Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Aplicaciones de la derivada: una propuesta didáctica para 2º Bachillerato

Autor: Cristian Berges Lafuente

Director: Alberto Arnal Bailera

Junio de 2014

Facultad de Educación Zaragoza

Universidad Zaragoza 1542

ÍNDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Objeto matemático.

El objeto matemático a enseñar son las aplicaciones de la derivada, entre las que destacamos la obtención de la recta tangente a una curva en un punto, crecimiento y decrecimiento: extremos, problemas de optimización y concavidad y convexidad: puntos de inflexión.

2. Curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

La derivada y sus aplicaciones están incluidas en el currículo de segundo de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología, dentro de la asignatura de Matemáticas II.

En concreto, en la orden de 1 de julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA 17/07/2008, pág. 14079), se dice:

Contenidos

Análisis

(…)

— Derivadas (...) Obtención de la recta tangente a una curva en un punto. Estudio de la derivabilidad de funciones. Cálculo de derivadas. Derivadas sucesivas. Crecimiento y decrecimiento: extremos. Aplicación a problemas de optimización. Algunas propiedades de las funciones derivables: el teorema del valor medio. Concavidad y convexidad: puntos de inflexión. Estudio de las propiedades locales y globales de una función sencilla para realizar su representación gráfica. Utilización de programas de representación de funciones para el estudio de sus propiedades y la interpretación de los resultados obtenidos en la resolución de los problemas planteados.

3. Campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático.

Se pretende hacer un acercamiento a las distintas aplicaciones de las derivadas. Primero veremos cómo obtener la recta tangente a una curva en uno de sus puntos (campo de problemas 1), posteriormente veremos la información que se puede sacar de la primera derivada (campo de problemas 2) y de la segunda derivada (campo de problemas 3), para acabar centrándonos en los problemas de optimización de funciones (campo de problemas 4).

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Para estudiar la introducción escolar del objeto matemático a estudiar he utilizado el libro de 2º de Bachillerato de la editorial Anaya (Cólera, J. et al., 2003) que la introduce en su tema 10 "Aplicaciones de la derivada". Esta editorial es la utilizada por el Centro Educativo donde he realizado mis prácticas escolares.

En un apartado de introducción, el libro presenta a la derivada como el resultado de varios siglos de investigación matemática dirigida a resolver dos tipos de problemas: determinar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos y el cálculo de la velocidad instantánea de un móvil. Sin embargo, dice que fueron los problemas de optimización los que aportaron mayor impulso a la búsqueda de una teoría que diera generalidad a todos los problemas particulares que se habían planteado.

En otros libros de texto consultados (editoriales Anaya, SM, Santillana, McGraw, Edelvives y Editex) justifica la necesidad de resolver con frecuencia problemas físicos, geométricos, económicos, biológicos…, en los que se trata de optimizar una función, como pueden ser construir un envase determinado utilizando la menor cantidad de material posible; determinar la figura que encierra la mayor área con un perímetro fijo; hacer máximo un volumen o unos beneficios; hacer mínimos unos costes o un área, etc.

Sin embargo en otros textos revisados no hay una introducción propiamente dicha de los problemas de optimización, aparece como una aplicación de lo ya visto en temas anteriores.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Los campos de problemas que se enseñan los podemos agrupar de la siguiente manera:

Campo de problemas 1: Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos **CP1**			
Campo de problemas 2: Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos. **CP2**			
Campo de problemas 3: Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. **CP3**			
Optimización con funciones conocidas: **CP4**	Contexto geométrico (maximizar o minimizar áreas o volúmenes de algunas figuras dado el perímetro, una relación entre sus lados, diagonales, etc.) **CP4A**	Contexto económico (beneficio máximo ó costes mínimos) **CP4B**	Tiempo mínimo **CP4C**
Optimización con funciones desconocidas **CP5**	Contexto geométrico (maximizar o minimizar áreas o volúmenes de algunas figuras dado el perímetro, una relación entre sus lados, diagonales, etc.) **CP5A**	Contexto económico (beneficio máximo ó costes mínimos) **CP5B**	Tiempo mínimo **CP5C**

Las técnicas utilizadas son:

- Calcular la derivada de una función en un punto.

- Hallar la primera y segunda derivada de una función.

- Obtener intervalos de crecimiento y decrecimiento.

- Obtener intervalos de concavidad y convexidad.

- Hallar los extremos relativos y puntos de inflexión de una función.

- Expresar analíticamente funciones descritas mediante un enunciado.

- Resolver la ecuación f ’(x)=0.

- Seleccionar las raíces x1, x2…, que estén en el intervalo [a, b] que estamos estudiando.

- Calcular f(a), f(x1), f(x2),… y f(b).

- Hallar los puntos del intervalo, si los hay, donde la función no sea derivable, pero si continua, ya que podrían ser extremos.

-Si el intervalo es abierto (a, b) habría que estudiar el límite de la función cuando tiende a ‘a’ y a ‘b’ en vez de f(a) y f(b) y, en este caso, si el valor mínimo o máximo se encuentra en estos puntos, el problema no tiene solución.

Las justificaciones que aparecen son sencillas y básicas, sólo se demuestra cuando una función es creciente o decreciente y la condición necesaria para que un punto sea máximo o mínimo relativo. El resto no se justifica, ya que aparece como una utilidad de la derivada y entonces las técnicas empleadas para sacar la derivada o para obtener los extremos de una función ya han aparecido justificadas con anterioridad.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

La secuencia didáctica analizada se presenta en forma de ejercicio resuelto con su explicación paso a paso y varios ejemplos repetitivos para el entrenamiento de las técnicas enseñadas. Este aprendizaje hace que el alumno sea capaz de resolver bien los ejercicios que son idénticos a los que le han resuelto, pero en cuanto se le cambian pequeños detalles ya no sabe qué hacer, debido a que ha aprendido a repetir los pasos tal y como aparecen en el libro, pero no ha asimilado el concepto.

Se ha mostrado la influencia que tienen los contextos, ya que los estudiantes no conectan automáticamente un proceso vinculado con la idea de derivada (razón, límite, función, etc.) dado en un contexto con el mismo proceso que aparece en otro contexto. Un ejemplo es "la confusión de la velocidad media con la instantánea en un punto" (Azcárate, 1990). En este sentido, se aboga por la idea de que se alcanzará una comprensión completa de la derivada cuando se reconozcan y reconstruyan los conceptos en diferentes contextos. Por ello hemos programado los problemas CP4 Y CP5 (A, B Y C) en los que se trabajan distintos contextos.

Los modos de representación gráfico y analítico influyen en la construcción de los significados que hacen los alumnos, debido a que los pueden considerar como separados al aplicar algoritmos sin relación (Ferrini-Mundi & Graham, 1994). Se han identificado dificultades en la comprensión de la diferenciación y en la gráfica asociada al cociente incremental (Orton, 1983), así como en dotar de significado gráfico a la derivada de la función en un punto, al confundirla con la ordenada, de acuerdo con Azcárate (1990).

Otro error muy común se produce al obtener el punto máximo o mínimo, cuando la ordenada del punto la calculan en la función derivada y no en la función a optimizar, ya que no entienden que función están tratando de optimizar, ni les sorprende que les salga algún resultado que no tiene mucho sentido con los datos del problema.

Un problema muy frecuente para los alumnos es expresar analíticamente una función que les viene dada mediante un enunciado, ya que si se la dan o es idéntica a la de algún ejercicio resuelto, siguen los pasos que les han dado sin mayor problema, pero sino muchas veces no saben expresarla y no pueden seguir con el problema.

Las dificultades para relacionar los modos gráfico, numérico y analítico se manifiestan en contextos gráficos, cuando los estudiantes solicitan la expresión analítica de la función para resolver determinadas cuestiones (Asiala et al., 1997). Habre & Abboud (2006) dicen que quizá es consecuencia de que las definiciones matemáticas son tradicionalmente analíticas, lo cual genera un obstáculo en las mentes de los alumnos.

Para evitar estos problemas, la presente introducción de la derivada seguirá la idea de que "una de las formas para empezar a conocer un concepto es: a través de conexiones con otros conceptos (límites o funciones, en el caso de la derivada); a través de los diversos modos de representación (el gráfico y el analítico en la derivada) y a través de conocer sus diferentes propiedades y procesos" (Harel et al., 2006). Así, se conectará el lenguaje algebraico y funcional (propio del análisis) con el razonamiento aritmético y geométrico a través de la interpretación de la derivada como tasa de variación instantánea y como la pendiente de la recta tangente a la función.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Las aplicaciones de la derivada no es un objeto nuevo para los alumnos, ya que lo han visto en 1º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología, y para afianzarse en ellas deben consolidar los siguientes conocimientos:

Dependencia entre dos variables: función. Variable independiente y dependiente, dominio, imagen, gráfica, fórmula, crecimiento y decrecimiento, variación entre dos valores del dominio, tasa media de variación y extremos relativos y absolutos.

Función lineal y afín.

Pendiente de una recta.

Velocidad media.

Lectura de interpretación de gráficos (en especial de espacio-tiempo): Intervalos de crecimiento y extremos.

Cálculo de variaciones y de tasas de variación media a partir de la gráfica o de la fórmula. En especial, del cálculo del espacio recorrido y de la velocidad media.

Cálculo e interpretación de la pendiente de una recta a partir de la ecuación de la misma o de su representación gráfica.

Conocer el concepto de límite y saber calcular límites de funciones elementales.

Uso de la calculadora.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

La enseñanza anterior ha propiciado la adquisición de estos conocimientos ya que se incluyen en los contenidos de la orden de 1 de julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA 17/07/2008, pág. 14075):

Bloque 3. Análisis

(…)

- Introducción a la derivada. Tasas de variación media e instantánea de una función. Derivada de una función en un punto. Interpretaciones geométrica y física de la derivada: aplicación de la derivada a la determinación de la tangente a una curva, a la obtención de sus extremos y al cálculo de la velocidad y la aceleración. La función derivada. Iniciación al cálculo de derivadas. Interpretación y análisis de funciones sencillas que describan situaciones reales, expresadas de manera analítica o gráfica.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

En la primera sesión se planteará un problema que sirva de introducción al tema y para repasar el cálculo de derivadas, de los extremos y de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.

Problema inicial. En un rincón del patio del instituto queremos hacer un huerto de forma rectangular. Para ello disponemos de 12 metros de valla para cerrar con dos lados, y los otros dos lados serán las paredes. ¿De qué forma deberemos dividir los 12 metros de valla en dos trozos, para obtener la mayor superficie posible?

Resolución. Si llamamos x a una de las partes, la otra será 12-x.

El producto de ambas es y, por lo tanto, y = x.(12-x) ó $y = -x^2 + 12x$.

Debemos encontrar, si existe, el valor máximo de la función anterior para los valores de x comprendidos en el intervalo [0,12].

Su derivada es f'(x)=-2x+12. Si igualamos a 0, nos sale x=6.

Dando valores (x=0) vemos que f'(0) = 12 > 0, luego el intervalo [0,6) es creciente y como f'(7) = -2 < 0, el intervalo (6,12] es decreciente.

Como [0,6) es creciente y (6,12] decreciente, tenemos que en el punto x = 6 existe un máximo relativo.

No hace falta estudiar los puntos x = 0 y x = 12, ya que no tiene sentido en el contexto del problema dividir la valla en 0 ó 12 m., es decir, no estarías partiéndola en dos trozos.

La misma solución puede encontrarse utilizando otra técnica distinta. Se trata de aplicar el criterio de la segunda derivada para calcular extremos relativos de una función.

f''(x) = -2.

f''(6) < 0, por tanto en x = 6 existe un máximo relativo.

Luego si x = 6, f(6) = 36. Así que la solución es dividir la valla de 12 m. en 6 y 6, y la superficie máxima es 36 m^2.

D**. Sobre las razones de ser del objeto matemático**

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

Siguiendo la razón de ser histórica del objeto matemático, se propone introducir a los alumnos este contenido como una herramienta necesaria para dar solución a problemas reales de distintas índoles, abarcando cualquier campo en el que exista una necesidad de optimización de recursos, ya sean materiales, humanos o económicos.

Para que sea más intuitivo, se planteará a los alumnos un problema cuya temática forme parte de su vida cotidiana, y que por tanto les resulte familiar y no suponga un problema añadido la comprensión del enunciado. Por ejemplo, utilizaremos un problema de calcular a cuánto debe cobrar el alquiler de un piso para obtener los máximos beneficios, sabiendo que si lo pone a cierto precio los inquilinos se le irán u otro en el que tenga que calcular las dimensiones de cierta figura para saber de qué manera obtenemos el área máxima o necesitamos la menor cantidad de un material para hacer dicha figura. (Veremos los problemas más adelante).

Se trata de una temática conocida y familiar para los alumnos, lo que hace que puedan empezar a experimentar y hacer conjeturas sobre las posibles soluciones con los conocimientos que poseen al comienzo de la explicación de la nueva unidad.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Los problemas típicos que dieron origen al cálculo infinitesimal comenzaron a plantearse en la época clásica de la antigua Grecia (siglo III a.C.) pero no se encontraron métodos sistemáticos de resolución hasta veinte siglos después (Newton y Leibniz).

En lo que se refiere a las derivadas existen dos conceptos de tipo geométrico que le dieron origen:

- El problema de la tangente a una curva (Apolonio de Perge).

- El Teorema de los extremos: máximos y mínimos (Pierre de Fermat).

El problema de la resolución de un sistema lineal de inecuaciones se remonta, al menos, a Fourier, después de quien nace el método de eliminación de Fourier-Motzkin. La programación lineal se plantea como un modelo matemático desarrollado durante la Segunda Guerra Mundial para planificar los gastos y los retornos, a fin de reducir los costos al ejército y aumentar las pérdidas del enemigo. Se mantuvo en secreto hasta 1947. En la posguerra, muchas industrias lo usaron en su planificación diaria.

En cierto modo las razones de ser que se van a tener en cuenta coinciden con las razones de ser que dieron lugar al objeto, ya que las razones históricas que dan lugar a la programación lineal son también de optimización, si bien dicha optimización iba encaminada fundamentalmente a aspectos logísticos y militares.

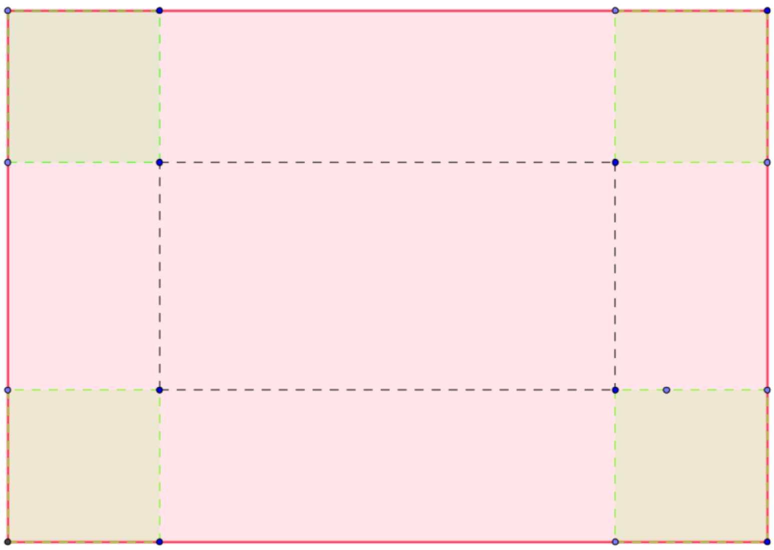
3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Se propondrá un problema de optimización que permita a los alumnos experimentar con él, ir descubriendo regularidades y planteando sus propias conjeturas, para que más adelante, ya con los conocimientos necesarios explicados y asentados, puedan formalizar y comprobar los resultados.

Problema 1.

Se desean construir cajas de cartón sin tapa partiendo de folios tamaño DINA-4 de lados 21 cm y 30 cm, a los que se les recortan cada esquina un cuadrado de lado x.

Determina la longitud x de los recortes para que el volumen de la caja sea máximo. Indica cuál es ese volumen máximo.



Solución

Si se corta un cuadradito de lado x, el volumen será

$V(x) = (30 - 2x)(21 - 2x)x = 4x^3 - 101x^2 + 630x$

Las soluciones se encuentran en $V'(x) = 12x^2 - 202x + 630 = 0$

Resolviendo esa ecuación de segundo grado sale x = 12.7, x = 4,13.

La solución 12,7 cm. no puede ser, porque a un lado de 24 cm no le puedo quitar $2.(12{,}7) = 25{,}4\ cm > 24\ cm$.

Vamos a comprobar que en efecto, es un máximo:

$V''(x) = 24x - 202 \rightarrow V''(4{,}13) < 0$, luego en x = 4,13 cm hay un máximo.

El volumen máximo de la caja es $V(4{,}13) = 1143.87\ cm^3$.

E. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Para estudiar las aplicaciones de las derivadas hemos considerado estos 4 campos de problemas:

CP1

Problema 2. Halla los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los que la recta tangente forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ rad con el eje de abscisas.

Solución

Si la recta tangente forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ rad con el eje de abscisas, su pendiente es $tag\frac{\pi}{4}$ = 1. Como sabemos que la derivada es la pendiente de la recta tangente, tenemos que hallar los puntos donde su derivada vale 1, es decir, f´(x)=1. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 1$. → $3x^2 - 6x = 0$. →x = 0, x = 2.

Los puntos buscados son **(0,0)** y **(2,-2)**, y las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos $y = x$ e $y = x - 4$.

CP2

Problema 3. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y di, si existen, cuáles son sus máximos y sus mínimos:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$$

$$f(x) = 3x - senx$$

Solución

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$. →x = -1, x = 3.

Estudiamos el signo de la derivada evaluando en x = -2, 0 y 4 por ejemplo.

f´(x) > 0 y por tanto f es creciente en (-∞,-1) U (3,+∞) y f´(x) < 0 y, por tanto, f es decreciente en (-1,3).

Como en x = -1 la función pasa de ser creciente a decreciente, tenemos un máximo y en x = 3 la función cambia de decreciente a creciente tenemos un mínimo.

Máximo: (-1, f (-1)) = (-1,6)

Mínimo: (3, f (3)) = (3, -26)

Los apartados **b)**, **c)** y **d)** se hacen de manera similar, con la excepción de que en el **d)** no hay extremos relativos ya que es imposible que $f'(x) = 3 - cosx = 0$.

Problema 4. Halla los máximos y mínimos de las siguientes funciones utilizando el criterio de la segunda derivada:

$$f(x) = senx + cosx \; si \; x \in [0{,}2\pi]$$

$$f(x) = xlnx$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

Solución

a)$f'(x) = cosx - senx = 0$ → x = $\frac{\pi}{4}$, x = $\frac{5\pi}{4}$.

$f''(x) = -senx - cosx$. Tenemos que f´´ ($\frac{\pi}{4}$) < 0, luego hay un máximo en ($\frac{\pi}{4}$,√2) . Y como f´´ ($\frac{5\pi}{4}$) > 0, hay un mínimo en ($\frac{5\pi}{4}$, -√2).

Los apartados **b)** y **c)** se hacen del mismo modo.

CP3

Problema 5. Halla los puntos de inflexión y estudia la curvatura de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

Solución

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x$.

$f''(x) = 6x + 6$. Buscamos los valores que anulan la segunda derivada:

$f''(x) = 0$ → x = -1. f(-1) = 2, luego el punto (-1, -2) es un punto de inflexión.

Como en (-∞, -1) f''(x) < 0, la función es convexa y en (-1, +∞) es cóncava, ya que f''(x) > 0.

El apartado **b)** se resuelve del mismo modo.

Optimización.

CP4A

Problema 6. Se quieren fabricar latas de refresco cilíndricas de 500 cm3. de manera que el coste de la chapa sea mínimo. Halla las dimensiones de la lata, sabiendo que su superficie lateral viene dada por la función S(r, h) = $2\pi r^2$+2πrh.

Solución

Para expresar S(r, h) con una variable despejamos h en la fórmula del volumen: 500 = $\pi r^2 h$ → $h = \frac{500}{\pi r^2}$ → S(r) = $2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$

$S'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0$ → r = 4,3

$S''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3}$ → S'' (4,3) > 0, luego hay un mínimo en r = 4,3.

Por tanto las dimensiones de la lata son r = 4,3 cm y h = 8,6 cm.

CP4B

Problema 7A. El valor en millones de euros de una empresa en función del tiempo en años que lleva funcionando viene dado por $f(t) = 9 - (t-2)^2 \ con\ 0 \leq t \leq 6$. ¿En qué momento valdrá más la empresa? ¿Cuánto valdrá?

Solución

$f'(t) = -2t + 4 = 0.$ → t = 2. → f (2) = 9

$f''(t) = -2 < 0$, luego efectivamente el punto (2, 9) es un máximo. Lo cual quiere decir que alcanza su valor máximo a los dos años y ese valor es de 9 millones de euros.

Problema 7B. ¿Y si la función fuera $f(t) = 10 - (t-3)^2$ con $0 \leq t \leq 2$.

Solución

$f'(t) = -2t + 6 = 0 \rightarrow t = 3$

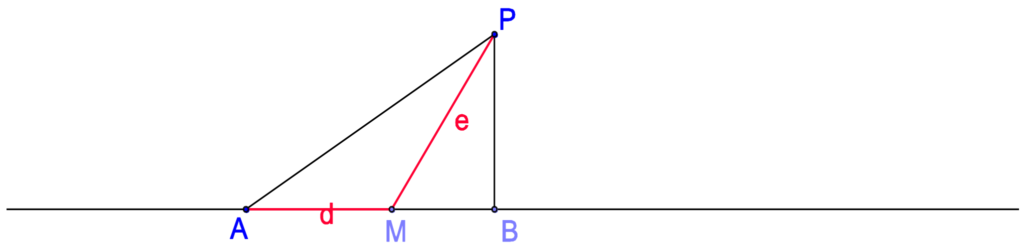
$f''(t) = -2 < 0$ **,** luego en x = 3 hay un máximo. Pero la t va de 0 a 2, luego hay que mirar cuánto vale la función en los extremos del intervalo, para ver donde alcanza su valor máximo.

$f(0) = 1$ y $f(2) = 9$.

Por tanto la función alcanza su valor máximo a los 2 años y ese valor es de 9 millones de euros.

CP4C

Problema 8. En una carretera a través del desierto un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 km. de distancia de A. Para ello puede aprovechar una carretera recta que une las ciudades A y B, que están a 400 km. de distancia, que le permite ir más rápido que por el desierto. Sabiendo que el tiempo que tarda el automóvil en recorrer el trayecto según el punto hasta el que vaya por la carretera recta es T(x) = $\frac{400-x}{100} + \frac{\sqrt{x^2+300^2}}{60}$, determina la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.



Solución

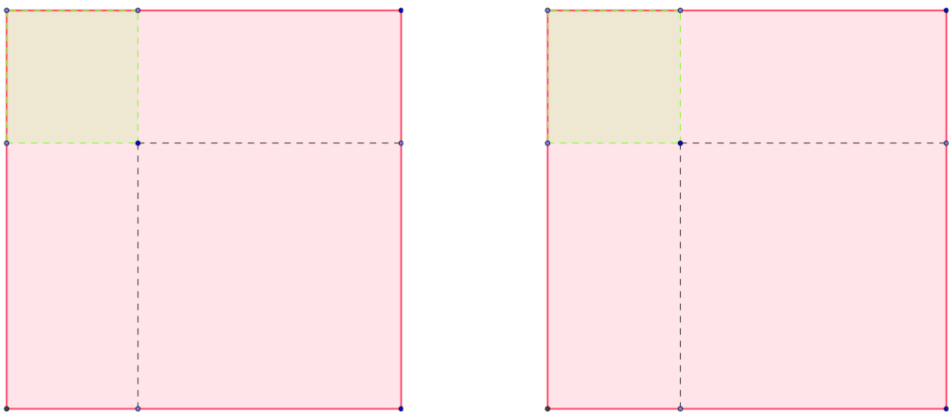
$T'(x) = -\frac{1}{100} + \frac{x}{60\sqrt{x^2+900}} = 0.$ → x = 225, x = -225. Pero la solución negativa no tiene sentido, luego nos quedamos con x = 225 km. Podemos comprobar que T'' (225) > 0 y por lo tanto x = 225 es un mínimo.

El automóvil deja la carretera a 175 km de la ciudad A y va por el desierto el resto.

CP5A

Problema 9. En una esquina de un folio de 30 y 21 cm. de lados, recortamos un cuadradito de lado x. Hacemos lo mismo con otra hoja de igual tamaño. Doblamos las dos pestañas y unimos las dos piezas formando una caja en forma de prisma rectangular.

¿Cuánto debe valer x, el lado del cuadradito que recortamos, para que el volumen de la caja resultante sea máximo?



Solución

Las dimensiones de la caja serán x, 21-x y 30-x. Por tanto el volumen será:

$V(x) = x(21-x)(30-x) = x^3 - 51x^2 + 630x$ con 0 < x < 21.

$V'(x) = 3x^2 - 102x + 630 = 0$ → x = 8'11, x = 25'88 (No vale)

En efecto $V''(x) = 6x - 102$ → V'' (8'11) < 0 y por tanto en x = 8'11 hay un máximo.

El lado del cuadradito que recortamos debe valer 8’11 cm. En tal caso, el volumen de la caja será V (8’11) = 2288’33 cm^2.

Problema 10. De todos los triángulos rectángulos de 5 m. de hipotenusa, halla el que tiene área máxima.

Solución

Si los catetos del triángulo son x e y, tenemos que $x^2 + y^2 = 25$. →

$y = \sqrt{25 - x^2}$.

Luego el área es $A(x) = \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$.

Hallamos la derivada: $A'(x) = \frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}} = 0$ →x = $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, x = $\frac{-5\sqrt{2}}{2}$

Descartamos la solución negativa, porque no tiene sentido y comprobamos con la segunda derivada que, en efecto, es un máximo.

El triangulo que tiene área máxima es un triángulo isósceles que tiene los catetos $\frac{5\sqrt{2}}{2}$m y $\frac{5\sqrt{2}}{2}$m.

CP5B

Problema 11. Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros (N) diarios depende del precio del billete (p) según la expresión $N(p) = 300 - 6p, p \leq 50$.

Da la expresión que proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete.

¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es de 15€?

¿Cuál es el precio del billete que hace máximos los ingresos diarios? ¿Cuáles son esos ingresos?

Solución

a) Los ingresos diarios los obtenemos multiplicando el precio de los billetes por el número de billetes vendidos. Es decir, I (p) = (300-6p).p= $300p - 6p^2$.

b) I (15) = 4275 €.

c) $I'(p) = 300 - 12p = 0$ → p = 25.

En efecto, I’’ (p) = -12 < 0, luego p = 25 es un máximo.

El precio que hace máximos los ingresos es 25€ y esos ingresos son I (25) = 3750€.

Problema 12. El propietario de un inmueble tiene alquilados 40 pisos a 300€ al mes cada uno. Por cada 10€ de aumento en el precio del alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro piso más económico. ¿Cuál es el alquiler que más beneficios produce al propietario?

<u>Solución</u>

Si aumenta x euros, cobra por cada piso 300+x euros, pero alquila (40-x/10) pisos. Por tanto, el beneficio es:

$B(x) = (300 + x)\left(40 - \frac{x}{10}\right) = 12000 + 10x - \frac{x^2}{10}$ con 0 < x < 400.

$B'(x) = 10 - \frac{x}{5} = 0$ → x = 50 → B’’(x) = -1/5 < 0, luego efectivamente en x = 50 hay un máximo. Por lo tanto, para que el beneficio se máximo debe poner el alquiler a 350€.

CP5C

Problema 13. Un barco B y dos ciudades A y C de la costa forman un triángulo rectángulo en C. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco. Sabiendo que puede nadar a 3 km/h y caminar a 5 km/h, ¿a qué distancia de A debe abandonar la costa para nadar hasta B si quiere llegar lo antes posible?

Solución (similar al 14)

Problema 14. Un nadador, A, se encuentra a 3 km. de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 km. de la caseta. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.

<u>Solución</u>

Llamamos x a la distancia de la caseta al punto P al que debe llegar a nado.

Tiene que recorrer AP = $\sqrt{x^2 + 9}$ a 3 km/h y PB = 6-x a 5 km/h.

El tiempo empleado es: $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$ → $t'(x) = \frac{2x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} = 0$ → x = 9/4, x = -9/4 (No vale)

Comprobamos que si x < 2,25 t'(x) < 0 y si x > 2,25 t'(x) > 0, luego en x = 2,25 hay un mínimo.

Por tanto, debe dirigirse a nado hasta un punto P que diste 2,25 km de la caseta y el tiempo empleado será t (2,25) = 2 horas.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Con el problema 2 se pretende que los alumnos asimilen y refuercen la idea de que la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada en dicho punto y la relacionen también con la inclinación y el ángulo que forma la recta tangente con el eje de abscisas.

En los problemas 3 y 4 se intenta repetir y dejar claro los dos procesos que hay para calcular extremos relativos de una función y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Y algo similar ocurre con el ejercicio 5, pero con el estudio de la curvatura y los puntos de inflexión de una función.

Con los problemas 7 y 8, como la función es conocida, no se modifica la técnica enseñada de obtener los extremos de una función, solo que se insiste en sacar la ordenada del punto donde está el extremo, para reforzar dicha técnica.

En el problema 6, la función es conocida, pero es de dos variables, con lo que hay que hacer una pequeña modificación a la técnica empleada en 7 y 8, ya que antes de utilizarla es necesario despejar una variable en función de la otra, con algún otro dato que nos da el problema (el volumen de las latas), para tener la función de una sola variable y ya aplicar la misma técnica.

Con la resolución de los problemas **CP5** se pretende reforzar la técnica de expresión analítica de una función dada mediante un enunciado y también con CP5A y CP5C la de realizar dibujos o gráficos que les ayuden a entender la situación del enunciado.

F. Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

T1: Hallar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.

Veremos que la derivada en un punto x0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto. Luego así conoceremos la ecuación de la recta tangente, ya que sabemos su pendiente y un punto por el que pasa.

T2: Hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.

Se trabajará con la primera derivada y el estudio de su signo para determinar las zonas de crecimiento y decrecimiento. Se podrán aprovechar las funciones que nos vayan saliendo en los problemas planteados.

T3: Hallar extremos relativos de una función.

Trabajaremos los dos métodos para calcular extremos relativos. Utilizando los ejercicios de T2 donde ya tenemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los retomaremos para obtener sus máximos y mínimos relativos. Con otras funciones, o incluso con las mismas para ver que obtenemos el mismo resultado, calcularemos los extremos relativos con el criterio de la segunda derivada.

T4: Hallar intervalos de concavidad y convexidad de una función.

Repasaremos el cálculo de la segunda y tercera derivada y estudiando el signo de la segunda obtendremos donde es cóncava o convexa la función. Para asentar esta técnica podemos utilizar los mismos ejercicios que hemos utilizado en T2 y ampliarlos, si es necesario, con cualquier otra función.

T5: Hallar puntos de inflexión de una función.

Al igual que en T3 desarrollaremos los dos métodos posibles para la obtención de los puntos de inflexión de una función. Continuaremos con los ejercicios de T4 para el método de ver donde cambia la curvatura de la función y con esas mismas, u otras funciones, haremos ejercicios con el método de la tercera derivada.

T6: Expresar analíticamente una función descrita mediante un enunciado.

Halla dos números cuya suma sea 6 y el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Halla el número positivo cuya suma con 25 veces su inverso sea mínima.

Una empresa estima que los ingresos y gastos anuales (en euros) que generan la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por:

$I(x) = 2x^2 + 360x$ $\qquad$ $G(x) = 4x^2 + 120x + 70$

Encuentra la función que da el beneficio de la empresa.

En un triángulo isósceles ABC con AB=AC, el lado BC mide 4 cm. y la altura que baja desde A, 1 cm. Situamos un punto P en dicha altura. Calcula la función que da la suma de las distancias desde P a los vértices.

También se trabajaran esta técnica en los problemas CP5A, CP5B y CP5C de optimización.

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Se ejercitan las técnicas de calcular los extremos relativos y puntos de inflexión de una función, repasando las derivadas y el criterio de la segunda y tercera derivada; y con los ejercicios planteados en T5 se practica la expresión analítica de una función dada mediante un enunciado, que es lo que más les cuesta a los alumnos. Realmente no hay ninguna modificación de las técnicas, sino que hay repetición y asimilación de los conceptos.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Las técnicas nombradas anteriormente están totalmente adecuadas al campo de problemas de nuestro objeto matemático, ya que son las que se necesitan para resolver nuestros problemas de optimización, tanto los del tipo CP4, CP5 y CP6 como para los CP7, CP8 y CP9, ya que en todos se necesita calcular los extremos de una función para encontrar los valores máximos o mínimos de dicha función y además para los problemas CP7, CP8 y CP9 se necesita obtener la expresión analítica de una función que nos dan mediante un enunciado.

CP1 → T1	CP2 → T2 y T3
CP3 → T4 y T5	CP4A → T3
CP4B → T3	CP4C → T3
CP5A → T3 y T6	CP5B → T3 y T6
CP5C → T3 y T6	

G. Sobre las tecnologías

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

T1: Hallar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.

La obtención de la recta tangente es la aplicación más inmediata de las derivadas, pues, como ya sabemos, $f'(x_{0)}$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función y = f(x) en el punto de abscisa x_0. Así utilizando la ecuación punto-pendiente de la recta, tenemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de y = f(x) en el punto x_0 es $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

T2: Hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.

Una función f es creciente en x_0 si signo de (x-x_0) = signo de $(f(x) - f(x_0))$. Análogamente se define f decreciente en x_0.

Entonces se tiene que si f es creciente en x_0, $f'(x_0) = \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

Análogamente se obtiene que si f es decreciente en x_0→ $f'(x_0) \leq 0$

Si $f'(x_0) > 0$, entonces f es creciente en x_0.

Si $f'(x_0) < 0$, entonces f es decreciente en x_0.

T3: Hallar extremos relativos de una función.

Aquí vamos a distinguir entre dos técnicas: estudiar el signo de la primera derivada y el criterio de la segunda derivada.

Utilizando la técnica T2, se demuestra fácilmente que si f' es negativa, es decir, la función es decreciente a la izquierda del punto y f' es positiva a la derecha, es decir, f es creciente, hay un mínimo en dicho punto. Del mismo modo vemos que si f' es positiva a la izquierda del punto y negativa a su derecha, hay un máximo. Y si la derivada tiene el mismo signo a ambos lados del punto, hay un punto de inflexión.

El criterio de la segunda derivada consiste en ver que si la función es cóncava en x_0, su derivada es creciente en x_0 y por tanto $f''(x_0) \geq 0$. Luego si $f''(x_0) \geq 0$ →f es cóncava en x_0 y entonces f tiene un mínimo relativo en x_0. Análogamente se ve que si $f''(x_0) \leq 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.

T4: Hallar intervalos de concavidad y convexidad de una función.

Como acabamos de ver en T3, se trata de estudiar el signo de la segunda derivada y así tenemos los intervalos donde la función es cóncava y convexa.

T5: Hallar puntos de inflexión de una función.

Para obtener los puntos de inflexión tenemos dos técnicas distintas, como en el caso de los extremos relativos.

Uno de ellos es ver que los puntos de inflexión están donde la función cambia de ser cóncava a convexa, o viceversa.

El otro método es estudiar el signo de la segunda y tercera derivada. Entonces se tiene que si $f''(x_0) = 0 \; y \; f'''(x_0) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

T6: Expresar analíticamente una función descrita mediante un enunciado.

Ejercitaremos a los alumnos con una serie de ejemplos, la manera de expresar analíticamente funciones dadas mediante un enunciado. Se trata de observar cuál es la incógnita a despejar y obtener la función que se desea optimizar. Un caso más complicado puede ser que la función tenga dos variables, y nos den alguna condición que debe cumplir, para poder sustituirla en la función y que nos quede con una sola variable.

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

En casi todos los casos la justificación de las técnicas las llevará a cabo el profesor, salvo alguna excepción en la que los alumnos lo puedan llegar a conseguir por su cuenta.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

La idea de esta metodología es que los alumnos vayan trabajando y tratando de obtener resultados, previamente a la justificación del profesor. Ellos irán haciendo pruebas y conjeturando, y cuando se aproximen a la solución o cuando el profesor lo considere oportuno, una vez hayan trabajado los alumnos a su ritmo, será él quien justifique las técnicas y haga las demostraciones oportunas.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

Hemos planteado desarrollar este tema en 11 sesiones, en las cuales intentaremos seguir una metodología basada en este modelo:

1- Experimentar.

2- Descubrir regularidades.

3- Conjeturar.

4- Representar y comunicar.

5- Formalizar y comprobar.

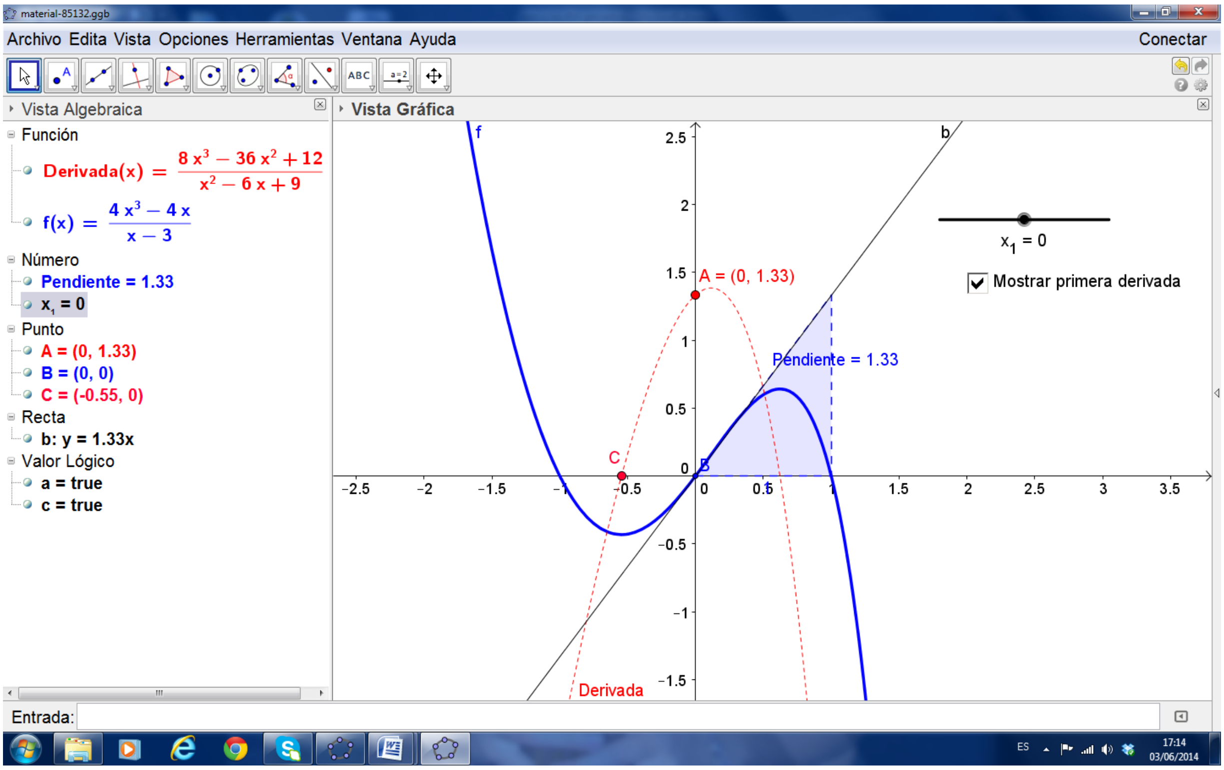
Con esta metodología tratamos de que el alumno trabaje por su cuenta los problemas, siempre con la ayuda que le sea necesaria por parte del profesor, para que sea él mismo quien vaya descubriendo propiedades y resultados, y vaya avanzando en su formación y su capacidad de razonamiento. Una vez se ha hecho el trabajo por parte del alumno, será el profesor quien le ayude a formalizar y comunicar los resultados, para finalmente poder comprobarlos.

<u>Sesión 1. Introducción.</u>

Se trabajará el Problema 1 en clase. Se les dejará tiempo para que piensen ellos e incluso jueguen con hojas de papel para intentar hacerlo. Pueden ir probando por pequeños grupos distintos casos e ir construyendo una tabla de valores con los resultados que les salgan. Luego juntaremos todos los resultados y ellos podrán sacar alguna conclusión y dirán cual les parece que va a ser el volumen máximo. Esta sesión la dedicaremos entera a que ellos practiquen y hagan sus cuentas y conjeturas, para que se introduzcan en el tema, y más adelante, cuando lleguemos a los problemas de optimización ya les explicaremos la manera de hacerlo y les daremos el resultado exacto a ver si era el que ellos habían pensado o no.

Sesión 2. Recta tangente

En esta sesión primero serán los alumnos quienes trabajen con algunas funciones con máximos y mínimos para que ellos mismos vean como es la pendiente de la recta tangente en esos puntos y cuanto vale su derivada, para que vayan observando la relación que existe entre ambas. Para ello el profesor utilizará GeoGebra para poder visualizar mejor las gráficas de las funciones y poder trabajar muchos más ejemplos rápidamente.

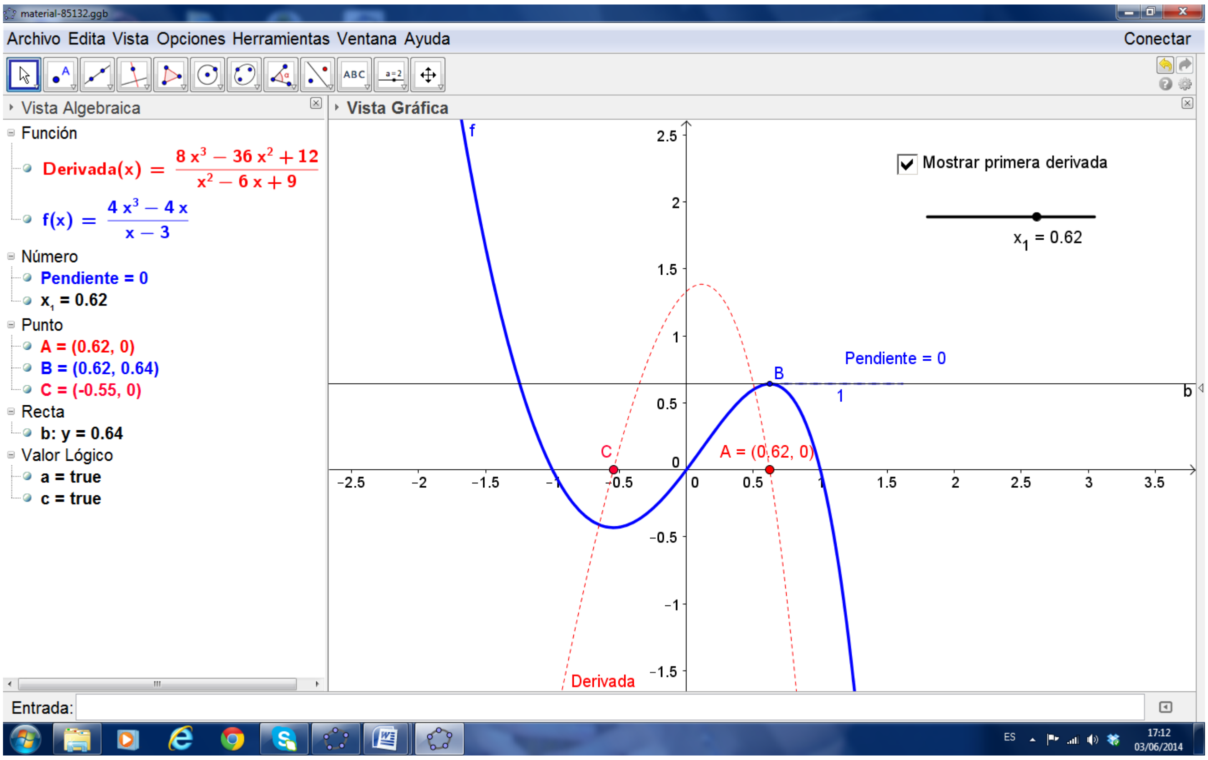


El profesor les proporcionará este applet, (http://geogebratube.com/material/show/id/85132) y con alguna modificación hecha por mí, que relaciona la función y su derivada, para que ellos puedan ir moviendo el deslizador e ir viendo que ocurre con el valor de la derivada en un punto y la pendiente de la recta tangente en ese punto. También podrán cambiar la función y automáticamente el programa cambiará la derivada y la recta tangente.

Luego se formalizará la idea de que la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente en dicho punto. Con eso se les mandará hacer el problema 2 individualmente, y lo pondremos en común, resolviendo las posibles dudas que hayan surgido. Si fuera necesario, se les recordará la ecuación punto-pendiente de una recta.

Sesión 3. Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

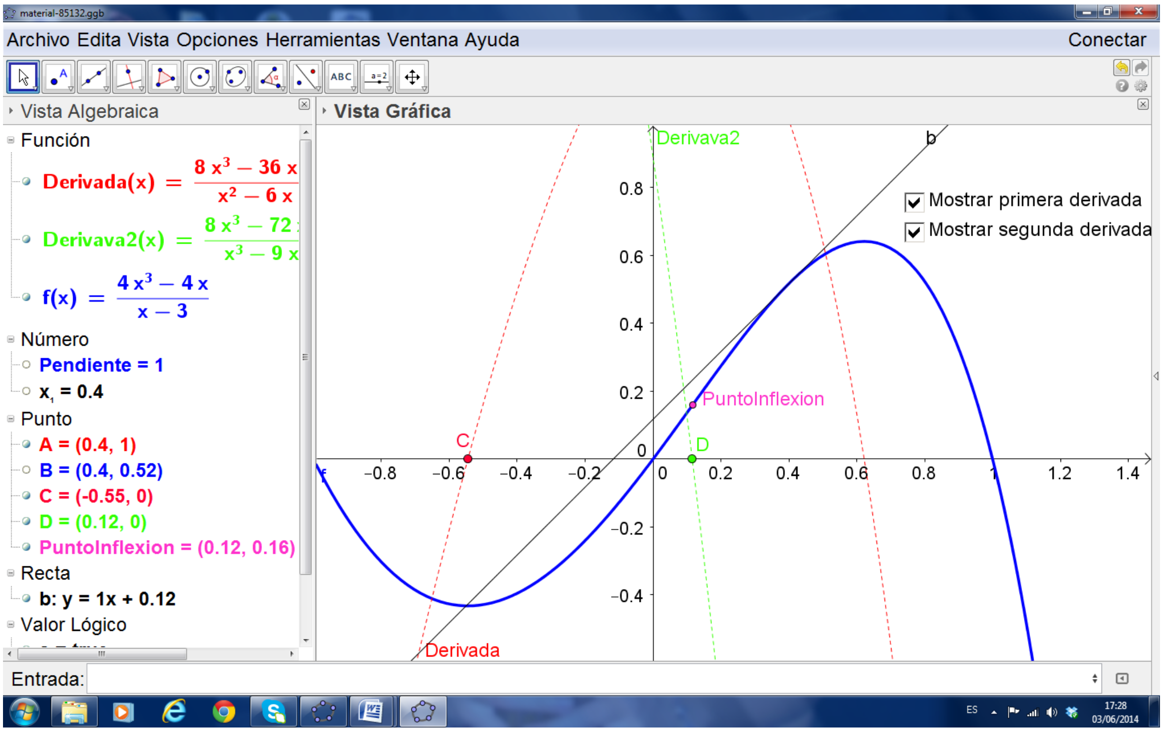
Les recordaremos la elación entre el signo de la derivada y el crecimiento o decrecimiento de la función y les mandaremos trabajar sobre el problema 3 en parejas, para ver si son capaces de llegar ellos solos a como se obtienen los extremos relativos. Una vez hayan hecho este ejercicio, el profesor les dará este applet de GeoGebra (el mismo que el de la sesión 2 modificado por mí) para que puedan comprobar y, ver de una forma más visual, la relación entre el signo de la derivada y las zonas de crecimiento o decrecimiento. También confirmarán su idea, o aprenderán, donde están los extremos relativos viendo varios ejemplos mucho más rápido que si tuvieran que hacerlo a mano.



Los corregiremos en la pizarra y se recordará el método de la segunda derivada. El problema 4 se mandará de deberes para casa.

Sesión 4. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Lo primero corregiremos el problema 4. A continuación haremos un repaso de concavidad y convexidad y dejaremos que hagan el problema 5 en clase. Queremos ver si son capaces ellos solos de llegar a la conclusión de donde están los puntos de inflexión, una vez estudiada la curvatura de la función, al igual que ocurría con los extremos relativos.



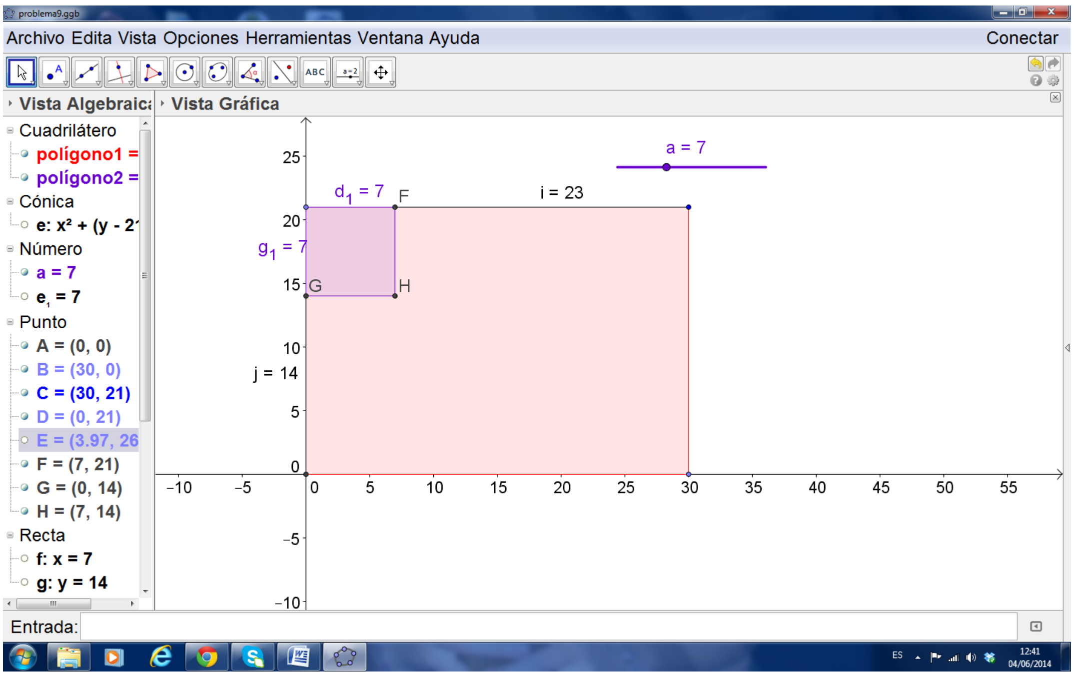
Para resolver alguna duda y afianzar los conceptos lo corregiremos al final de la clase en la pizarra con la ayuda de GeoGebra (es el mismo applet que las sesiones anteriores añadiendo la segunda derivada). El profesor les enseñará este applet donde se ve la relación entre el signo de la segunda derivada y la curvatura de la función, y los alumnos podrán ir variando la función, moviendo puntos y jugando con ello para ver esta relación y comprobar la teoría que han aprendido en años anteriores.

Sesión 5. Optimización con función conocida

Trabajaremos con los problemas de optimización en los que conocemos la función. Les mandaremos el problema 7 (A y B) para que intenten resolverlo en clase por parejas. Queremos que ellos se den cuenta de lo que tienen que hacer, que no es más que calcular extremos relativos de una función, cosa que ya saben. Elegiremos a uno de los alumnos que tenga bien la parte A, pero no la B, para salir a hacerlo a la pizarra. Así pueden discutir entre ellos la solución y darse cuenta entre todos de los fallos más comunes, que en este caso, es que el extremo no está en nuestro intervalo de definición de la función y entonces hay que estudiar el valor de la función en los extremos del intervalo. Después sería el profesor quien formalizase el proceso y les mandaríamos los ejercicios 6 y 8 para clase. Nos interesa que se den cuenta que en el problema 6 hay 2 variables y tienen que despejar una en función de la otra. Si no se dan cuenta, al final de la clase, lo explicaríamos y dejaríamos ese problema como deberes.

Sesión 6. Optimización con función desconocida (geométrico)

Les dejaremos trabajar en pequeños grupos (2-3 personas) el problema 9. Como es de hacer una caja, pueden manipular folios e intentar hacerlo, e ir experimentando ellos mismos y proponer soluciones. Les diremos que construyan una tabla de valores con todos los resultados que vayan obteniendo y después hagan una gráfica de esa tabla.



Ellos mismos irán descartando soluciones al comprobar que otros valores de x hacen una caja de mayor volumen y conjeturarán otras nuevas soluciones. Analizando dicha gráfica podrán ver que el máximo volumen está en un punto en el que los valores dejan de crecer y vuelven a decrecer, lo que pueden relacionarlo con la idea de que el máximo está cuando la función pasa de creciente a decreciente.

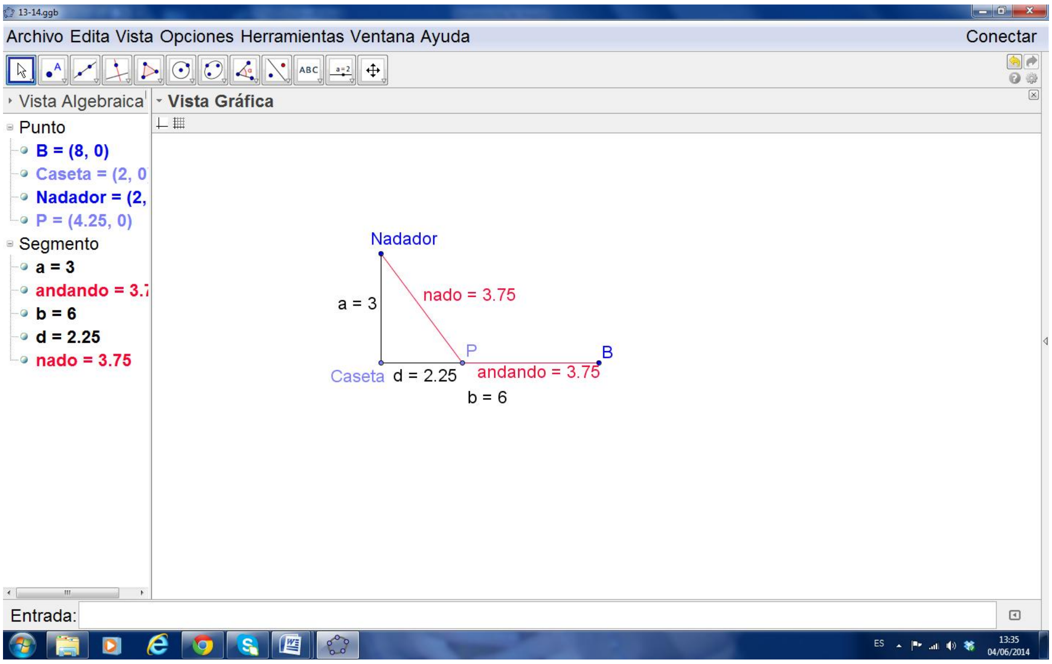
Junto a este problema y, recordando el problema 1 que teníamos pendiente, utilizaremos GeoGebra (applet elaborado por mí) para que puedan ir moviendo los dibujos y viendo todos los casos, de una formas mucho más dinámica y entretenida, que tener que ir construyendo cada caso con folios. Así verán si sus resultados eran correctos, donde se habían equivocado o si se habían dejado muchos casos sin comprobar. Con todo esto ya quedará formalizado el proceso de resolución de este tipo de problemas y se mandará como deberes el problema 10.

Sesión 7. Optimización con función desconocida (económico)

Lo primero corregiremos en la pizarra el problema 10 mandado en la sesión anterior. A continuación les propondremos el problema 11 para que vayan trabajándolo ellos, individualmente o si quieren en parejas, ya que no es muy complicado. Una vez hayan deducido la fórmula del beneficio y hayan calculado su máximo, dejaremos que salga un alumno a explicarlo en la pizarra. Luego les mandaremos el problema 12 en el tiempo que quede de clase y si no quedará como deberes para casa.

Sesión 8. Optimización con función desconocida (tiempo mínimo)

Lo primero se corregirá el problema 12 del día anterior. Luego veremos los problemas de tiempo mínimo de optimización, que también son adecuados para que intenten resolverlos por su cuenta los alumnos y para utilizar GeoGebra. Así que les mandaremos los problemas 13 y 14 para que los vayan trabajando en clase.



Pueden empezar ellos con la ayuda de dibujos o, incluso utilizando GeoGebra, si tienen los conocimientos suficientes y disponemos de ordenadores para todos. Si no el profesor les mostrará el gráfico de la situación con GeoGebra e irá moviendo los puntos, para ver los distintos casos y posibles resultados que van saliendo. Con ellos pueden construir una tabla de valores y una gráfica y hacerse una idea de donde se alcanza el mínimo, aunque luego hagan el problema formalmente y obtengan la solución exacta. Al final de la clase se corregirá en la pizarra.

Sesión 9. Repaso

Se hará un repaso de lo visto en las 8 sesiones anteriores, incidiendo en los problemas de optimización, que son los que más contenido tienen, y en los que te hace falta usar otras técnicas como el cálculo de extremos relativos de una función. Volveremos a hacer alguno de los ejercicios que más dudas despertaran en los alumnos y alguno más de cara a preparar el examen.

Sesión10. Prueba de evaluación

Se realizará la prueba planteada en el apartado I de este trabajo.

Sesión 11. Revisión de la prueba de evaluación

Se resolverá la prueba en la pizarra para intentar reforzar aquellos aspectos que no hayan sido bien asimilados por los alumnos, a la vista de los resultados obtenidos.

Debido a que estamos en 2º de Bachillerato y al final de curso está la selectividad y aprovechando el análisis que he hecho de los exámenes de los últimos 20 años, les daría la dirección de catedu.es donde están los exámenes y sus soluciones, y así puedan repasar los problemas del tipo que más dudas les hayan surgido, los que peor les hayan salido en el examen o los que más veces suelen preguntar en los exámenes.

2. Establece una duración temporal aproximada.

La enseñanza del objeto matemático se ha adaptado a un número total aproximado de 11 sesiones de clase de una hora de duración cada una. Esto quiere decir, a razón de 4 horas semanales, casi 3 semanas de clase. En caso de requerir alguna sesión más, el profesor valorará la posibilidad de añadirla dependiendo de si el temario y el calendario previsto para el resto de la asignatura lo permiten.

I. Sobre la evaluación

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

Ejercicio 1 (1 pto)

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

Ejercicio 2 (2 ptos)

Halla los coeficientes a, b, c, d de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1,0) es $y = -3x + 3$, y que la función tiene un extremo relativo en x = 0.

Ejercicio 3 (2 ptos)

Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m. ¿Cuál es el que tiene la diagonal menor?

Ejercicio 4 (2 ptos)

Una empresa ha decidido mejora su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas del tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas del tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar su seguridad?

Ejercicio 5 (3 ptos)

Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes, colocando las alambradas de las divisiones paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que el área sea la mayor posible?

He analizado los exámenes de la P.A.U. desde 1994 hasta 2013, es decir, de los últimos 20 años y he observado que los problemas de optimización, prácticamente todos, son con función desconocida y además salvo 1 año (2003), el resto siempre hay algún problema de optimización, bien sea en junio o en septiembre.

Solamente en el año 2010 aparece un problema de optimización, con función conocida. El resto como he dicho, son con función desconocida. De ellos, menos de un 20 % son de descomponer un número en dos sumandos de modo que su “suma de cuadrados” sea máxima y solo un año hay uno de tiempo mínimo. El resto son de contexto geométrico (volúmenes y áreas máximas o mínimas) y de contexto económico (beneficio máximo y coste mínimo) aproximadamente en una proporción 60 % y 20%, respectivamente.

En algo más del 50% de los años, aparece algún ejercicio de hallar los coeficientes de una función sabiendo que tienen extremos o puntos de inflexión en tales puntos o que la recta tangente pasa por tal punto.

En todos las años, excepto 1994, aparece algún ejercicio de calcular extremos relativos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento y decrecimiento ó recta tangente en un punto de la función, bien sea todo en el mismo ejercicio o sólo algún apartado de los que acabo de nombrar.

Por este motivo, he decidido poner 3 ejercicios de optimización en mi prueba de evaluación, los 3 con función desconocida y dos de ellos de contexto geométrico. También he puesto el ejercicio 2 de hallar coeficientes y el 1 de hallar la recta tangente, porque como he dicho anteriormente siempre aparecen los ejercicios de extremos, rectas tangentes, crecimiento, etc.

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Con la pregunta 1, se pretende evaluar que sepan obtener los puntos de inflexión de una función y que sepan obtener la ecuación de la recta tangente en un punto de la función.

En el ejercicio 2 se quiere observar si se han entendido los conceptos de punto de inflexión, extremos relativos y recta tangente en un punto, y si se saben relacionar con su significado e interpretarlos correctamente para obtener los coeficientes de la función.

Los problemas 3, 4 y 5 son de optimización en los que les damos una condición y pedimos que se maximice o minimice una cierta función desconocida. Tienen que trabajar la técnica de expresar la función dada por un enunciado analíticamente y además transformarla de dos variables a una, imponiendo la condición que da el enunciado.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

En el **ejercicio 1** se espera que primero obtengan el punto de inflexión de la función.

$y = 4x^3 - 2x^2 - 10 \rightarrow y' = 12x^2 - 4x \rightarrow y'' = 24x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6}$

$y''' = 24 \neq 0$, luego en $x = \frac{1}{6}$ hay un punto de inflexión.

El punto $(\frac{1}{6}, -\frac{271}{27})$ es un punto de inflexión.

Sabemos que la pendiente de la recta tangente es $f'\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$, luego la ecuación de la recta tangente es: $y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{6})$

En el **ejercicio 2** deberían ver que los datos que tenemos son:

1. f pasa por (1,0)
2. (1,0) es un punto de inflexión
3. La pendiente de la recta tangente en x = 1 es -3
4. f tiene un extremo relativo en x = 0

1. f(1) = 0, de donde tenemos a+ b + c + d = 0.

2. $f''(1) = 0 \to 6a + 2b = 0$

3. $f'(1) = -3 \to 3a + 2b + c = -3$

4. $f'(0) = 0 \to c = 0$.

Resolviendo el sistema formado por 1, 2, 3 y 4 obtenemos que a = 1, b = -3, c = 0, d = 2.

En el **ejercicio 3** tienen que encontrar la expresión analítica de la función que buscamos, en este caso la diagonal de un rectángulo. Como el perímetro es 12, tenemos que 2a + 2b = 12 → a = 6 – b.

Y la diagonal de un rectángulo de lados a y b, forma un triángulo rectángulo y aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que $d^2 = a^2 + b^2 \to d^2 = (6-b)^2 + b^2$

→ $f(b) = \sqrt{2b^2 - 12b + 36}$ y ésta es nuestra función a minimizar.

$f'(b) = \frac{4b-12}{2\sqrt{2b^2-12b+36}} = 0$ → **b = 3 → a=3 → d=√18.**

Hay que comprobar que efectivamente es un mínimo:

$f''(3) > 0$

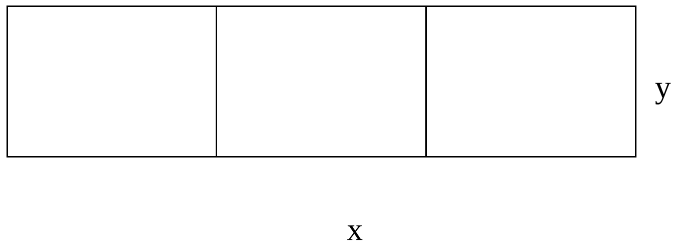
En el **ejercicio 4** nos dan la condición de que va a poner en total 9 alarmas, es decir a + b = 9. Y la seguridad, función que debemos maximizar, viene dada por $f = \frac{ab^2}{10}$.

Imponiendo la condición, tenemos que a = 9 – b y por tanto nos queda $f(b) = \frac{(9-b)b^2}{10}$ → $f'(b) = \frac{18b-3b^2}{10} = 0 \to 3b(6-b) = 0$ → **b = 0** y **b = 6**

Ahora esperamos que digan que b = 0, no tiene sentido porque f (0) = 0 y sólo habría alarmas del tipo A. Ahora hay que comprobar que en b = 6 hay un máximo. Para ello $f''(b) = 18 - 6b \rightarrow f''(6) = -18 < 0$ → luego en b = 6 hay un máximo.

Por lo tanto la solución es contratar 6 alarmas del tipo B y (9 - 6) = 3 del tipo A.

En el **ejercicio 5** tenemos la siguiente situación:



Nos imponen que el perímetro es 160 m, luego 2x + 4y = 160 y la función a maximizar es el área de un rectángulo que es $A(x, y) = xy$.

Sustituyendo la condición $y = \frac{160-2x}{4} = \frac{80-x}{2}$, la función nos queda $A(x) = \frac{x(80-x)}{2} = 40x - \frac{x^2}{2}$ → $A'(x) = 40 - x = 0$ → **x = 40 m**

Efectivamente es un máximo, ya que $A''(x) = -1 < 0$.

Luego la solución es **x = 40 m, y = 20 m.**

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

En el **ejercicio 1** se valorará con 0,3 puntos el obtener correctamente el punto de inflexión y se obtendrá el resto de puntuación hasta el máximo si se obtiene la ecuación de la recta tangente.

En el **ejercicio 2** se restará como máximo 0,5 puntos por errores en las cuentas al resolver el sistema.

En el **ejercicio 3** se valorará con 1 punto el encontrar correctamente la expresión analítica de la función a optimizar y las condiciones que debe cumplir. Se restará como máximo 0,5 si no se comprueba que es un mínimo ó no se saca el valor de la diagonal, si no que solo se dan los lados del rectángulo.

En el **ejercicio 4** se contará con 1 punto el haber obtenido correctamente la función y sus condiciones. Se restará hasta 0,5 si no se explica y se concreta cual es la solución del problemas, eligiendo entre las dos soluciones que nos sale al resolver la ecuación $f'(x) = 0$.

En el **ejercicio 5** se valorará con 1 punto la obtención de la función que debemos maximizar junto a la condición que debe cumplir y su correcta aplicación. Se restará como mucho 0,5 si hay algún fallo en las cuentas o en la derivada, y si no se calculan las dimensiones del rectángulo, es decir, solo se da como solución la x, y no se dice la y.

En los problemas 3, 4 y 5 se considera que el problema está bien planteado, cuando se ha conseguido la función que debemos optimizar, la condición que tiene que cumplir y se ha sustituido correctamente para tener una función de una sola variable. Penalizaremos con un máximo de 0,5 el no comprobar que son máximos o mínimos y los errores leves en las cuentas. Se considerará error grave, algún fallo en las derivadas inmediatas, no en las cuentas posteriores.

J. Sobre la bibliografía y páginas web

1. Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.

Abellanas, L., García, J.C. y Martínez, C. (1996). *MATEMÁTICAS. 2º BACHILLERATO.* McGraw-Hill.

Alcaide, F., Hernández, J. y Vizmanos, J.R. (2009). *Matemáticas 2*. SM.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1997). The development of student's graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada.* Tesis de doctorado. Universitat Autónoma de Barcelona.

Azcárate, C., Badillo, E y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a) y\ f'(x)$ en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191-206.

Colera, J., García, R. y Oliveira, M.J. (2006). *Matemáticas II*. Anaya.

Escoredo, A., Gómez, M.D., Redal, E.J. y otros (2009). *Matemáticas II. 2 BACHILLERATO*. Santillana.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates and integrals. En E. Dubinsky & J. Kaput (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*. MMA Notes 33, 31-45.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G., (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.

Habre, S. y Abboud, M. (2006). Student's conceptual understanding of a function and its derivate in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 57-72.

Harel, G., Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*, 147-172. Sense Publishers.

Monteagudo, M.F. y Paz, J. (2009). *2º Bachillerato*. *Matemáticas. Ciencias y Tecnología*. Edelvives.

Orton, A. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235-250.

http://catedu.es/matematicas_mundo/PAU/Analisis_CNS.pdf exámenes de matemáticas de P.A.U. de los últimos 20 años de la parte de análisis.