opposite without a well-defined model to work with.

AdS states are finite in number in the BP model, because they are located inside a sphere in flux space. In the EM model with  $J > 1$  there is an infinite number of them and they are always stable. Therefore, the probabilistic arguments based on the number of states cannot be applied here, because the probability of dS states would always be zero. This argument might be interpreted as indicating that the method of computing probabilities using simply amounts of states could be completely wrong in both models. As a consequence, the probability measure used in these landscapes should be revised from scratch.

Both models have a  $\lambda = 0$  surface separating dS from AdS states, which in the BP model is

$$2|\Lambda| = \sum_{j=1}^J q_j^2 n_j^2, \quad (6.171)$$

that is, a sphere in flux space (parametrized in  $q_j n_j$  coordinates), while in the EM model it is

$$\Lambda = \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2}, \quad (6.172)$$

which is a sphere after performing a coordinate inversion. These surfaces provide the BP mechanism for solving the cosmological constant problem: if the landscape contains a state randomly close to this surface then this state can have a realistic value of  $\lambda$ . Both models have this property. Nevertheless, the surface (6.172) is not compact, and it allows for long state chains whose cosmological constant can approach very small values. This phenomenon is absent in the BP model, and constitutes a basic difference because it increases the amount of states in the anthropic shell. As stated above, we don't know the correct way of computing probabilities, but state chains provide a new source of low-lying states which is absent in the BP model.

State chains are also responsible for a crucial modification in the distribution of  $\lambda$  values, which is flat near  $\lambda = 0$  in the BP case, as stated above. In the EM case, the  $\omega(\lambda)$



density vanishes at  $\lambda = 0$ , but it has a huge peak of small values, corresponding precisely to those lying in the state chains. Thus, this distribution is not flat, which means that the randomly-close-state mechanism is less important in the EM model than in the BP case, because only states near the diagonal in flux space contribute to it, while all states near the sphere contribute in the BP case, accounting for the difference. State chains provide a dominant peak of small  $\lambda$  values, which is another different mechanism for solving the cosmological constant problem. This mechanism can provide a peak very near  $\lambda = 0$  for very specific values of  $\Lambda$  when  $J$  is small (namely, when  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  is very close to an integer from below), or for generic  $\Lambda$  values when  $J$  is moderate  $J \approx 10, 15$ , leading even to anthropic states. Thus, both mechanisms are different, and both have states with very small values of the cosmological constant, but they differ deeply in the form of the  $\omega(\lambda)$  distribution.

Finally, the  $\alpha^*$ -problem is absent in the EM model, because the  $\lambda = 0$  surface never approaches the coordinate hyperplanes where one or more  $n_j = 0$ . Thus, if the stability results found in the EM model translate to the BP model completed with a stability analysis, then we are forced to conclude that the vast majority of dS states, which are near the hyperplanes, would be unstable, and thus there would be excluded from the BP landscape. This would change all reasoning based on number of states, if it were to be of any use.

Table 6.1 summarizes all the issues we have addressed while comparing the BP and EM landscapes.

## 6.7 Possible implications for the string theory landscape

The comparison carried out in the previous section leads to some features that a complete treatment of the BP landscape interpreted as a toy model of the true string theory landscape would bear when compared to what is currently believed. This section is devoted to envision what the BP landscape would look like if some of the main features of the EM landscape were found to hold.

Two key points should be stressed:

- Theories with four-form fluxes have duals which are gauge-gravity theories. The main difference between them is that gauge-gravity theories have a built-in cut-off mechanism which limits the maximum values of the integers characterizing the landscape. Thus, those landscapes have natural finiteness conditions, such as the branching point in the multi-sphere Einstein-Maxwell landscape. This would avoid the necessity of a cut-off scale put by hand in the model. Nevertheless, the KKTL model has some natural cut-off mechanisms built-in [124], [138].
- Stability conditions are important not only because they complete the model, but also because they exclude a huge amount of states from the model. If the same exclusion were to take place in the BP landscape, the vast majority of its nodes would not be true states of the landscape, and the predictions of existence of anthropic states would dramatically change. Thus, stability conditions have a two-fold purpose: on the one hand they fix the values of the elementary charges to be used in the model, on the other hand they limit which nodes have physically relevant states. A priori frozen moduli fulfill the first purpose, but do not help in deciding which nodes have states. This causes a huge proliferation of states, which may be spurious

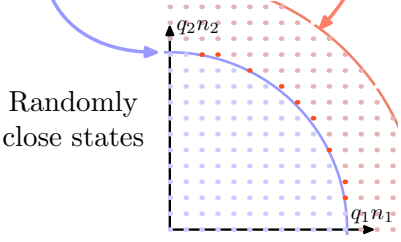
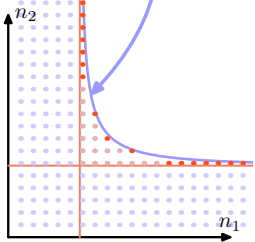
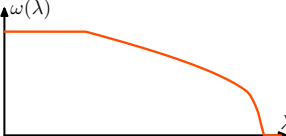

	Bousso-Polchinski	Multi-sphere Einstein-Maxwell
Parameters	$\Lambda, \{q_j\}_{j=1\dots J}$	$\Lambda$
Sign of $\Lambda$	$\Lambda < 0$	$\Lambda > 0$
Stability	Assumed ( $q_j$ given <i>a priori</i> )	Linear stability understood ( $\kappa > 0$ )
$\lambda$ formula	$\lambda = \Lambda + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J q_j^2 n_j^2$	$\Lambda = L_n(\lambda)$ (principal branch)
Finiteness	$\lambda < \Lambda_{\text{cutoff}}$	$\lambda < \lambda_b$ (dS) Infinite (AdS) }
$\lambda = 0$ surface	$2 \Lambda  = \sum_{j=1}^J q_j^2 n_j^2$	$\Lambda = \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j^2}$
Cosmological constant problem	Randomly close states 	Randomly close states and Long state chains 
$\omega(\lambda)$ distribution	Flat at 0 	Dominant and many spikes 
$\alpha^*$ problem	Vast majority of states have $(1 - \alpha^*)J$ vanishing fluxes (and they are probably unstable)	There are no stable states with vanishing fluxes

Table 6.1: Summary of the differences between the Bousso-Polchinski and multi-sphere Einstein-Maxwell landscapes. The first two graphics emphasize the different distribution of states in flux space, which is the origin of the state chains. These state chains are responsible of the dominant spike in the  $\lambda$ -density, as shown in the two last graphics.

ones. The EM model shows that the vast majority of dS states are unstable. Thus, we can expect the same to be true in a completed BP landscape.

Other features of the EM landscape may not have a direct translation to a completed BP model, such as state chains. They are a consequence of the asymptotes found in the null- $\lambda$  surface, which is non-compact. This is an indication that the details of the null- $\lambda$  surface provide different sources of low-lying states which change the density of states  $\omega(\lambda)$ . This distribution is needed when one has to compute probabilities in a given landscape model; but a completely clear, unambiguous, quantum prescription for computing probabilities with a general model is still lacking, and therefore the implications of the details of  $\omega(\lambda)$  in the computation of probabilities cannot go beyond the naive arguments based on state abundances. At this simple level, details of the null- $\lambda$  surface translate in peaks in the  $\omega(\lambda)$  density, thus producing very different probabilities for the states in the anthropic shell. The BP model has a spherical null- $\lambda$  surface, and thus  $\omega(\lambda)$  has no peaks; if the null- $\lambda$  surface of more realistic flux compactifications of M-theory had other nontrivial shapes, this would be reflected in the  $\omega(\lambda)$  distribution and in the final computation of the probabilities. So this is the last point that the EM landscape brings in: the details of the null- $\lambda$  surface are very important for probability computations.

## 6.8 Conclusions

We have addressed a simple sector of the Einstein-Maxwell theory as an exactly solvable model of a landscape. The theory, formulated in  $2J + 2$  spacetime dimensions, has a single parameter in the Lagrangian, namely, the “bare” cosmological constant  $\Lambda > 0$ . The compactification has the form  $(A)dS_2 \times (S^2)^J$ , which is referred to as *multi-sphere Einstein-Maxwell* compactification. Equations of motion for the corresponding metric ansatz are algebraic equations for the values of the curvatures of the inner spheres and the effective cosmological constant  $\lambda$  of the cosmological part. In the presence of a magnetic monopole, the magnetic flux in each sphere, which is quantized by a Dirac condition, stabilizes the configuration which spontaneously would decompactify. The cosmological constant  $\Lambda$  helps to evade the Maldacena-Nuñez no-go theorem in this case [139, 123]. The different combinations of the flux quanta stored in the spheres give rise to a complicated landscape, in which each configuration of integers (called a *node*) can host a true stable state of the model, two stable states, an unstable state and a stable one, or no state, giving rise to two branches of (AdS and dS) states. It is found that for  $J > 1$  an infinite family of stable AdS states exist, but stable dS states exist only near the *branching surface*, which is the locus at which both branches meet, that is, the null- $\lambda$  surface. The structure of the null- $\lambda$  surface gives rise to the state chains, which provide a different source of low-lying states besides the randomly close states which help to solve the cosmological constant problem in the Bousso-Polchinski landscape. State chains also help in counting states approximately, and they translate in peaks in the density of states  $\omega(\lambda)$ , providing anthropic states for moderately large values of  $J$ .

All the previous features of the model are qualitatively different from its counterparts in the Bousso-Polchinski landscape. We think that in a completed BP model, all these differences would render a very different picture with respect to the number of states, probabilities and anthropic reasoning. Thus, despite not being a realistic landscape model, the multi-sphere Einstein-Maxwell model has very appealing features that

might propagate in more realistic models of the true string theory landscape.

The account of the multi-sphere Einstein-Maxwell model given in this paper has three main limitations: firstly, it is difficult to extrapolate the stability conditions found from 1+1 spacetime dimensions to a more realistic 3+1 cosmology. Secondly, we have considered a restricted class of linear perturbations; the inclusion of fully general linear perturbations could render unstable some states which are stable. The combination of the two ingredients, that is, 3+1 cosmology and a full set of linear perturbations, can lead to a qualitatively very different sector of the Einstein-Maxwell landscape. Finally, a fundamental missing piece is the cosmological measure. This problem and the construction of the corresponding model will be addressed in future papers.

## Acknowledgments

We would like to thank Concha Orna for carefully reading this manuscript, and the Pedro Pascual Benasque Center of Science. We also thank Frederik Denef, Roberto Emparan, Jaume Garriga, Bert Janssen, Donald Marolf and Jorge Zanelli for useful discussions and encouragement. This work has been supported by CICYT (grant FPA-2009-09638) and DGIID-DGA (grant 2011-E24/2). We thank also the support by grant A9335/10 (Física de alta energía: Partículas, cuerdas y cosmología).

## 6.9 Effect of derivative couplings in the multi-radion evolution equations

In this appendix we give a heuristic argument leading to the conclusion that the linear stability analysis of the multi-radion field evolution equations, equation (6.85), which is achieved by neglecting the derivative couplings, can be promoted to a non-linear stability analysis in which the linear stability is preserved as long as perturbation amplitudes are sufficiently small.

To begin with, we consider again equation (6.85):

$$-e^{-2\phi}\eta^{\alpha\beta}\left[(\xi_j)_{\alpha\beta} + 2(\xi_j)_\alpha\left(\sum_k(\xi_k)_\beta\right) - \sum_k(\xi_k)_\alpha(\xi_k)_\beta\right] = \lambda - e^{-2\sum_k\xi_k}U'_j(\xi_j). \quad (6.173)$$

The derivative couplings appear in a quadratic form. We will use the symbol  $\boldsymbol{\xi}$  to denote the  $J$ -component column vector of the perturbations  $\xi_j$ , and then we will write the derivative couplings in matrix form as

$$-e^{-2\phi}\eta^{\alpha\beta}\left[(\xi_j)_{\alpha\beta} + \langle\boldsymbol{\xi}_\alpha, M_j\boldsymbol{\xi}_\beta\rangle\right] = \lambda - e^{-2\sum_k\xi_k}U'_j(\xi_j), \quad (6.174)$$

where the constant  $J \times J$  matrix  $M_j$  has the number  $-1$  along the diagonal except for 1

along the  $j^{\text{th}}$  row and  $j^{\text{th}}$  column and zeroes elsewhere:

$$M_j = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \text{ (} j^{\text{th}} \text{ row)}. \quad (6.175)$$

The matrix  $M_j$  has a spectrum with two simple eigenvalues  $\pm\sqrt{J}$  and a  $(J-2)$ -degenerate  $-1$  eigenvalue. It is therefore an “almost negative-definite” quadratic form, which represents a non-linear force.

We are interested in the effect of the derivative couplings; therefore, we approximate the system of equations by Taylor-expanding to first order the right-hand side of equation (6.174), thus considering the much simpler system (written in matrix form)

$$-e^{-2\phi}\eta^{\alpha\beta} \left[ (\xi_j)_{\alpha\beta} + \langle \xi_\alpha, M_j \xi_\beta \rangle \right] = -\sum_k H_{jk} \xi_k, \quad (6.176)$$

where the frequency matrix  $H$  is given by equation (6.88) in section 6.3.2.

As said above, a complete analysis of the system (6.176) is not possible, but we can form a single equation out of it by projecting the system of equations along a constant direction  $\mathbf{w} = (w_j)$ :

$$-e^{-2\phi}\eta^{\alpha\beta} \left[ \langle \mathbf{w}, \xi \rangle_{\alpha\beta} + \langle \xi_\alpha, M_{\mathbf{w}} \xi_\beta \rangle \right] = -\langle \mathbf{w}, H \xi \rangle. \quad (6.177)$$

The matrix  $M_{\mathbf{w}}$  is

$$M_{\mathbf{w}} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{M} \rangle = \sum_j w_j M_j. \quad (6.178)$$

Any solution of the system (6.176) is a solution of equation (6.177), but the reciprocal is false. Nevertheless, we can look for normal modes of the form  $\xi(t, x) = \chi(t, x)\mathbf{v}$  for constant  $\mathbf{v}$  and a single scalar function  $\chi(t, x)$ :

$$-e^{-2\phi}\eta^{\alpha\beta} \left[ \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{\alpha\beta} \chi + \langle \mathbf{v}, M_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \rangle_{\alpha\beta} \chi \right] = -\langle \mathbf{w}, H \mathbf{v} \rangle \chi. \quad (6.179)$$

Taking  $\chi = \chi(t)$  and  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$  for simplicity, we obtain

$$e^{-2\phi} \left[ \ddot{\chi} + \frac{\langle \mathbf{v}, M_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \dot{\chi}^2 \right] = -\frac{\langle \mathbf{v}, H \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \chi. \quad (6.180)$$

If the non-linear term were absent, we would have a simple oscillator equation with a frequency given by the Rayleigh quotient of the matrix  $H$ . The solution of this equation would be a solution of the linear system if  $\mathbf{v}$  were chosen as an eigenmode of  $H$ . In this sense, the projected equation (6.180) is an *average* equation, and its solution (a *weak* solution henceforth) can indicate the behavior of the true solutions we are inspecting. Of course, this is a heuristic argument, but we can argue that true solutions provide

weak solutions; thus, an unstable true solution should be reflected by an unstable weak solution. This argument has the obstacle of the existence of the normal modes we are using as ansatz; thus, as long as the normal modes constitute a reasonable description of the system (6.179), the projected equation will reflect accurately the character of its non-linear counterpart.

Nevertheless, we can use the projected equation (6.180) to see if the presence of the non-linear term can render unstable a linearly stable solution.

We will rewrite equation (6.180) as

$$\ddot{\chi} + m\dot{\chi}^2 = -h\chi, \quad \text{with} \quad m = \frac{\langle \mathbf{v}, M_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}, \quad \text{and} \quad h = e^{2\phi} \frac{\langle \mathbf{v}, H \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}. \quad (6.181)$$

The parameter  $m$  depends on the projection direction  $\mathbf{v}$  but not on time. In contrast,  $h$  depends also on time by the presence of the  $e^{2\phi}$  factor. We will now discuss the expected domain of both parameters in the following.

- The parameter  $m$  is the Rayleigh quotient of the matrix  $M_{\mathbf{v}}$  on the projection direction  $\mathbf{v}$ . The eigenvalues of  $M_{\mathbf{v}}$  are  $\pm\sqrt{J}\sqrt{\sum_j v_j^2}$ , both of them nondegenerate, and  $-\sum_j v_j$  with  $J-2$  degeneracy. Thus, depending on the projection direction  $\mathbf{v}$ ,  $m$  can have both signs. If  $\mathbf{v}$  is taken to have unit norm, then  $m$  will be some value in the interval  $[-\sqrt{J}, \sqrt{J}]$ .
- The 1+1 cosmological solution  $\phi(t)$  has a characteristic evolution time  $t_\phi = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$ . On the other hand, the longest characteristic evolution time of the oscillator term is  $t_H = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ , where  $\kappa$  is the minimum eigenvalue of the frequency matrix  $H$ . Of course, we are considering a linearly stable equation, so that  $\kappa > 0$ . We can consider  $\phi$  as slowly-varying if its characteristic time is much greater than the oscillator characteristic time:

$$t_\phi \gg t_H \quad \Rightarrow \quad \lambda \ll \kappa \quad (6.182)$$

Thus, for times  $t \approx t_H$ , we may consider  $\phi$  as constant, and thus  $h$  will be a positive number.

Equation (6.181) is integrable. We can show the form of its trajectories by writing  $\dot{\chi} = \gamma$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\chi} &= \gamma \\ \dot{\gamma} &= -m\gamma^2 - h\chi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\gamma}{d\chi} = -m\gamma - h\frac{\chi}{\gamma}. \quad (6.183)$$

The last equation has the exact solution

$$\gamma(\chi)^2 = \left( \gamma_0^2 - \frac{h}{2m^2} \right) e^{-2m\chi} + \frac{h}{m} \left( \frac{1}{2m} - \chi \right). \quad (6.184)$$

In the previous equation,  $\gamma_0 = \gamma(0)$ . Specializing  $m = 0$  (which removes the nonlinear term) we obtain the oscillator trajectory  $\gamma^2 + h\chi^2 = \gamma_0^2$ . The points where  $\gamma = 0$  are called *turning points* of the trajectory, and they mark its domain because of the square in (6.184). The trajectory has one or two turning points given by the equation

$$\left( \gamma_0^2 - \frac{h}{2m^2} \right) e^{-2m\chi} = \frac{h}{m} \left( \chi - \frac{1}{2m} \right) \quad (6.185)$$

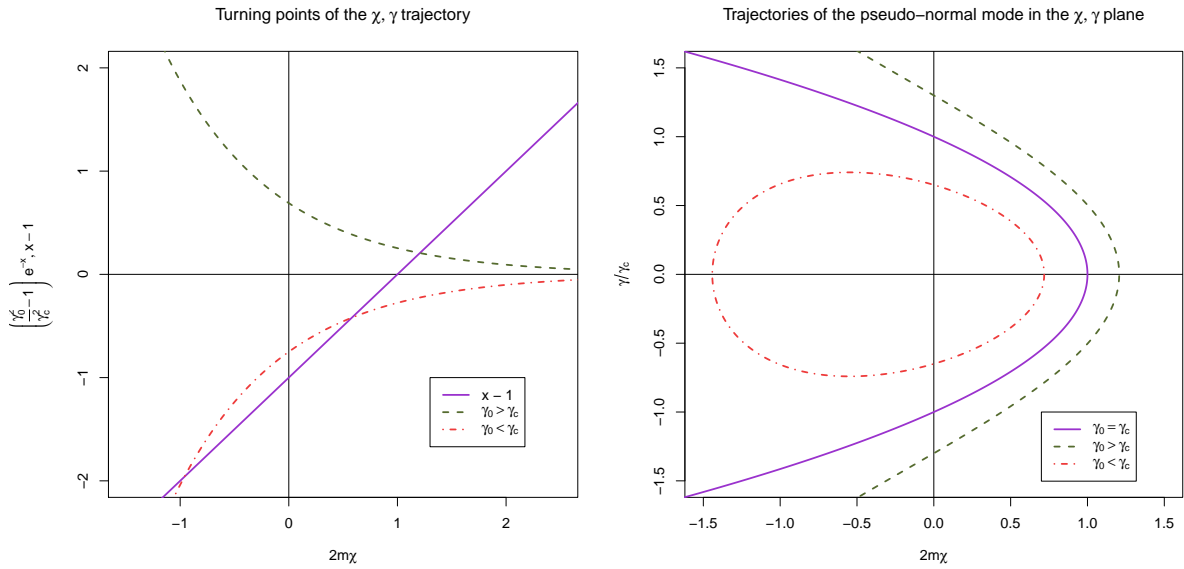


Figure 6.15: Turning points (left) and actual trajectories (right) of the normal modes of the projected multi-radion evolution equation.

If  $m$  is a fixed positive value, then the previous equation has a single solution if  $\gamma_0^2 - \frac{h}{2m^2} > 0$  but it has two solutions if  $\gamma_0^2 - \frac{h}{2m^2} < 0$ . A single turning point describes an open trajectory, while two turning points describe a closed one, see figure 6.15. Thus, the oscillator trajectory remains closed when we turn on the non-linearity if

$$\gamma_0^2 < \frac{h}{2m^2} \quad (6.186)$$

Therefore, a linearly stable trajectory remains non-linearly stable if the amplitude  $\gamma_0$  does not exceed the critical value  $\gamma_c^2 = \frac{h}{2m^2}$ . Beyond this value, the trajectory is open and therefore the linearly stable solution becomes non-linearly unstable.

The lowest value of the critical amplitude is reached when  $m$  is largest; for a unit-norm projection direction, the largest value of  $m$  is  $\sqrt{J}$ , as discussed above. Thus, the lowest value of the critical amplitude is

$$\gamma_{c,\min}^2 = \frac{e^{2\phi} \kappa}{2J}. \quad (6.187)$$

As long as amplitudes are smaller than this value, the non-linear derivative couplings cannot spoil linear stability. Nevertheless, when  $\kappa$  is small, perturbations have a chance of trigger a non-linear instability and destabilize a linearly stable state.

Summarizing, the non-linear terms in the multi-radion evolution equations respect the linear stability criterion except in the regime of large amplitudes, which is most easily accessible when the minimum eigenvalue of the frequency matrix becomes small, that is, in the onset of instability.

## Chapter 7

# Consequences of moduli stabilization in the Einstein-Maxwell landscape

A toy landscape sector is introduced as a compactification of the Einstein-Maxwell model on a product of two-spheres. Features of the model include: moduli stabilization, a distribution of the effective cosmological constant of the dimensionally reduced 1+1 spacetime, which is different from the analogous distribution of the Bousso-Polchinski landscape, and the absence of the so-called  $\alpha^*$ -problem. This problem arises when the Kachru-Kalosh-Linde-Trivedi stabilization mechanism is naively applied to the states of the Bousso-Polchinski landscape. The model also contains anthropic states, which can be readily constructed without needing any fine-tuning.

### 7.1 Introduction

The cosmological constant problem [34], namely, the smallness of the cosmological vacuum energy density when compared to predictions of the Standard Model of particle physics, has been one of the major problems faced by physicists over the last century. Inflation [10] solved a plethora of classical problems in cosmology, but the cosmological constant and coincidence problems have remained. It is natural to look for a solution to these old problems using the most powerful theory at our disposal, which at this moment is string theory. A striking feature of string theory is that it can accommodate a huge number of vacuum solutions, collectively known as the (string theory) Landscape [90, 84]. In a cosmological context, a given state of the Landscape corresponds to a universe, and the enormous number of universes in the Landscape is known as the multiverse. Of course, the vast majority of the universes in the multiverse are very different from ours, and thus we need a probability distribution on the multiverse in order to make predictions. The cosmological measure problem refers to the difficulty in constructing such a probability distribution unambiguously from first principles [119].

#### 7.1.1 The Bousso-Polchinski Landscape

The entire Landscape is too complex to be readily modelled, but we have comparatively simple models of it [123]. Perhaps the most explicit model is Bousso-Polchinski's [90] (BP),



which has provided us with an elegant solution to the cosmological constant problem. In this setting, the states of the Landscape are represented by the nodes of an integer lattice in  $J$ -dimensional flux space, and the effective cosmological constant  $\lambda$  of a state labeled by integers  $n_1, \dots, n_J$  is given by

$$\lambda = \Lambda + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J q_j^2 n_j^2. \quad (7.1)$$

In (7.1),  $\Lambda$ , a negative bare cosmological constant, and the charges  $\{q_j\}$  are parameters of the model. For incommensurable charges and large  $J$ , choices of integers  $\{n_j\}$  are possible so that  $\lambda$  can be made positive and very small. This means that the BP Landscape contains states with an effective cosmological constant as small as the observed value of our universe  $\lambda_{\text{obs}} \approx 1.5 \times 10^{-123}$  (in units such that  $8\pi G = \hbar = c = 1$ ) [12, 11] without the necessity of fine-tuning the parameters  $\Lambda$ ,  $\{q_j\}$ .

The most severe limitation of this model is the lack of a stability analysis of the de Sitter states. The first consequence is that the parameters  $\{q_j\}$  should be fixed *a priori*. Another consequence is that the model identifies nodes in the lattice with vacuum states of the theory. The criteria for deciding if a lattice node contains a state are the existence of a classical solution and stability. Unstable classical solutions cannot be counted among physical states of the theory. Therefore, a naive identification between nodes and states will introduce many spurious vacua into the model.

This has profound consequences on the predictions of the model. The measure problem previously mentioned makes it difficult to assign, from first principles, a probability to each observable magnitude such as the effective cosmological constant. Thus, the first computations are based only on abundances of states, which means that the *a priori* probability distribution is uniform across the Landscape. If we want to compute the probability  $P_o = P(\lambda \approx \lambda_{\text{obs}})$ , the answer requires the computation of the quotient between the number of nodes satisfying the equality and the total number of nodes in the Landscape. This last number can be made finite by means of a cutoff scale  $\Lambda_{\text{cutoff}}$  in flux space, but then the desired probability is a negligibly small number. Nevertheless, we also need a mechanism for populating the landscape, such as eternal inflation [105], resulting in a dynamical reduction of the values of the cosmological constant [93]. Finally, it should be taken into account the fact that we are interested only in those universes where observer-hosting structures can develop, and the corresponding anthropic probability distribution further modifies the prediction. Therefore, the prior probability, the cosmological measure derived from the population mechanism, and the anthropic factor are necessary to accomplish a complete prediction of the emblematic probability  $P_o$ . Unfortunately, both dynamical relaxation and structure formation probability distributions have a large support when compared with  $\lambda_{\text{obs}}$ , and thus the cosmological constant problem is not completely solved by this model. Other landscape models with different prior probability distributions may dramatically change the prediction, as recognized in [91].

Thus, reliable predictions in the Landscape require a measure, but also a complete characterization of the physical states of the system by means of a stability analysis. The Kachru-Kalosh-Linde-Trivedi [97] (KKLT) landscape model addressed this problem by providing a mechanism for generating stable de Sitter (dS) states in a landscape of supersymmetric and stable anti-de Sitter (AdS) vacua. Unlike the BP landscape, there is only one stabilized modulus in this model, and it is not straightforward to generalize the setting to a large number of moduli. Moreover, the lifting of AdS states to dS is

a quantum effect, and thus it is not completely clear if the stability of AdS states is preserved in the process. But even in the affirmative case, no precise condition is given on the integers labeling each different state beyond they being large. AdS states are stable for all physically acceptable integer configurations, but stable dS states can have very restrictive conditions on the integers labeling the nodes in the landscape. Thus, preserving stability unconditionally in the lifting is more than likely wrong.

### 7.1.2 The $\alpha^*$ -problem of the BP Landscape

One of the main advantages of the BP landscape is that the vacua counting problems are often tractable, at least in an approximate fashion. For example, the distribution of the effective cosmological constant values  $\lambda$  can be approximately computed. As some authors anticipated [91], the  $\lambda$  distribution is flat near  $\lambda = 0$  [103].

There is another counting problem with a subtle consequence. Let us define the flux occupation number  $\alpha$  as the fraction of nonzero integers  $n_1, \dots, n_J$  of a given lattice node. Assuming all charges are equal, the probability distribution of the possible values of  $\alpha$  for the nodes inside a thin spherical shell around the  $\lambda = 0$  value in flux space can be computed [101]. This distribution is approximately Gaussian with a peak located at a value  $\alpha^*$  which is less than one when  $J$  is large. The width of the peak is of order  $\frac{1}{\sqrt{J}}$ , and thus we conclude that the vast majority of the nodes inside the shell have a typical value  $J\alpha^*$  of nonzero integers. This result is robust in the sense that other sets in the Landscape yield the same probability distribution.

As seen above, in the KKLT mechanism, the quantized fluxes of the lifted states should be large in order to preserve its stability. We are forced to conclude that, if the two mechanisms are to be reconciled, then the vast majority of the nodes of the BP landscape will be unstable, and thus all counting problems, including the emblematic probability  $P_o$ , should be reconsidered. This is what we have called the  $\alpha^*$ -problem of the BP landscape.

Now we may put the question, if a complete stability analysis in the BP model were carried out, what would the effect of this new input on  $P_o$  be? Perhaps the excluded states have very high  $\lambda$  and  $P_o$  gets enhanced, or maybe the states contributing to  $P_o$  have some vanishing fluxes and  $P_o$  becomes smaller, even zero. It is impossible to know in advance what will be the direction of the modification.

### 7.1.3 Motivation

We have seen above that the KKLT mechanism suggests that the vast majority of the nodes in the BP landscape might have no associated physical state, the  $\alpha^*$ -problem. As far as we know, there is currently no model combining the KKLT stabilization mechanism with the BP solution of the cosmological constant problem. Therefore, testing the  $\alpha^*$ -problem requires finding a landscape toy model simple enough to be exactly solvable, with many moduli to have a chance to solving the cosmological constant problem, and having a detailed characterization of the stable states. The Einstein-Maxwell (EM) landscape [126] can be compactified over a product of two-spheres, the so-called multi-sphere Einstein-Maxwell (MS-EM) landscape [140]. This model, described below, fulfills these three requirements. Thus, the motivation behind this paper is to summarize the main properties of this landscape toy model, interpreting the results as an indication of possible phenomena

one may encounter in more realistic models. An exhaustive analysis of the details of the model and its main consequences can be found in the companion paper [140].

## 7.2 The multi-sphere Einstein-Maxwell Landscape

The multi-sphere compactification of the EM model is defined by the ansatz

$$ds^2 = e^{2\phi(t,x)}(-dt^2 + dx^2) + \sum_{i=1}^J e^{2\psi_i(u_i,v_i)}(du_i^2 + dv_i^2). \quad (7.2)$$

The metric (7.2) represents a manifold of the form  $(A)dS_2 \times [S^2]^J$ , which describes a sector of the  $2J + 2$ -dimensional EM theory, namely, the direct product of a 1+1 cosmological solution and  $J$  two-dimensional spheres. Thus, the moduli of the solution are the  $J$  radii of the spheres. The exponents,  $\phi(t, x)$  and  $\psi_i(u_i, v_i)$ , characterize conformal representations of the  $(A)dS_2$  and  $S^2$  parts, and thus they satisfy uncoupled Liouville equations

$$\lambda = (\phi_{tt} - \phi_{xx})e^{-2\phi}, \quad K_i = -\Delta_i \psi_i e^{-2\psi_i}, \quad (7.3)$$

where

- $\Delta_i$  is  $i$ -th Laplacian operator  $\partial_{u_i}^2 + \partial_{v_i}^2$ .
- $\lambda$  is the curvature of the  $AdS_2$  ( $\lambda < 0$ ) or  $dS_2$  part ( $\lambda > 0$ ), that is, the effective cosmological constant of the dimensionally reduced cosmology.
- $K_i$  is the Gaussian curvature of the  $i^{\text{th}}$  sphere  $S^2$ .

In addition, the model also includes a bare, positive cosmological constant  $\Lambda$ , which is the only parameter in the model, and an electromagnetic field in a monopole-like configuration whose flux through the  $i^{\text{th}}$  sphere is  $Q_i$ . Dirac quantization condition then reads  $Q_i e = 2\pi n_i$ , with  $n_i \in \mathbb{Z}$ , where  $e$  is the charge of test particles moving in the gravitational, magnetic background. We will absorb  $e$  by redefining  $\frac{\Lambda}{e^2} \rightarrow \Lambda$ , thereby rendering all magnitudes dimensionless.

When inserted in the Einstein equation, the ansatz (7.2,7.3) produces an algebraic equation that  $\lambda$  should satisfy, which depends on the node considered and on  $\Lambda$ . This is the *state existence* equation of a node:

$$\Lambda = L_n(\lambda) \equiv \frac{1}{2} \left[ J\lambda + \sum_{i=1}^J \frac{1}{n_i^2} \left( 1 + s_i \sqrt{1 - 2\lambda n_i^2} \right) \right]. \quad (7.4)$$

In equation (7.4), the signs  $s_i = \pm$  come from the solution of a quadratic equation satisfied by the curvatures  $K_i$  and give, at least *a priori*, several different equations for each given node  $n = (n_1, \dots, n_J)$ . The equation obtained by setting all signs to  $+$  is called the *principal branch*. Each solution of equation (7.4) for a given node  $n$  is a possible state of the MS-EM landscape. Nevertheless, existence of a solution is not enough: one must also demand positivity of all curvatures  $K_i$  and reality of  $\lambda$ . This condition rules out negative signs in equation (7.4) when looking for AdS states, because a single minus produces a negative curvature. Furthermore, positivity of square root arguments in (7.4) implies the

existence of a branching point  $\lambda_b = \frac{1}{2 \max_{1 \leq j \leq J} \{n_j^2\}}$  in the  $L_n(\lambda)$  function, thus placing an upper limit on the values of  $\lambda$  which states can possibly have.

Therefore, states might exist if adequate solutions are found to the existence equation (7.4), but they will be true physical states only if they are stable.

Stabilization is addressed by perturbing the ansatz (7.2) to

$$ds^2 = e^{2\phi - 2 \sum_{i=1}^J \xi_i} (-dt^2 + dx^2) + \sum_{i=1}^J e^{2\psi_i + 2\xi_i} (du_i^2 + dv_i^2). \quad (7.5)$$

The perturbations  $\xi_i(t, x)$  describe changes in the radii of the internal spheres, and thus they will be called *multi-radion* fields. In writing the equations of motion associated with the metric ansatz (7.5) we insert (7.3) for the curvatures  $\lambda$ ,  $K_i$  of the unperturbed solution, thus neglecting the backreaction of the perturbations on the cosmological part. After linearizing the equations of motion about the unperturbed solution  $\xi_i = 0$ ,<sup>1</sup> we obtain

$$e^{-2\phi} [\partial_{tt} \boldsymbol{\xi} - \partial_{xx} \boldsymbol{\xi}] = -H \boldsymbol{\xi}, \quad (7.6)$$

where  $\boldsymbol{\xi}$  is the column vector of the radions and  $H$  is a constant matrix formed out of a solution of (7.4). The stability criterion is therefore that the  $H$  matrix should be positive definite.

Some general stability results can be extracted from the characteristic polynomial of  $H$ :

- All AdS states are stable.
- All dS states having at least a vanishing flux number  $n_i = 0$  are unstable.
- All dS states coming from a non-principal branch are unstable. This leaves the principal branch of (7.4) as the only source of AdS and stable dS states.

Focusing on the principal branch of the existence equation, the function  $L_n(\lambda)$  has a maximum at  $\lambda = 0$ , and thus two solutions exist (one dS and another AdS) to the existence equation  $L_n(\lambda) = \Lambda$  near  $\lambda = 0$  if

$$\sum_{i=1}^J \frac{1}{n_i^2} \geq \Lambda. \quad (7.7)$$

We can see from (7.4) that Minkowski states with  $\lambda = 0$  can exist if and only if equality is satisfied in (7.7). The corresponding equation

$$\sum_{i=1}^J \frac{1}{n_i^2} = \Lambda. \quad (7.8)$$

defines a null- $\lambda$  hypersurface in flux space separating dS from AdS states on the principal branch. This hypersurface has asymptotic hyperplanes given by  $|n_i| = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ , and no dS state can exist below this value because of the branching point (AdS states should only

<sup>1</sup>The effective action for the multi-radion field is a 1+1 theory with a Lagrangian where the radions are coupled by dilatonic factors, so that one cannot establish the stability of the  $\xi_i = 0$  solution by simply looking for minima of an explicit multi-radion potential.

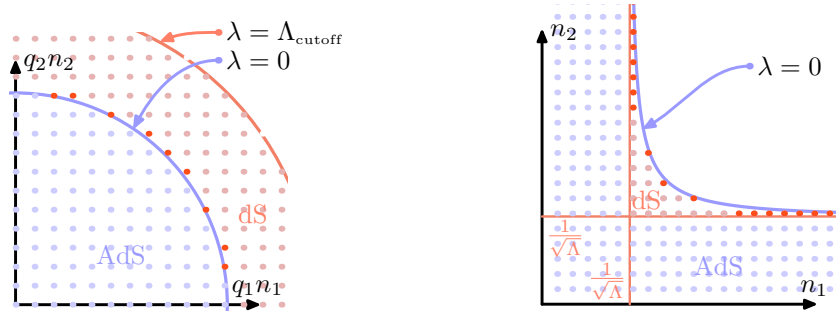


Figure 7.1: Left panel: Example of a  $J = 2$  BP landscape, showing the null- $\lambda$  curve separating dS from AdS states, some random low- $\lambda$  states (red) and the cutoff curve. Right panel: a  $J = 2$  MS-EM landscape, showing the null- $\lambda$  curve separating dS and AdS states (shown superimposed as they are different solutions of (7.4)), its asymptotes, some random low- $\lambda$  states and state chains (red).

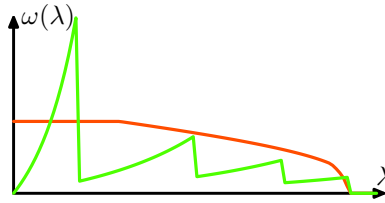


Figure 7.2: Effective cosmological constant distribution of a  $J = 2$  BP landscape (flat curve), and a  $J = 2$  MS-EM landscape (jagged curve).

obey inequality (7.7)). Thus, all dS states are confined between the null- $\lambda$  hypersurface (7.8) and its asymptotic hyperplanes, so that flux numbers in a node cannot be smaller than  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ ; otherwise a dS state will not exist at such a node.

Immediately one concludes that all nodes near the coordinate hyperplanes are devoid of states, and thus the  $\alpha^*$ -problem is absent in the MS-EM landscape.

In the BP landscape, the null- $\lambda$  hypersurface is a sphere, as can be seen from equation (7.1). In contrast, the null- $\lambda$  hypersurface (7.8) in the MS-EM landscape is not compact, and this allows the existence of *state chains*, see figure 7.1 (right) for a example in the  $J = 2$  case.

Chained states are arranged by decreasing  $\lambda$ , and the states with lowest  $\lambda$  are always stable. They contribute to the effective cosmological constant distribution in peaks, which become very sharp when  $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  approaches an integer from below. Thus, the  $\lambda$  distribution has a dominant peak coming from the longest state chains, and subdominant peaks separated by a gap from the dominant one which merge with a bulk distribution having an almost constant average behavior before vanishing after reaching the maximum  $\lambda$  value of stable dS states, which is  $\lambda_{\max} = \frac{2\Lambda}{J(J+3)}$ . Figure 7.2 summarizes the very different behavior of both distributions.

Therefore, the special form of the null- $\lambda$  hypersurface (7.8) leads to state chains, which generate peaks in the low- $\lambda$  region of the  $\lambda$  distribution, thereby providing an alternative mechanism for finding small values of the effective cosmological constant besides the random closeness, which is also present.

### 7.3 Anthropical states in the MS-EM landscape

We can look for a set of integers  $\{n_1, \dots, n_J\}$  which approximately solve equation (7.8), expecting that reasonably good choices will yield very low values of the 1+1 cosmological constant  $\lambda$ . Choosing the best integer step by step we arrive at the following recurrence relation:

$$\Lambda_{j+1} = f(\Lambda_j) = \Lambda_j - \left[ \Lambda_j^{-\frac{1}{2}} \right]^{-2}, \quad n_j = \left[ \Lambda_j^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (7.9)$$

The initial value triggering the recurrence is  $\Lambda_1 = \Lambda$ . After  $J$  steps, we obtain a solution choosing the last integer as  $n_J = \left[ \Lambda_J^{-1/2} \right]$ . Equation (7.9) is a fixed point iteration with superlinear convergence rate, whose solution is thus a double exponential  $\Lambda_j \approx 2^{\sum_{k=0}^{j-2} (\frac{3}{2})^k} \Lambda^{(\frac{3}{2})^{j-1}}$ , ( $j \geq 2$ ). It can be shown [140] that the resulting fast-growing integers  $\{n_j\}$  form a node which has always a well-defined stable state on it. Moreover, this node is the end of a very long state chain, which translates in a very narrow peak in the  $\lambda$  distribution containing  $\sim n_J$  states whose support is the interval  $[0, \Lambda_J/2]$ . Thus, we can find the whole peak inside the anthropic range  $0 \leq \lambda \leq \lambda_A$  for a given  $\Lambda$  by equating  $\lambda_A = \Lambda_J/2$  and solving for  $J$ , resulting in  $J = 1 + \log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{\log(\lambda_A/2)}{\log(4\Lambda)} \right)$ . As an example, with  $\lambda_A = 10^{-120}$ , we can obtain an anthropic peak using  $\Lambda = 0.1$  and  $J = 15$ , yielding  $\sim 10^{57}$  states. Using  $\Lambda = 0.0002$  and  $J = 10$  we obtain  $10^{59}$  anthropic states with the same  $\lambda_A$ . We can see that the MS-EM landscape contains a huge amount of anthropic states with moderate values of  $J$  for any  $\Lambda$ , and thus no fine-tuning is needed.

It can be seen that states in the anthropic chains just described are non-generic despite being very numerous. Nevertheless, the peak in the prior distribution can be made very narrow when compared with the full anthropic range, and thus the anthropic factor influencing the cosmological constant prediction can be considered as almost constant. As emphasized in [91], the form of the prior distribution can completely change the prediction, and the narrow peak provided by anthropic chains is an example where the prior can dominate the prediction of the cosmological constant's value.

### 7.4 Conclusions

Trying to reconcile the BP landscape with the KKLT stabilization mechanism leads to the  $\alpha^*$ -problem of the BP model. Addressing this problem requires a model where an exact solution of stable dS and AdS states can be found, and a very simple example of this model is given by the MS-EM landscape. Looking at the states found in this model, we can extrapolate that the assumed fixing of the moduli in the BP case might not be enough to guarantee the existence and stability of the states in all nodes. Thus, we should conclude that such an analysis would dramatically change the conclusions of all counting problems in the BP landscape, in particular the predictions concerning the number of anthropic states.

Moreover, the non-trivial geometrical features of the null- $\lambda$  hypersurface of the MS-EM landscape lead to the existence of state chains, which provide a new mechanism for finding low- $\lambda$  states. This would largely affect all probability computations in this context, as reflected by the existence of a huge number of anthropic states in the model. This non-trivial geometrical fact, with such profound implications in the predictions of the theory, may also well be present, maybe under different forms, in the true string theory landscape.

## Acknowledgments

We would like to thank Noel Hughes and Susana González for reading this manuscript, and the Pedro Pascual Benasque Center of Science. We also thank F. Denef, R. Emparan, J. Garriga, B. Janssen, D. Marolf and J. Zanelli for useful discussions and encouragement. This work has been supported by CICYT (grant FPA-2009-09638) and DGIID-DGA (grant 2011-E24/2). We also thank the support given by grant A9335/10.

# Capítulo 8

## Resumen y conclusiones

### 8.1 Objetivos de investigación

La búsqueda de una reconciliación entre la Relatividad General y el modelo estándar de la Física de Partículas han dado lugar a notables teorías como la Cosmología Cuántica de Bucles (LQC) o la teoría de cuerdas. Ésta última ha progresado desmesuradamente en los últimos treinta años, dando lugar a diferentes herramientas conceptuales innovadoras, como las dualidades entre teorías, la explicación de la entropía de los agujeros negros, el paisaje, o la correspondencia AdS/CFT. Lamentablemente, ninguna de estas hermosas partes de la teoría de cuerdas ha contactado aún con la realidad física objetiva mediante la explicación de ningún dato experimental, ni ha resuelto, como se pretendía, las lagunas dejadas atrás por la Relatividad General y el modelo estándar de la Física de partículas. Dichas lagunas permanecen en forma de contradicciones internas, como el problema de la constante cosmológica, o en forma de la disconformidad de la comunidad científica con el estado de cosas actual, que se manifiesta en una búsqueda pertinaz de alternativas.

No obstante, las ideas desprendidas de las nuevas teorías son demasiado bellas, y contienen suficientes herramientas de cálculo, como para dejarlas pasar sin explotar lo que puedan dar de sí. Un ejemplo es la correspondencia AdS/CFT, que se aplica a multitud de sistemas, si bien las suposiciones de invariancia conforme y supersimetría limitan mucho su aplicabilidad, y otro ejemplo es la idea del multiverso, que parece ser una consecuencia inevitable de las teorías modernas, y que se ha tomado recientemente como un ingrediente imprescindible de la solución del problema de la constante cosmológica.

El multiverso es simplemente la plétora de soluciones cosmológicas válidas que la teoría de cuerdas presenta en cuanto se compactifica para intentar reproducir la física que observamos en cuatro dimensiones. Hay una variedad de soluciones tan vasta, que la comunidad de físicos teóricos piensa que podremos encontrar a nuestro Universo entre todas esas posibilidades, pero ello transferirá el problema a otra forma: ¿Por qué, de entre todas las posibilidades que la teoría permite, se realiza ésta y no ninguna otra? La respuesta habitual es el uso del principio antrópico, lo cual no permite explicar los valores observados. La corriente de pensamiento actual parece apuntar en el sentido de una explicación cuántica a la selección del Universo observado, pero, claro está, nos falta la teoría que proporcione dicha explicación.

Mientras esa teoría llega, si es que existe, podemos explorar el paisaje de posibilidades para comprobar hasta qué punto nuestro Universo está incluido en él. Uno de los modelos



más sencillos del paisaje es el de Bousso-Polchinski, el cual presenta la ventaja de que el cómputo de los posibles estados de vacío resulta ser un problema tratable. Esto es así porque los estados del paisaje se construyen poniendo flujo cuantizado en los tres-ciclos de la variedad compacta que reproduce la cosmología tetradimensional a partir de la supergravedad que se conjetura describe la teoría M de forma efectiva a baja energía. Las hipótesis simplificadoras producen una expresión muy sencilla para la constante cosmológica efectiva de las soluciones cosmológicas (1.20), cuya principal consecuencia es que los estados del paisaje están dispuestos en un retículo, y nos interesa encontrar aquellos que están próximos a la superficie de una esfera. Los estados más próximos tendrán un valor muy pequeño de la constante cosmológica efectiva, tanto menor cuantos más flujos se tengan. Éste es el mecanismo de Bousso-Polchinski para obtener valores pequeños de la constante cosmológica.

Contar los estados de un retículo próximos a una esfera es un problema que puede resolverse de una manera muy sencilla asignando un volumen a cada estado y dividiendo el volumen de una capa delgada cercana a la esfera entre dicho volumen elemental. Desgraciadamente, proceder así lleva a un cierto número de paradojas cuando el número de flujos empieza a ser grande, como por ejemplo que una sola celda pueda tener un volumen mayor que la capa esférica completa, no importa lo pequeñas que sean las dimensiones lineales de la celda comparadas con el radio de la esfera. Así, el principal objetivo de la investigación presentada en esta Tesis consiste en refinar los problemas de conteo en el paisaje de Bousso-Polchinski para tratar con las situaciones en las que podrían aparecer las paradojas.

### **Primer Objetivo de Investigación**

**Refinar los problemas de conteo de estados de vacío en el paisaje de Bousso-Polchinski**

Además, al efectuar el cómputo del número de estados que satisfacen una cierta condición, como por ejemplo la de poseer una constante cosmológica tan pequeña o más que la que se observa en nuestro Universo, los métodos más refinados de conteo permiten obtener resultados como la distribución de los valores de la constante cosmológica que permiten un cálculo directo de la probabilidad de encontrar un estado parecido al nuestro en el paisaje. Esta probabilidad es muy pequeña, por supuesto, lo que fuerza a recurrir, como ya se ha explicado más arriba, al principio antrópico, difuminándose así toda la elegancia del mecanismo de Bousso-Polchinski.

No obstante, la propia peculiaridad del modelo de Bousso-Polchinski hace que algunos métodos de conteo puedan devolver cantidades desprovistas de significado. Por ejemplo, el análisis de estabilidad de los estados de vacío no se lleva a cabo, de modo que se asume a priori que todos los estados son estables. Sin embargo, los mecanismos de estabilización que podrían añadirse, en modelos futuros, para establecer la estabilidad de los estados, exigen que haya valores elevados de los flujos. Los estados que cumplen esta condición son abundantes cuando el número de módulos de la compactificación es pequeño, pero esto no tiene porqué ser así cuando el número de módulos es grande, lo cual es un requisito del modelo del Bousso-Polchinski para tener una opción a resolver el problema de la constante cosmológica. Por tanto, el segundo objetivo de investigación de esta Tesis es establecer

cómo afecta la condición de tener un número elevado de flujos a los problemas de contaje en el paisaje de Bousso-Polchinski.

### **Segundo Objetivo de Investigación**

Establecer cómo se modifican los problemas de contaje en el paisaje de Bousso-Polchinski cuando se cuentan estados con grandes valores de los flujos

Esta modificación de los problemas de contaje revela que la inmensa mayoría de los estados del paisaje de Bousso-Polchinski tiene uno o más flujos nulos, lo cual los haría inestables en el mecanismo Kachru-Kalosh-Linde-Trivedi, en caso de poderse implementar directamente en el modelo de Bousso-Polchinski. Por supuesto, esto es un problema grave del modelo, porque pone de manifiesto que el análisis de estabilidad cambiaría todos los resultados de los problemas de contaje de una forma impredecible. Esta tensión entre el número de flujos, que debe ser elevado para obtener estados antrópicos, pero que debe ser pequeño para poder tener todos los flujos ocupados, es lo que se ha denominado el problema- $\alpha^*$ .

Evaluar el impacto del problema- $\alpha^*$  es así el siguiente paso en el programa. Para ello, debe desarrollarse un modelo de compactificación con muchos flujos en el cual pueda llevarse a cabo un análisis de estabilidad para ver de qué manera un valor elevado del número de flujos incidiría en los problemas de contaje.

### **Tercer Objetivo de Investigación**

Obtener un modelo con varios flujos estabilizados para evaluar el impacto del análisis de estabilidad sobre los problemas de contaje de estados

El modelo en cuestión no es otro que el paisaje de Einstein-Maxwell multi-esfera, que posee un número de módulos ajustable, y que permite un análisis aproximado de la estabilidad de sus estados de vacío. Un examen detenido de dicho modelo revela que todos sus estados de vacío cumplen la condición de tener valores elevados de los flujos, casi tanto como sea compatible con las ecuaciones de movimiento, y por tanto los estados estables se encuentran alejados de los hiperplanos coordinados. Esto muestra que el paisaje de Einstein-Maxwell multi-esfera no presenta el problema- $\alpha^*$ , confirmando así que cualquier análisis de estabilidad sobre el paisaje de Bousso-Polchinski ofrecería una imagen muy distinta del mismo, pues sus problemas de contaje tendrían una solución muy diferente.

Por último, uno de los puntos fuertes del modelo de Bousso-Polchinski, a saber, la existencia de estados antrópicos, se ve ensombrecido por el hecho de que no pueden construirse explícitamente, sino que su presencia se justifica con argumentos estadísticos y combinatorios. Por tanto, un último objetivo de esta investigación sería la construcción detallada de estados antrópicos en el paisaje de Einstein-Maxwell multi-esfera que se ha utilizado para evaluar el impacto del problema- $\alpha^*$ .

### **Cuarto Objetivo de Investigación**

Construir explícitamente estados antrópicos en el paisaje de Einstein-Maxwell multi-esfera

Este objetivo queda cumplido con el descubrimiento de las cadenas antrópicas de estados, que son estructuras lineales de puntos del retículo, que pueden ser muy largas, con constantes cosmológicas del orden del valor observado para valores moderados del número de flujos, sin requerir ajuste fino de ningún otro parámetro.

Por supuesto, el objetivo, más ambicioso, de justificar mediante una teoría cuántica por qué razón el Universo se decanta por los estados antrópicos en lugar de por cualesquiera otros, deberá esperar a una extensión a cuatro dimensiones y a una cuantización del modelo de Einstein-Maxwell multi-esfera, lo cual queda para trabajo futuro.

## 8.2 Metodología utilizada

La metodología utilizada para llevar a cabo el trabajo expuesto en esta Tesis ha consistido esencialmente en aplicar el razonamiento inductivo para producir ideas sobre enfoques alternativos a los problemas considerados, y aplicar con posterioridad el razonamiento deductivo para explorar las principales consecuencias a las que conducen y encontrar interpretaciones que ayuden a entender los resultados. Cada idea ha tenido que ser implementada mediante aproximaciones analíticas, aproximaciones numéricas y simulaciones, en ocasiones de varias maneras, y siempre se ha procurado proporcionar condiciones de validez para las aproximaciones empleadas. Unos procedimientos ayudan a validar los otros: Las aproximaciones numéricas y las simulaciones pueden arrojar luz sobre la validez de las aproximaciones analíticas y viceversa. Como todos los trabajos en física teórica, los experimentos numéricos ayudan a perfilar los cálculos analíticos y éstos últimos le dan sentido a los primeros. La interpretación posterior de los resultados constituye la forma de relacionar los diversos enfoques empleados para cada problema.

Las ideas de las que han surgido los diversos métodos de aproximación para resolver los problemas considerados aquí se han obtenido siempre mediante debate, en el transcurso del cual la creatividad ha jugado un papel esencial. En muchos casos, las ideas han resultado no ser productivas, y el trabajo necesario hasta alcanzar el punto de reconocimiento de no validez de una idea no figura publicado ni reflejado en ningún sitio, si bien ha sido realizado de todas formas. En los casos en los que las ideas sí han sido productivas han dado lugar a las publicaciones que se recogen aquí.

Los recursos matemáticos utilizados forman parte de la formación básica de cualquier físico teórico: Geometría analítica, análisis de funciones de varias variables, funciones de variable compleja, análisis de Fourier, teoría de la Probabilidad, Estadística, geometría diferencial y sistemas dinámicos. En los cálculos numéricos y simulación, se han utilizado programas elaborados por el autor en el lenguaje de programación de propósito general C++ y en el lenguaje de análisis estadístico R. Las gráficas se han producido usando la herramienta gráfica GNUPLOT, el lenguaje MetaPost y, nuevamente, R.

## 8.3 Aportaciones del doctorando

En el desarrollo de los trabajos expuestos, el debate sobre el enfoque a tomar ha sido siempre compartido entre el autor y el director de la Tesis. Habiendo surgido del debate las ideas centrales de los trabajos, es muy difícil elucidar a quién pertenecen. Una vez establecida la ruta de ataque de un problema, las aproximaciones necesarias para reducirlo,

los cálculos necesarios para resolverlo, las simulaciones y cálculos numéricos necesarios para exponer los aspectos que eluden el tratamiento analítico y las gráficas para exponer los resultados han sido tarea del autor de esta Tesis.

## 8.4 Conclusiones finales

Para concluir la presente Tesis, enumeramos las conclusiones que pueden extraerse de nuestro trabajo.

- (1)** El conteo de estados mediante cociente de volúmenes en el espacio de flujos del paisaje de Bousso-Polchinski es sólo factible para valores pequeños del parámetro  $h = \frac{J\bar{q}^2}{R_0^2}$ . Si  $J$  es grande, como suele asumirse en este paisaje, valores naturales de  $\bar{q}$  pueden dar lugar a un elevado valor de  $h$  e invalidar el conteo por cociente de volúmenes. Por la misma razón, algunas condiciones en las que parece que el método de conteo mediante cociente de volúmenes va a fallar (distancias pequeñas al origen, tamaños moderados de los espaciados del retículo) se producen para valores de  $h$  que son en realidad pequeños, de modo que el método funciona a pesar de que la intuición sospeche lo contrario.
- (2)** Los métodos exactos de conteo permiten determinar de manera aproximada la distribución del número de componentes no nulas de un nodo en el paisaje de Bousso-Polchinski. Dicha distribución es gaussiana con muy buena aproximación. Encontramos así que, de forma genérica, la fracción típica de componentes no-nulas de un nodo del paisaje de Bousso-Polchinski es inferior a la unidad.
- (3)** Hay una tensión entre las exigencias que se imponen a los números cuánticos de los flujos. Por una parte, el mecanismo de neutralización de la constante cosmológica efectiva en el paisaje de Bousso-Polchinski exige que  $J$  sea elevado, para poder cancelar cualquier contribución de la densidad de energía de vacío sin necesidad de ajuste fino. Ya se ha hecho notar en el punto anterior que, en caso de  $J$  elevado, una fracción bien determinada de los flujos se anula de forma genérica, y por tanto los valores de los flujos en general van a ser bajos. Por otra parte, para que el mecanismo de estabilización de los módulos de Kachru-Kalosh-Linde-Trivedi funcione, deben tenerse valores grandes de los flujos. Claramente ambas condiciones son contradictorias: éste es el problema- $\alpha^*$  del paisaje de Bousso-Polchinski.
- (4)** En cualquier modelo de paisaje, el análisis de estabilidad es imprescindible por dos razones fundamentales. En primer lugar, la estabilidad de un estado es un criterio fundamental para contarlos entre los estados físicos del sistema, y por tanto el conteo de estados depende crucialmente del resultado del análisis de estabilidad. Por otra parte, la estabilidad fija el valor de los módulos del modelo, que ya no pueden descontrolarse y decompactificar la geometría. Ambos efectos son importantes, y ambos se consiguen con el mismo análisis de estabilidad.
- (5)** El modelo de Bousso-Polchinski es una simplificación tan grande del paisaje de la teoría de cuerdas en gran parte debido a la falta de análisis de estabilidad. A causa de esta carencia, los cálculos de probabilidades que se llevan a cabo en el paisaje de Bousso-Polchinski carecen por completo de significado, pues sus conclusiones podrían cambiar drásticamente de llevarse a cabo un análisis detallado de estabilidad.

- (6)** El paisaje de Einstein-Maxwell multi-esfera es un modelo de paisaje suficientemente simple como para ser exactamente resoluble, y sirve así de banco de pruebas para evaluar las consecuencias de tener un elevado número de flujos en un modelo con los módulos estabilizados. En efecto, se encuentra que los flujos deben tomar valores grandes, como se predice en el mecanismo de Kachru-Kalosh-Linde-Trivedi: de hecho deben cumplir unas condiciones bastante restrictivas para dar lugar a un estado estable. Por esta razón, cualquier nodo con algún flujo nulo no da lugar a un estado del paisaje, lo cual sustenta el contenido del problema- $\alpha^*$  y permite concluir que dicho problema no se presenta cuando se completa el análisis de estabilidad.
- (7)** El modelo de Einstein-Maxwell multi-esfera permite también exhibir explícitamente estados antrópicos contruidos sin necesidad de un ajuste fino de los parámetros del modelo. En el paisaje de Bousso-Polchinski se sabe que dichos estados pueden existir mediante consideraciones estadísticas, pero sabemos que esos argumentos carecen de valor sin un análisis previo de estabilidad. Por lo tanto, no es posible saber si en el paisaje de Bousso-Polchinski pueden de hecho encontrarse estados antrópicos o no. Sin embargo, los estados finales de las cadenas en el paisaje de Einstein-Maxwell multi-esfera pueden ser estados antrópicos para valores moderados del número de esferas  $J$ , sin necesidad del ajuste fino de los parámetros del modelo. Por tanto, las cadenas de estados en el paisaje de Einstein-Maxwell multi-esfera constituyen un mecanismo de neutralización de la constante cosmológica efectiva alternativo al dado en el modelo de Bousso-Polchinski, con la ventaja de incorporar el análisis de estabilidad y de permitir la construcción explícita de estados antrópicos.
- (8)** Por último, las cadenas de estados pueden producir picos muy acusados en la densidad de estados que podrían dominar la predicción de la constante cosmológica efectiva dentro de la ventana antrópica, constituyendo así un candidato alternativo a la solución del problema de la constante cosmológica. No puede considerarse como tal porque aún falta un ingrediente: un mecanismo dinámico que decida que la probabilidad de los modelos que poseen cadenas antrópicas es mayor que la de los modelos que no las poseen. La elaboración de un modelo completo en el que se salve este escollo queda para trabajo futuro.

# Apéndice A

## Factores de impacto

Los artículos recopilados en esta tesis han sido todos ellos publicados en revistas especializadas internacionales, con la excepción del capítulo 3, correspondiente a la referencia [102], que formó parte del libro *Mathematical Physics and Field Theory*, editado por Prensas Universitarias de Zaragoza.

Los siguientes datos han sido extraídos de la página web que recopila los datos del *Journal Citation Reports* (JCR).

- (1) Los capítulos 2, 4 y 6 (correspondientes a las referencias [103], [101] y [140]), han sido publicados en la revista **Physical Review D** (ISSN 1550-7998), cuyo factor de impacto ha sido de **4.691** en el año 2012, con un factor de impacto a 5 años de **4.170**. Dicha revista se ubica en la categoría o área temática PHYSICS, PARTICLES AND FIELDS, cuyo factor de impacto es **1.902** en mediana (**3.435** agregado) para el año 2012.
- (2) El capítulo 7, correspondiente a la referencia [141], ha sido publicado en la revista **Physical Review Letters** (ISSN 0031-9007), cuyo factor de impacto ha sido de **7.943** en el año 2012, con un factor de impacto a 5 años de **7.435**. Dicha revista se ubica en la categoría o área temática PHYSICS, MULTIDISCIPLINARY, con un factor de impacto de **1.170** en mediana (**2.871** agregado) para el año 2012.

El capítulo 5, correspondiente a la referencia [142], ha sido publicado en la revista **Journal of Physics: Conference Series** (ISSN 17426588), que no está incluida en las relacionadas en el JCR. Su impacto en la investigación se cuantifica mediante el índice SJR, cuyo valor es de **0.250** ( $Q_3$ ) en el año 2011. Para comparar este indicador con el factor de impacto del JCR, podemos indicar que el índice SJR de la revista *Physical Review Letters* es de **5.144** (2011), y el índice SJR de la revista *Physical Review D* es de **2.152** (2011), ambas en  $Q_1$ .



# Bibliography

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics, Volume II: The Classical Theory of Fields*. Butterworth-Heinemann, Jan. 1980.
- [2] R. M. Wald. *General Relativity*. 1ST. University Of Chicago Press, June 15, 1984. ISBN: 0226870332.
- [3] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. First Edition. Wiley, July 15, 1972. ISBN: 0471925675.
- [4] S. G. Turyshev. “Experimental Tests of General Relativity: Recent Progress and Future Directions”. *Usp.Fiz.Nauk* 179 (2009), p. 3034. arXiv: [0809.3730 \[gr-qc\]](#).
- [5] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, USA, Apr. 28, 2008. ISBN: 0198526822.
- [6] P. Ade et al. “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters” (2013). arXiv: [1303.5076 \[astro-ph.CO\]](#).
- [7] P. Ade et al. “Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results” (2013). arXiv: [1303.5062 \[astro-ph.CO\]](#).
- [8] A. H. Guth. “The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems”. *Phys.Rev.* D23 (1981), pp. 347–356.
- [9] A. D. Linde. “A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems”. *Phys.Lett.* B108 (1982), pp. 389–393.
- [10] A. H. Guth. “Inflation and eternal inflation”. *Phys.Rept.* 333 (2000), pp. 555–574. arXiv: [astro-ph/0002156 \[astro-ph\]](#).
- [11] A. G. Riess et al. “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”. *Astron.J.* 116 (1998), pp. 1009–1038. arXiv: [astro-ph/9805201 \[astro-ph\]](#).
- [12] S. Perlmutter et al. “Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae”. *Astrophys.J.* 517 (1999), pp. 565–586. arXiv: [astro-ph/9812133 \[astro-ph\]](#).
- [13] G. Hinshaw et al. “Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results”. *Astrophys.J.Suppl.* 208 (2013), p. 19. arXiv: [1212.5226 \[astro-ph.CO\]](#).
- [14] A. G. Riess et al. “A Redetermination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope from a Differential Distance Ladder”. *Astrophys.J.* 699 (2009), pp. 539–563. arXiv: [0905.0695 \[astro-ph.CO\]](#).



- [15] L. D. Landau and L. M. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics, Volume III: Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory)*. Jan. 15, 1977.
- [16] A. Messiah. *Quantum Mechanics (Physics)*. Dover Publications, Jan. 21, 2000. ISBN: 0486409244.
- [17] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields (Volume 1)*. 1st ed. Cambridge University Press, June 30, 1995. ISBN: 0521550017.
- [18] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields Vol. II (Quantum Theory of Fields)*. Cambridge University Press, May 9, 2005. ISBN: 0521670543.
- [19] P. W. Higgs. “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons”. *Physical Review Letters* 13 (Oct. 1964), pp. 508–509.
- [20] F. Englert and R. Brout. “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons”. *Physical Review Letters* 13 (Aug. 1964), pp. 321–323.
- [21] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. Kibble. “Global Conservation Laws and Massless Particles”. *Physical Review Letters* 13 (Nov. 1964), pp. 585–587.
- [22] G. Arnison et al. “Experimental observation of isolated large transverse energy electrons with associated missing energy at  $s=540$  GeV”. *Physics Letters B* 122.1 (1983), pp. 103–116. ISSN: 0370-2693.
- [23] M. Banner et al. “Observation of single isolated electrons of high transverse momentum in events with missing transverse energy at the {CERN} pp collider”. *Physics Letters B* 122.5–6 (1983), pp. 476–485. ISSN: 0370-2693. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269383916052>.
- [24] P. Bagnaia et al. “Evidence for  $Z^0 \rightarrow e^+ e^-$  at the CERN anti-p p Collider”. *Phys.Lett.* B129 (1983), pp. 130–140.
- [25] S. Chatrchyan et al. “Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC”. *Phys.Lett.* B716 (2012), pp. 30–61. arXiv: 1207.7235 [hep-ex].
- [26] G. Aad et al. “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”. *Phys.Lett.* B716 (2012), pp. 1–29. arXiv: 1207.7214 [hep-ex].
- [27] M. Herrero. “The Standard model” (1998). arXiv: hep-ph/9812242 [hep-ph].
- [28] J. L. Rosner. “The Standard model in 2001” (2001), pp. 1–56. arXiv: hep-ph/0108195 [hep-ph].
- [29] C. Burgess and G. Moore. *The Standard Model: A Primer*. Cambridge University Press, Dec. 25, 2006. ISBN: 0521860369.
- [30] J. Beringer et al. “Review of Particle Physics (RPP)”. *Phys.Rev.* D86 (2012), p. 010001.
- [31] A. Zee. *Quantum field theory in a nutshell*. 2003.
- [32] H. Nishino et al. “Search for Proton Decay via  $p \rightarrow e^+ \pi^0$  and  $p \rightarrow \mu^+ \pi^0$  in a Large Water Cherenkov Detector”. *Phys. Rev. Lett.* 102 (14 Apr. 2009), p. 141801.
- [33] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Volume 3: Supersymmetry*. Cambridge University Press, May 9, 2005. ISBN: 0521670551.

- [34] S. Weinberg. “The Cosmological Constant Problem”. *Rev.Mod.Phys.* 61 (1989), pp. 1–23.
- [35] R. Bousso. “TASI Lectures on the Cosmological Constant”. *Gen.Rel.Grav.* 40 (2008), pp. 607–637. arXiv: 0708.4231 [hep-th].
- [36] S. Nobbenhuis. “Categorizing different approaches to the cosmological constant problem”. *Found.Phys.* 36 (2006), pp. 613–680. arXiv: gr-qc/0411093 [gr-qc].
- [37] G. 't Hooft. “Dimensional reduction in quantum gravity” (1993). arXiv: gr-qc/9310026 [gr-qc].
- [38] R. Bousso. “The Holographic principle”. *Rev.Mod.Phys.* 74 (2002), pp. 825–874. arXiv: hep-th/0203101 [hep-th].
- [39] G. E. Volovik. *The Universe in a Helium Droplet*. Clarendon Press ; Oxford University Press, May 15, 2003. ISBN: 0198507828.
- [40] E. P. Verlinde. “On the Origin of Gravity and the Laws of Newton”. *JHEP* 1104 (2011), p. 029. arXiv: 1001.0785 [hep-th].
- [41] L. Randall and R. Sundrum. “An Alternative to compactification”. *Phys.Rev.Lett.* 83 (1999), pp. 4690–4693. arXiv: hep-th/9906064 [hep-th].
- [42] L. Randall and R. Sundrum. “A Large mass hierarchy from a small extra dimension”. *Phys.Rev.Lett.* 83 (1999), pp. 3370–3373. arXiv: hep-ph/9905221 [hep-ph].
- [43] N. Arkani-Hamed et al. “Nonlocal modification of gravity and the cosmological constant problem” (2002). arXiv: hep-th/0209227 [hep-th].
- [44] D. H. Eckhardt, J. L. G. Pestana, and E. Fischbach. “Cosmological implications of massive gravitons”. *New Astron.* 15 (2010), pp. 175–179. arXiv: 0909.2272 [gr-qc].
- [45] J. Hartle and S. Hawking. “Wave Function of the Universe”. *Phys.Rev.* D28 (1983), pp. 2960–2975.
- [46] S. Hawking. “The Cosmological Constant Is Probably Zero”. *Phys.Lett.* B134 (1984), p. 403.
- [47] S. R. Coleman. “Why There Is Nothing Rather Than Something: A Theory of the Cosmological Constant”. *Nucl.Phys.* B310 (1988), p. 643.
- [48] S. Weinberg. “Anthropic Bound on the Cosmological Constant”. *Phys.Rev.Lett.* 59 (1987), p. 2607.
- [49] A. Vilenkin. “Predictions from quantum cosmology”. *Phys.Rev.Lett.* 74 (1995), pp. 846–849. arXiv: gr-qc/9406010 [gr-qc].
- [50] G. Gibbons and N. Turok. “The Measure Problem in Cosmology”. *Phys.Rev.* D77 (2008), p. 063516. arXiv: hep-th/0609095 [hep-th].
- [51] A. Ashtekar. “An Introduction to Loop Quantum Gravity Through Cosmology”. *Nuovo Cim.* B122 (2007), pp. 135–155. arXiv: gr-qc/0702030 [gr-qc].
- [52] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz. *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*. 1st ed. Cambridge University Press, Jan. 15, 2007. ISBN: 0521860695.
- [53] B. S. DeWitt. “Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory”. *Phys. Rev.* 160 (5 Aug. 1967), pp. 1113–1148. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.160.1113>.

- [54] C. Rovelli and T. Thiemann. “The Immirzi parameter in quantum general relativity”. *Phys.Rev.* D57 (1998), pp. 1009–1014. arXiv: [gr-qc/9705059](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9705059) [gr-qc].
- [55] R. Kantowski and R. Sachs. “Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models”. *J.Math.Phys.* 7 (1966), p. 443.
- [56] J. Polchinski. *String Theory, Vol. 1 : An introduction to the Bosonic String*. Cambridge University Press, 1998. ISBN: 0-521-63303-6.
- [57] J. Polchinski. *String Theory, Vol. 2 : Superstring Theory and Beyond*. Cambridge University Press, 1998. ISBN: 0-521-63304-4.
- [58] C. V. Johnson. *D-Branes*. Cambridge University Press, Dec. 19, 2002. ISBN: 0521809126.
- [59] J. Polchinski. “What is string theory?” (1994). arXiv: [hep-th/9411028](https://arxiv.org/abs/hep-th/9411028) [hep-th].
- [60] J. Polchinski. *Joe’s Little Book of String*. 2010. URL: <http://www.kitp.ucsb.edu/sites/default/files/users/joep/JLBS.pdf>.
- [61] G. ’t Hooft. *Introduction to String Theory*. 2004. URL: <http://www.staff.science.uu.nl/~hooft101/lectures/stringnotes.pdf>.
- [62] J. Bedford. “An Introduction to String Theory” (2011). arXiv: [1107.3967](https://arxiv.org/abs/1107.3967) [hep-th].
- [63] D. Tong. “String Theory” (2009). arXiv: [0908.0333](https://arxiv.org/abs/0908.0333) [hep-th].
- [64] L. Susskind. “Dual-symmetric theory of hadrons. 1.” *Nuovo Cim.* A69S10 (1970), pp. 457–496.
- [65] T. Regge. “Introduction to complex orbital momenta”. *Nuovo Cim.* 14 (1959), p. 951.
- [66] A. M. Polyakov. “Quantum Geometry of Bosonic Strings”. *Phys.Lett.* B103 (1981), pp. 207–210.
- [67] O. Klein. “Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English)”. *Z.Phys.* 37 (1926), pp. 895–906.
- [68] V. Rubakov. “Large and infinite extra dimensions: An Introduction”. *Phys.Usp.* 44 (2001), pp. 871–893. arXiv: [hep-ph/0104152](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0104152) [hep-ph].
- [69] N. Arkani-Hamed et al. “Neutrino masses from large extra dimensions”. *Phys.Rev.* D65 (2002), p. 024032. arXiv: [hep-ph/9811448](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9811448) [hep-ph].
- [70] N. Arkani-Hamed et al. “A Small cosmological constant from a large extra dimension”. *Phys.Lett.* B480 (2000), pp. 193–199. arXiv: [hep-th/0001197](https://arxiv.org/abs/hep-th/0001197) [hep-th].
- [71] J. Polchinski. “Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges”. *Phys.Rev.Lett.* 75 (1995), pp. 4724–4727. arXiv: [hep-th/9510017](https://arxiv.org/abs/hep-th/9510017) [hep-th].
- [72] W. E. Thirring. “A Soluble relativistic field theory?” *Annals Phys.* 3 (1958), pp. 91–112.
- [73] S. R. Coleman. “The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model”. *Phys.Rev.* D11 (1975), p. 2088.
- [74] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. 2nd repr. 1989. North Holland, Apr. 15, 1987. ISBN: 0444870474.
- [75] J. D. Bekenstein. “Black holes and entropy”. *Phys.Rev.* D7 (1973), pp. 2333–2346.

- [76] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. Hawking. “The Four laws of black hole mechanics”. *Commun.Math.Phys.* 31 (1973), pp. 161–170.
- [77] A. Strominger and C. Vafa. “Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy”. *Phys.Lett.* B379 (1996), pp. 99–104. arXiv: hep-th/9601029 [hep-th].
- [78] J. M. Maldacena. “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity”. *Adv.Theor.Math.Phys.* 2 (1998), pp. 231–252. arXiv: hep-th/9711200 [hep-th].
- [79] P. Kovtun, D. Son, and A. Starinets. “Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics”. *Phys.Rev.Lett.* 94 (2005), p. 111601. arXiv: hep-th/0405231 [hep-th].
- [80] A. Strominger. “The dS / CFT correspondence”. *JHEP* 0110 (2001), p. 034. arXiv: hep-th/0106113 [hep-th].
- [81] L. Susskind. “The World as a hologram”. *J.Math.Phys.* 36 (1995), pp. 6377–6396. arXiv: hep-th/9409089 [hep-th].
- [82] E. Witten. “Anti-de Sitter space and holography”. *Adv.Theor.Math.Phys.* 2 (1998), pp. 253–291. arXiv: hep-th/9802150 [hep-th].
- [83] L. Susskind and E. Witten. “The Holographic bound in anti-de Sitter space” (1998). arXiv: hep-th/9805114 [hep-th].
- [84] L. Susskind. “The Anthropic landscape of string theory” (2003). arXiv: hep-th/0302219 [hep-th].
- [85] A. D. Linde. “Inflation and string cosmology”. *Prog.Theor.Phys.Suppl.* 163 (2006), pp. 295–322. arXiv: hep-th/0503195 [hep-th].
- [86] R. Kallosh. “On inflation in string theory”. *Lect.Notes Phys.* 738 (2008), pp. 119–156. arXiv: hep-th/0702059 [HEP-TH].
- [87] S. R. Coleman and F. De Luccia. “Gravitational Effects on and of Vacuum Decay”. *Phys.Rev.* D21 (1980), p. 3305.
- [88] B. Carr et al. *Universe or Multiverse?* Ed. by B. Carr. Cambridge University Press, July 31, 2007. ISBN: 0521848415.
- [89] T. Banks. “The Top  $10^{500}$  Reasons Not to Believe in the Landscape” (2012). arXiv: 1208.5715 [hep-th].
- [90] R. Bousso and J. Polchinski. “Quantization of four form fluxes and dynamical neutralization of the cosmological constant”. *JHEP* 0006 (2000), p. 006. arXiv: hep-th/0004134 [hep-th].
- [91] D. Schwartz-Perlov and A. Vilenkin. “Probabilities in the Bousso-Polchinski multiverse”. *JCAP* 0606 (2006), p. 010. arXiv: hep-th/0601162 [hep-th].
- [92] T. Clifton, S. Shenker, and N. Sivanandam. “Volume Weighted Measures of Eternal Inflation in the Bousso-Polchinski Landscape”. *JHEP* 0709 (2007), p. 034. arXiv: 0706.3201 [hep-th].
- [93] R. Bousso and I.-S. Yang. “Landscape Predictions from Cosmological Vacuum Selection”. *Phys.Rev.* D75 (2007), p. 123520. arXiv: hep-th/0703206 [hep-th].
- [94] J. D. Brown and C. Teitelboim. “Neutralization of the Cosmological Constant by Membrane Creation”. *Nucl.Phys.* B297 (1988), pp. 787–836.

- [95] J. D. Brown and C. Teitelboim. “Dynamical Neutralization of the Cosmological Constant”. *Phys.Lett.* B195 (1987), pp. 177–182.
- [96] F. Denef et al. “Fixing all moduli in a simple f-theory compactification”. *Adv.Theor.Math.Phys.* 9 (2005), pp. 861–929. arXiv: [hep-th/0503124](#) [hep-th].
- [97] S. Kachru et al. “De Sitter vacua in string theory”. *Phys.Rev.* D68 (2003), p. 046005. arXiv: [hep-th/0301240](#) [hep-th].
- [98] J. D. Barrow, F. J. Tipler, and J. A. Wheeler. *The Anthropic Cosmological Principle (Oxford Paperbacks)*. 1st ed. Oxford University Press, USA, Aug. 25, 1988. ISBN: 0192821474.
- [99] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. ISBN 3-900051-07-0. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria, 2008. URL: <http://www.R-project.org>.
- [100] R. Crandall and C. Pomerance. *Prime numbers: a computational perspective. Second Edition*. Springer-Verlag New York, 2001. ISBN: 1441920501.
- [101] C. Asensio and A. Segui. “Applications of an exact counting formula in the Bousso-Polchinski Landscape”. *Phys.Rev.* D82 (2010), p. 123532. arXiv: [1003.6011](#) [hep-th].
- [102] Asensio, Cesar and Segui, Antonio. *Counting states in the Bousso-Polchinski Landscape*. Ed. by M. Asorey, J. V. García Esteve, M. F. Rañada and J. Sesma. Prentas Universitarias de Zaragoza, 2009. ISBN: 978-84-92774-04-3. arXiv: [0903.1947](#) [hep-th].
- [103] C. Asensio and A. Segui. “A geometric-probabilistic method for counting low-lying states in the Bousso-Polchinski Landscape”. *Phys.Rev.* D80 (2009), p. 043515. arXiv: [0812.3247](#) [hep-th].
- [104] A. D. Linde. “Chaotic Inflation”. *Phys.Lett.* B129 (1983), pp. 177–181.
- [105] A. D. Linde. “ETERNAL CHAOTIC INFLATION”. *Mod.Phys.Lett.* A1 (1986), p. 81.
- [106] S. Ashok and M. R. Douglas. “Counting flux vacua”. *JHEP* 0401 (2004), p. 060. arXiv: [hep-th/0307049](#) [hep-th].
- [107] M. R. Douglas. “Basic results in vacuum statistics”. *Comptes Rendus Physique* 5 (2004), pp. 965–977. arXiv: [hep-th/0409207](#) [hep-th].
- [108] M. R. Douglas. “The Statistics of string / M theory vacua”. *JHEP* 0305 (2003), p. 046. arXiv: [hep-th/0303194](#) [hep-th].
- [109] R. Bousso. “Precision cosmology and the landscape” (2006). arXiv: [hep-th/0610211](#) [hep-th].
- [110] S. B. Giddings, S. Kachru, and J. Polchinski. “Hierarchies from fluxes in string compactifications”. *Phys.Rev.* D66 (2002), p. 106006. arXiv: [hep-th/0105097](#) [hep-th].
- [111] S. Kachru et al. “Towards inflation in string theory”. *JCAP* 0310 (2003), p. 013. arXiv: [hep-th/0308055](#) [hep-th].
- [112] M. R. Douglas and S. Kachru. “Flux compactification”. *Rev.Mod.Phys.* 79 (2007), pp. 733–796. arXiv: [hep-th/0610102](#) [hep-th].

- [113] J. J. Blanco-Pillado, D. Schwartz-Perlov, and A. Vilenkin. “Quantum Tunneling in Flux Compactifications”. *JCAP* 0912 (2009), p. 006. arXiv: [0904.3106 \[hep-th\]](#).
- [114] S. Kachru, M. B. Schulz, and S. Trivedi. “Moduli stabilization from fluxes in a simple IIB orientifold”. *JHEP* 0310 (2003), p. 007. arXiv: [hep-th/0201028 \[hep-th\]](#).
- [115] T. Banks, M. Dine, and E. Gorbatov. “Is there a string theory landscape?” *JHEP* 0408 (2004), p. 058. arXiv: [hep-th/0309170 \[hep-th\]](#).
- [116] J. Garriga et al. “Probabilities in the inflationary multiverse”. *JCAP* 0601 (2006), p. 017. arXiv: [hep-th/0509184 \[hep-th\]](#).
- [117] D. J. Shaw and J. D. Barrow. “A Testable Solution of the Cosmological Constant and Coincidence Problems”. *Phys.Rev.* D83 (2011), p. 043518. arXiv: [1010.4262 \[gr-qc\]](#).
- [118] R. Bousso et al. “A geometric solution to the coincidence problem, and the size of the landscape as the origin of hierarchy”. *Phys.Rev.Lett.* 106 (2011), p. 101301. arXiv: [1011.0714 \[hep-th\]](#).
- [119] A. Vilenkin. “A Measure of the multiverse”. *J.Phys.A* A40 (2007), p. 6777. arXiv: [hep-th/0609193 \[hep-th\]](#).
- [120] J. Garriga and A. Vilenkin. “Holographic multiverse and conformal invariance”. *JCAP* 0911 (2009), p. 020. arXiv: [0905.1509 \[hep-th\]](#).
- [121] J. Maldacena. “Einstein Gravity from Conformal Gravity” (2011). arXiv: [1105.5632 \[hep-th\]](#).
- [122] F. Denef, M. R. Douglas, and S. Kachru. “Physics of String Flux Compactifications”. *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.* 57 (2007), pp. 119–144. arXiv: [hep-th/0701050 \[hep-th\]](#).
- [123] F. Denef. “Les Houches Lectures on Constructing String Vacua” (2008), pp. 483–610. arXiv: [0803.1194 \[hep-th\]](#).
- [124] A. R. Frey, M. Lippert, and B. Williams. “The Fall of stringy de Sitter”. *Phys.Rev.* D68 (2003), p. 046008. arXiv: [0305018 \[hep-th\]](#).
- [125] P. G. Freund and M. A. Rubin. “Dynamics of Dimensional Reduction”. *Phys.Lett.* B97 (1980), pp. 233–235.
- [126] S. Randjbar-Daemi, A. Salam, and J. Strathdee. “Spontaneous Compactification in Six-Dimensional Einstein-Maxwell Theory”. *Nucl.Phys.* B214 (1983), pp. 491–512.
- [127] M. Duff, B. Nilsson, and C. Pope. “The Criterion For Vacuum Stability In Kaluza-Klein Supergravity”. *Phys.Lett.* B139 (1984), p. 154.
- [128] M. Berkooz and S.-J. Rey. “Nonsupersymmetric stable vacua of M theory”. *JHEP* 9901 (1999), p. 014. arXiv: [hep-th/9807200 \[hep-th\]](#).
- [129] O. DeWolfe et al. “Stability of AdS(p) x M(q) compactifications without supersymmetry”. *Phys.Rev.* D65 (2002), p. 064033. arXiv: [hep-th/0105047 \[hep-th\]](#).
- [130] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, eds. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, London: Cambridge University Press, Mar. 1973, p. 624. ISBN: 0521099064.

- [131] S. M. Carroll, M. C. Johnson, and L. Randall. “Dynamical compactification from de Sitter space”. *JHEP* 0911 (2009), p. 094. arXiv: [0904.3115 \[hep-th\]](#).
- [132] P. K. Townsend and M. N. Wohlfarth. “Accelerating cosmologies from compactification”. *Phys.Rev.Lett.* 91 (2003), p. 061302. arXiv: [hep-th/0303097 \[hep-th\]](#).
- [133] R. Emparan and J. Garriga. “A Note on accelerating cosmologies from compactifications and S branes”. *JHEP* 0305 (2003), p. 028. arXiv: [hep-th/0304124 \[hep-th\]](#).
- [134] N. Ohta. “Accelerating cosmologies from S-branes”. *Phys.Rev.Lett.* 91 (2003), p. 061303. arXiv: [hep-th/0303238 \[hep-th\]](#).
- [135] N. Ohta. “A Study of accelerating cosmologies from superstring / M theories”. *Prog.Theor.Phys.* 110 (2003), pp. 269–283. arXiv: [hep-th/0304172 \[hep-th\]](#).
- [136] C.-M. Chen et al. “Hyperbolic space cosmologies”. *JHEP* 0310 (2003), p. 058. arXiv: [hep-th/0306291 \[hep-th\]](#).
- [137] C.-M. Chen et al. “Addendum to ‘Hyperbolic space cosmologies’”. *JHEP* 0611 (2006), p. 044. arXiv: [hep-th/0609043 \[hep-th\]](#).
- [138] J. P. Conlon et al. “Volume Modulus Inflation and the Gravitino Mass Problem”. *JCAP* 0809 (2008), p. 011. arXiv: [0806.0809 \[hep-th\]](#).
- [139] J. M. Maldacena and C. Nunez. “Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem”. *Int.J.Mod.Phys. A*16 (2001), pp. 822–855. arXiv: [hep-th/0007018 \[hep-th\]](#).
- [140] C. Asensio and A. Segui. “Exploring a simple sector of the Einstein-Maxwell landscape”. *Phys.Rev.* D87 (2013), p. 023503. arXiv: [1207.4662 \[hep-th\]](#).
- [141] C. Asensio and A. Segui. “Consequences of moduli stabilization in the Einstein-Maxwell landscape”. *Phys.Rev.Lett.* 110 (2013), p. 041602. arXiv: [1207.4908 \[hep-th\]](#).
- [142] C. Asensio and A. Segui. “Some Physical Consequences of an Exact Vacua Distribution in the Bousso-Polchinski Landscape”. *J.Phys.Conf.Ser.* 314 (2011), p. 012050. arXiv: [1012.4947 \[hep-th\]](#).

*Este documento se compiló con X<sub>Y</sub>LA<sub>T</sub>E<sub>X</sub>  
por última vez el 28 de noviembre de 2013*