ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 42-2 (2024), 197-219
Historia y Epistemología
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6111
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

La noción de límite en libros de texto españoles de segunda enseñanza del siglo XIX

The Notion of Limit in 19th-Century Spanish Secondary Education Textbooks

Mónica Arnal-Palacián
Departamento de Matemáticas – IUMA, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España
marnalp@unizar.es

Javier Claros-Mellado
IES Calderón de la Barca, Pinto, España
fclaros@iescalderon.es

Antonio M. Oller-Marcén
Departamento de Matemáticas – IUMA, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España
oller@unizar.es

RESUMEN • El proceso de formalización y aritmetización de la noción de límite tuvo lugar esencialmente durante el siglo xix. Durante esa época, la actividad matemática en España estuvo muy orientada a la producción de libros de texto. Así, en este trabajo se estudia la presencia de dicha noción en las obras de segunda enseñanza utilizadas en España a lo largo del siglo xix y se identifican los distintos fenómenos intuitivos y formales que aparecen en ellas. Se aborda una investigación documental de carácter exploratorio y descriptivo, según el método histórico. A partir del análisis exhaustivo de 27 obras, se aprecia una clara tendencia a incluir el límite en obras dedicadas al álgebra y la aritmética, frecuentemente vinculado a las sucesiones y utilizando un sistema de representación verbal. Entre los fenómenos organizados a partir de los diferentes límites predominan los de un enfoque formal.

PALABRAS CLAVE: Límite; Fenomenología; España; Segunda enseñanza; Siglo xix.

ABSTRACT • The process of formalization and arithmetization of the notion of limit took place essentially during the 19th century. During that period, the mathematical activity in Spain was very much oriented towards the production of textbooks. In this paper, we study the presence of this notion in the secondary education textbooks used in Spain during the 19th century, and we identify the different intuitive and formal phenomena that appear in them. We carried out documentary research of an exploratory and descriptive character, following the historical method. From the exhaustive analysis of 27 works, we see a clear tendency to include the limit mainly in works dedicated to algebra and arithmetic, frequently linked to successions, and using verbal representation. Among the phenomena organized on the basis of the different limits, those with a formal approach prevail.

KEYWORDS: Limit; Phenomenology; Spain; Secondary education; 19th century.

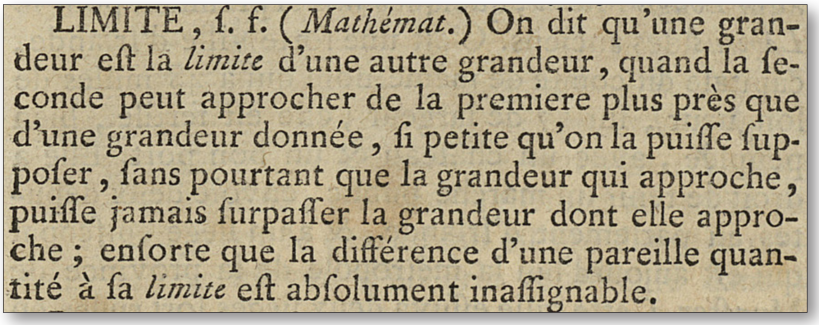
Recepción: diciembre 2023 • Aceptación: abril 2024 • Publicación: junio 2024

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J. y Oller-Marcén, A. M. (2024). La noción de límite en libros de texto españoles de segunda enseñanza del siglo xix. *Enseñanza de las Ciencias*, *42*(2), 197-219.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6111

INTRODUCCIÓN

La noción matemática de límite es compleja e involucra elementos relacionados con el infinito potencial y con la idea de infinitesimal, presentes, aunque sea de forma incipiente e intuitiva, en las matemáticas de distintas civilizaciones antiguas (Katz, 1995). Desde un punto de vista matemático, la noción de límite resulta de gran relevancia, entre otros aspectos, por su papel crucial en la presentación moderna del cálculo diferencial (Tall, 2009). Por otro lado, el límite ha recibido mucha atención desde el punto de vista de la educación matemática, entre otras razones por su consideración dentro del pensamiento matemático avanzado (PMA), que requiere, frente al pensamiento matemático elemental (PME), de una reconstrucción cognitiva en la que se pasa de «describir» y «definir» a «convencer» y «demostrar» (Tall, 1991).

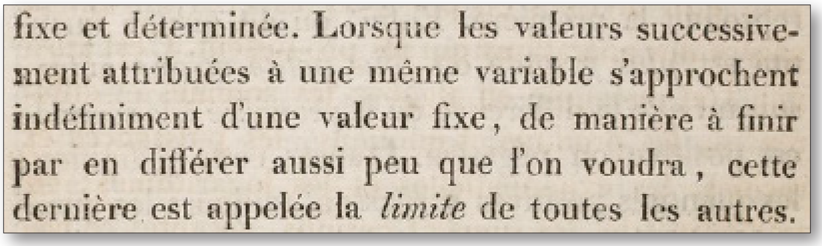
El proceso de formalización y aritmetización de la noción de límite, no exento de debate entre los matemáticos investigadores, tuvo lugar esencialmente durante el siglo XIX. Así, en 1765 D'Alembert escribió la definición de la figura 1 para la primera edición de la Enciclopedia (tomo 9, p. 542).



LIMITE, ſ. f. (*Mathémat.*) On dit qu'une grandeur eſt la *limite* d'une autre grandeur, quand la ſeconde peut approcher de la premiere plus près que d'une grandeur donnée, ſi petite qu'on la puiſſe ſuppoſer, ſans pourtant que la grandeur qui approche, puiſſe jamais ſurpaſſer la grandeur dont elle approche; enſorte que la différence d'une pareille quantité à ſa *limite* eſt abſolument inaſſignable.

Fig. 1. Definición de límite en la Enciclopedia. *Fuente*: *Académie des Sciences*.

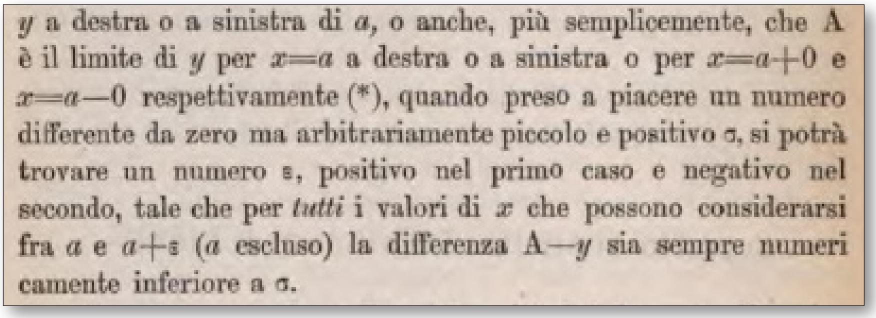
Cauchy (1821, p. 4), aunque introduce la idea de variable, sigue utilizando una terminología poco precisa (figura 2).



fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

Fig. 2. Definición de límite en el *Cours d'Analyse* de Cauchy. *Fuente*: *Bibliotèque Nationale de France*.

Posteriormente, ya en la segunda mitad del siglo XIX, Weierstrass introdujo una idea de límite vinculada más directamente al concepto de función como correspondencia (y no solo al de cantidad variable) y expresada en términos más próximos a los ya clásicos ε - δ (Dugac, 1973). La presentación moderna de la noción de límite se atribuye generalmente al italiano Dini (figura 3), quien se basó en trabajos de Hankel, Dedekind, Cantor, Heine y Schwarz (Nakane, 2014).



y a destra o a sinistra di a, o anche, più semplicemente, che A è il limite di y per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=a+0$ e $x=a-0$ respettivamente (*), quando preso a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, si potrà trovare un numero ε, positivo nel primo caso e negativo nel secondo, tale che per *tutti* i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso) la differenza $A-y$ sia sempre numericamente inferiore a σ.

Fig. 3. Definición de límite en los *Fondamenti* de Dini (1878, p. 22). *Fuente*: *New York Public Library*.

Analizar la presencia de la noción de límite en manuales y libros de texto publicados en la época en la que el proceso anterior estaba teniendo lugar nos puede permitir apreciar el modo en que se produjo la trasposición de dicha noción entre la comunidad de investigadores y la comunidad de enseñantes (Bagni, 2005). De hecho, tal y como señala Schubring (2023, p. 4): «los libros de texto constituyen una fuente fundamental para la investigación acerca de la comunicación entre la investigación y la enseñanza». El caso de la noción de límite en el siglo xix puede constituir un ejemplo paradigmático de esta afirmación.

Durante el siglo xix en España «el ámbito en que se movieron los físicos y matemáticos españoles [...] fue, con muy pocas excepciones, el de la enseñanza» (Sánchez Ron, 1992, p. 58). Esta producción se vio fuertemente influenciada por obras francesas tanto a través de traducciones directas (Ausejo y Matos, 2014) como a través de la formación de algunos de los autores de obras originales (León-Mantero y Maz-Machado, 2015). Existen investigaciones que analizan libros de texto de segunda enseñanza españoles centradas, por ejemplo, en el ámbito de la geometría analítica (Sánchez Sierra y González Astudillo, 2017) que muestran que los diferentes tratamientos de un contenido dependen fuertemente del autor del texto y de las influencias recibidas por este. Así, pudieron recogerse en la «periferia» española distintas definiciones o concepciones sobre la noción de límite provenientes de los procesos de formalización que estaban teniendo lugar en las «metrópolis» académicas de la época (Schubring, 2023). En este contexto, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿qué fenómenos organizados por el límite aparecen en los libros de texto de segunda enseñanza utilizados en España durante el siglo xix? En relación con esta pregunta de investigación, los objetivos específicos de este trabajo son los siguientes:

1. Detectar y analizar la presencia de la noción de límite en libros de texto de segunda enseñanza utilizados a lo largo del siglo xix en España.
2. Identificar los distintos fenómenos, intuitivos y formales, presentados en dichos libros de texto.

MARCO TEÓRICO

Segunda enseñanza en la España del siglo xix

El siglo xix fue un periodo de gran inestabilidad política en España. Las leyes educativas no fueron una excepción y los distintos reglamentos y planes de estudios –con muy diversas orientaciones ideológicas– se multiplicaron a lo largo del siglo (Real Apolo, 2012).

Desde el punto de vista de la ordenación general del sistema educativo, se suele considerar que la primera ley general española fue el Reglamento General de Instrucción Pública del 29 de junio de

1821 (Ruíz Berrio, 1970). Desde este momento, y a lo largo de todo el siglo xix, el sistema educativo español se organiza en tres niveles: primera, segunda y tercera enseñanza. Después de este reglamento, se aprobaron sucesivamente el Plan General de Instrucción Pública (1836), el Plan General de Estudios (1845) y la Ley de Instrucción Pública (1857). Esta última norma, denominada Ley Moyano, sentó unas bases estructurales del sistema educativo español que se mantendrían vigentes hasta bien entrado el siglo xx (Montero Alcaide, 2009).

Los trabajos de Utande Igualada (1982) o Vea Muniesa (1995) permiten señalar con respecto a la segunda enseñanza en España durante el siglo xix diversos periodos que, en cierto modo, recogen lo anterior. Así, a un periodo inicial (1821-1836), le siguen el nacimiento de la segunda enseñanza en España (1836-1845), un periodo de asentamiento (1845-1857), la consolidación de la etapa (1857-1868) y una larga crisis finisecular (1868-1900).

Además, a lo largo del siglo se promulgaron un gran número de distintos planes de estudios de segunda enseñanza que modificaron sucesivamente tanto su estructura, como los contenidos y asignaturas que impartir (Utande Igualada, 1964). En lo que se refiere a las matemáticas, la situación fue errática (Vea Muniesa, 1986, 1995).

Hasta 1845 se distingue entre segunda enseñanza elemental y superior. En el periodo elemental se especifica que deben impartirse unos «elementos de matemáticas», mientras que en el periodo superior tan solo se indica que debe realizarse una ampliación de los contenidos del periodo anterior. En ningún momento existieron temarios o currículos oficiales, de modo que los contenidos concretos quedaban completamente en manos de los docentes.

Entre 1845 y 1857 se establece una división entre segunda enseñanza elemental y de ampliación. En este intervalo de tiempo se concretan algo más los contenidos matemáticos. En el periodo elemental se debían abordar contenidos relativos a aritmética, álgebra, geometría y trigonometría. En el periodo de ampliación se extendían los conocimientos anteriores y se introducía el cálculo diferencial, la geometría analítica y la mecánica racional.

A partir de 1857 se produce un cierto retroceso en cuanto a las matemáticas se refiere. La mayor parte de los contenidos que hasta este momento se abordaban en el periodo de ampliación –en particular el cálculo diferencial, la geometría analítica y la mecánica– se trasladan a las recién creadas facultades de ciencias exactas, físicas y naturales, de modo que pasan así a formar parte de la tercera enseñanza. Desde este momento, y hasta prácticamente el cambio de siglo, los contenidos matemáticos propios de la segunda enseñanza en España son la aritmética, el álgebra, la geometría y la trigonometría, que se abordan en los denominados estudios generales de segunda enseñanza.

La inestabilidad y la ausencia de programas oficiales detallados suponían en principio que la responsabilidad sobre el desarrollo de las materias recaía exclusivamente sobre los docentes. Esta libertad de cátedra implicaba una gran variabilidad en el grado de extensión con que se abordaban las distintas materias, en particular las matemáticas, y otorgaba un importante papel a los libros de texto en la segunda enseñanza del siglo xix (Benso Calvo, 2000). En un intento de control por parte del Gobierno, entre 1845 y 1868 se publicaron listas oficiales de libros de texto que debían ser adoptados por los profesores. A partir de 1868 cesa la publicación de listados oficiales. Esto intensificó la proliferación de libros de texto, al declarar que la publicación de manuales de calidad se considerase un mérito en la promoción profesional. Finalmente, aunque a partir de 1875 se restableció la normativa respecto a los libros de texto, en la práctica se mantuvo la libertad del docente para fijar sus programas y elegir sus propios textos.

Fenomenología de la noción de límite

En este trabajo, hablamos de fenomenología en el sentido ofrecido por Freudenthal (1983). Para el caso de la noción de límite, Claros et al. (2007), Arnal-Palacián et al. (2020a) y Arnal-Palacián (2022) caracterizaron los fenómenos organizados a partir de una definición del límite finito de una sucesión, límite finito de una función en un punto, límite infinito de una sucesión y límite infinito de una función en el infinito.

En estas investigaciones, el estudio de los fenómenos se acometió desde dos enfoques: intuitivo y formal. La importancia de considerar ambos tipos de fenómenos se justifica porque los intuitivos son los primeros que nos permiten obtener un candidato a límite. Sin embargo, estos fenómenos no garantizan que el candidato a límite realmente lo sea, por lo que es necesaria la intervención de los fenómenos formales. La certeza de que un candidato a límite realmente lo sea vendrá determinada por el proceso de ida y vuelta. Reiterar estos procesos permite establecer o descartar si el supuesto límite ha sido bien elegido (Claros et al., 2013). Para poder abordar el fenómeno formal, es necesario partir de una definición del límite y analizar cada una de las nociones involucradas.

Para el caso particular del límite finito de una función en un punto se caracterizan los siguientes fenómenos (Claros et al., 2007):

- *Aproximación doble intuitiva*. Dados k pares de valores de una función real f de variable real $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))\dots, (x_k, f(x_k))$, se identifica la aproximación doble intuitiva cuando los valores $x_1, x_2\dots, x_k$ y sus respectivas imágenes $f(x_1), f(x_2)\dots, f(x_k)$ parecen acercarse a sendos valores fijos distintos.
- *Retroalimentación o ida-vuelta en funciones*. Se observan dos procesos íntimamente relacionados:
  - El primer proceso, corresponde al fragmento de la definición: «para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$».
  - El segundo proceso corresponde al siguiente fragmento de la definición «si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$».

En el fenómeno de aproximación doble intuitiva se emplea la expresión «parece acercarse», a pesar de las dificultades que pudiese provocar este término (Tall y Vinner, 1981), para focalizar en la intuición de obtener un límite finito como conjetura a determinados valores inspeccionados; mientras que el fenómeno ida-vuelta en funciones se manifiesta al interpretar la definición métrica (ε-δ), la cual exige la construcción de una función que permita la retroalimentación (Claros et al., 2007).

En el estudio de Arnal-Palacián et al. (2020a) para el límite infinito de una sucesión, se caracterizaron los siguientes fenómenos:

- *Crecimiento intuitivo ilimitado*. Una sucesión creciente cumple la idea de que los valores de la sucesión se van haciendo cada vez mayores. Si $n > m$, entonces $a_n > a_m$ (siendo a_n el término general de la sucesión). Al comprobarlo para varios valores, deducimos intuitivamente que la sucesión es creciente.
- *Decrecimiento intuitivo ilimitado*. Una sucesión decreciente cumple la idea de que los valores de la sucesión se van haciendo cada vez más pequeños, entendiendo por pequeños aquellos números negativos cuyo valor absoluto es cada vez mayor. Si $n > m$, entonces $a_n < a_m$.
- *Retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de límite infinito*. Se observan dos procesos:
  - El primer proceso, denominado «ida» corresponde al fragmento de la definición: «si para cada H elemento de K, existe un número natural v».
  - El segundo proceso, denominado «vuelta» corresponde al fragmento «tal que es $a_n > H$ para todo $n \geq v$».

En este último fenómeno, la retroalimentación se manifiesta observando conjuntamente estos dos procesos (ver figura 4).

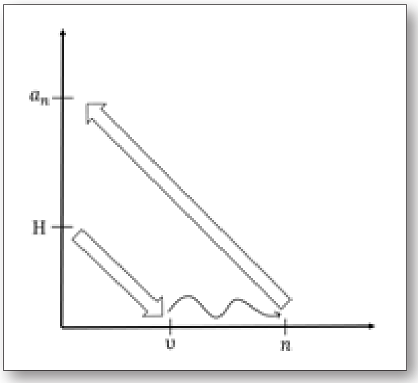


Fig. 4. Fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de límite infinito (Arnal-Palacián, 2022).

En los distintos estudios fenomenológicos de la noción de límite, se estableció la relación entre estos fenómenos y el PME y PMA (Tall y Vinner, 1981). Tall (1991) situó la noción de límite dentro del PMA por los procesos cognitivos que implica su manejo, entre los que se encuentran la abstracción y la generalización. Cornu (1991) también lo sitúa en el PMA, pero justificando su postura en que se trata de una pieza fundamental en la teoría de las aproximaciones, continuidad, derivabilidad e integración. Tall (1991) afirma que el paso entre el PME y el PMA exige una transición que requiere de una reconstrucción cognitiva. Teniendo en cuenta esto, los fenómenos intuitivos formarán parte del PME, mientras que los fenómenos formales formarán parte del PMA, por el tipo de procesos utilizados (Edwards et al., 2005).

MÉTODO

Nuestra investigación se orienta hacia el análisis y la comparación del contenido de manuales y libros de texto. A este respecto, Schubring y Fan (2018, p. 767) resaltan que investigar acerca de la evolución de la exposición de un concepto a lo largo de un periodo determinado permite «comprender el significado atribuido al concepto en una comunidad determinada en ese periodo y sus cambios evidencian la evolución sociocultural de las actividades matemáticas». Así, abordamos una investigación documental de carácter esencialmente exploratorio y descriptivo, que se ha desarrollado según las fases clásicas del método histórico (Ruíz Berrio, 1976): heurística, crítica y hermenéutica.

Fase heurística

La fase heurística se corresponde con la determinación de la muestra de los textos que serán analizados. En nuestro caso se seleccionaron 27 obras de 20 autores diferentes, con una distribución temporal uniforme a lo largo del siglo XIX. A este respecto, siguiendo a Schubring (2023), entendemos una obra (*oeuvre*) como una colección de textos independientes que, pese a ello, se presentan de forma conjunta o se pueden considerar como parte de un plan general del autor. Por ejemplo, especialmente en la segunda mitad del siglo, se publican múltiples obras bajo el título *Elementos de matemáticas* que solían recoger en dos tomos los contenidos usuales de la segunda enseñanza elemental o general, con textos destinados a la aritmética (Ar), el álgebra (Al), la geometría (G) y la trigonometría (T). En correspondencia con la evolución de la segunda enseñanza en España durante el siglo XIX que hemos descrito anteriormente, los textos seleccionados (tabla 1) se han agrupado en tres periodos: inicial y de nacimiento de la segunda enseñanza (hasta 1845), de asentamiento y consolidación (1845-1868) y de crisis (desde 1868).

Al observar las fechas de edición de algunas de las obras consideradas pueden apreciarse algunas aparentes discrepancias. Sobre esto, hay que señalar que, pese a la agrupación por periodos que acabamos de describir, resultaba común que obras de periodos anteriores siguieran utilizándose avanzado el tiempo. Por ejemplo, en el listado de libros de texto de segunda enseñanza de 25 de septiembre de 1849 todavía se mencionan las obras anteriores de Lacroix, Vallejo, Lista y Odriozola. Con el paso de los años, estas obras serán progresivamente sustituidas por otras posteriores que se mantendrán en uso hasta bien entrado el siglo XX (León-Mantero y Maz-Machado, 2015; Rico Romero y Maz Machado, 2007).

Las obras dedicadas específicamente a la geometría analítica (GA) y al cálculo diferencial (CD) dejaron de ser utilizadas en segunda enseñanza a partir de 1857, cuando estas materias desaparecieron de los planes de estudios de ese nivel educativo (Vea Muniesa, 1986). Lo mismo sucedió con algunos tratados de álgebra superior publicados antes de esa fecha, como la traducción de Bourdon o el libro de Cortázar.

Tabla 1.
Obras consultadas

Primer periodo			
Título	*Autor*	*Edición consultada*	*Contenidos*
Curso completo elemental de matemáticas puras	Sylvestre F. Lacroix (trad. Josef Rebollo y Morales)	1807/1808	Ar, Al, G, T
Tratado elemental de matemáticas	José Mariano Vallejo	1812/1813	Ar, Al, G, T, GA, CD
Elementos de matemáticas puras y mistas	Alberto Lista y Aragón	1823/1825	Ar, Al, T, G, GA,
Curso completo de matemáticas puras	José de Odriozola	1827/1829	Ar, Al, G, T, GA, CD
Elementos de aritmética	Pierre Bourdon (trad. Calisto Fernández Formantany)	1843	Ar
Segundo periodo			
Título	*Autor*	*Edición consultada*	*Contenidos*
Geometría analítica-descriptiva	Mariano de Zorraquín	1819	GA
Tratado completo de matemáticas. Tomo IV	Agustín Gómez Santa María	1846	GA
Elementos de cálculo diferencial y de cálculo integral	Jean Louis Boucharlat (trad. Gerónimo del Campo)	1834	CD
Cálculo diferencial e integral	Fernando García de San Pedro	1828	CD
Resumen de las lecciones de análisis	Claude Navier (trad. Eugenio de la Cámara)	1850	CD
Elementos de álgebra	Pierre Bourdon (trad. Agustín Gómez Santa María)	1847	Al

Elementos de matemáticas	Acisclo F. Vallín y Bustillo	1864	Ar, Al, G, T
Elementos de matemáticas	Joaquín María Fernández Cardín	1858/1859	Ar, Al, G, T
Tratado de aritmética	Juan Cortázar	1851	Ar
Tratado de álgebra elemental	Juan Cortázar	1852	Al
Tratado de álgebra superior	Juan Cortázar	1858	Al
Tratado de geometría elemental	Juan Cortázar	1847	G
Tratado de trigonometría rectilínea y esférica	Juan Cortázar	1848	T
Tercer periodo			
Título	*Autor*	*Edición consultada*	*Contenidos*
Tratado de aritmética	Zoel García de Galdeano	1884	Ar
Tratado de álgebra. Parte primera. Tratado elemental	Zoel García de Galdeano	1883	Al
Geometría elemental	Zoel García de Galdeano	1888	G
Elementos de matemáticas	Ambrosio Moya	1892/1898	Ar, Al, G, T
Elementos de matemáticas	Marcelino Gavilán y Reyes	1897	Ar, Al, G, T
Elementos de matemáticas	Vicente Rubio y Díaz	1872	Ar, Al, G, T
Elementos de matemáticas	Ricardo Baltzer (trad. Eulogio Jiménez y Manuel Merelo)	1879	Ar, Al, G, T
Elementos de matemáticas	Santiago Moreno y José Ceruelo	1893	Ar, Al, G, T
Tratado completo de matemáticas elementales. Tomo I	Luis Álix	1874	Ar

Fase crítica

Durante la fase crítica se realiza un análisis de las fuentes seleccionadas, con el fin de determinar su validez. Esto implica la realización de una crítica externa, relacionada con aspectos relativos a la autenticidad de las fuentes, y de una crítica interna, que se centra en asegurar la adecuada comprensión del contenido de los documentos.

Desde el punto de vista de la crítica externa, Scott (1990) señala cuatro criterios que deben satisfacer las fuentes utilizadas: autenticidad, credibilidad, representatividad y significado. Los dos primeros criterios se satisfacen gracias a que se han consultado versiones digitalizadas de los textos disponibles en repositorios públicos. El criterio de representatividad se garantiza como resultado del trabajo realizado en la fase anterior en relación con la selección de la muestra de obras analizadas. En concreto, en el periodo 1845-1868 se han consultado todas las listas oficiales publicadas en la *Gaceta de Madrid* en esos años, mientras que en los restantes periodos se han utilizado como referencia los trabajos de Vea Muniesa (1986, 1995). Finalmente, la investigación realizada supone atender únicamente al significado literal de los documentos analizados.

En cuanto a la crítica interna, las obras seleccionadas se revisaron íntegramente. En una primera aproximación se realizó una búsqueda automatizada por términos clave (límite, infinit*, aproxima*, tiende, variable, aproxima*, etc.), para después pasar a realizar un análisis del contenido de aquellas obras que incluían el concepto de límite, orientado por los resultados de la búsqueda anterior. En particular, las unidades de análisis fueron las secciones o los capítulos de cada una de estas obras que contenían las palabras anteriormente mencionadas.

Tabla 2.
Variables y categorías del análisis

Variable	*Categorías*
Contenido al que se vincula	Aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial
Objeto al que se vincula	Sucesión, función
Tipo de límite	Para sucesiones: finito, infinito
	Para funciones: finito en un punto, infinito en un punto, finito en el infinito, infinito en el infinito
Formato	Definición (d), ejemplo (e), aplicación (ap)
Sistema de representación	Verbal (v), gráfico (g), numérico (n), tabular (t), simbólico-algebraico (a)

En la tabla 2 se muestran las variables para el análisis, junto a las categorías de cada una de ellas. Las categorías de la variable *contenido* surgen de considerar los contenidos de matemáticas propios de la segunda enseñanza a lo largo del siglo XIX (Vea Muniesa, 1995). Las categorías de las variables *objeto*, *tipo de contenido* y *formato* provienen de Claros-Mellado et al. (2016) y Arnal-Palacián et al. (2020b). En el caso de la variable *formato*, además, ha sido necesario incluir una nueva categoría, *aplicación*, que recoge aquellas situaciones en las que el límite aparece utilizado de manera instrumental. Finalmente, para definir las categorías de la variable *sistema de representación* se han combinado los trabajos de Janvier (1987) y de Blázquez y Ortega (2001).

Fase hermenéutica

Durante la fase hermenéutica se lleva a cabo una interpretación histórico-pedagógica de los datos obtenidos a partir del análisis anterior. En nuestro caso, se trata de vincular los distintos tipos de límites y enfoques identificados con algunos de los fenómenos descritos por Claros et al. (2007), Arnal-Palacián et al. (2020a) y Arnal-Palacián (2022), así como con los enfoques (intuitivo y formal) descritos por Edwards et al. (2005), teniendo en cuenta también las variables introducidas en la tabla 2. Todo esto se relaciona finalmente con rasgos del PME y del PMA.

RESULTADOS

Presencia del concepto de límite

La noción de límite está muy presente en las 27 obras revisadas. De hecho, tan solo en tres de ellas no aparece en absoluto. Se trata en los tres casos de obras dedicadas exclusivamente a la trigonometría (Cortázar) o a la geometría analítica (Zorraquín y Goméz Santa María). Como detallaremos a continuación, tampoco hemos identificado la noción de límite vinculada a estos dos contenidos en ninguna de las 24 obras restantes que fueron finalmente analizadas. En la tabla 3 se recoge la presencia del concepto de límite asociado a los distintos contenidos.

Tabla 3.
Presencia de la noción de límite asociado a los distintos contenidos en las obras revisadas

Contenido	*Número total de obras*	*Número de obras en las que aparece la noción de límite*	*Porcentaje*
Aritmética	15	12	80 %
Álgebra	15	14	93,3 %
Geometría	13	11	84,6 %
Trigonometría	12	0	0 %
Geometría analítica	5	0	0 %
Cálculo diferencial	5	5	100 %

Evidentemente, el concepto de límite aparece en todos los textos dedicados al cálculo diferencial. Dejando al margen este hecho, se observa una muy ligera tendencia por parte de los autores a incluir el límite principalmente dentro de los textos y obras dedicados al álgebra por encima de los dedicados a otros contenidos. De hecho, únicamente uno de los textos de álgebra analizados omite completamente la noción de límite. Se trata del tomo correspondiente de los *Elementos* de Alberto Lista y Aragón.

Si centramos el análisis únicamente en el contexto de aquellos contenidos propios de la segunda enseñanza durante todos los periodos del siglo XIX, es decir, si dejamos de lado el cálculo diferencial y la geometría analítica (desaparecidos de la segunda enseñanza desde 1857), podemos señalar que la presencia del límite es similar a lo largo de los tres periodos (tabla 4).

Tabla 4.
Proporción de obras analizadas
que incluyen la noción de límite en periodos

	Aritmética	*Álgebra*	*Geometría*
Periodo 1	4/5 (80 %)	3/4 (75 %)	3/4 (75 %)
Periodo 2	2/3 (66,6 %)	5/5 (100 %)	3/3 (100 %)
Periodo 3	6/7 (85,7 %)	6/6 (100 %)	5/6 (83,3 %)

Al margen de la presencia de la noción de límite, resulta relevante determinar a qué contenido se vincula su definición. Para ello, focalizamos el análisis en aquellas obras que tratan tanto sobre aritmética como sobre álgebra y geometría. Se trata, en concreto, de 13 obras. En la figura 5 podemos ver en qué parte de estas se introduce la definición de la noción de límite.

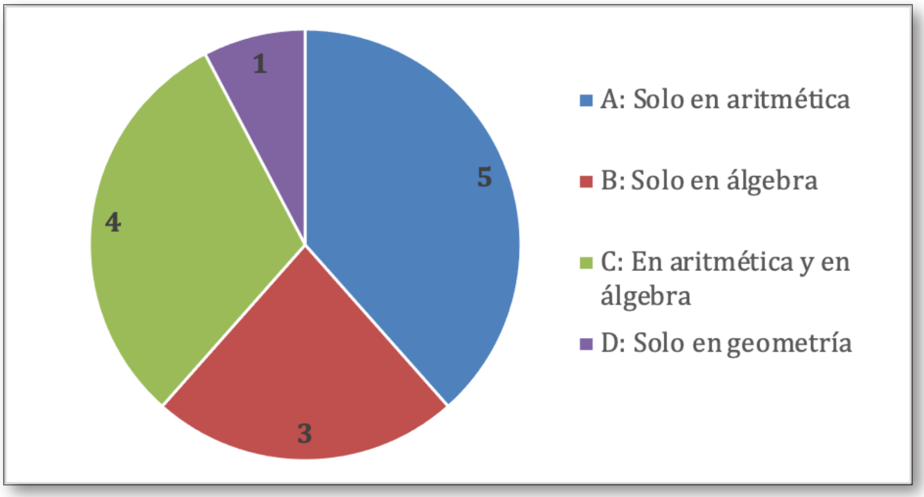
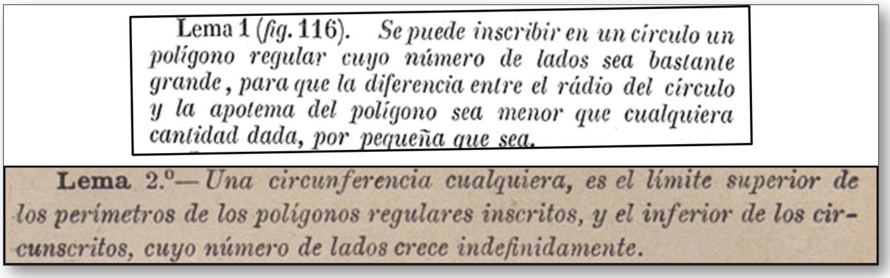


Fig. 5. Contenidos en los que se introduce la definición de límite en obras que tratan de aritmética, álgebra y geometría.

Aunque los datos de la tabla 4 sugieren que la presencia del límite en los textos de geometría es similar porcentualmente a su presencia en los textos de aritmética y álgebra, esta presencia es de una naturaleza muy diferente. De hecho, solo uno de los once textos de geometría que incluyen la noción de límite presenta su definición. En los otros diez casos nos encontramos siempre únicamente ante aplicaciones de la noción de límite. Entre estas aplicaciones cabe destacar, como caso paradigmático, por su frecuencia, el uso de la noción de límite en el contexto de polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia (figura 6).


Lema 1 (*fig.* 116). *Se puede inscribir en un círculo un polígono regular cuyo número de lados sea bastante grande, para que la diferencia entre el rádio del círculo y la apotema del polígono sea menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea.*

Lema 2.º— *Una circunferencia cualquiera, es el límite superior de los perímetros de los polígonos regulares inscritos, y el inferior de los circunscritos, cuyo número de lados crece indefinidamente.*

Fig. 6. Cortázar, 1847, p. 86 (arriba) y Moya, 1898, t. II, p. 145 (abajo).

A este respecto, en la figura 7 podemos observar en mayor detalle cómo se distribuye la presencia de la noción de límite según los distintos formatos considerados (definiciones, ejemplos y aplicaciones), y se aprecia la mencionada diferencia de la geometría frente a la aritmética o el álgebra.

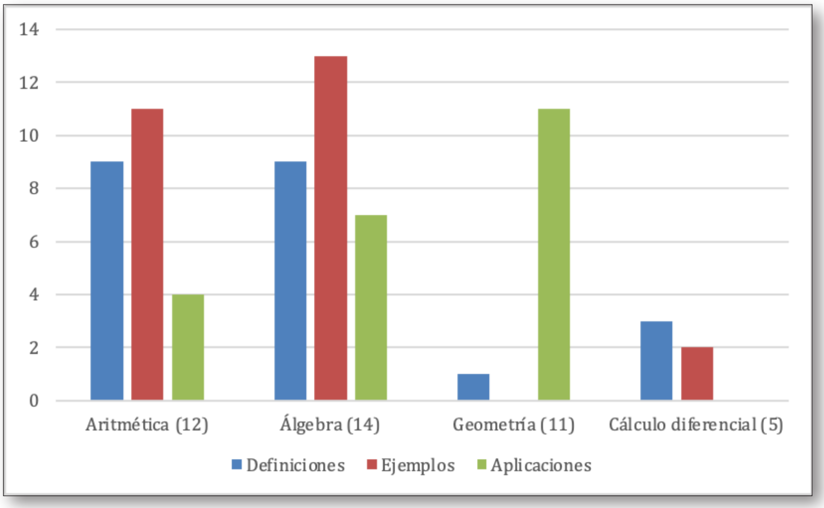
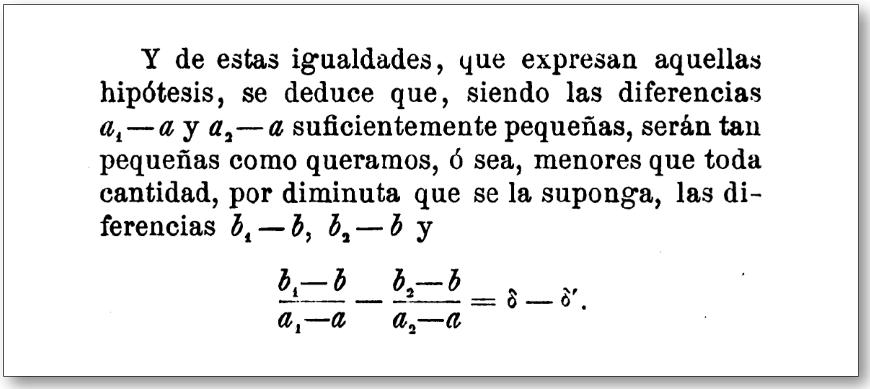


Fig. 7. Formatos en los que aparece el concepto de límite en las obras consideradas.

El comportamiento es muy similar en los textos dedicados a la aritmética y al álgebra. Prácticamente todos los textos analizados incluyen ejemplos, las definiciones son algo más frecuentes en los textos de aritmética, mientras que la proporción de los textos de álgebra que incluyen aplicaciones es mayor.

En trece de las obras consideradas se aborda de algún modo la idea de límite vinculado a funciones. En estos casos, se trata siempre de definiciones o ejemplos y casi siempre en textos sobre álgebra o cálculo diferencial. Por otro lado, la idea de límite aparece con mayor frecuencia vinculada a sucesiones; en concreto, en veinte de las obras analizadas. Encontramos estos objetos casi por igual en textos de aritmética y de álgebra, y con mucha menor frecuencia de geometría. Además, se presentan tanto en definiciones como en ejemplos y aplicaciones.

Observamos que se utiliza de forma abrumadoramente mayoritaria el sistema de representación verbal, a menudo de manera exclusiva. De hecho, el uso combinado de más de un sistema de representación resulta una práctica poco habitual dentro de las obras analizadas. Salvo en una excepción, en todos los casos en los que se combinan sistemas de representación, uno de ellos es siempre el verbal. En particular, en todos los casos en los que se presenta alguna definición del concepto de límite se hace a través de un registro verbal. Solo en tres ocasiones se combina este registro con un sistema de representación simbólico-algebraico (figura 8) al presentar su definición.



Y de estas igualdades, que expresan aquellas hipótesis, se deduce que, siendo las diferencias $a_1 - a$ y $a_2 - a$ suficientemente pequeñas, serán tan pequeñas como queramos, ó sea, menores que toda cantidad, por diminuta que se la suponga, las diferencias $b_1 - b$, $b_2 - b$ y

$$\frac{b_1 - b}{a_1 - a} - \frac{b_2 - b}{a_2 - a} = \delta - \delta'.$$

Fig. 8. Combinación de registro verbal y simbólico-algebraico. *Fuente*: Baltzer, 1879, 3.ª parte, p. 16.

Las escasas apariciones del sistema de representación numérico (figura 9) están siempre vinculadas a la presentación de ejemplos. Solo en dos fragmentos se utiliza este sistema de representación de forma exclusiva, apareciendo casi siempre en combinación con un registro verbal, y en un caso simbólico-algebraico.

0,4545..	0,454545..	0,4545454	son variables,	cuyo *límite*	*superior*	es	$\frac{45}{99}$
0,211 ...	0,2111.....	0,21111...		”	”	”	$\frac{21-2}{90}$
0,9.......	0,99	0,999		”	”	”	1.

Fig. 9. Sistema de representación numérico. *Fuente*: Rubio y Díaz, 1872, 1.ª parte, p. 162.

El sistema de representación simbólico-algebraico es algo más utilizado (lo encontramos en once de los veinte autores considerados). Además, este sistema de representación es utilizado tanto en definiciones como en ejemplos y aplicaciones, aunque predominan claramente estos dos últimos formatos. Solo en dos casos se llega a utilizar en exclusiva el sistema de representación simbólico-algebraico.

Para terminar, el sistema de representación tabular aparece utilizado en un único caso (figura 10) en combinación con un registro verbal durante la presentación de un ejemplo. Ninguna de las obras analizadas incluye el sistema de representación gráfico.

Números.	*Logaritmos.*
10,000 00	1,000 00
3,162 28	0,500 00
1,778 28	0,250 00
1,333 52	0,125 00
1,154 78	0,062 50
1,074 61	0,031 25
1,036 63	0,015 62
1,018 15	0,007 81
1,009 04	0,003 91
1,004 51	0,001 95
1,002 25	0,000 98
1,001 12	0,000 49
1,000 56	0,000 24
1,000 28	0,000 12
1,000 14	0,000 06
1,000 07	0,000 03
1,000 04	0,000 02
1,000 02	0,000 01
1,000 01	0,000 00

Fig. 10. Sistema de representación tabular. *Fuente*: Baltzer, 1879, 2.ª parte, p. 113.

Relación con los fenómenos

Los fenómenos organizados a partir de las definiciones del límite finito e infinito de una sucesión se presentan predominantemente en los textos de aritmética y de álgebra. Entre ellos destacan aquellos con un enfoque formal, especialmente para el límite finito de una sucesión (tabla 5).

Tabla 5.
Obras analizadas que incluyen fenómenos de sucesiones

	Aritmética (12)		*Álgebra (14)*		*Geometría (9)*	
	Intuitivo	Formal	Intuitivo	Formal	Intuitivo	Formal
Finito	7	10	5	9	0	1
Infinito	1	3	3	6	0	0

Los fenómenos intuitivos caracterizados para los límites de sucesiones (figura 11) se encuentran únicamente en los textos dedicados al álgebra y a la aritmética, en cada uno de los periodos considerados.

*** 193.** ***Las potencias enteras y positivas de un número mayor que 1 crecen, creciendo su esponente; y pueden valer mas que cualquiera cantidad, llegando á ser suficientemente grande el esponente.***

Fig. 11. Fenómeno intuitivo para el límite de una sucesión. *Fuente*: Cortázar, 1852, p. 175.

El enfoque intuitivo se utiliza en cada uno de los tres periodos considerados para presentar tanto el límite finito como el infinito de una sucesión. En relación con el sistema de representación, durante el primer periodo todos los fragmentos de enfoque intuitivo encontrados se presentan en el registro verbal, independientemente del contenido al que se vincule, pero en el caso de límite finito, además, se acompaña del sistema de representación numérico. En el segundo periodo continúa la tendencia anterior, pero se suma el sistema de representación simbólico-algebraico a los límites tanto finito como infinito de sucesiones para presentar dicho concepto. En el tercer periodo, para el límite finito se incorpora el sistema de representación tabular a los fenómenos que ya se usaron en el segundo periodo. En cambio, respecto al límite infinito, desaparece el sistema de representación simbólico-algebraico en este periodo. Atendiendo al formato, se emplean ejemplos, definiciones y aplicaciones para presentar tanto el límite finito como el infinito. Las aplicaciones se emplean únicamente en los periodos segundo y tercero (tabla 6).

Los fenómenos formales caracterizados para los límites de sucesiones (figura 12) se encuentran principalmente en los textos dedicados al álgebra y a la aritmética en cada uno de los tres periodos considerados, aunque aparece un fragmento dedicado al límite finito de sucesiones en el segundo periodo en un libro de geometría.

174. La cantidad que por su naturaleza cambia de valor, se llama *variable;* y la que conserva un valor fijo, se llama *constante.*
Si los valores sucesivos de una cantidad variable se van aproximando al valor fijo de una constante, sin poder nunca igualarse con este, pero sí aproximársele cuanto se quiera, la *constante* se llama *límite* de la variable. Este límite es *superior* ó *inferior,* según que sea mayor ó menor que la variable.

Fig. 12. Fenómeno formal para el límite de una sucesión. *Fuente*: Moya, 1892, t. I, p. 93.

El enfoque formal se utiliza en cada uno de los tres periodos considerados para presentar los límites tanto finito como infinito de una sucesión. En relación con el sistema de representación, durante el primer periodo se emplean el registro verbal, numérico y simbólico-algebraico, estos dos últimos asociados únicamente al límite finito de una sucesión. Respecto al segundo y tercer periodos, los sistemas de representación usados son de nuevo el verbal, el simbólico-algebraico y el numérico, pero mientras que los dos primeros se emplean en los límites tanto finito como infinito, el registro numérico se emplea únicamente en el límite finito. Se emplean ejemplos, definiciones y aplicaciones para presentar los límites tanto finito como infinito. Las aplicaciones se emplean en todos los periodos, pero en el primero de ellos únicamente está asociado al límite finito (tabla 6).

Tabla 6.
Descripción de los fenómenos para los límites
de sucesiones encontrados con referencia al sistema de representación, formato y tipo de límite

	Contenido	*Enfoque*	
		Intuitivo	Formal
Primer periodo	Aritmética	v - d (finito)	v - e, v - d, v/n - e (finito)
	Álgebra	v - e, v/n - e (finito) v - e (infinito)	v/a - ap, v - d, v/a - e (finito) v - e (infinito)
Segundo periodo	Aritmética	v/n - e, v - d (finito)	v - ap, v/a - ap, v - d, v - e, v/a - e (finito)
	Álgebra	v - d, v/a - ap, v - e, v/a - e (finito) v/a - ap, v/a - e, v - e (infinito)	v/a - ap, n/a - e, v - e, a - ap, v - d, v - ap (finito) v/a - ap (infinito)
	Geometría		v - d (finito)
Tercer periodo	Aritmética	v/a - d, v/a - e, v - e, v - ap, v/n - e, n - e, v/t - e (finito) v - e (infinito)	v - d, v/n - e, v/n - ap, v - e, v - d (finito) a - ap, v - e, v/a - ap (infinito)
	Álgebra	v/n - e (finito)	v - ap,v - d, v/a - ap, v - e, v/a - e, v/a - d (finito) v/a - ap,v - d, v/a - d (infinito)

En el caso de las funciones, los fenómenos organizados para los cuatro tipos de límites considerados se presentan predominantemente en los textos de álgebra y de cálculo diferencial. Entre ellos destacan aquellos con un enfoque formal, especialmente para el límite finito en el infinito y el límite infinito en un punto (tabla 7).

Tabla 7.
Obras analizadas que incluyen fenómenos de funciones

	Aritmética (12)		*Álgebra (14)*		*Cálculo dif. (5)*	
	Intuitivo	Formal	Intuitivo	Formal	Intuitivo	Formal
Finito en un punto	0	0	0	1	1	2
Finito en el infinito	0	1	3	4	2	1
Infinito en un punto	0	1	2	6	0	1
Infinito en el infinito	0	0	1	0	1	1

Los fenómenos intuitivos caracterizados para los límites de funciones (figura 13) se encuentran en los textos dedicados al álgebra, tanto en el primer como en el tercer periodo; y al cálculo diferencial, únicamente en el primer periodo.

ó dividendo *a*. Con todo, como á medida que crece el divisor, disminuye el quociente, quanto mayor sea el valor que asignemos á x, tanto mas se aproxîmará á *cero* el valor de $\frac{a}{x}$; bien que jamas podrá ser exâctamente igual á *cero*, segun requiere la propuesta del problema [1].

Fig. 13. Fenómeno intuitivo para límite de una función. *Fuente*: Lacroix, 1808, t. II, p. 149.

El enfoque intuitivo se utilizó durante el primer periodo para cada uno de los cuatro límites de funciones estudiados, mientras que en el tercer periodo quedó reservado este enfoque para el límite infinito en un punto. En relación con el sistema de representación, durante el primer periodo todos los fragmentos de enfoque intuitivo encontrados se presentan en el registro verbal, independientemente del contenido al que se vincule; mientras que en el tercer periodo el registro verbal se acompaña del registro numérico. Atendiendo al formato, los manuales destinados al álgebra presentan todos los fragmentos que incluyen fenómenos intuitivos a partir de ejemplos, mientras que aquellos destinados al cálculo diferencial abordan tanto ejemplos como definiciones (tabla 8).

47. *Una funcion es* CONTÍNUA *cuando á un incremento muy pequeño de la variable ó de las variables, corresponde un incremento muy pequeño de la funcion, y tan pequeño como se quiera, cuando se haga suficientemente pequeño el de las variables*. Ejemplo:

Sea la funcion de primer grado

$$y = ax + b;$$

siendo x un valor de la variable é y el valor correspondiente de la funcion. Si á x se le dá otro valor x', se obtendrá para un nuevo valor que llamaremos y', de manera que tendremos

$$y' = ax' + b$$

y, restando ambas expresiones, miembro á miembro,

$$y - y' = ax - ax' = a\,(x - x')$$

donde se ve que la diferencia $y - y'$ entre dos valores de la funcion podrá hacerse tan pequeña como se quiera, haciendo $x - x'$ suficientemente pequeño, es decir, haciendo que la variable sufra alteraciones muy pequeñas, y tanto como se quiera.

Fig. 14. Fenómeno formal para límite de una función. *Fuente*: García de Galdeano, 1883, p. 17.

Los fenómenos formales (figura 14) se hallan durante todo el siglo XIX, aunque se localizan en contenidos diferentes en los distintos periodos. Durante el primer y segundo periodos, los fenómenos formales aparecieron vinculados al álgebra y al cálculo diferencial, pero esta tendencia se vio modificada en el tercer periodo, al manifestarse en los contenidos de aritmética y álgebra.

Precisamente, la vinculación al contenido de aritmética es una de las diferencias más notables entre ambos enfoques, formal e intuitivo, en el límite de funciones. Como ya sucediese para el enfoque intuitivo, los fenómenos formales sirvieron para presentar los cuatro tipos de límites durante el primer periodo. Sin embargo, esta formalización desapareció para el límite infinito de una función en el infinito en el resto de las obras analizadas. En relación con el sistema de representación, el registro verbal está presente en cada uno de los fragmentos en los que se identifica el límite de funciones. Además, existe una manifestación del registro simbólico-algebraico ya desde el primer periodo y del registro numérico desde el segundo. En los dos casos sirve para acompañar al registro verbal. Ambos formatos, definiciones y ejemplos se utilizan durante los tres periodos, si bien es cierto que durante el primer periodo las definiciones con un enfoque formal se utilizan para los límites en el infinito, mientras que durante el resto del siglo se utilizan para el límite en un punto. Asimismo, el formato también puede diferenciarse según el contenido, ya que los fenómenos formales se presentan vinculados a la aritmética solo para mostrar ejemplos (tabla 8).

Tabla 8.
Descripción de los fenómenos para los límites de funciones encontrados
con referencia al sistema de representación, formato y tipo de límite

	Contenido	*Enfoque*	
		Intuitivo	Formal
Primer periodo	Álgebra	v - e (infinito en el infinito) v - e (finito en el infinito) v - e (infinito en un punto)	v - e, v - d (finito en el infinito) v - e (infinito en un punto)
	Cálculo diferencial	v - e (finito en un punto) v - d (infinito en el infinito)	v/a - e (finito en un punto) v - d (infinito en el infinito) v - d, v - e, v/a - e (finito en el infinito) v - e (infinito en un punto)
Segundo periodo	Álgebra	-	v/n - e, v - e, v/a - e (infinito en un punto)
	Cálculo diferencial	-	v - d (finito en un punto)
Tercer periodo	Aritmética	-	v - e (finito en el infinito) v - e (infinito en un punto)
	Álgebra	v/n - e (infinito en un punto)	v - d, v/a - d (finito en un punto) v - e (finito en el infinito) v/n - e, v - e (infinito en un punto)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Después del análisis realizado, observamos que la noción de límite aparece en una elevada proporción de las 27 obras revisadas. Tan solo está ausente de los textos dedicados a la trigonometría y a la geometría analítica. Aunque el cálculo diferencial desapareció relativamente pronto de los planes de estudios de segunda enseñanza, los límites se mantuvieron presentes de forma permanente en textos de aritmética y álgebra. De hecho, este parece ser el lugar natural para la introducción de los límites en el periodo y nivel educativo analizados. Por ejemplo, Vallejo y Odriozola, que escriben obras que incluyen textos independientes sobre aritmética, álgebra y cálculo diferencial no definen el concepto de límite por primera vez en el texto sobre cálculo diferencial, sino en el dedicado al álgebra (Vallejo) o tanto en el de aritmética como en el de álgebra (Odriozola).

Hemos identificado diferencias entre los autores respecto a la ubicación de la definición de la noción de límite. Esencialmente existen tres posturas a la hora de definir esta noción por primera vez (tabla 9). Esto abre la puerta a posibles investigaciones sobre perfiles de autores de textos de la época.

Tabla 9.
Perfiles de autores según el lugar de definición del límite

Solo en aritmética	*Solo en álgebra*	*En aritmética y en álgebra*
Lacroix, Lista y Aragón, Vallín y Bustillo, Gavilán, Moreno y Ceruelo.	Vallejo, Moya, Baltzer.	Odriozola, Cortázar, García de Galdeano, Rubio y Díaz.

Aunque una idea intuitiva de límite era ya muy antigua, su conceptualización y formalización son coetáneas a gran parte de los textos estudiados. En términos generales se aprecia aún una cierta confusión con respecto a la naturaleza epistemológica de esta noción (aritmética, geométrica o algebraica). Estas dificultades podrían estar unidas a las del desarrollo riguroso de la noción de función durante la época a partir de ideas más o menos intuitivas sobre cantidades variables (Youschkevitch, 1976); pero también podrían estar relacionadas con el desarrollo del infinito actual, necesario para dominar la noción de límite y que no es aceptado hasta el siglo XIX. Sobre esto, Belmonte (2009) señala que, aunque el infinito potencial es aceptado ya desde la antigua Grecia, la aceptación del actual no se resuelve hasta Cantor. De hecho, subraya que autores tan importantes en el desarrollo de la definición de límite como Cauchy no aceptaron el infinito actual. La inexistencia de temarios detallados antes del inicio del siglo XX también pudo contribuir a la diversidad de posturas identificadas entre distintos autores.

La presentación de la noción de límite que aparece en múltiples textos es muy similar a la que se encuentra en la *Enciclopedia* ya a mediados del siglo XVIII (figura 1), incluso en lo referente al uso de la representación verbal, y en la que según Schubring (2005, p. 212) hay un «dominio de lo geométrico». Apenas se utiliza el término *función* en las obras analizadas (que se relacionaría con un enfoque más próximo a Weierstrass), predominando la idea de cantidad variable (similar a lo empleado por Cauchy). Esta situación puede entenderse en parte por la utilización prolongada en el tiempo de textos que iban quedando anticuados. Por ejemplo, el *Tratado* de Vallejo, acabado en 1807 y publicado en 1812, aún se recomendaba en las listas oficiales de 1856. Por otro lado, pese a ser muchos los libros de texto publicados en la España del siglo XIX (Sánchez Ron, 1992), estos tenían escasa originalidad y eran escritos por docentes de segunda enseñanza pensando exclusivamente en el uso de sus propios alumnos. Ambas situaciones eran ya criticadas en la época por autores como García de Galdeano (Miana y Oller-Marcén, 2022).

En definitiva, en términos generales la noción de límite en los textos analizados se aborda de un modo relativamente poco avanzado, empleando más ejemplos que definiciones a la hora de presentarlo. También indicamos que aparece vinculada con mayor frecuencia a la noción de sucesión que a la de función (en términos actuales) y se utiliza con muy poca frecuencia el lenguaje simbólico-algebraico. Los autores más modernos a este respecto son Baltzer, un alemán; Cortázar, formado en el extranjero (León-Mantero y Maz-Machado, 2015); y García de Galdeano, con intensos contactos internacionales y que pasó la mayor parte de su vida tratando de renovar la formación matemática en España (Hormigón, 1983). Es interesante señalar que este peso de las influencias personales de los autores de las obras coincide con lo ya señalado por Sánchez Sierra y González Astudillo (2017) en el contexto de la geometría analítica. Por otro lado, estos autores presentan un avance mayor, aunque incompleto, hacia la algebrización de la noción de límite (Schubring, 2005). Este avance se verá continuado en los textos de las primeras décadas del siglo XX (Arnal-Palacián et al., 2020b, Claros-Mellado et al., 2016) que fueron escritos, en buena medida, por matemáticos que ya se habían formado con un enfoque más moderno.

Pese a que la noción de límite se presenta de una manera poco técnica, los fenómenos formales (situados en el PMA) prevalecen y van adquiriendo cada vez más importancia en el desarrollo del límite, según avanzan los periodos considerados. Esto coincide con el hecho de que las definiciones de D'Alembert y Cauchy, que podrían situarse dentro de lo que Tall (1991) denominaba PME, van dejando paso a la definición de Weierstrass, que situamos en el PMA. Esto se observa en el hecho de que aparecen con mayor frecuencia los fenómenos formales que los intuitivos, especialmente en el tercer periodo y asociados al álgebra. Los fenómenos formales son más predominantes que los intuitivos (situado en el PME) tanto en sucesiones como en funciones, y por lo tanto se puede afirmar que se da una evolución similar en ambas nociones de límites.

La noción de límite es una noción que debería estar en el PMA, teniendo en cuenta los procesos implicados en su desarrollo y posterior comprensión. Para poder llevar a cabo esta introducción parece que los autores de libros de texto ven necesaria, para su presentación en la segunda enseñanza, una combinación de fenómenos intuitivos y formales que se van entrelazando y preparan al estudiante para enseñanzas posteriores.

Desde una mirada fenomenológica se aprecia que la noción de límite fue abordada durante prácticamente todo el siglo XIX desde un registro verbal, tanto para el enfoque intuitivo como para el formal. En particular, para el caso de los fenómenos intuitivos, aunque se presentan los registros numérico, simbólico-algebraico y tabular acompañando al registro verbal, esto sucede de manera casi aislada y únicamente para el límite de sucesiones. No obstante, la riqueza de registros para este tipo de límite es mayor que durante buena parte del siglo XX, ya que hasta la década de 1980 no aparece el registro gráfico para el límite de una sucesión con un enfoque intuitivo, y hasta 1990 no se observa el registro tabular (Claros-Mellado et al., 2016). En el caso de los fenómenos formales, de nuevo es el registro verbal el que con mayor frecuencia aparece, y la escasa incidencia de los registros verbal, numérico y simbólico-algebraico se ha mantenido hasta el siglo XXI con la sola excepción del periodo de 1975-1995 para algunos tipos de límite (Arnal-Palacián et al., 2020b; Claros-Mellado et al., 2016).

Para finalizar, es importante puntualizar que el aparato teórico que se ha utilizado durante la fase hermenéutica es de carácter ahistórico y su desarrollo es reciente, en trabajos como los citados anteriormente. Además, aunque ha sido utilizado con éxito en el análisis de libros de texto modernos, se planteó inicialmente desde un punto de vista teórico especulativo, como paso previo a una investigación de diseño. A este respecto, autores como Grattan-Guinness (2004) advierten sobre los posibles peligros de analizar textos antiguos bajo una perspectiva moderna. Sin embargo, desde un punto de vista metodológico, creemos que el carácter descriptivo de la investigación, que trata de evitar realizar juicios valorativos sobre el tratamiento de la noción de límite por parte de los distintos autores considerados, contribuye a evitar en buena medida estos peligros.

Como se ha puesto de manifiesto, este aparato teórico se ha revelado muy útil en el análisis de los textos seleccionados, proporcionando una interesante visión de conjunto sobre el tratamiento de la noción de límite a lo largo del siglo XIX en la segunda enseñanza en España. Sin embargo, hay que recordar que la noción de límite fue formalizada a finales del siglo XIX. Por tanto, se puede reflexionar respecto al modo en que se reflejan los distintos fenómenos, en particular los formales, en los textos de los dos primeros periodos en comparación con el tercero. Por ejemplo, resulta relevante comparar la aproximación de la figura 15 (primer periodo) con la que se mostró en la figura 8 (tercer periodo). En ambos casos se trata de un fenómeno formal para el límite de funciones, pero los sistemas de representación y la terminología utilizadas son diferentes. Cabe preguntarse si existirá una evolución más o menos continua a lo largo del siglo XIX a este respecto, así como en lo relativo al paso del enfoque intuitivo al formal. De hecho, quizás podría considerarse el caso de la figura 15 como una cierta situación transitoria entre los fenómenos intuitivos y los formales.

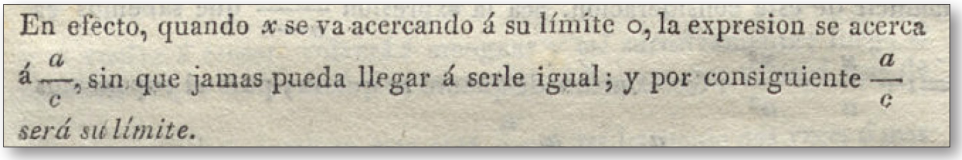

En efecto, quando x se va acercando á su límite o, la expresion se acerca á $\frac{a}{c}$, sin que jamas pueda llegar á serle igual; y por consiguiente $\frac{a}{c}$ *será su límite.*

Fig. 15. Fenómeno formal para límite de una función. *Fuente*: Vallejo, 1813, t. II, parte II, p. 74.

Para poder abordar esta cuestión, que trasciende los objetivos de este trabajo, es necesario ir más allá del estudio fenomenológico descriptivo que hemos realizado y analizar con mayor detalle las definiciones y los modos de presentar la noción de límite en los textos considerados.

En cualquier caso, la aplicación del aparato teórico en un contexto diferente a aquel para el que fue diseñado nos ha permitido identificar algunas situaciones, en especial en el caso de los textos dedicados a la geometría, con potencial para ampliar o refinar el conjunto de los fenómenos organizados por la noción de límite. Esto abre la puerta a futuras investigaciones e ilustra el interés y utilidad que tiene una aproximación histórica en el ámbito de la investigación en educación matemática (González-Astudillo, 2009).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado dentro del grupo de investigación de referencia «Investigación en Educación Matemática» (S60_23R) reconocido oficialmente por el Gobierno de Aragón.

REFERENCIAS

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J. y Sánchez-Compaña, M. T. (2020a). Infinite Limit of Sequences and Its Phenomenology. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(3), em0593.
https://doi.org/10.29333/iejme/8279

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J. y Sánchez-Compaña, M. T. (2020b). Límite infinito de sucesiones en libros de texto españoles: desde 1936 hasta 2019. *PNA*, *14*(4), 295-322.
https://doi.org/10.30827/pna.v14i4.15143

Arnal-Palacián, M. (2022). Infinite limit of a function at infinity and its phenomenology. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis| Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, *14*, 25-41.
https://doi.org/10.24917/20809751.14.3

Ausejo, E. y Matos, J. M. (2014). Mathematics Education in Spain and Portugal. En A. Karp y G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 284-291). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_14

Bagni, G. T. (2005). The historical roots of the limit notion: cognitive development and the development of representation registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *5*, 453-468.
https://doi.org/10.1080/14926150509556675

Belmonte, J. L. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad* [Tesis doctoral, Universidad de Salamanca]. http://hdl.handle.net/10366/76247

Benso Calvo, C. (2000). El libro de texto en la enseñanza secundaria (1845-1905). *Revista de Educación*, *323*, 43-66.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(3), 219-236.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover Publications.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechique*. Debure frères.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153-166). Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Claros, J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organiza el límite. *PNA*, *1*(3), 125-137. https://doi.org/10.30827/pna.v1i3.6210

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2013). Sucesión convergente y sucesión de Cauchy: equivalencia matemática y equivalencia fenomenológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(2), 113-131. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n2.900

Claros-Mellado, J., Sánchez-Compaña, M. T. y Coriat-Benarroch, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933-2005. *Educación Matemática*, *28*(1), 125-152.
https://doi.org/10.24844/EM2801.05

Dini, U. (1878). *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabli reali*. Tipografia T. Nistri e C.

Dugac, P. (1973). Elements d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences*, *10*(1), 41-176.
https://doi.org/10.1007/BF00343406

Edwards, B. S., Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 15-25.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_2

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Reidel Publishing Company. https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X

González-Astudillo, M.T. (2009). La investigación en historia de la educación matemática. *Educación y Ciencia*, *1*(36), 37-58.

Grattan-Guinness, I. (2004). History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. *The American Mathematical Monthly*, *111*(1), 1-12.
https://doi.org/10.2307/4145010

Hormigón, M. (1983). Una aproximación a la biografía científica de García de Galdeano. *El Basilisco: Revista de materialismo filosófico*, *16*, 38-47.

Janvier, C. (1987). Representation and Understanding: The Notion of Function as an Example. En C. Javier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-71). Lawrence Erlbaum.

Katz, V. J. (1995). Ideas of calculus in Islam and India. *Mathematics Magazine*, *68*(3), 163-174.
https://doi.org/10.1080/0025570X.1995.11996307

León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2015). Juan Cortázar y sus aportaciones a la Educación Matemática española del siglo XIX. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, *30*(1), 55-62.

Miana, P. J. y Oller-Marcén, A. M. (2022). En torno a la correspondencia internacional de Zoel García de Galdeano. *Asclepio*, *74*(1), p. 592.
https://doi.org/10.3989/asclepio.2022.13

Montero Alcaide, A. (2009). Una ley centenaria: la ley de instrucción pública (Ley Moyano, 1857). *Cabás*, *1*, 105-127.

Nakane, M. (2014). Did Weierstrass's differential calculus have a limit-avoiding character? His definition of a limit in ϵ–δ style. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, *29*(1), 51-59. https://doi.org/10.1080/17498430.2013.831241

Real Apolo, C. (2012). La configuración del sistema educativo español en el siglo xix: Legislación educativa y pensamiento político. *Campo Abierto. Revista de Educación*, *31*(1), 69-94.

Rico Romero, L. y Maz Machado, A. (2007). Libros de texto de matemáticas en España durante los siglos xviii y xix. En M. F. Guzmán (Coord.), *Humanidades y ciencias. Aspectos disciplinares y didácticos: Homenaje a la profesora Ana Vilches Benavides* (pp. 297-308). Atrio.

Ruiz Berrio, J. (1970). *Política escolar de España en el siglo xix:(1808-1833)*. CSIC.

Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista Española de Pedagogía*, *134*, 449-475.

Sánchez Ron, J. M. (1992). Las ciencias Físico-Matemáticas en la España del siglo xix. En J.M. López Piñero (Ed.), *La Ciencia en la España del siglo xix* (pp. 51-84). Marcial Pons.

Sánchez Sierra, I. M. y González Astudillo, M. T., (2017). La geometría analítica en España durante el siglo xix: estudio de las soluciones negativas de una ecuación. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(3), 89-106. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2348

Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-28273-4

Schubring, G. (2023). *Analysing Historical Mathematics Textbooks*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-17670-8

Schubring, G. y Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and development: an overview. *ZDM Mathematics Education*, *50*(5), 765-771. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0979-4

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_1

Tall, D. O. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM Mathematics Education*, *41*(4), 481-492. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0192-6

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Utande Igualada, M. (1964). *Planes de estudio de enseñanza media*. Ministerio de Educación Nacional.

Utande Igualada, M. (1982). Un siglo y medio de la Segunda Enseñanza (1820-1970). *Revista de Educación*, *271*, 7-41.

Vea Muniesa, F. (1986). *Las matemáticas en los planes de estudios de enseñanza secundaria en España en el siglo xix*. Universidad de Zaragoza.

Vea Muniesa, F. (1995). *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo xix*. Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón.

Youschkevitch, A. H. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, *16*(1), 37-85. https://doi.org/10.1007/BF00348305

The Notion of Limit in 19th-Century Spanish Secondary Education Textbooks

Mónica Arnal-Palacián
Departamento de Matemáticas – IUMA, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España
marnalp@unizar.es

Javier Claros-Mellado
IES Calderón de la Barca, Pinto, España
fclaros@iescalderon.es

Antonio M. Oller-Marcén
Departamento de Matemáticas – IUMA, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España
oller@unizar.es

The mathematical notion of limit is a complex one, and it involves elements related to potential infinity and to the idea of infinitesimal which are present, even if in an incipient and intuitive form, in the mathematics of different ancient civilizations. However, the process of formalization and arithmetization of the notion of limit took place essentially during the 19th century. Throughout that period, mathematical activity in Spain was very much oriented to the production of textbooks, with the treatment of mathematical content strongly depending on the author of the text and the influences that he could have received. The analysis of the presence of the notion of limit in textbooks published at that time, when the above process was taking place, makes it possible to appreciate the transposition of this notion between the research and the teaching communities. It can also illustrate how different definitions or conceptions of the notion of limit could have found their way into the Spanish «periphery» from the formalization processes that were being developed in the academic «metropolis» of the time.

Hence, this paper aims to analyze the presence of this notion in the secondary education textbooks used in Spain throughout the 19th century, and to identify the different intuitive and formal phenomena that appear in them. To do so, we carried out documentary research of an exploratory and descriptive nature, according to the classical phases of the historical method (heuristics, criticism, and hermeneutics). Particularly, 27 textbooks written by 20 different authors were selected, and they were classified according to three periods based on the evolution of the Spanish educational legislation of the time. We analyzed these textbooks not only regarding the different phenomena, but also according to the content in which the notion of limit appeared (arithmetic, algebra, geometry, trigonometry, analytic geometry, and differential calculus), the mathematical object involved (sequences or functions), the type of limit (finite, infinite, at a point, etc.), the format (definition, example, or application) and the system of representation (verbal, graphic, numeric, tabular, and symbolic-algebraic).

From the exhaustive analysis of these texts, we observe an important presence of the notion of limit, which is in fact absent only from three of the analyzed books. In addition, there is a clear tendency to include the definition and examples of the notion of limit in works devoted to algebra and arithmetic, as opposed to a predominance of applications in the case of geometry textbooks. We also point out that the notion of limit appears more frequently linked to the concept of sequence than to the concept of function (using modern terminology), mainly by means of a verbal register, and with a scarce presence of the symbolic-algebraic system of representation. In general terms, the notion of limit is approached in a relatively unadvanced way in the analyzed texts, with more examples than formal definitions when presenting it. Although the notion of limit is presented in a rather non-technical way, formal phenomena (related to advanced mathematical thinking) prevail, and they become more and more important as the considered periods progress. This is made clear by the fact that, in the third period, formal phenomena appear more frequently than intuitive ones, and they do so in association with algebra. Formal phenomena are more predominant than intuitive ones (related to elementary mathematical thinking) both in sequences and in functions. Thus, we detect a similar evolution in both notions of limits.

Finally, the theoretical apparatus proved very useful in the analysis of the selected sources, providing an interesting overview of the treatment of limit throughout the 19th century in Spanish secondary education. This illustrates the interest and usefulness of the interplay between a historical approach and the use of theoretical frameworks coming from the field of mathematics education research.