POLINOMIO: DEFINICIÓN

Se denomina **<u>polinomio con coeficientes reales</u>** en la indeterminada x a toda expresión finita de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

donde $a_0 , a_1 , a_2 , \ldots , a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$

- Los números reales $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ son los **<u>coeficientes</u>**.
- El número real a_0 es el **<u>término independiente</u>**.
- El sumando a_ix^i es el **<u>término de grado i</u>**.
- El polinomio cuyos coeficientes son todos nulos es el **<u>polinomio nulo 0(x)</u>**.
- El **<u>polinomio opuesto (-P(x))</u>** es aquel cuyos coeficientes y término independiente tienen signo contrario a los del polinomio dado.

GRADO DE UN POLINOMIO

El **grado de un polinomio** es el exponente más alto al que se encuentra elevada la indeterminada.

EJEMPLO:

a) $P(x)= 7x^4 + 6x^2 + 2x + 3$ → *Grado 4*

b) $Q(x)= 3 + 2x + 10x^2$ → *Grado 2*

c) $R(x)= 12$ → *Grado 0*

Si el polinomio consta de 2 o más variables, el grado de cada uno de sus términos es la suma de los grados de las variables que intervienen en el término.

EJEMPLO:

a) $P(x)= 7x^3 - 2x^2y + y^2x$ → *Grado 3*

b) $Q(x)= 5x^3 + x^2y^2 - y^3$ → *Grado 4*

c) $R(x)= 8xy + x^2 – y$ → *Grado 2*

NOMENCLATURA DE LOS POLINOMIOS

A continuación se muestra la nomenclatura de los polinomios según el número de términos que lo componen.

- Monomio: Formado por un único término.
- Binomio: Formado por 2 términos.
- Trinomio: Formado por 3 términos.
- Cuatrinomio: Formado por 4 términos.

EJEMPLO:

a) $P(x)= 2x^2$; $Q(x)= x^3$ → Monomio

b) $P(x)= 5x^2 + 9x$; $Q(x)= 9x^4 + x$ → Binomio

c) $P(x)= x^2 - x + 3$; $Q(x)= x^4 - x - 12$ → Trinomio

d) $P(x)= x^4 +10x^2+7x-5$; $Q(x)=x^3 - x^2 - 8x -1$ → Cuatrinomio

POLINOMIOS IGUALES

Se dice que dos polinomios P(x) y Q(x) son **iguales** si:

- Ambos tienen el mismo grado.
- Son iguales entre sí los coeficientes de los términos del mismo grado.

EJEMPLO:

Vamos a hallar a y b para que P(x) = Q(x)

$P(x)= -ax + 9x^2$ $\quad\quad$ $Q(x)= bx^3 + 9x^2 – 5x$

- Para que tengan el mismo grado → b = 0
- Para que los coeficientes sean iguales → a = 5

De esta forma $\quad P(x)= -5x + 9x^2 \quad$ y $\quad Q(x)= 9x^2 -5x$

SON IGUALES

VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Se denomina **valor numérico de un polinomio**, al número real que se obtiene al sustituir la variable x o indeterminada por un número real determinado.

EJEMPLO:

i. ¿Cuál es el valor numérico de $P(x)= 2x^2 – x + 4$ si $x=1$?

$$P(1)= 2\cdot(1)^2 – (1) + 4 = 5$$

ii. Si $P(x)= 2x^2 – 3x + 1$, ¿cuál sería el resultado $P(2)$?

$$P(2)= 2\cdot(2)^2 – 3\cdot(2) + 1 = 3$$

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Dados los polinomios:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

- Se llama **suma** de P(x) y Q(x) al polinomio S(x) tal que:

$$S(x) = P(x)+Q(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots + (a_n+b_n)x^n$$

- Para **restar** dos polinomios, se suma el primero al opuesto del segundo de forma que:

$$P(x) – Q(x) = P(x) + (-Q(x))$$

EJEMPLO:

Suma y resta de los polinomios:

$$P(x)= 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1 \qquad Q(x)= x^3 + 2x + 2$$

- $P(x) + Q(x) = (2+1)x^3 + (5+0)x^2 + (-2+2)x +(1+2) =$

$$\underline{3x^3 + 5x^2 +3}$$

- $P(x) - Q(x)= (2-1)x^3 + (5-0)x^2 + (-2-2)x +(1-2) =$

$$\underline{x^3 + 5x^2 - 4x - 1}$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Dados los polinomios:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$$

El **<u>producto</u>** $P(x)\cdot Q(x)$ es el polinomio resultante al sumar los productos de cada monomio de $P(x)$ por cada monomio de $Q(x)$.

EJEMPLO:

Dados los polinomios:

$$P(x)= 2x + 1 \qquad\qquad Q(x)= x^2- 5x +2$$

$$P(x)\cdot Q(x)= 2x\cdot x^2 + 2x\cdot(-5x) + 2x\cdot 2 + 1\cdot x^2 -1\cdot 5x + 1\cdot 2$$

$$P(x)\cdot Q(x)= 2x^3 – 10x^2 + 4x + x^2 – 5x + 2 =$$

$$\underline{2x^3 - 9x^2 - x +2}$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Dados los polinomios P(x) y Q(x) ≠ 0(x)

Se define la división de P(x) entre Q(x) como el proceso seguido para hallar los únicos polinomios C(x) y R(x) tales que:

$$P(x)= C(x)\cdot Q(x) + R(x)$$

con grado R(x) < grado Q(x)

Pasos:

1. Ordenar los términos, dividendo y divisor, de mayor a menor grado.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor, así se obtiene el primer cociente.
3. Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y el resultado se resta del dividendo, obteniéndose un resto parcial.
4. Se toma este resto como dividendo y se repite el proceso tantas veces como sea necesario hasta que el resto parcial sea de grado inferior al del divisor. Este último es el resto R(x) de la división.

EJEMPLO:

División P(x) / Q(x)

$P(x)= 3x^5 + 6x^4 - x^3 + 13x^2 - x + 4 \quad ; \quad Q(x)= 3x^2 + 2$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5 + 6x^4 - x^3 + 13x^2 - x + 4 & 3x^2 + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^5 \qquad -2x^3} & x^3 + 2x^2 - x + 3 \\
\quad + 6x^4 - 3x^3 + 13x^2 - x + 4 & \\
\quad \underline{-6x^4 \qquad -4x^2} & \\
\qquad - 3x^3 \quad + 9x^2 - x + 4 & \\
\qquad \underline{3x^3 \qquad + 2x} & \\
\qquad\qquad + 9x^2 + x + 4 & \\
\qquad\qquad \underline{-9x^2 \qquad -6} & \\
\qquad\qquad\qquad x \ \ -2 &
\end{array}
$$

$\underline{C(x)= x^3 + 2x^2 - x + 3}$

$\underline{R(x)= x- 2}$

REGLA DE RUFFINI: DEFINICIÓN

La regala de Ruffini es un método que se puede emplear para la división de polinomios, si el divisor es de la forma (x - a) siendo $a \in \mathbb{R}$

Siendo:

$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad Q(x) = x - a$$

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
a		$a*b_3$	$a*b_2$	$a*b_1$	$a*b_0$
	$a_4=b_3$	$a_3+ab_3=b_2$	$a_2+ab_2=b_1$	$a_1+ab_1=b_0$	$a_0+ab_0=R$

Obteniéndose el cociente $C(x)= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ y el resto R.

EJEMPLO:

Apliquemos la Regla de Ruffini a los polinomios

$$P(x)= 5x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x - 1 \qquad Q(x)= x - 2$$

	5	2	-3	0	1	-1
2		10	24	42	84	170
	5	12	21	42	85	169

$C(x) = 5x^4 + 12x^3 + 21x^2 + 42x + 85$

$R(x) = 169$

También se puede usar si Q(x)= x + a ya que:

x + a = x - (-a) → Q(x)= x + a = x - (-a)

TEOREMA DEL RESTO

TEOREMA DEL RESTO: El resto R de la división de un polinomio P(x) entre Q(x)= x - a coincide con el valor numérico P(a) para x = a.

$$P(x) = C(x) \cdot (x - a) + R$$

Si sustituimos x por a se obtiene:

$$P(a) = C(a) \cdot (a - a) + R = 0 + R = R$$

$$\underline{P(a) = R}$$

- El número real a es una **<u>raíz del polinomio</u>** P(x) si el valor de P(a) = 0

EJEMPLO:

Realizamos la división $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$ mediante la regla de Ruffini.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

El resto de la división es **56**.

Por lo tanto, según el teorema del resto → P(3)= 56

Comprobamos:

$P(3)= 3^4 - 3\cdot(3)^2 + 2 = 81 - 27 + 2 =$ **56** → *Correcto*

RAÍZ DE UN POLINOMIO

- Definición: r es una raíz de P(x) si el valor del polinomio para x=r es cero, P(r)= 0.

- Si r es una raíz de P(x), este polinomio será divisible por (x - r).

- Si P(x)= x^2 - x - 2; sus raíces enteras serán divisores de -2 y, por tanto, pueden estar entre los valores ±1 y ±2. Tanto sustituyendo x=-1 y x=2 en P(x) como aplicando Ruffini entre (x+1) y (x-2), en ambas el resto es 0, por lo que -1 y +2 son raíces de P(x).

EJEMPLO:

Calcula las raíces del polinomio:

$$x^2 - 5x + 6$$

Sabemos que las raíces pueden ser los divisores de 6 →

±1, ±2, ±3

Aplicamos Ruffini hasta que encontremos con cuales de estos números el resto es 0.

En este caso son +2 y +3, por lo que estas son sus raíces.

Comprobamos que r =+2 cumple que P(r)=0

$$P(2) = (2)^2 - 5 \cdot (2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

Comprobamos que r =+3 cumple que P(r)=0

$$P(3) = (3)^2 - 5 \cdot (3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$

Las raíces del polinomio: $x^2 - 5x + 6$ son $\mathbf{x_1 = 2}$ y $\mathbf{x_2 = 3}$

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

- Un polinomio es **<u>divisible</u>** por otro polinomio cuando el cociente entre ellos es exacto, es decir, el resto es cero.

$$P(x) : Q(x) = C(x) \rightarrow C(x) \cdot Q(x) = P(x)$$

- Un polinomio es **<u>irreducible</u>** cuando no existe ningún polinomio de grado inferior que sea divisor suyo.
- Un polinomio de 2º grado con raíces reales a y b se puede descomponer en producto de dos factores:

$$k(x - a)(x - b)$$

EJEMPLO:

El siguiente polinomio $P(x) = 3x^2 - 3x - 36$

tiene 2 raíces: $x = -3$ y $x = 4$

$$3x^2 - 3x - 36 = \underline{3(x + 3)(x - 4)}$$

- Cualquier polinomio se puede descomponer en producto de polinomios irreducibles, excepto los propios polinomios irreducibles.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Procedimiento a seguir para factorizar polinomios:

1. Siempre que se pueda, se saca x factor común.
2. Mediante la Regla de Ruffini se localizan las raíces del polinomio.

EJEMPLO:

Descomponer factorialmente el siguiente polinomio:

$$P(x)= x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2$$

1. Se saca x factor común:

$$P(x)= x^2(x^4 - 15x^2 - 42x - 40)$$

2. Se aplica la regla de Ruffini con los divisores de 40 (+/-1 , +/-2 , +/-4 , +/-5, +/-8 , +/-10 , +/- 20 , +/- 40)

Se comprueba que 1,-1,2 no son raíces. Pero -2 SI es raíz

	1	0	-15	-42	-40
-2		-2	4	22	40
	1	-2	-11	-20	0

$$P(x)= x^2(x - 2)(x^3 - 2x^2 - 11x - 20)$$

Ahora se prueba con los divisores de 20.

	1	-2	-11	-20
5		5	15	20
	1	3	4	0

De esta forma se obtiene:

$$P(x)= x^2(x + 2)(x - 5)(x^2 + 3x + 4)$$

3. El polinomio de grado 2: $x^2 + 3x + 4$ no tiene raíces reales, se comprueba resolviendo $x^2 + 3x + 4 = 0$
   Es un polinomio irreducible con coeficientes reales.

Así pues, la solución final de factorizar el polinomio

$$P(x)= x^6 - 15x^4 - 42x^3 - 40x^2$$

es:

$$\underline{P(x)= x^2(x + 2)(x - 5)(x^2 + 3x + 4)}$$

NOTA: El término independiente del polinomio será igual al producto de raíces.

EJEMPLO: Las raíces del polinomio $x^2 - 3x -10$ son -2 y +5

Al multiplicar sus raíces el resultado es el término independiente del polinomio inicial.

$(-2)\cdot(+5) = -10$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Se llama fracción algebraica al cociente de polinomios: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Por ejemplo:

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x - 2} \qquad \frac{3x^2 + x + 2}{8}$$

Se **simplifica** una fracción cuando el numerador y el denominador de una fracción algebraica se pueden dividir por un mismo polinomio.

Dos fracciones algebraicas, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y $\dfrac{R(x)}{S(x)}$ son **equivalentes**

si los productos P(x)·S(x) y R(x)·Q(x) son iguales

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)} \Leftrightarrow P(x)\cdot S(x) = R(x)\cdot Q(x)$$

Si se multiplican el numerador y el denominador de una fracción algebraica por un mismo polinomio, resulta una fracción equivalente a la inicial.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ equivalente a } \frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot R(x)}$$

REDUCCIÓN A COMÚN DENOMINADOR

Si tenemos varias fracciones algebraicas; se pueden obtener otras equivalentes a las primeras, que tengan el mismo denominador, a este proceso de le denomina **reducir a común denominador**.

EJEMPLO:

Vamos a reducir a común denominador: $\frac{1}{x}$ y $\frac{x+1}{x-2}$

Se calcula el m.c.m.[x , x - 2]= x(x - 2) y se obtiene:

$$\frac{(x - 2)}{x(x - 2)} \qquad \frac{x(x + 1)}{x(x - 2)}$$

Que son equivalentes a las iniciales y tienen el mismo denominador.

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Para **sumar** fracciones algebraicas se reducen a común denominador y se suman los numeradores.

EJEMPLO:

Se calcula la suma de las siguientes fracciones:

$$\frac{x + 7}{x} \quad y \quad \frac{x - 2}{x(x + 1)}$$

- Se halla el m.c.m.[x , x(x + 1)] = x(x + 1)
- Se reduce a común denominador y se opera:

$$\frac{(x + 7)(x + 1)}{x(x + 1)} + \frac{x - 2}{x(x + 1)} = \frac{(x + 7)(x + 1) + (x - 2)}{x(x + 1)}$$

$$= \frac{x^2 + x + 7x + 7 + x - 2}{x(x + 1)} = \frac{x^2 + 9x + 5}{x(x + 1)}$$

La **resta** de fracciones es en realidad una suma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{-R(x)}{S(x)}$$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

Dadas dos fracciones algebraicas su producto es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot S(x)}$$

EJEMPLO:

$$\frac{5x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2}{x+3} = \frac{(5x+1)\cdot x^2}{(x-2)\cdot(x+3)} = \frac{5x^3+x^2}{x^2+x-6}$$

- La fracción **inversa** de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es tal que $\frac{Q(x)}{P(x)}$

siempre y cuando $P(x) \neq 0$.

- A su vez, una fracción por su inversa es igual a 1.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot P(x)} = 1$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

Dadas dos fracciones algebraicas su división es el producto de la primera por la inversa de la segunda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)} = \frac{P(x)\cdot S(x)}{Q(x)\cdot R(x)}$$

Que equivale al producto en cruz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)\cdot S(x)}{Q(x)\cdot R(x)}$$

EJEMPLO:

$$\frac{5x + 1}{x - 2} : \frac{x^2}{x + 3} = \frac{(5x + 1)\cdot(x + 3)}{(x - 2)\cdot x^2} = \frac{5x^2 + 16x + 3}{x^3 - 2x^2}$$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Cualquier ecuación de primer grado o lineal con una incógnita es transformable hasta obtener una ecuación equivalente con forma:

$$ax + b = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

Las transformaciones a realizar a la ecuación inicial han de seguir las siguientes normas:

- Al sumar una misma expresión algebraica a los dos miembros de una ecuación, la ecuación que se obtiene es equivalente a la primera.
- Al multiplicar un mismo un número distinto de cero a los dos miembros de una ecuación, la ecuación que se obtiene es equivalente a la primera.

EJEMPLO:

Dada la ecuación $7x - 2 = 5x + 4$

- Se suma -5x a los dos miembros:

$$7x - 2 - 5x = 5x + 4 - 5x \rightarrow 2x - 2 = 4$$

- Se suma 2 a los dos miembros:

$$2x - 2 + 2 = 4 + 2 \rightarrow 2x = 6$$

- Se multiplican por ½ los dos miembros:

$$2 \cdot x \cdot \tfrac{1}{2} = 6 \cdot \tfrac{1}{2} \rightarrow x = 3$$

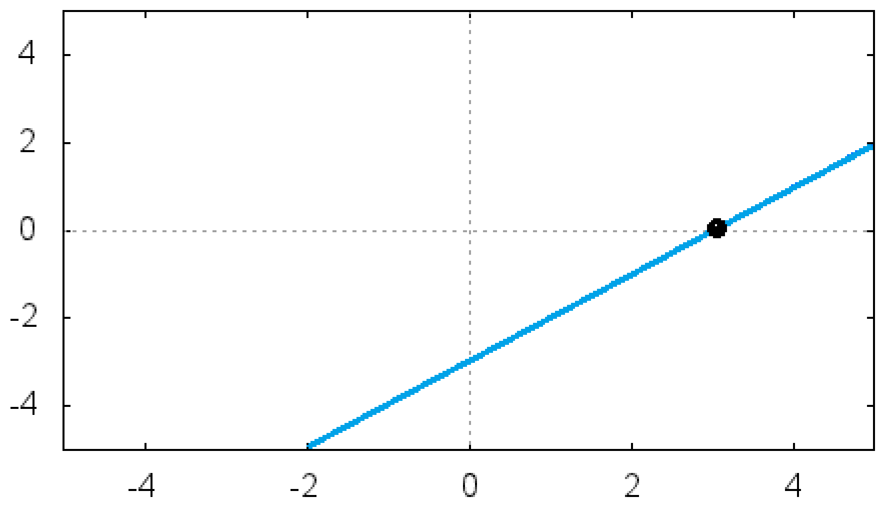
El proceso realizado en el ejemplo se conoce como *método algebraico,* pero también se puede resolver gráficamente.

Para ello, dada una ecuación cualquiera $ax + b = 0$, se considera la función $y = ax + b$, que es una función lineal cuya gráfica es una recta. La intersección de esta recta con el eje de abscisas nos da el punto en el cual la ordenada y toma el valor 0. El de la abscisa x de dicho punto es la solución de la ecuación.

EJEMPLO:

Resolvemos gráficamente la ecuación: $x - 3 = 0$

Se considera la función $y = x - 3$, y se representa en los ejes cartesianos.



En la gráfica se puede observar que el punto de intersección de la recta con el eje de abscisas es (3,0), así la solución de la ecuación es: $\mathbf{x = 3}$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Dada cualquier ecuación de segundo grado con una incógnita, realizando las mismas transformaciones que a las ecuaciones de primer grado, puede obtenerse una ecuación equivalente de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b, c $\in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

Las soluciones a las ecuaciones de segundo grado se obtienen al aplicar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $\Delta = b^2 - 4ac$ es el discriminante de la ecuación, que determina la naturaleza de sus soluciones:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene 2 soluciones reales distintas.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene 2 soluciones reales e iguales a $x = -\frac{b}{2a}$ (raíz doble).
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones en el campo de los números reales, porque en $\mathbb{R}$ no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

EJEMPLO:

Se resuelve la ecuación: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5 \pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow \mathbf{x_1=3,\ x_2=2}$$

También se puede resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ de forma gráfica, considerando la función $y = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica es una parábola. Los puntos de intersección de la ecuación con el eje de abscisas tendrán la forma (x, 0) y, por consiguiente, las abscisas de dichos puntos serán las soluciones de la ecuación.

ECUACIONES BICUADRADAS

Una ecuación de la forma: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tiene el nombre de *ecuación bicuadrada* y se resuelve mediante el cambio $x^2 = t$.

De tal forma que se obtiene la ecuación $at^2 + bt + c = 0$, pudiéndola resolver como una ecuación de segundo grado.

EJEMPLO:

Se resuelve la ecuación $x^4 - 81 = 0$

- Haciendo el cambio $x^2 = t$, se obtiene: $t^2 - 81 = 0 \rightarrow$
  $t^2 = 81 \rightarrow t_1 = 9,\ t_2 = -9$
- Deshaciendo el cambio: $x = \sqrt{9} = \pm 3$ y

  $x = \sqrt{-9}$ no tiene soluciones reales.

- Así las soluciones son: $\mathbf{x_1 = 3}$ **y** $\mathbf{x_2 = -3}$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Son **ecuaciones exponenciales** aquéllas en las que la incógnita está en el exponente.

Por ejemplo: $3^{x-1} = 56$, $5^x + 3 = 7$, $6^x + 7^{x-3} - 9 = -3$

Para facilitar la resolución de este tipo de ecuaciones hay que intentar expresar los dos miembros de la ecuación como potencias de la misma base, por lo que tendremos que aplicar las propiedades de las potencias. Especialmente la propiedad: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

EJEMPLO:

- Para resolver la ecuación $3^{x-1} = 27$
  - Se expresa 27 como potencia de 3 → $3^{x-1} = 3^3$
  - Se deduce que $x - 1 = 3$ → $x = 4$

- Para resolver $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$
  - Se aplican las propiedades de las potencias, obteniéndose: $2^x \cdot 2 + 2^x + \frac{2^x}{2} = 28$
  - Se saca factor común: $2^x\left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 28$
  - Finalmente se opera: $2^x \cdot \frac{7}{2} = 28$ → $2^x = 2^3$ → $x = 3$

En algunas ocasiones no se pueden expresar los dos miembros como potencias de la misma base.

EJEMPLO:

- Para resolver la ecuación $7^{x-2} - 2^{x+1} = 0 \Rightarrow 7^{x-2} = 2^{x+1}$
  - Se toman logaritmos: $\log 7^{x-2} = \log 2^{x+1}$
  - Aplicando propiedades de los logaritmos se obtiene:

$$(x - 2)\cdot\log 7 = (x+1)\log 2 \rightarrow$$

$$x \cdot\log 7 - 2\cdot\log 7 = x\cdot\log 2 + \log 2 \rightarrow$$

$$x\cdot(\log 7 - \log 2) = 2\cdot\log 7 + \log 2 \rightarrow$$

$$x = \frac{2 \cdot \log 7 + \log 2}{\log 7 - \log 2}$$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Las ecuaciones logarítmicas son aquéllas en las que la incógnita está en una expresión afectada por un logaritmo.

Por ejemplo: $\log 30 + \log x = 3$, $6\cdot\log (x - 5) = \log 32$

Para facilitar la resolución de las ecuaciones logarítmicas hay que intentar expresar los dos miembros de la ecuación con un único logaritmo y ambos de la misma base, por lo que se tiene que aplicar las propiedades de los logaritmos. Especialmente la propiedad: $\log_2 x = \log_2 y \Leftrightarrow x=y$

EJEMPLO:

- Para resolver la ecuación: $\log 5 + \log x = 3$
  - Se aplican las propiedades de los logaritmos, obteniéndose: $\log (5\cdot x) = 3 \rightarrow \log (5\cdot x) = \log 1000 \rightarrow 5x = 1000 \rightarrow x = 200$

- Para resolver la ecuación: $2\cdot\log x = \log (10 - 3x)$
  - Se utilizan las propiedades de los logaritmos obteniéndose: $\log x^2 = \log (10 - 3x) \rightarrow x^2 = 10 - 3x \rightarrow x_1 = 2 , x_2 = 5$
  - <u>Recuerda comprobar siempre las posibles soluciones</u>:
    La solución $x_2 = 5$ no es válida, porque en la ecuación original aparece $\log (10 - 3x) \rightarrow \log (-5)$ y no se puede hallar el logaritmo de un número negativo.

ECUACIONES IRRACIONALES

Las ecuaciones irracionales, o ecuaciones con radicales, son aquéllas que tienen la incógnita bajo el signo radical.

Por ejemplo: $\sqrt{x-7}+2=x-3$, $x+\sqrt{9-x}=-5$

Para resolver este tipo de ecuaciones:

1- Se aísla la raíz cuadrada en un miembro.
2- Se elevan ambos miembros al cuadrado.
3- Se resuelve la ecuación obtenida.
4- Se comprueban todas las soluciones, ya que al elevar al cuadrado pueden aparecer posibles soluciones que habría que rechazar.
5- Si la ecuación contiene varios radicales, se repiten los dos primeros pasos, hasta eliminar todos.

EJEMPLO:

Para resolver la ecuación: $\sqrt{2x-3}-x=-1$

1- Se aísla el radical: $\sqrt{2x-3}=-1+x$

2- Se elevan ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{2x-3})^2=(-1+x)^2 \quad => \quad 2x-3=1-2x+x^2$$

3- Se resuelve la ecuación: $x^2-4x+4=0$

$$x=\frac{+4\pm\sqrt{16-16}}{2}=+2$$

4- Se comprueba: $\sqrt{2\cdot(2)-3}-(2)=-1 \quad => \quad \text{Correcto}$

ECUACIONES RACIONALES

Las ecuaciones racionales son ecuaciones en las que aparecen fracciones polinómicas.

Por ejemplo: $\frac{8}{x} + \frac{x-2}{x+3} = -5$, $\frac{x+7}{2} = \frac{x-5}{x+1}$

Para resolver este tipo de ecuaciones:

1- Se halla el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores.
2- Se reduce a común denominador para obtener dos fracciones polinómicas iguales, si los denominadores son iguales, también lo serán los numeradores (se pueden simplificar los denominadores).
3- Se resuelve la ecuación.
4- Se comprueba el resultado.

EJEMPLO:

Para resolver la ecuación: $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$

1- Se halla el m.c.m.
   m.c.m.$(x - 2, x + 2 , x^2 - 4) = (x - 2)\cdot(x + 2) = (x^2 - 4)$

2- Se reduce a mínimo común denominador:

$$\frac{(x+2)}{(x^2-4)} + \frac{(x-2)}{(x^2-4)} = \frac{1}{x^2-4}$$

$$\frac{(x+2)+(x-2)}{(x^2-4)} = \frac{1}{x^2-4}$$

$$(x+2)+(x-2) = 1$$

3- Se resuelve la ecuación:

$$x + 2 + x - 2 = 1 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

4- Se comprueba el resultado:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-2} + \frac{1}{\frac{1}{2}+2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2-4} \Rightarrow \frac{-4}{15} = \frac{-4}{15} \Rightarrow \text{Correcto}$$

O bien:

1- Se halla el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores.
2- Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el m.c.m de sus denominadores.
3- Se resuelve la ecuación.
4- Se comprueba el resultado.

EJEMPLO:

Para resolver la ecuación: $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$

1- Se halla el m.c.m.

m.c.m.$(x - 2, x + 2 , x^2 - 4) = (x - 2)\cdot(x + 2)$

2- Se multiplican ambos miembros por el m.c.m. obteniendo:

$$\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}+\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-4}$$

3- Se resuelve la ecuación:

$$x+2+x-2=1 \rightarrow 2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

4- Se comprueba el resultado:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-2}+\frac{1}{\frac{1}{2}+2}=\frac{1}{(\frac{1}{2})^2-4} \Rightarrow \frac{-4}{15}=\frac{-4}{15} \Rightarrow \text{Correcto}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES: DEFINICIÓN Y TIPOS

Un sistema que incluye *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un conjunto formado por *m* igualdades de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

donde a_{ij} y b_i son números reales, teniendo en cuenta que: $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

- Los números a_{ij} son los **coeficientes** y los b_i, los **términos independientes**.
- En los coeficientes a_{ij}, el subíndice *i* indica la ecuación del sistema en la que aparece dicho coeficiente, y el subíndice *j* señala de qué incógnita es coeficiente a_{ij}.
- El subíndice *i* que aparece en el término b_i indica la ecuación de la que b_i es término independiente.

Resolver un sistema es hallar sus soluciones. Al conjunto formado por todas las soluciones de un sistema se le conoce como **solución general**, y a cada una de las soluciones que forman dicho conjunto, **solución particular**.

Dependiendo de los términos independientes y de las soluciones, los sistemas de ecuaciones lineales se pueden clasificar según el siguiente esquema:

EJEMPLO:

$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ es un sistema de dos ecuaciones lineales con 2 incógnitas.

Al resolver este sistema (por cualquiera de los métodos posibles: igualación, reducción, sustitución o de forma gráfica) se obtiene la solución: x = 4 , y = 3.

Por lo tanto este es un sistema de ecuaciones **no homogéneo**, **compatible** y **determinado**.

EQUIVALENCIAS Y SOLUCIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Dos sistemas de ecuaciones lineales son **equivalentes** cuando poseen las mismas soluciones.

Para hallar sistemas de ecuaciones equivalentes se pueden efectuar las siguientes transformaciones:

- Multiplicar una ecuación del sistema por un número no nulo.
- Despejar una de las incógnitas en una ecuación y sustituirla en las demás ecuaciones.
- Añadir o suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las otras ecuaciones.

NOTA: Una **combinación lineal** es una nueva ecuación que se obtiene al multiplicar cada ecuación por un número y después sumar los resultados.

EJEMPLO 1:

Tomamos el sistema:

$$\begin{cases} x - 3z = -9 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

La primera ecuación es combinación lineal de las dos últimas ya que: $E_1 = E_2 - 2 \cdot E_3$

EJEMPLO 2:

Los siguientes sistemas son equivalentes, ya que la tercera ecuación es una combinación lineal de las otras dos.

$$\begin{cases} x+y+z=14 \\ 2x-y+2z=25 \\ -x+2y-z=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=14 \\ 2x-y+2z=25 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

- Una **solución** de una ecuación con varias incógnitas es un conjunto de valores (uno por cada incógnita) que verifican la igualdad.
- Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones de las que pretendemos encontrar una solución común.
- Para **resolver un sistema de ecuaciones** existen distintos procedimientos: **igualación**, **reducción** *y* **sustitución**. (Para más información consultar Anexo: “Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales”)

MÉTODO DE GAUSS

Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se puede resolver empleando el **método de Gauss**, que consiste en obtener un sistema equivalente al inicial de forma escalonada, tal que:

- Haya una ecuación con tres incógnitas.
- Haya una ecuación con dos incógnitas.
- Haya una ecuación con una incógnita.

Los pasos a realizar son los siguientes:

1- Se reordena el sistema y se pone como primera aquella que tenga el coeficiente entero de x más pequeño en módulo, en caso de que no fuera posible se haría con y o z, cambiando el orden de las incógnitas.

2- Se aplica el método de reducción con la 1ª y 2ª ecuación, **eliminando** el término en x de la 2ª ecuación**.** Después se pone cómo segunda ecuación el resultado de la operación.

3- Se repite el proceso con la 1ª y 3ª ecuación, para eliminar el término en x.

4- Se toman las ecuaciones 2ª y 3ª, trasformadas, para hacer reducción y **eliminar** el término en **y**.

5- Se obtiene un sistema escalonado

6- Se resuelve el sistema.

EJEMPLO:

Para resolver el siguiente sistema por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

1- Se pone cómo primera ecuación la que tenga el coeficiente entero de x más pequeño en módulo, en este caso el coeficiente de x es 1.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

2- Se hace reducción con la 1ª y 2ª ecuación, para **eliminar** el término en x de la 2ª ecuación**.** Después se pone cómo segunda ecuación el resultado de la operación.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -3\mathrm{x} - 3\mathrm{y} + 3\mathrm{z} = -3 \end{cases}$$

$$- \ y \ + 4z = -2$$

3- Se hace los mismo con la 1ª y 3ª ecuación, para eliminar el término en x.

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4\mathrm{z} = 2 \\ -5\mathrm{x} - 5\mathrm{y} + 5\mathrm{z} = -5 \end{cases}$$

$$- \ 2y \ + 9z = -3$$

Agrupando, se obtiene:

$$\begin{cases} x + y - \ \ z = 1 \\ \ \ - y + 4z = -2 \\ \ \ -2y + 9z = -3 \end{cases}$$

4- Se toman las ecuaciones 2ª y 3ª, trasformadas, para hacer reducción y **eliminar** el término en **y**.

$$\begin{cases} -2y + 9z = -3 \\ \ \ 2\mathrm{y} - 8\mathrm{z} = \ 4 \end{cases}$$

$$z = 1$$

5- Se obtiene un sistema escalonado tal que:

$$\begin{cases} x + \ \ y \ \ \ - z = 1 \\ \ \ \ \ -y + 4z = -2 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ z = 1 \end{cases}$$

6- Se resuelve el sistema.

z = 1

- y + 4 · 1 = - 2 → **y = 6**

x + 6 – 1 = 1 → **x = -4**

SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES. DEFINICIÓN Y RESOLUCIÓN

Además de los sistemas de ecuaciones lineales, se pueden encontrar **sistemas de ecuaciones no lineales**: sistemas de ecuaciones logarítmicas, racionales, irracionales, etc.

A continuación se explica cómo resolver tres tipos distintos de ecuaciones no lineales mediante ejemplos.

EJEMPLO 1:

Para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

1- Se despeja la x de la primera ecuación:

$$x = 3 - y$$

2- Se sustituye este valor en la segunda ecuación:

$$(3 - y)^2 + y^2 = 40$$

3- Se resuelve esta ecuación:

$$9 + y^2 - 6y + y^2 = 29 \;\; => \;\; 2y^2 - 6y - 20 = 0 \;\; => \;\; y^2 - 3y - 10 = 0$$

$$y_1 = 5 \;,\; y_2 = -2$$

4- Se sustituyen cada uno de los valores obtenidos en la otra ecuación.

Para $y_1=5 \Rightarrow x_1=-2$

Para $y_2=-2 \Rightarrow x_2=5$

SOLUCIÓN: $(x = -2 , y = 5)$ y $(x = 5 , y = -2)$

EJEMPLO 2:

Para resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 1 \\ 3^{2x} \cdot 3^{3y} = 9 \end{cases}$$

1- Se utilizan las propiedades de las potencias para obtener un sistema más sencillo:

$$2^x \cdot 2^y = 1 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^0 \Rightarrow x + y = 0$$
$$3^{2x} \cdot 3^{3y} = 9 \Rightarrow 3^{2x+3y} = 3^2 \Rightarrow 2x + 3y = 2$$

2- Se resuelve el sistema obtenido, el cual siendo equivalente al primero, tendrá las mismas soluciones.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: $(x = -2 , y = +2)$

EJEMPLO 3:

Para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 105 \\ \sqrt{x} + y = 27 \end{cases}$$

1- Se toma la segunda ecuación y se despeja la raíz:

$$\sqrt{x} + y = 27 \;\; => \;\; \sqrt{x} = 27 - y$$

2- Se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado:

$$(\sqrt{x})^2 = (27 - y)^2 \;\; => \;\; x = 729 + y^2 - 54y \;\; =>$$

$$y^2 - 54y - x = -729$$

Obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - y = 105 \\ y^2 - 54y - x = -729 \end{cases}$$

3- Se resuelve el sistema igual en el *EJEMPLO 1*:

$$x = 105 + y$$

$$y^2 - 54y - (105 + y) = -729 => \; y^2 - 55y + 624 = 0$$

$$y_1=39 \; , \; y_2=16$$

Para $y_1=39 \; => x_1=144$

Para $y_2=16 \; => x_2=121$

SOLUCIÓN: (x = 144 , y = 39) y (x = 121 , y = 16)

INECUACIONES. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- Una **inecuación** es una desigualdad en la que aparecen incógnitas o valores desconocidos.

Por ejemplo: $3x + 9 > x + 2$, $x < 2x - 1$, $5x + y \geq 3$

Para resolver una inecuación hay que encontrar todos los valores para los que se cumple dicha desigualdad.

- Dos o más inecuaciones son **equivalentes** cuando poseen la misma solución.
- Para **resolver** una inecuación se transforma en otra equivalente más sencilla mediante las **transformaciones de equivalencia**:

  - Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta un mismo número o expresión algebraica, la resultante es una inecuación equivalente a la primera.
  - Si los dos miembros de la inecuación se multiplican o dividen por un número real positivo, la resultante es una inecuación equivalente a la primera.
  - Si los dos miembros de la inecuación se multiplican o dividen por un número real negativo, la resultante es otra inecuación cuyo signo de desigualdad es contrario al de la primera y que es equivalente.

EJEMPLO:

Dada la inecuación $\frac{x}{2} - 3x \geq 6 - x$, será equivalente a:

$$-3x - 12 \geq 0$$

- Se multiplica por 2 los dos miembros:

$$x - 6x \geq 12 - 2x$$

- Se suma 2x a los dos miembros:

$$x - 6x + 2x \geq 12 - 2x + 2x \rightarrow -3x \geq 12$$

- Se resta 12 a los dos miembros:

$$-3x - 12 \geq 12 - 12 \rightarrow -3x - 12 \geq 0$$

INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

En este curso se estudiarán las inecuaciones según su grado y número de incógnitas.

Se llama inecuación lineal con una incógnita a cualquiera de las siguientes desigualdades:

- $ax + b > 0$
- $ax + b < 0$
- $ax + b \geq 0$
- $ax + b \leq 0$

También se consideran como inecuaciones lineales con una incógnita aquéllas que presenten estas formas después haber aplicado las transformaciones de equivalencias.

<u>RESOLUCIÓN DE INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA</u>:

Para resolver una inecuación lineal con una incógnita se aplicarán las transformaciones de equivalencia hasta obtener una inecuación equivalente a:

$x \geq a \quad x \leq a \quad x > a \quad x < a$ donde $a \in \mathbb{R}$

- Si se obtiene una inecuación de la forma:
  $x \geq a$ ó $x \leq a$, la solución de la inecuación está formada por todos los números que se encuentran en los intervalos $[a, +\infty)$ y $(-\infty, a]$, respectivamente.

- Si se obtiene $x > a$ ó $x < a$, la solución de la inecuación está formada por todos los números que se encuentran en los intervalos $(a, +\infty)$ y $(-\infty, a)$, respectivamente.

Además, este tipo de inecuaciones pueden ser resueltas de forma gráfica. Así, la solución de una inecuación tipo: $ax + b > 0$ la forman todos los valores de x para los que la recta de ecuación $y = ax + b$ queda por encima del eje horizontal.

EJEMPLO:

Considerando la inecuación:

$$2 - \left[-2 \cdot (x+1) - \frac{x-3}{2}\right] \leq \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

1- Se quitan corchetes y paréntesis:

$$2 + 2x + 2 + \frac{x-3}{2} \leq \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

2- Se quitan los denominadores:

$$24 + 24x + 24 + 6 \cdot (x-3) \leq 8x - (5x-3) + 36x$$

$$24 + 24x + 24 + 6x - 18) \leq 8x - 5x + 3) + 36x$$

3- Se agrupan los términos en x en un lado de la desigualdad y los términos independientes en el otro:

$$24x + 6x - 8x + 5x - 36x \leq 3 - 24 - 24 + 18$$

4- Se efectúan las operaciones:

$$-9x \leq -27$$

5- Como el coeficiente de la x es negativo se multiplica por -1, cambiando el signo de la desigualdad.

$$9x \geq 27$$

6- Se despeja la incógnita:

$$x \geq \frac{27}{9} \rightarrow \mathbf{x \geq 3}$$

De esta forma se obtiene la solución como una desigualdad, pero esta también podemos expresarla:

- Como un intervalo:

$$\mathbf{[3, +\infty)}$$

- De forma gráfica:

INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Una inecuación lineal con dos incógnitas *x* e *y* es cualquiera de las siguientes desigualdades:

- $ax + by + c > 0$
- $ax + by + c < 0$
- $ax + by + c \geq 0$
- $ax + by + c \leq 0$

con a, b ,c $\in \mathbb{R}$ y a ≠ 0, b ≠ 0

Si a=0 o b=0, estas inecuaciones se convierten en inecuaciones lineales con una incógnita.

La solución de una inecuación lineal con dos incógnitas está formada por el conjunto de todos los pares (x_0, y_0) que la verifiquen.

EJEMPLO:

Los pares (1, 6), (2, 4), (-2, 9) pertenecen al conjunto de soluciones que verifican la inecuación $x + y \geq 6$.

Su solución está formada por infinitos pares de puntos.

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Su solución es uno de los semiplanos que resulta de representar la ecuación resultante, que se obtiene al transformar la desigualdad en una igualdad.

1- Se transforma la desigualdad en igualdad.

2- Se da a una de las dos variables dos valores, con lo que se obtienen dos puntos.

3- Al representar y unir estos puntos se obtiene una recta.

4- Se toma un punto, por ejemplo el (0, 0), y se sustituye en la desigualdad. Si se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto; si no, la solución será el otro semiplano.

EJEMPLO:

Para resolver la inecuación:

$$2x + y \leq 3$$

1- Se transforma la desigualdad en igualdad.

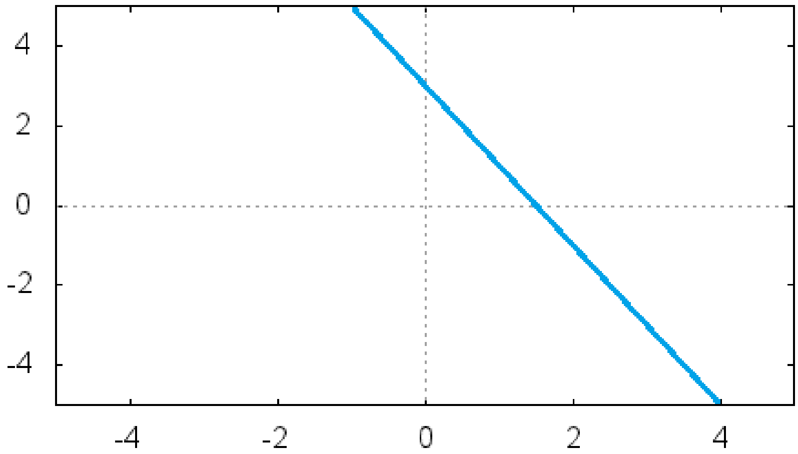
$$2x + y = 3$$

2- Se da a una de las dos variables dos valores, con lo que se obtienen dos puntos.

$x=0; \quad 2\cdot0 + y = 3 \rightarrow y = 3 \quad (0,3)$

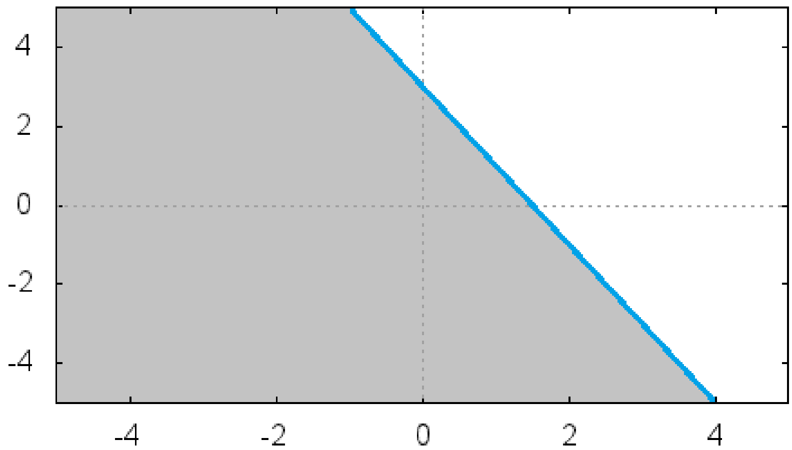
$x=1; \quad 2\cdot1 + y = 3 \rightarrow y = 1 \quad (1,1)$

3- Al representar y unir estos puntos se obtiene una recta.



4- Tomamos un punto, por ejemplo el (0,0), y se sustituye en la desigualdad.

$2x + y \leq 3 \rightarrow 2\cdot0 + 0 \leq 3 \rightarrow$ Correcto $\rightarrow$ Verifica que el semiplano que se busca es en el que se encuentra el punto (0,0).



INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Se denomina inecuación de segundo grado con una incógnita a cualquiera de las siguientes desigualdades:

- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \geq 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$

con a, b ,c $\in \mathbb{R}$ y a ≠ 0

La solución de una inecuación de segundo grado con una incógnita depende de las soluciones de la igualdad $ax^2 + by + c = 0$. Así pues, para resolver estas inecuaciones, se estudiará el caso particular de $ax^2 + by + c \leq 0$, pudiéndose distinguir los siguientes casos:

1- **La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales distintas.**

Sean las soluciones x_1, x_2 y se supone $x_1 > x_2$.

En este caso la inecuación $ax^2 + bx + c \leq 0$ se puede expresar tal que: $a(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$. El producto de los factores debe ser negativo o cero y esto sólo ocurre en los siguientes casos.

- $a > 0, x \geq x_1, x \leq x_2$
- $a > 0, x \leq x_1, x \geq x_2$
- $a < 0, x \geq x_1, x \geq x_2$
- $a < 0, x \leq x_1, x \leq x_2$

Al ser $x_1 > x_2$, la primera situación no se verifica para ningún valor de x, y la segunda la cumplen los valores $x \in [x_1,x_2]$. Por el mismo motivo, la situación tercera la verifican los valores $x \in [x_1,+\infty)$ y la cuarta los valores $x \in (-\infty,x_2]$.

La solución de la inecuación $ax^2 + bx + c \leq 0$ será:

- Si a > 0, todos los $x \in [x_1,x_2] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x_2 \leq x \leq x_1\}$
- Si a < 0, todos los $x \in (-\infty,x_2]$ U $[x_1,+\infty) =$
  $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x_2 \leq x \text{ o } x \geq x_1\}$

EJEMPLOS:

- Para resolver la inecuación: $8x^2 - 48x + 64 \leq 0$.

Las soluciones de la ecuación $8x^2 - 48x + 64 = 0$ son:

$x_1 = 4$ y $x_2 = 2$, y el coeficiente de x^2 es 8 que es positivo.

Por tanto, la solución de la inecuación la forman todos los vales de x tales que:

$$\mathbf{x \in [x_1,x_2] = [2,4]}$$

- Para resolver la inecuación: $- x^2 + 9 \leq 0$.

Las soluciones de la ecuación $- x^2 + 4 = 0$ son:

$x_1 = -3$ y $x_2 = 3$, y el coeficiente de x^2 es -1 que es negativo.

Por tanto, la solución de la inecuación la forman todos los vales de x tales que:

$$x \in (-\infty, -3] \cup [3,+\infty)$$

2- La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales iguales.

La inecuación $ax^2 + bx + c \leq 0$ puede expresarse como $a(x-x_1)^2 \leq 0$, siendo x_1 la solución de la ecuación mencionada. Como $(x-x_1)^2$ es siempre positivo o cero, la ecuación solo se verifica para $x = x_1$ si $a > 0$ y para todo número real si $a < 0$.

La solución de la inecuación está formada por:

- Por todos los números reales cuando $a < 0$
- Por $x = x_1$ cuando $a > 0$

EJEMPLO:

- Para resolver la inecuación: $x^2 + 4x + 4 \leq 0$.

La ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$ tiene dos soluciones iguales a $x_1 = -2$

El coeficiente de x^2 es 1 que es positivo.

Por tanto, la solución de la inecuación está formada únicamente por el valor:

$$x = -2$$

3- **La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales.**

En este caso, como el valor de $ax^2 + bx + c$, es positivo para todo valor real de x, si a > 0, y es negativo para todo valor real de x, si a < 0.

La solución de la inecuación está formada por: • Por todos los números reales cuando a < 0 • El conjunto vacío si a > 0

EJEMPLOS:

- Para resolver la inecuación: $x^2 + 2 \leq 0$.

Como la ecuación $x^2 + 2 = 0$ no tiene soluciones reales y el coeficiente de x^2 es 1 que es positivo, la solución de la inecuación es:

El conjunto vacío

- Para resolver la inecuación: $-x^2 - x - 2 \leq 0$

Como la ecuación $-x^2 - x - 2 = 0$ no tiene soluciones reales y el coeficiente de x^2 es -1 que es negativo, la solución de la inecuación es:

Todos los número reales

SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Dado un sistema de inecuaciones con una incógnita, se resuelve cada inecuación por separado y el resultado del sistema serán aquellos valores que satisfagan todas las inecuaciones del sistema, es decir, la intersección de las soluciones de todas las inecuaciones del sistema.

EJEMPLO:

Para resolver el sistema $\begin{cases} 3x+8 \leq x+14 \\ 2x > \frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$

- Se halla la solución de la primera inecuación:

$3x+8 \leq x+14 \rightarrow 3x - x \leq 14 - 8 \rightarrow 2x \leq 6 \rightarrow x \leq 3$

Su solución está formada por los valores: $x \in (-\infty, 3]$

- Se halla la solución de la segunda inecuación:

$2x > \frac{3}{2}x - 1 \rightarrow 4x > 3x - 2 \rightarrow 4x - 3x > -2 \rightarrow x > -2$

Su solución está formada por los valores: $x \in (-2, +\infty)$

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada inecuación:

$$(-\infty, 3] \cap (-2, +\infty) = (-2, 3] \rightarrow$$

$$\mathbf{x \in (-2, 3]}$$

EJEMPLO:

Se resuelve el sistema anterior pero esta vez de forma gráfica:

$$3x + 8 \leq x + 14 \rightarrow 2x - 6 \leq 0$$

$$2x > \frac{3}{2}x - 1 \rightarrow x + 2 > 0$$

La recta $y = 2x - 6$ toma valores negativos o cero para los valores $x \in (-\infty, 3]$

La recta $y = x + 2$ toma valores positivos para los valores $x \in (-2, +\infty)$

Luego la solución será la intersección de ambos intervalos:

$$\mathbf{x \in (-2, 3]}$$

SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

En este curso solo se muestra cómo resolver este tipo de sistemas de forma gráfica.

La solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es la intersección de las regiones que corresponden a la solución de cada inecuación.

Se realizan los siguientes pasos:

1- Se representa la primera inecuación.
2- Se toma un punto cualquiera y se comprueba el semiplano de la inecuación que se está buscando.
3- Se representa la segunda inecuación.
4- Se toma un punto cualquiera y se comprueba el semiplano de la inecuación que estamos buscando.
5- La solución es la intersección de las regiones que hemos hallado.

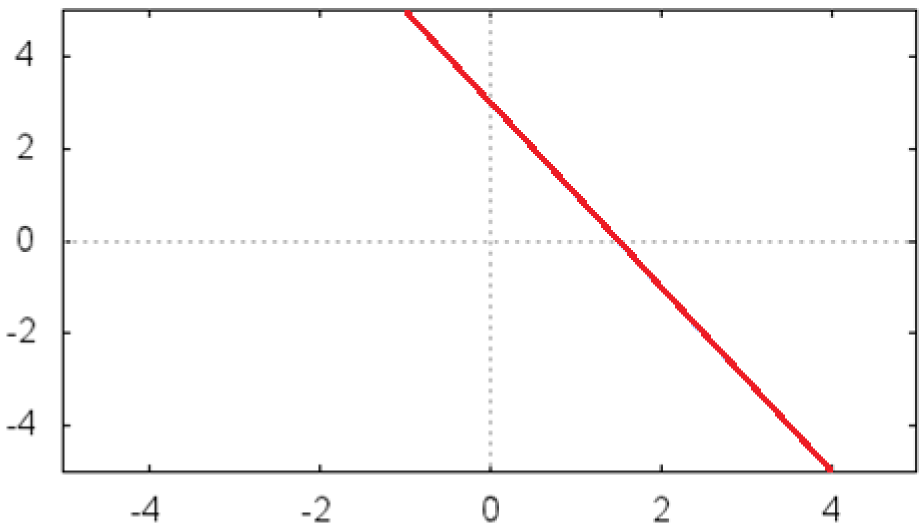
EJEMPLO:

Para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

1. Se representa la primera inecuación usando la función:

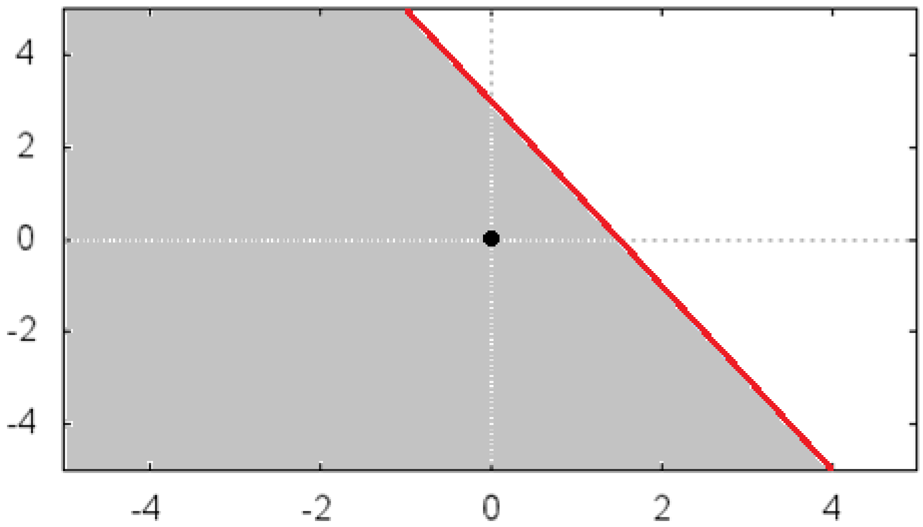
$$2x + y = 3 \quad \rightarrow \quad y = 3 - 2x$$



2. Se toma el punto (0,0) para comprobar que semiplano representa la inecuación.

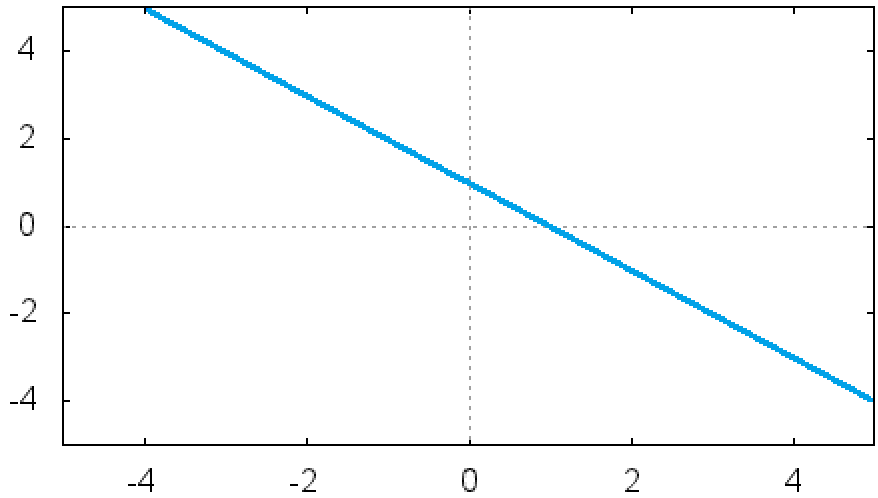
$$2x + y \leq 3 \rightarrow 2(0) + (0) \leq 3 \rightarrow 0 \leq 3 \rightarrow$$

El semiplano que representa esta inecuación es en el que se encuentra el punto (0,0).



3. Se representa la segunda inecuación usando la función:

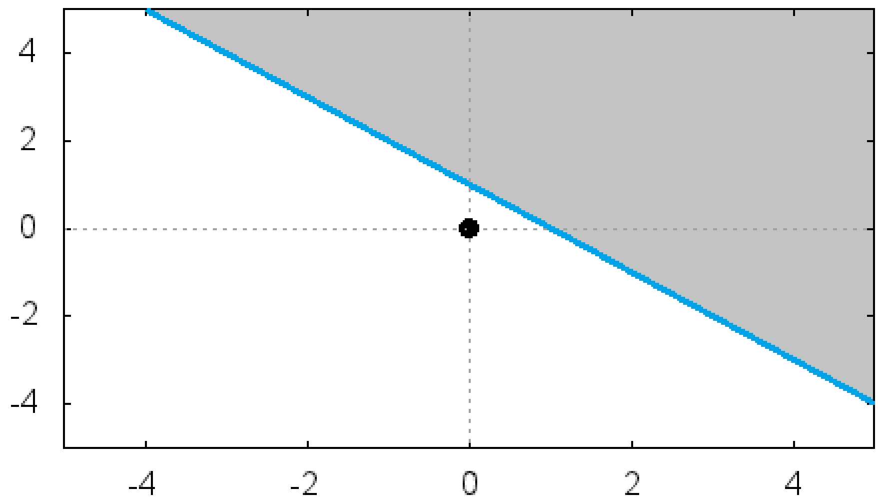
$$x + y \geq 1 \quad \rightarrow \quad y = 1 - x$$



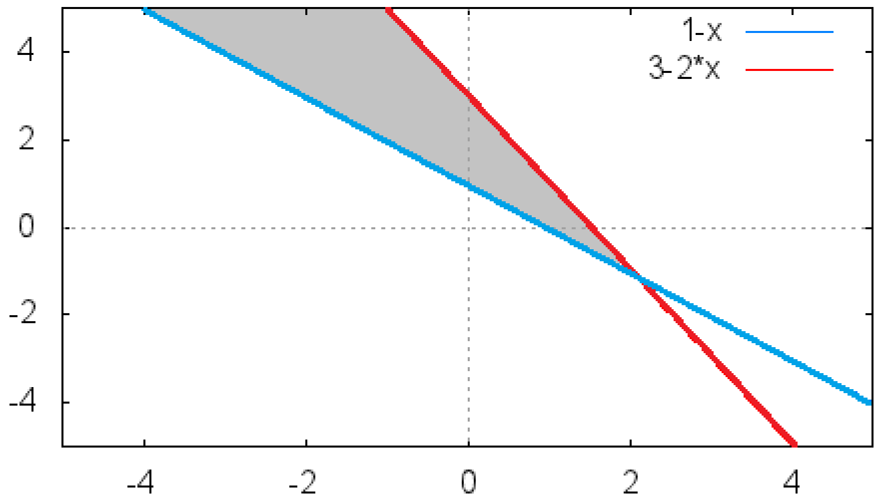
4. Se toma el punto (0,0) para comprobar que semiplano representa la inecuación.

$$x + y \geq 1 \;\rightarrow\; (0) + (0) \geq 1 \rightarrow \text{Incorrecto} \rightarrow$$

El semiplano que representa esta inecuación es en el que NO se encuentra el punto (0,0).



5. Se halla la solución final como la intersección de las dos regiones que hemos calculado anteriormente.



MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Fundamentalmente existen tres métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales: reducción, sustitución e igualación.

MÉTODO DE REDUCCIÓN

1. Se preparan las dos ecuaciones para facilitar su resolución, multiplicándolas por el número conveniente con su respectivo signo, positivo o negativo.
2. Se realiza una suma algebraica para que desaparezca una de las incógnitas.
3. Se resuelve la ecuación resultante, hallando una de las incógnitas.
4. Se sustituye el valor de la incógnita hallada en una de las dos ecuaciones iniciales y se resuelve para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Estos dos valores son la solución del sistema de ecuaciones.

NOTA: Este proceso es generalizable a sistemas de tres o más ecuaciones.

EJEMPLO:

Para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x - 4y = 38 \\ -5x - 2y = -5 \end{cases}$$

1. Se preparan las ecuaciones, multiplicando la segunda por (-2):

$$\begin{cases} 6x - 4y = 38 \\ -5x - 2y = -5 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{matrix} 6x - 4y = 38 \\ +10x + 4y = +10 \end{matrix}$$

2. Se realiza la suma algebraica:

$$\begin{array}{c} 6x - 4y = 38 \\ \underline{10x + 4y = 10} \\ 16x + 0y = 48 \end{array}$$

3. Se resuelve la ecuación resultante:

$$16x + 0y = 48 \rightarrow 16x = 48 \rightarrow x = \frac{48}{16} \rightarrow x = 3$$

4. Se sustituye el valor hallado de x, en una de las ecuaciones iniciales, al resolver se obtiene el valor de y.

$$6x - 4y = 38 \rightarrow 6(3) - 4y = 38 \rightarrow 18 - 4y = 38 \rightarrow$$

$$-4y = 20 \rightarrow y = -\frac{20}{4} = -5$$

5. Las soluciones del sistemas son:

$$\mathbf{x = 3 \;\;,\;\; y = -\frac{20}{4} = -5}$$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

1. Se despeja una de las incógnitas de cualquiera de las dos ecuaciones, normalmente la que más sencillamente se despeje.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación obteniendo el valor de una incógnita.
4. El valor obtenido se sustituye en ecuación en la que está la incógnita despejada.
5. Estos dos valores son la solución del sistema de ecuaciones.

EJEMPLO:

Para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x - 4y = 38 \\ -5x - 2y = -5 \end{cases}$$

1. Se despeja una de las incógnitas.

$$-5x - 2y = -5 \rightarrow -2y = -5 + 5x \rightarrow y = \frac{-5+5x}{-2} \rightarrow$$

$$y = \frac{5-5x}{2}$$

2. Se sustituye esta expresión en la otra ecuación, obteniendo:

$$6x - 4y = 38 \rightarrow 6x - 4\left(\frac{5-5x}{2}\right) = 38$$

3. Se resuelve la ecuación de una incógnita obtenida:

$$6x - 4\left(\frac{5-5x}{2}\right) = 38 \rightarrow 6x + \left(\frac{-20+20x}{2}\right) = 38 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x - 10 + 10x = 38 \rightarrow 16x = 48 \rightarrow x = \frac{48}{16} \rightarrow$$

$$x = 3$$

4. Se sustituye $x = 3$ en la ecuación $y = \frac{5-5x}{2}$:

$$y = \frac{5-5(3)}{2} \rightarrow y = \frac{-10}{2} \rightarrow y = -5$$

5. Las soluciones al sistema son:

$$\mathbf{x = 3 \quad , \quad y = -\frac{20}{4} = -5}$$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Se igualan las dos expresiones resultantes, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. Se sustituye el valor de la incógnita obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales y se resuelve.
5. Las soluciones obtenidas son las soluciones del sistema.

EJEMPLO:

Para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x - 4y = 38 \\ -5x - 2y = -5 \end{cases}$$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$6x - 4y = 38 \rightarrow 6x = 38 + 4y \rightarrow x = \frac{38+4y}{6}$$

$$-5x - 2y = -5 \rightarrow -5x = -5 + 2y \rightarrow x = \frac{-5+2y}{-5}$$

2. Se igualan las dos expresiones:

$$\frac{38+4y}{6} = \frac{-5+2y}{-5} \rightarrow -190 - 20y = -30 + 12y$$

3. Se resuelve la ecuación, ahora de una incógnita:

$$-190 - 20y = -30 + 12y \rightarrow -190 + 30 = +12y + 20y \rightarrow$$

$$-160 = 32y \rightarrow y = \frac{-160}{32} \rightarrow y = -5$$

4. Se sustituye $y = -5$ en una de las ecuaciones iniciales:

$$6x - 4y = 38 \rightarrow 6x - 4 \cdot (-5) = 38 \rightarrow 6x + 20 = 38 \rightarrow$$

$$6x = 18 \rightarrow x = \frac{18}{3} \rightarrow x = 3$$

5. Las soluciones al sistema son:

$$\mathbf{x = 3 \;\;,\;\; y = -\frac{20}{4} = -5}$$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

Potencias de exponente 0:

- $a^0 = 1$
- $7^0 = 1$

Potencias de exponente 1:

- $a^1 = a$
- $7^1 = 7$

Potencias de exponente entero negativo:

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Potencias de exponente racional:

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$

Potencias de exponente racional y negativo:

- $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$
- $2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$

Multiplicación de potencias con la misma base:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

División de potencias con la misma base:

- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$

Potencia de una potencia:

- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(2^5)^3 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$

Multiplicación de potencias con el mismo exponente:

- $a^n \cdot b^n = (a{\cdot}b)^n$
- $2^3 \cdot 4^3 = (2{\cdot}4)^3 = 8^3$

División de potencias con el mismo exponente:

- $a^n : b^n = (a:b)^n$
- $6^3 : 3^3 = (6:3)^3 = 2^3$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR CON LAS PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

1. $3561^0 =$
2. $0.0003^0 =$
3. $(-3)^0 =$
4. $-3^0 =$
5. $849^1 =$
6. $0.0025^1 =$
7. $(-5)^1 =$
8. $-5^1 =$
9. $2^{-5} =$
10. $(-7)^{-2} =$
11. $52^{-3} =$
12. $-7^{-2} =$
13. $2^{\frac{2}{3}} =$
14. $-243^{\frac{1}{5}} =$
15. $-(2)^{\frac{2}{7}} =$
16. $32^{\frac{1}{5}} =$
17. $2^{-\frac{2}{3}} =$
18. $-(2)^{\frac{4}{3}} =$
19. $-8^{-\frac{1}{3}} =$
20. $729^{\frac{1}{3}} =$
21. $3^2 \cdot 3^5 =$
22. $3^7 \cdot 3^6 \cdot 3^{-5} =$
23. $5^{-12} \cdot 5^{-1} \cdot 5^{-5} =$
24. $(-4)^{15} \cdot (-4)^{45} \cdot (-4)^{-5} =$
25. $3^2 : 3^5 =$
26. $3^7 : 3^6 : 3^{-5} =$
27. $5^{-12} : 5^{-1} : 5^{-5} =$
28. $(-4)^{15} : (-4)^{45} : (-4)^{-5} =$
29. $(13^3)^2 =$
30. $(5^{-5})^4 =$
31. $(-11^{12})^4 =$
32. $(-13^3)^{-3} =$
33. $2^4 \cdot 4^4 =$
34. $2^3 \cdot 7^3 \cdot 5^3 =$
35. $(-1)^2 \cdot 3^2 \cdot 6^2 =$
36. $(-1)^{-5} \cdot 3^{-5} \cdot 6^{-5} =$
37. $2^4 : 4^4 =$
38. $25^3 : 5^3 : 1^3 =$
39. $6^2 : 3^2 : 2^2 =$
40. $6^{-5} : 3^{-5} : (-2)^{-5} =$

SOLUCIONES

1. $3561^0 = 1$
2. $0.0003^0 = 1$
3. $(-3)^0 = 1$
4. $-3^0 = 1$
5. $849^1 = 849$
6. $0.0025^1 = 0.0025$
7. $(-5)^1 = -5$
8. $-5^1 = -5$
9. $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$
10. $(-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}$
11. $52^{-3} = \frac{1}{52^3} = \frac{1}{140608}$
12. $-7^{-2} = \frac{1}{-7^2} = \frac{1}{-49}$
13. $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$
14. $-243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-243} = -3$
15. $(-2)^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{(-2)^2} = \sqrt[7]{4}$
16. $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$
17. $2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$
18. $(-2)^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-2)^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$
19. $-8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-8}} = \frac{1}{-2}$
20. $729^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{729}} = \frac{1}{9}$
21. $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$
22. $3^7 \cdot 3^6 \cdot 3^{-5} = 3^8$
23. $5^{-12} \cdot 5^{-1} \cdot 5^{-5} = 5^{-18}$
24. $(-4)^9 \cdot (-4)^4 \cdot (-4)^{-5} = (-4)^8$
25. $3^2 : 3^5 = 3^{-3}$
26. $3^7 : 3^6 : 3^{-5} = 3^6$
27. $5^{-12} : 5^{-1} : 5^{-5} = 5^{-6}$
28. $(-4)^8 : (-4)^4 : (-4)^{-5} = (-4)^9$
29. $(13^3)^2 = 13^6$
30. $(5^{-5})^4 = 5^{-20}$
31. $-(11^{12})^4 = -11^{48}$
32. $(-13^3)^{-3} = (-13)^{-9}$
33. $2^4 \cdot 4^4 = 8^4$
34. $2^3 \cdot 7^3 \cdot 5^3 = 70^3$
35. $(-1)^2 \cdot 3^2 \cdot 6^2 = 18^2$
36. $(-1)^{-5} \cdot 3^{-5} \cdot 6^{-5} = -18^{-5}$
37. $2^4 : 4^4 = \left(\frac{2}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$
38. $25^3 : 5^3 : 1^3 = 5^3$
39. $6^2 : 3^2 : 2^2 = 1^2$
40. $6^{-5} : 3^{-5} : (-2)^{-5} = -1^{-5}$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

- El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número.

$$\log_a x = y \rightarrow a^y = x \qquad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

$$\log_2 4 = 2 \quad \rightarrow \quad 2^2 = 4$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow y=2$$

$$log_{\sqrt{5}} 125 = y \rightarrow \sqrt{5}^y = 125 \rightarrow 5^{\frac{1}{2}y} = 5^3 \rightarrow y=6$$

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_2(2 \cdot 8) = \log_2 2 + \log_2 8 = 1 + 3 = 4$$

- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_2 \frac{8}{2} = \log_2 8 - \log_2 2 = 3 - 1 = 2$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x$$

$$\log_2 (4^2) = 2 \cdot \log_2 4 = 2 \cdot 2 = 4$$

- El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\log_a x$$

$$\log_2\left(\sqrt[4]{8}\right) = \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

- Cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_2 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR CON LAS PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1. $\log_2 8 =$
2. $\log_{\frac{1}{4}} 0.25 =$
3. $\log_{\sqrt{7}} 343 =$
4. $\log 0.001 =$
5. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} =$
6. $\log_2 (2 \cdot 4) =$
7. $\log (5 \cdot 3) =$
8. $\log[(-5) \cdot (-3)] =$
9. $\log_3 9 + \log_3 27 =$
10. $\log 7 + \log 6 =$
11. $\log \frac{15}{3} =$

12. $\log_2 \frac{9}{8} =$

13. $\log 63 - \log 45 =$

14. $\log 7 - \log 13 =$

15. $\log_2(4^{16}) =$

16. $\log_2 (16^2) =$

17. $\log(5^4) =$

18. $7 \cdot \log_5 36 =$

19. $-3\log_9 4 =$

20. $\log_2 (\sqrt[3]{9}) =$

21. $\log_5 (\sqrt[-4]{6}) =$

22. $\frac{1}{5} \cdot \log_4 3 =$

23. $\frac{3}{-4} \cdot \log 10 =$

24. $\frac{\log_4 4}{\log_4 2} =$

25. $\frac{\log_5 9}{\log_5 3} =$

SOLUCIONES

1. $\log_2 8 = 4$

2. $\log_{\frac{1}{4}} 0.25 = 1$

3. $\log_{\sqrt{7}} 343 = 6$

4. $\log 0.001 = -3$

5. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = -\frac{8}{5}$

6. $\log_2 (2 \cdot 4) =$

   $\log_2 2 + \log_2 4 = 3$

7. $\log (5 \cdot 3) =$

   $\log(+5) + \log(+3) \approx 1.18$

8. $\log[(-5) \cdot (-3)] =$

   $\log(15)$

9. $\log_3 9 + \log_3 27 =$

   $\log_3(9 \cdot 27) = \log(243)$

10. $\log 7 + \log 6 =$

    $\log(7 \cdot 6) = \log(42)$

11. $\log \frac{15}{3} = \log 15 - \log 3$

12. $\log_2 \frac{9}{8} = \log_2 9 - \log_2 8$

13. $\log 63 - \log 45 = \log \frac{63}{45}$

14. $\log 7 - \log 13 = \log \frac{7}{13}$

15. $\log_2 (4^{16}) = 16 \cdot \log_2 4 = 32$

16. $\log_2 (16^2) = 2 \cdot \log_2 16$

17. $\log(5^4) = 4 \cdot \log 5$

18. $7 \cdot \log_5 36 = \log_5(36^7)$

19. $-3\log_9 4 = \log_9(4^{-3})$

20. $\log_2(\sqrt[3]{9}) = \frac{1}{3}\log_2 9$

21. $\log_5(\sqrt[-4]{6}) = -\frac{1}{4}\log_5 6$

22. $\frac{1}{5}\cdot\log_4 3 = \log_4(\sqrt[5]{3})$

23. $\frac{3}{-4}\cdot\log 10 = \log(\sqrt[\frac{-4}{3}]{10})$

24. $\frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \log_2 4$

25. $\frac{\log_5 9}{\log_5 3} = \log_3 9$

SIMBOLOGÍA MATEMÁTICA

Símbolo	**Significado**
$=$	Igual
$<$	Menor que…
$\leq$	Menor o igual que…
$>$	Mayor que…
$\geq$	Mayor o igual que…
$\neq$	Distinto
$\approx$	Aproximadamente igual
$\equiv$	Equivalente
$\pm$, $\mp$	Más menos, menos más
$\sum$	Sumatorio
$\prod$	Producto
$\forall$	Para todo
∞	Infinito
$\Rightarrow$	Implica (si…entonces…)
$\Leftrightarrow$	Equivale (si y solo si)
$/$	Tal que
$\exists$	Existe
$\nexists$	No existe
$\therefore$	Por lo tanto
$\because$	Porque
$\wedge$	Conjunción (“y”, “además”)
$\vee$	Disyunción (“o”)

Símbolo	Significado
$\mathbb{N}$	Números naturales
$\mathbb{Z}$	Números enteros
$\mathbb{Q}$	Números racionales
$\mathbb{R}$	Números reales
$\mathbb{C}$	Números complejos
$\{a,b....\}$	Conjunto de elementos a,b,…
$\varnothing$	Conjunto vacío
$\cap$	Intersección de conjuntos
$\cup$	Unión de conjuntos
$\subset$	Conjunto incluido en el conjunto
$\not\subset$	Conjunto no incluido en el conjunto
$\in$	Elemento perteneciente al conjunto
$\notin$	Elemento no perteneciente al conjunto
(a,b)	Intervalo abierto
$[a,b]$	Intervalo cerrado
$[a,b),(a,b]$	Intervalo semiabierto
$(a, \infty),[a, \infty)$	Semirrecta derecha
$(-\infty,a),(-\infty,a]$	Semirrecta izquierda
$(-\infty,\infty)$	Recta real