MÁSTER EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS, ARTÍSTICAS Y DEPORTIVAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL 1º DE BACHILLERATO

Especialidad de Matemáticas

Alumno: Mario Gigliotti Pereda
Directora: Eva Cid Castro

Curso 2013-2014

INDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

El objeto matemático a enseñar es la derivada de una función real de variable real y se introduce en la asignatura de Matemáticas I de 1º de bachillerato.

Como se trata de un objeto matemático muy amplio nos centraremos en los siguientes aspectos:

- Definición de derivada y recta tangente a una curva en un punto.
- Definición de función derivada.
- Cálculo de la función derivada de una función a partir de la definición.
- Reglas de cálculo de la función derivada.
- Cálculo de la derivada de una función en un punto.
- Cálculo de la ecuación de la tangente a una curva en un punto.
- Crecimiento y decrecimiento de una función. Máximos y mínimos relativos

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

En la Orden de 1 de julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA 17/07/08) se recogen los siguientes contenidos sobre la derivada, correspondientes a las Matemáticas I del Bachillerato de Ciencias y Tecnología:

> *Introducción a la derivada. Tasas de variación media e instantánea de una función. Derivada de una función en un punto. Interpretaciones geométrica y física de la derivada: aplicación de la derivada a la determinación de la tangente a una curva, a la obtención de sus extremos y al cálculo de la velocidad y la aceleración. La función derivada. Iniciación al cálculo de derivadas. Interpretación y análisis de funciones sencillas que describan situaciones reales, expresadas de manera analítica o gráfica.*

Estos contenidos van precedidos de otros en los que se desarrollan las nociones de función, función elemental, límite de una función y continuidad de una función.

En cuanto a los criterios de evaluación, el referente a la derivada es el siguiente:

Interpretar el concepto de derivada y saber utilizarla en situaciones sencillas relacionadas con otros ámbitos del saber.

Se pretende que los alumnos sepan aplicar el significado de la derivada en problemas sobre la tasa de crecimiento o la variación de magnitudes. También deberán saber calcular la tangente a la curva que represente a una función sencilla en uno de sus puntos, así como las derivadas de funciones sencillas.

Por tanto, los aspectos del objeto matemático señalados en el punto A recogen todos los contenidos indicados en los documentos oficiales.

En los libros de texto, el tema sobre las derivadas se suele iniciar introduciendo algún problema que justifique la necesidad de buscar la tasa de variación media de una función, aunque algunos textos hacen una introducción totalmente formal. Se pasa a la tasa de variación instantánea, aunque no se suele justificar su necesidad, y se define la derivada a partir de la noción de límite de una función, relacionándola con el crecimiento de la función en el punto y con la pendiente de la recta tangente en el punto.

Después de unos cuantos ejercicios de cálculo de la derivada de una función en un punto utilizando la definición, se desarrolla la noción de función derivada y se introducen las técnicas de derivación: derivada de la suma, derivada de una función por un número, derivada del producto y del cociente de funciones, derivada de las funciones elementales y derivada de una función de función (regla de la cadena). Desde ese momento, se establece el cálculo de la derivada de una función en un punto como el cálculo del valor de la función derivada en dicho punto. También se realizan ejercicios de cálculo de la ecuación de la recta tangente a la función en un punto. Finalmente, se desarrollan las aplicaciones de la derivada al estudio del crecimiento y decrecimiento de una función y de los máximos y mínimos relativos.

Habitualmente, una vez presentada alguna situación inicial que justifique la introducción de la definición de derivada como límite del cociente incremental, introducen rápidamente la noción de función derivada y las técnicas de cálculo algebraico de las funciones derivadas de las funciones elementales, las más de las veces sin justificar, para presentar a continuación una colección de ejercicios formales de cálculo de la función derivada. Una vez establecidas estas técnicas, las usan para determinar el valor de la derivada de una función en un punto, la recta tangente a una función en un punto, el crecimiento relativo de una función en un punto y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.

A pesar de que en el currículo oficial aparecen comentarios como el siguiente:

> *Los conceptos de límite funcional y de función derivada son ciertamente complejos; por tanto, hay que conceder la prioridad a la formación de estos conceptos mediante aproximaciones que permitan interpretarlos desde contextos de la vida real. Consecuentemente, en este primer acercamiento, el cálculo de límites y derivadas hay que limitarlo a casos elementales.*

la realidad es que los libros de texto desoyen estas indicaciones y olvidan las aproximaciones al concepto de derivada, la utilización en contextos de la vida real y la limitación del cálculo a funciones sencillas.

Respecto a los efectos que esta enseñanza produce en los alumnos, hay que señalar que no tiene en cuenta las concepciones previas de los alumnos ni las dificultades inherentes al concepto de límite. Para empezar, las tasas de variación media de las funciones no es un tema con el que los alumnos estén familiarizados, salvo en el caso de la velocidad. Pero, aun en este caso, los alumnos están mucho más familiarizados con la noción de velocidad instantánea que con la de velocidad media (Azcárate, 1996). Tampoco conocen la noción de tangente a una curva en un punto, más allá de la tangente a la circunferencia, cuya caracterización no es precisamente la más adecuada para desarrollar la noción más general de tangente a una curva.

Por otro lado, cuando se trabaja el tema del crecimiento y decrecimiento de una función, se da por supuesto que los alumnos pueden deducir, a partir de una gráfica, cuando crece o decrece la función, pero la realidad es que muchos alumnos tienen grandes dificultades para deducir gráficamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función (Azcárate, 1996).

Por último, son muchos los autores que señalan que una mediana comprensión de la noción de límite escapa a las posibilidades de los alumnos de Bachillerato, por lo que fundamentar la derivada en dicha noción da lugar a un buen número de dificultades de aprendizaje.

Las modificaciones que se han incorporado a los currículos de algunos países han sido dirigidas principalmente hacia una introducción del análisis matemático más intuitiva y experimental, incorporando el uso de las nuevas tecnologías, pero, aunque en el currículo de Bachillerato de España también se aprecian modificaciones en ese sentido, no parecen haber calado en los libros de texto.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno.

El alumno debe conocer previamente las nociones de pendiente de una recta, recta tangente a una circunferencia, velocidad media y función real de variable real; las propiedades de las funciones, las funciones elementales y la noción de límite de una función. También deben saber deducir propiedades de una función a partir de su gráfica y calcular los límites de funciones en casos elementales y la ecuación de una recta.

En general, todos los conocimientos previos han sido tratados anteriormente, pero no se puede deducir que los alumnos los manejen con la suficiente soltura como para utilizarlos sin problema para construir la noción de derivada a partir de ellos.

En cuanto a la noción de recta tangente a una curva, se introduce tempranamente la de recta tangente a una circunferencia, pero su definición como recta que corta en un solo punto a la circunferencia y que es perpendicular al radio de la circunferencia en ese punto, no puede generalizarse para definir la recta tangente a una curva cualquiera. Será necesario dedicar un tiempo a establecer que la recta tangente a una función en un punto es la recta cuyos valores más se aproximan a los valores que toma la función en un pequeño entorno de dicho punto, cosa que los libros de texto no suelen hacer.

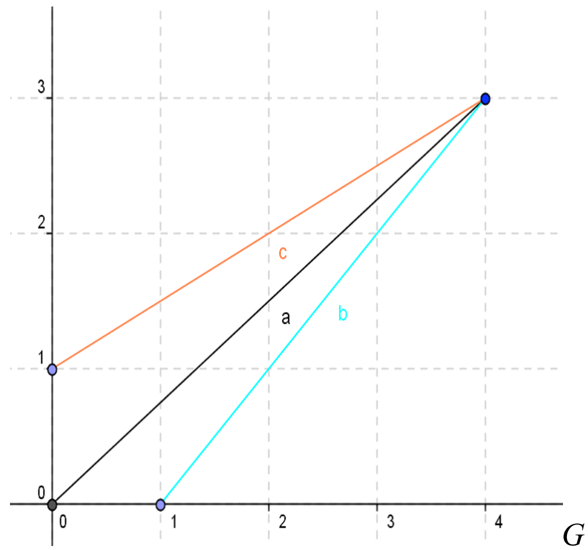
Puesto que en ese mismo curso se trabaja la noción de límite y de continuidad de funciones, las funciones elementales y la geometría analítica, es de esperar que los alumnos han adquirido los conocimientos previos necesarios para iniciar el tema de las derivadas y, si no es así, el profesor conoce la situación en que se encuentran. Por tanto, se dedicará una sesión inicial de la secuencia didáctica a recordar la pendiente de una recta, la velocidad media, la obtención de información acerca de una función a partir de su gráfica y la generalización de la noción de recta tangente, mediante tareas del tipo de las siguientes:

Tarea 1. *Si cuando vamos conduciendo nos encontramos una señal triangular de peligro que muestra una rampa y un porcentaje, por ejemplo, 12%, ¿qué significa esa señal?*

Tarea 2. *Un barco ha realizado una travesía de 28 km en 2 h 20 min. ¿Cuál ha sido su velocidad media?*

Tarea 3. *Pedro recorre 8 km subiendo una colina en su bicicleta de montaña, con una velocidad media de 8 km/h. En el descenso recorre 16 km a una velocidad media de 32 km/h. ¿Cuál ha sido la velocidad media de todo el recorrido?*

Tarea 4. *Tres personas salen a caminar y su movimiento queda recogido por la siguiente gráfica, donde el eje horizontal representa el tiempo en segundos y el eje vertical representa el espacio recorrido en metros.*



a) ¿Qué persona sale más tarde?

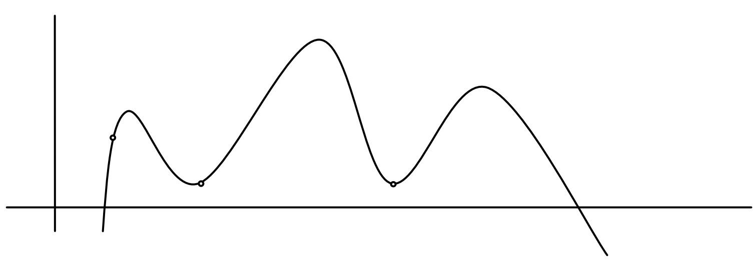
b) ¿Qué persona recorre menos metros?

c) Calcula la velocidad media de cada persona.

d) Escribe las ecuaciones de las rectas que aparecen en el gráfico

e) Relaciona la velocidad media con la ecuación de la recta.

Tarea 5. Dibuja la tangente a la curva en los puntos que se indican. ¿Cómo podemos definir la tangente a una curva en un punto? ¿Qué propiedad la caracteriza?



D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

Desde un punto de vista histórico la razón de ser de la derivada fue la necesidad de determinar el cambio relativo de una función (crecimiento o decrecimiento en un punto) y la recta tangente a una curva en uno de sus puntos. El primer problema está también relacionado con el de encontrar las velocidades instantáneas en los movimiento no uniformes.

En el siglo XVII, Newton y Leibnitz dieron una respuesta teórica y completa a estos problemas, mediante la invención de la derivada. La diferencia principal entre el trabajo de uno y otro es que Newton utilizó los incrementos infinitamente pequeños de la variable y la función como medio para determinar la fluxión ó derivada como cociente de dichos incrementos, mientras que Leibniz trató directamente con los incrementos infinitamente pequeños de la variable y la función, es decir, con las diferenciales y determinó las relaciones entre ellos. Esta diferencia refleja la orientación física de Newton, en la que un concepto como el de velocidad es central y la preocupación filosófica de Leibniz por las partículas últimas de la materia que llamó mónadas.

Un siglo después, Euler integró el cálculo de diferenciales de Leibniz y el método de fluxiones de Newton en una sola teoría que a partir de entonces ha constituido una rama de las matemáticas: el análisis matemático. En su obra se desarrolla la noción de función que pasa a ser la idea fundamental del análisis. Finalmente, Cauchy, a comienzos del siglo XIX, relacionó de forma clara el concepto de derivada con el de límite y redujo el cálculo de derivadas a sencillas operaciones formales de tipo algebraico.

La razón de ser que voy a considerar en mi secuencia didáctica es la necesidad de calcular velocidades instantáneas y coincide con una de las razones históricas que hicieron surgir la noción de derivada. Además, seguiré la sugerencia de Azcarate (1996) de introducir en primer lugar la función derivada y, a partir de ella, la derivada en un punto por considerar que es más inteligible para los alumnos la primera noción que la segunda.

Comenzaré planteando a la clase la siguiente pregunta:

Cuando vais en un coche, en el panel de mandos aparece la velocidad a la que el coche circula en cada momento. El aparato que la calcula se llama velocímetro. ¿Cómo funciona un velocímetro?

Los alumnos por grupos deberán informarse al respecto, consultando en Internet o en cualquier otra fuente que consideren oportuna. Después deberán poner en común los resultados de su investigación. Se espera que en esa puesta en común surja la idea de que lo que hace un velocímetro es calcular el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado cuando el intervalo de tiempo es pequeño y que cuanto menor es el intervalo de tiempo más nos estaremos acercando a la velocidad instantánea.

A continuación, trataré de que los alumnos discriminen el concepto de velocidad media referida a un intervalo pequeño de tiempo del de velocidad instantánea.

Una vez aclarado esto, se planteará el siguiente problema:

Sabemos por la Física que cuando se deja caer un cuerpo desde una altura, en un medio sin rozamiento y sin obstáculos, el espacio recorrido por el cuerpo en función del tiempo responde a la siguiente fórmula: $s = \frac{1}{2} g\, t^2$ *donde el espacio se suele medir en metros y el tiempo en segundos. El parámetro g representa la aceleración de la gravedad y su valor es* $9{,}81\ m/s^2$*. Dibuja la gráfica espacio-tiempo de este movimiento utilizando geogebra. Estudia la gráfica para decidir cuándo es mayor al velocidad media del cuerpo.¿Cómo haremos para saber la velocidad instantánea del cuerpo en cada momento?*

Se sugerirá a los alumnos que, organizados en grupo, traten de encontrar la velocidad en un instante t y que usen el mismo sistema del velocímetro. Una vez que el trabajo esté avanzado y los alumnos hayan dado varias respuestas se procederá a unificar la notación llamando h al pequeño intervalo de tiempo considerado y se llegará a establecer la expresión:

$$\frac{1}{2} g \frac{(t+h)^2 - t^2}{h}$$

Entonces plantearé que cuanto más pequeño sea el intervalo más cerca estaremos de obtener la velocidad en el instante t. Con ese razonamiento, la velocidad instantánea se obtendrá cuando h sea 0. Pero ¿cómo queda la expresión anterior cuando h es 0? Los alumnos verán que se obtiene 0/0 y que eso no tiene sentido porque la división por cero no está definida. Pero eso es una indeterminación que ya han estudiado en el tema de límites y que puede terminar dando uno u otro valor. Así que desde el punto de vista de cálculo de un límite sí que tiene sentido plantearse cómo averiguar ese valor. Busquemos para ello expresiones equivalentes a la anterior que permitan deshacer la indeterminación.

Se supone que los alumnos, si es necesario con mi ayuda, llegarán a la expresión

$$\frac{1}{2}g(2t+h)$$

Y ahora, haciendo un paso al límite cuando h tiende a 0, se obtendrá gt que será el valor de la velocidad instantánea del objeto en el tiempo t.

De este modo se introducirá la definición de función derivada como objeto matemático que permite definir y calcular la velocidad instantánea de un móvil en cualquier instante, conocida la expresión algebraica que relaciona el espacio recorrido con el tiempo empleado en recorrerlo.

A partir de ahí, preguntaré por la velocidad instantánea cuando t toma distintos valores y obtendremos la derivada de una función en un punto como el valor que se obtiene cuando a la función derivada se le da el valor de la abscisa en dicho punto.

Después trabajaremos sobre la gráfica para relacionar la derivada de la función en un punto con la pendiente de la recta tangente y con el crecimiento de la función, introduciendo el concepto de máximos y mínimos relativos y de intervalos de crecimiento.

A continuación se planteará otro problema similar:

Si el cuerpo anterior se deja caer desde una altura de 100 m y s representa el espacio que le queda por recorrer para llegar al suelo, la expresión de ese espacio en función del tiempo vendrá dada por la fórmula $s = 100 - \frac{1}{2} g t^2$. *Dibuja la gráfica espacio-tiempo de este movimiento utilizando geogebra. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función. Encuentra la fórmula de la velocidad instantánea en función del tiempo y la ecuación de la tangente en el instante* $t = 3$.

Haré notar a los alumnos que, en el caso de que la pendiente (tangente trigonométrica del ángulo que forma una recta con el eje OX positivo) de la recta tangente sea un número negativo, la función decrece y, si es un número positivo, la función crece. En el caso de que la pendiente sea 0 el punto es un máximo o mínimo relativo y son éstos, junto con los puntos de discontinuidad de la función los que constituyen los extremos de los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función.

E. Sobre el campo de problemas.

El campo de problemas responderá a los siguientes tipos:

Tipo 1. Problemas cuya resolución exige encontrar la tasa de variación media e instantánea de una función. Por ejemplo:

La población de una colonia de bacterias crece según la siguiente fórmula $10^6 e^{t/2}$ *donde t viene medido en meses. ¿En cuál de los intervalos [0, 2] y [4,6]. crece más la colonia de bacterias? ¿Cuál es la velocidad de crecimiento de la colonia a los 5 meses? ¿Qué significa este último valor obtenido?*

Tipo 2. Problemas cuya resolución exige encontrar valores que maximicen o minimicen una función. Por ejemplo:

Una lata de cierto refresco tiene un volumen de 333 cm^3*. La chapa utilizada para las bases cuesta el doble que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el coste de fabricación sea el menor posible.*

Tipo 3. Problemas en cuya resolución se exige encontrar las coordenadas de los puntos en los que la derivada de la función cumple alguna condición establecida en el enunciado del problema. Por ejemplo:

Dada la función $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$*, halla las coordenadas de los puntos de dicha función en los que la recta tangente forma con el eje OX positivo un ángulo de 30º.*

F. Sobre las técnicas

Las técnicas a desarrollar son las siguientes:

1. Obtención de la función derivada a partir de la definición. Consiste en calcular el límite,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

utilizando las técnicas de cálculo de límites para el caso de indeterminación $\frac{0}{0}$. Ejemplos:

a) Encuentra la función derivada de la función $f(x) = 3x^2 + 5$.

b) Encuentra la función derivada de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

2. Obtención de la función derivada de una función conocidas las reglas de derivación de una suma, diferencia, producto o cociente de funciones, la regla de la cadena y la función derivada de las funciones elementales. Ejemplos:

Encuentra la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1+3x^2}{5-4x^3}$

b) $f(x) = x^4 sen2x$

c) $\sqrt{3x^2 - 5x + 7}$

d) $\ln 6x + e^{\frac{1}{4x}}$

3. Calculo de la derivada de una función en un punto, dando valores a la función derivada. Ejemplos:

a) Calcula en el instante $t = 4$ la velocidad instantánea de la función espacio-tiempo $f(t) = 5t^2 - t$.

b) Calcula el valor de la derivada de la función $y = tg2x + sen3x$ en el punto $x = \pi$.

4. Cálculo de la ecuación de la recta tangente a una función en un punto, utilizando la ecuación punto-pendiente $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Ejemplos:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=2x^3 +5x^2-2$ en el punto de abscisa $x=-2$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ = xe^{2x+1} en el punto de abscisa $x = -½$.

5. Cálculo de los extremos relativos de una función y de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Para ello se buscarán los puntos del dominio de la función en los que la derivada es nula y los puntos de discontinuidad de la función. Después se descompondrá el dominio de la función en unión de intervalos de extremos los puntos de derivada nula o los puntos de discontinuidad y se estudiará el crecimiento de la función en cada uno de ellos, viendo el signo de la derivada primera en uno de sus puntos interiores. A partir de esta información se decidirá si los puntos de derivada nula son máximos, mínimos o puntos de inflexión. Ejemplos:

a) Dada la función $f(x)=8(6x-1)^3$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.

b) Dada la función $f(x)=x^3 - 3x + 2$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.

G. Sobre la justificación de las técnicas

La introducción de la derivada se justificará, tal como se ha explicado en el apartado D, a partir de la necesidad de calcular la velocidad instantánea de un móvil. Se introducirá la función derivada como velocidad instantánea en un instante genérico t y, dando un valor numérico a t se obtendrá la derivada en un punto. Se conectará la derivada en un punto con la pendiente de la tangente y, a partir de ahí con el crecimiento y decrecimiento de la función espacio-tiempo, mediante razonamientos intuitivos de tipo geométrico. Finalmente se generalizarán estos conceptos a cualquier tipo de función, introduciendo la tasa de variación media e instantánea.

Las reglas de derivación se justificarán en un caso sencillo como es la derivada de la suma de funciones. Las demás reglas se establecerán sin demostración. Se encontrará, utilizando la definición de función derivada, la derivada de polinomios de primer o segundo grado y se presentaran las funciones derivadas de las funciones elementales sin demostración.

La tabla de derivadas de las funciones elementales se presentará para una función genérica f(x) por considerar que de esta manera se ayuda a los alumnos a tener en cuenta la regla de la cadena.

$y = k$	$y' = 0$
$y = k\ f(x)^r$ con r racional	$y' = kr\ f(x)^{r-1}\ f'(x)$
$y = a^{f(x)}$	$y' = \ln a\ a^{f(x)}\ f'(x)$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)}\ f'(x)$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{1}{\ln a} \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \text{sen } f(x)$	$y' = \cos f(x)\ f'(x)$
$y = \cos f(x)$	$y' = -\text{sen } f(x)\ f'(x)$
$y = \text{tg } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$y = \text{ctg} f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{sen^2 f(x)}$
$y = \text{arcsen } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$

y = arccos f(x) $$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

y = arctgx $$y' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

Finalmente se estudiarán los casos de derivada nula y, a partir de ahí, se establecerá la definición de extremo relativo y se justificará, de nuevo mediante razonamientos intuitivos de tipo geométrico, la técnica para decidir cuándo un extremo relativo es máximo o mínimo.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

La secuencia didáctica se desglosará en sesiones de clase de una hora de duración de la siguiente manera:

CLASES 1 y 2: Repaso de los conocimientos previos necesarios, según lo indicado en el apartado C.

CLASES 3 y 4: Introducción de las razones de ser de la derivada (apartado D) e institucionalización de las nociones de función derivada y derivada en un punto y su relación con la pendiente de la recta tangente y con el crecimiento de la función.

CLASE 5: Realización de ejercicios de los tipos 1, 3, 4 y 5 en aquellos casos sencillos en los que la función derivada se obtiene a partir de la definición.

CLASES 6, 7, 8 y 9: Introducción de las propiedades de las derivadas y de las derivadas de las funciones elementales. Realización de ejercicios del tipo 2.

CLASE 10: Realización de problemas del tipo 1.

CLASE 11: Realización de un problema de tipo 3. Institucionalización del significado de los extremos relativos y de su relación con los intervalos de crecimiento.

CLASES 12 y 13: Resolución de problemas del tipo 2.

CLASES 14 y 15: Resolución de problemas del tipo 3 y repaso general del tema y de los distintos tipos de ejercicios y problemas.

CLASE 16: Prueba de evaluación.

I. Sobre la metodología utilizada

La metodología será principalmente activa y participativa, procurando que sean los propios alumnos los que construyan, con la ayuda del profesor, los nuevos conocimientos. La derivada se introduce en el entorno de problemas que hay que resolver y que los alumnos trabajarán por grupos. Se utilizará geogebra para obtener los valores de las funciones y sus representaciones gráficas. Las sesiones de resolución de problemas irán seguidas de una puesta en común del trabajo de los grupos que permitirá al profesor institucionalizar los objetos matemáticos que emergen en la resolución de problemas y justificar las técnicas.

También habrá sesiones de trabajo individual en las que los alumnos ejercitarán las técnicas aprendidas, así como trabajo para casa. La justificación de las técnicas quedará principalmente a cargo del profesor, pero con la ayuda de los alumnos.

J. Sobre Geogebra

GeoGebra es un software que nos proporciona un instrumento para el estudio de la geometría, el álgebra y el análisis, indicado para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria y secundaria. De una parte, GeoGebra es un sistema de geometría dinámica: se pueden construir puntos, vectores, segmentos, rectos, cónicas y funciones; de otra parte, se pueden insertar directamente ecuaciones y coordenadas. Así, GeoGebra ofrece la posibilidad de tratar variables numéricas, vectores y puntos, y calcular derivadas e integrales de funciones.

GeoGebra es un programa particularmente interesante por varios motivos que enumero a continuación:

- Es un software libre que por lo tanto se puede aconsejar a los alumnos porque no les va a suponer un gasto. Además las actualizaciones pueden ser buscadas y descargadas de manera automática del software mismo, y esto evita el problema de no tener las versiones actualizadas. El hecho de ser un producto gratuito no es sólo importante por motivos económicos, sino también porque difunde una correcta cultura relativa a los recursos para el ordenador, reduciendo el fenómeno de la piratería informática.

- Tiene una interfaz gráfica que contempla todas aquellas operaciones que ya se han convertido en un estándar en este campo y al mismo tiempo nos permite realizaciones muy sofisticadas, utilizando una serie de instrucciones directamente disponibles.

- La interacción entre las construcciones geométricas, las operaciones algebraicas y algunas operaciones elementales del análisis: gráficos de funciones, derivadas, integrales, etcétera, además de la posibilidad de usar algunos algoritmos como los de la búsqueda de intersecciones entre gráficas, permite utilizarlo con eficacia para resolver problemas.

Por ese motivo creo que este software es muy útil para la enseñanza de las matemáticas. En el caso específico de la derivada, Geogebra nos permite dibujar las funciones con una precisión que no se puede conseguir en la pizarra.

K. Sobre la evaluación

La prueba de evaluación está pensada para poder realizarla en una sesión de clase de aproximadamente una hora. En ella se pretende evaluar si el alumno es capaz de:

a) Utilizar la derivada para resolver un problema de tipo 1, 2 ó 3.

b) Calcular la función derivada de una función utilizando las reglas de derivación.

c) Encontrar la derivada de una función en un punto sustituyendo valores en la función derivada.

d) Relacionar la derivada con la pendiente de la recta tangente y encontrar la ecuación de la recta tangente de una función en un punto.

e) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función y sus máximos y mínimos relativos.

PRUEBA DE EVALUACIÓN

1. Se lanza verticalmente hacia arriba un objeto. Su ecuación del movimiento es $s(t) = -6t^2 + 48t$, donde t se mide en segundos y s en metros. Se pide:

a) ¿Con qué velocidad inicial se lanza el objeto?

b) ¿En qué instante empieza a descender el objeto?

c) ¿Cuál es la altura máxima a la que llega?

d) ¿Cuánto tiempo está en movimiento?

e) ¿Cuál es la velocidad media del objeto en los 3 primeros minutos de movimiento?

f) ¿Qué velocidad lleva la partícula en los instantes t = 3 y t = 7? ¿Por qué tienen distinto signo esas velocidades?

2. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \cos^2(5x+1) + \ln\sqrt{2x}$$

$$f(x) = e^{4x} arctg(8x)$$

3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$, calcula:

a) la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa 1.

b) las abscisas de los máximos y mínimos relativos de la función.

En la primera pregunta se pretende evaluar principalmente el apartado a) y secundariamente los apartados b) y c); en la segunda pregunta, el apartado b); en la tercera pregunta, principalmente los apartados d) y e) y secundariamente los apartados b) y c).

La puntuación que se va a dar a cada pregunta es de 4 puntos sobre 10 a la primera pregunta y de 3 puntos sobre 10 a cada una de las otras preguntas.

L. Sobre la bibliografía y página web

LIBROS

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E. y Bosch, D. (1996): *Cálculo diferencial e integral*. Síntesis, Madrid.

Boyer C.B. (1986): *Historia de la matemática*. Alianza Universidad Textos, Madrid.

Cólera, J. y otros (2008): *Matemáticas 1. Bachillerato*. Anaya, Madrid

Kline. M. (1972): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Tomo I. Alianza Universidad, Madrid

Vizmanos, J.R., Hernández, J. y Alcaide, F. (2006): *Matemáticas 1. Bachillerato Ciencias y Tecnología*. SM, Madrid.

PÁGINAS WEB

http://www.vitutor.com/fun/4/a_a.html

http://www.educatina.com

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/