

Manuel Gines Buil

# Desarrollo de métodos de cálculo de incertidumbre en calibración cinemática de robots

Director/es

Santolaria Mazo, Jorge  
Acero Cacho, Raquel

<http://zaguan.unizar.es/collection/Tesis>



Universidad de Zaragoza  
Servicio de Publicaciones

ISSN 2254-7606



**Universidad**  
Zaragoza

Tesis Doctoral

# DESARROLLO DE MÉTODOS DE CÁLCULO DE INCERTIDUMBRE EN CALIBRACIÓN CINEMÁTICA DE ROBOTS

Autor

Manuel Gines Buil

Director/es

Santolaria Mazo, Jorge  
Acero Cacho, Raquel

**UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA**  
**Escuela de Doctorado**

Programa de Doctorado en Ingeniería de Diseño y Fabricación

2024





**Universidad  
Zaragoza**

## Tesis Doctoral

# Desarrollo de métodos de cálculo de incertidumbre en calibración cinemática de robots

Autor

**Manuel Ginés Buil**

Director/es

**Jorge Santolaria Mazo**

**Raquel Acero Cacho**

Universidad de Zaragoza

Departamento de Ingeniería de Diseño y Fabricación

Año 2024



# Dedicatoria

A Mar, por su amor, comprensión y paciencia durante este tiempo que ha durado esta tesis, sin cuyo apoyo esto no hubiera sido posible.

A Álvaro y María, sin quienes todo esto no tendría sentido. Sois la fuerza que me alienta a continuar.

A mi familia, a mi madre, a mi hermana y mi cuñado, a mis suegros, por estar ahí siempre.

Y a mi padre, y a los que se fueron, *in memoriam*.  
Te echo de menos.

“¿Qué es el hijo, sino la extensión del padre?”,  
Dune, Frank Herbert.



# Agradecimientos

Quisiera expresar mi gratitud a mis directores de tesis, Jorge Santolaria Mazo y Raquel Acero Cacho. Muchas gracias Jorge por apoyarme desde el principio, por confiar en mí más de lo que yo me veía capaz, y más de lo que yo confiaba en mí mismo, y por sacarme de la zona de confort, aunque en ciertos momentos durante la tesis ya tenía suficientes motivos para estar fuera de esa zona. Y a Raquel también por todo el apoyo y fuerza que me has brindado. Muchas gracias a ambos por darme vuestro soporte, por guiarme por este camino que era nuevo para mí, hasta llegar a la consecución final de este trabajo.

También quiero agradecer a mis compañeros y amigos que, aunque debido a la distancia no nos hemos podido ver mucho, sí que me han ayudado cuando lo he necesitado. En especial a Sergio Aguado (ya Doctor), y también a Javier Granados (ya doctor) y Pablo Pérez. Ellos han estado ahí tanto desde el punto visto técnico como humano para darme ese empujón que necesitaba.

Y sobre todo a mi familia, ya que sin su amor, su fuerza y aliento no hubiera podido terminar esta tesis.



# Índice

---

Índice .....	7
Índice de figuras .....	11
Índice de tablas .....	15
Resumen .....	17
Abstract .....	19
<b>1 Introducción .....</b>	<b>21</b>
1.1 Contexto de la tesis .....	21
1.2 Objetivos de la tesis .....	25
1.3 Estructura de la tesis .....	26
<b>2 Robots y técnicas de evaluación .....</b>	<b>29</b>
2.1 Introducción .....	29
2.2 Descripción y clasificación de robots .....	29
2.3 Técnicas de evaluación de la precisión y repetibilidad en robots.....	35
2.4 Sistemas de medición y verificación .....	40
2.5 Conclusiones.....	43
<b>3 Modelado cinemático de Robots .....</b>	<b>45</b>
3.1 Introducción .....	45
3.2 Representación de la posición y orientación .....	47
3.2.1 Representación de la posición .....	48
3.2.2 Ángulos de Euler.....	50
3.2.3 Eje y ángulo de rotación .....	52
3.2.4 Parámetros de Euler, Cuaterniones .....	53
3.2.5 Cuaterniones duales.....	56
3.2.6 Matrices de rotación .....	58
3.2.7 Matrices de Transformación homogénea MTH .....	61
3.3 Modelado cinemático de robots manipuladores.....	62
3.4 Representación según modelo de Denavit-Hartenberg.....	66
3.4.1 Cadenas cinemáticas y convenciones .....	67
3.4.2 La representación de Denavit-Hartenberg.....	70
3.4.3 Asignación de los sistemas de coordenadas .....	73
3.4.4 Resumen del procedimiento .....	75

3.4.5	Convención de Hayati-Mirmirani: el modelo D-H modificado .....	78
3.5	Aplicación del modelo cinemático según modelo de Denavit-Hartenberg – Hayati-Mirmirani y determinación de los parámetros nominales.....	79
3.6	Conclusiones.....	83
<b>4</b>	<b>Calibración cinemática de robots.....</b>	<b>85</b>
4.1	Introducción .....	85
4.2	Fuentes de error en la calibración de robots .....	87
4.3	Métodos de calibración cinemática de robots.....	91
4.4	Calibración mediante la técnica de Circle Point Analysis (CPA) .....	94
4.4.1	Descripción de la Técnica del Circle Point .....	95
4.4.2	Revisión de la definición de líneas y planos en el espacio .....	98
4.4.3	Análisis de Línea adyacente.....	100
4.4.3.1	Condición 1: Líneas oblicuas ( $MM \neq 0$ ) .....	103
4.4.3.2	Condición 2: Líneas que se cruzan ( $MM=0, a_{jk}=0$ ) .....	105
4.4.3.3	Condición 3: Líneas paralelas ( $MM=0, \sin \alpha_{jk}=0$ ).....	106
4.4.4	Análisis de ejes nominalmente paralelos .....	108
4.4.4.1	Solución 1: Análisis exacto .....	109
4.4.4.2	Solución 2: Análisis aproximado.....	112
4.4.4.3	Solución 3: Modelo cinemático de parámetro adicional .....	115
4.4.5	Resumen de la técnica analítica del Círculo de Puntos (Circle point analysis, CPA) ....	118
4.5	Captura de datos e identificación de parámetros cinemáticos del robot mediante la técnica de Circle Point.....	121
4.5.1	Equipos utilizados y sistemas de medición .....	124
4.5.2	Definición y programación de trayectorias de robot .....	125
4.5.3	Ensayos experimentales de captura de datos y procedimiento de identificación de parámetros.....	127
4.5.4	Implementación del Método.....	128
4.5.5	Ensayos realizados.....	130
4.5.5.1	Ensayo 1.....	130
4.5.5.2	Ensayo 2.....	130
4.5.5.3	Ensayo 3.....	131
4.5.5.4	Ensayo 4.....	131
4.5.5.5	Ensayo 5.....	131
4.5.5.6	Ensayo 6.....	131

4.5.6	Análisis de los datos .....	132
4.5.7	Optimización y evaluación de los parámetros del modelo cinemático .....	134
4.6	Determinación de errores en ejes y articulaciones del robot.....	139
4.6.1	Análisis de juego y excentricidad por articulación .....	139
4.7	Conclusiones.....	143
<b>5</b>	<b>Modelo de cálculo de incertidumbre de calibración de robot .....</b>	<b>145</b>
5.1	Introducción .....	145
5.2	Estimación de la incertidumbre de calibración del robot mediante simulación de Monte Carlo .....	147
5.2.1	Generación de datos de medida para la calibración: generación de datos sintéticos. ....	149
5.2.1.1	Algoritmo matemático para el Generador de puntos sintéticos .....	153
5.2.2	Coordenadas Plücker y cálculo de los parámetros cinemáticos .....	158
5.2.2.1	Algoritmo matemático para el cálculo de coordenadas Plücker .....	160
5.2.2.2	Algoritmo matemático para el cálculo de los parámetros cinemáticos.....	162
5.2.3	Evaluación de la incertidumbre e intervalos de confianza de los parámetros .....	165
5.2.3.1	Algoritmo matemático para el cálculo de la función iterativa del cálculo de incertidumbre de la calibración cinemática según el método Monte Carlo.....	169
5.2.4	Evaluación de la influencia de los parámetros de entrada .....	170
5.3	Incertidumbre de posición y orientación a partir de la incertidumbre de calibración ..	173
5.4	Conclusiones.....	177
<b>6</b>	<b>Conclusiones.....</b>	<b>179</b>
6.1	Conclusiones.....	179
6.2	Líneas de trabajo futuro .....	185
<b>7</b>	<b>Bibliografía .....</b>	<b>187</b>



# Índice de figuras

Figura 2.1. Robots en fábrica de automoción ©ABB. Fuente. <a href="http://www.ifr.org">www.ifr.org</a> .....	30
Figura 2.2. Clasificación de los robots industriales según su estructura mecánica .....	31
Figura 2.3. Área verde: espacio trabajo del robot. Área amarillo: espacio de trabajo del operario. Fuente. <a href="http://www.ifr.org">www.ifr.org</a> .....	32
Figura 2.4. Robots móviles: AMR y AGV Kivnon™. Fuente: <a href="http://www.kivnon.com">www.kivnon.com</a> .....	32
Figura 2.5. Medición de brazos robóticos en diferentes experimentos. Fuente: [35] [53] .....	41
Figura 2.6. Medición de brazos robóticos en diferentes experimentos. Fuente: [61] [63] .....	42
Figura 3.1. Representación Denavit-Hartenberg para el modelo cinemático de robots. Fuente: Vinogradov, O. (2000) Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanics. .....	46
Figura 3.2. Representación parámetros D-H en un robot manipulador de 6 ejes. Fuente: Manipuladores robóticos, Miguel Torres T., 2005. ....	46
Figura 3.3. Punto $p(x,y,z)$ en el espacio. Fuente: [76] .....	49
Figura 3.4. Representación de la posición empleando coordenadas cilíndricas. Fuente: [76].....	49
Figura 3.5. Representación de la posición empleando coordenadas esféricas. Fuente: [76].....	50
Figura 3.6. Representación ángulos Euler: sucesivas rotaciones, a) precesión, nutación, b) rotación intrínseca (spin) .....	51
Figura 3.7. Representación geométrica de una línea Plücker. Fuente: [73] .....	57
Figura 3.8. Rotación del Sistema OUVW alrededor de x, un ángulo $\alpha$ , de y, un ángulo $\phi$ , y de z, un ángulo $\theta$ . Fuente: M.V. Granja Oramas, Modelación y Análisis de la cinemática directa e Inversa del Manipulador Stanford de seis grados de libertad [83].....	60
Figura 3.9. Modelo Denavit-Hartenberg: asignación de ejes y parámetros. Fuente: Denavit- Hartenbert, 1955 [2].....	66
Figura 3.10. Sistema de coordenadas D-H que satisface las suposiciones DH1 y DH2. Fuente: propia. .....	71
Figura 3.11. Sistemas de coordenadas para ejes casi paralelos, según la convención de Hayati- Mirmirani. Fuente: [85]. ....	78
Figura 3.12. KUKA KR 5 sixx R650 - Dimensiones. Fuente: <a href="http://www.kuka-robotics.com">www.kuka-robotics.com</a> .....	79
Figura 3.13. Detalle del robot KUKA KR 5. Fuente: Propia. ....	80
Figura 3.14. Robot KUKA KR 5 sixx y definición de Sistemas de Coordenadas y parámetros modelo D-H. Fuente: propia. ....	81
Figura 4.1. Precisión de posicionamiento y repetibilidad. Fuente: [1] .....	87
Figura 4.2. Precisión de orientación y repetibilidad. Fuente: [1] .....	88
Figura 4.3. Hoja características técnicas Robot Fanuc R-2000iC/210F. Valor de repetibilidad. Fuente: <a href="http://www.fanuc.eu">www.fanuc.eu</a> .....	89
Figura 4.4. Hoja características técnicas Robot KUKA KR 120 R2700-2. Valor de repetibilidad. Fuente: <a href="http://www.kuka-robotics.com">www.kuka-robotics.com</a> .....	90
Figura 4.5. Movimiento del Círculo de Puntos para ejes individuales. Fuente: [19] .....	97
Figura 4.6. Definición de una Línea en el espacio. Fuente: [5] .....	99
Figura 4.7. Definición de un Plano en el espacio. Fuente: [5] .....	100

Figura 4.8. Casos generales de Líneas Adyacentes, para $\alpha < 180$ , y para $\alpha > 180$ . Fuente: [18] .....	101
Figura 4.9. Ejes adyacentes paralelos - Caso Ideal. Fuente: [5] .....	108
Figura 4.10. Ejes adyacentes paralelos - Peor Caso. Fuente: [5].....	109
Figura 4.11. Modelo exacto de corrección del ángulo del transductor para eje j. Fuente: [5].....	110
Figura 4.12. Modelo exacto para corrección del ángulo del transductor para eje k. Fuente: [5]..	111
Figura 4.13. Aproximación de ejes adyacentes mediante vector promedio. Fuente: [5].....	113
Figura 4.14. Descripción del modelo cinemático de 5 parámetros. Fuente: [5].....	117
Figura 4.15. API Active Target: Características técnicas. Fuente: [153] .....	124
Figura 4.16 - Modelo de Robot KUKA con Láser Tracker y active target. Fuente: propia.....	126
Figura 4.17. Direcciones del movimiento y límites software para los ejes. Fuente: www.kuka.com .....	126
Figura 4.18. Vista general de los ensayos. Origen: propio. ....	127
Figura 4.19. Montaje del reflector. Origen: propio .....	127
Figura 4.20. Diagrama de flujo del proceso de cálculo de los parámetros cinemáticos. Fuente: propia .....	129
Figura 4.21. Puntos, círculos y ejes calculados. Fuente: propia. ....	132
Figura 4.22. Comparación de la desviación estándar (medidas en mm). Fuente: propia.....	133
Figura 4.23. Errores residuales (en mm) resultantes de los cálculos de las matrices de conversión. Fuente: propia .....	135
Figura 4.24. Convergencia de parámetros de calidad con criterio de optimización tradicional. Fuente: propia .....	138
Figura 4.25. Convergencia de parámetros de calidad con criterio de optimización mediante distancias. Fuente: propia. ....	138
Figura 4.26. Juego por cada eje - Ensayo 2. Fuente: propia.....	139
Figura 4.27. Juego para cada coordenada por eje - Ensayo 2. Fuente: propia. ....	140
Figura 4.28. Distancias euclídeas del juego por articulación, en el ensayo 2. Fuente: propia.....	140
Figura 4.29. Excentricidad axial por articulación, ensayo 2. Fuente: propia.....	141
Figura 4.30. Excentricidad radial por articulación, ensayo 2. Fuente: propia.....	141
Figura 5.1. Propagación de las distribuciones de variables de entrada para obtener la variable de salida. Fuente: [6]. ....	146
Figura 5.2. Generación de datos de medida para la calibración: generación de datos sintéticos. Fuente: propia. ....	148
Figura 5.3. Captura de datos para la identificación de parámetros según el método CPA. Cálculo del eje de la articulación. Fuente: elaboración propia .....	149
Figura 5.4. Conjunto de puntos generados por articulación, en función del ángulo cubierto por articulación. Fuente: elaboración propia .....	151
Figura 5.5. Conjunto de puntos generados por articulación, en función del número de puntos definido por articulación. Fuente: elaboración propia.....	151
Figura 5.6. Modelo de generación de puntos para coordenadas del reflector en la articulación 2. Fuente: elaboración propia. ....	153
Figura 5.7. Diagrama de flujo del algoritmo - Generación de datos sintéticos. Fuente: propia ....	154
Figura 5.8. Cálculos de los ejes de las articulaciones usando el método CPA según los datos de entrada de la Tabla 5.1. Fuente: elaboración propia .....	159

Figura 5.9. Diagrama de flujo del algoritmo - Cálculo de las Coordenadas Plücker. Fuente: propia .....	160
Figura 5.10. Diagrama de flujo del algoritmo - Cálculo de parámetros cinemáticos. Fuente: propia .....	163
Figura 5.11. Distribución de los parámetros cinemáticos e intervalos de confianza, usando el método CPA, para el caso de un Láser Tracker Faro ION <sup>®</sup> ™. Fuente: elaboración propia ....	167
Figura 5.12. Distribución de los parámetros cinemáticos e intervalos de confianza, usando el método CPA, para el caso de un iGPS. Fuente: elaboración propia.....	167
Figura 5.13. Diagrama de flujo del algoritmo - Cálculo de la incertidumbre según el método Monte Carlo. Fuente: propia .....	169
Figura 5.14. Influencia del número de iteraciones Monte Carlo en el valor medio de la distribución, para el parámetro d4. Fuente: elaboración propia .....	171
Figura 5.15. Evaluación de la identificación de parámetros e incertidumbre de calibración. Efecto del ángulo cubierto en la articulación 4 durante la captura de datos para la calibración con Láser Tracker. Fuente: elaboración propia.....	172
Figura 5.16. Evaluación de la identificación de parámetros e incertidumbre de calibración. Efecto del número de puntos capturados en todas las articulaciones durante la captura de datos para la calibración con Láser Tracker. Fuente: elaboración propia.....	173
Figura 5.17. Incertidumbre de posición y orientación del Robot TCP (efector final) debido a la incertidumbre de calibración (posición del robot según Tabla 5.8). Fuente: elaboración propia. ....	174
Figura 5.18. Incertidumbre de la posición y orientación del TCP del Robot debido a la incertidumbre de calibración. Posición tomada como ejemplo según Tabla 5.7. Fuente: elaboración propia. ....	175
Figura 5.19. Distribución espacial de las posiciones del TCP del robot debido a la incertidumbre de calibración. Posición tomada como ejemplo según Tabla 5.7. Fuente: elaboración propia..	175
Figura 5.20. Incertidumbre de la posición y orientación del TCP del robot siguiendo una trayectoria. El rango de valores máximos por coordenada según la incertidumbre de calibración se muestra en la Tabla 5.4. Fuente: propia.....	176



# Índice de tablas

---

Tabla 2.1. Trabajos en pruebas de estandarización de robots industriales relativo a la norma ISO 9283:1998. Fuente: [38] y propio.....	37
Tabla 3.1. Parámetros cinemáticos teóricos del robot KUKA KR 5 sixx R650 .....	81
Tabla 4.1. Rangos angulares para cada articulación .....	127
Tabla 4.2. Posiciones iniciales de cada articulación .....	128
Tabla 4.3. Parámetros del ensayo 1 .....	130
Tabla 4.4. Parámetros del ensayo 2 .....	130
Tabla 4.5. Parámetros del ensayo 3 .....	131
Tabla 4.6. Parámetros de los ensayos 4, 5 y 6 .....	131
Tabla 4.7. Parámetros cinemáticos calculados por el CPA. ....	133
Tabla 4.8. Parámetros cinemáticos optimizados de acuerdo al criterio tradicional.....	136
Tabla 4.9. Parámetros cinemáticos optimizados según el criterio de distancias totales. ....	136
Tabla 4.10. Parámetros de calidad según el criterio de optimización tradicional. ....	137
Tabla 4.11. Parámetros de calidad según el criterio de las distancias.....	137
Tabla 4.12. Ensayo 2 Articulación 1 - Juego (mm).....	142
Tabla 4.13. Ensayo 2 Articulación 2 – Juego (mm).....	142
Tabla 4.14. Ensayo 2 Articulación 3 – Juego (mm).....	142
Tabla 4.15. Ensayo 2 Articulación 4 – Juego (mm).....	142
Tabla 4.16. Ensayo 2 Articulación 5 – Juego (mm).....	142
Tabla 4.17. Ensayo 2 Articulación 6 – Juego (mm).....	142
Tabla 5.1. Valores iniciales base considerados como parámetros de entrada. ....	152
Tabla 5.2. Parámetros de entrada para generar los puntos sintéticos, según la prueba de la Tabla 5.4.....	157
Tabla 5.3. Parámetros cinemáticos obtenidos usando el método <i>Circle Point Analysis</i> (CPA) con los datos muestra de la Figura 5.8 generado con parámetros nominales.....	159
Tabla 5.4. Condiciones de partida para la calibración usando un Láser Tracker .....	166
Tabla 5.5. Condiciones de partida para la calibración usando un iGPS .....	166
Tabla 5.6. Incertidumbre de calibración e intervalo de confianza (Figura 5.10) para las condiciones de calibración usando un Láser Tracker. ....	168
Tabla 5.7. Incertidumbre de calibración e intervalo de confianza (Figura 5.11) para las condiciones de calibración usando un iGPS. ....	168
Tabla 5.8. Incertidumbre de la posición del TCP Robot (efector final del robot) y de la orientación debido a la incertidumbre de calibración, para un posición definida.....	174



# Desarrollo de métodos de cálculo de incertidumbre en calibración cinemática de robots

Manuel Ginés Buil

## Resumen

---

Las aplicaciones industriales que incorporan el uso de robots requieren cada vez mejores prestaciones que dependen de dos importantes características inherentes a todo robot, su repetibilidad y precisión. El proceso para determinar las diferencias entre las trayectorias programadas y las óptimas para conseguir la identificación de los parámetros cinemáticos del robot recibe el nombre de calibración cinemática, influyendo en la precisión del robot el proceso de calibración realizado.

La precisión de posición de un manipulador puede verse afectada por errores geométricos y no geométricos. Los errores geométricos pueden ser debidos a desplazamientos en las articulaciones y errores en los parámetros cinemáticos nominales. Por otra parte, los errores no geométricos incluyen fricción, inercia, carga aplicada, flexión, y temperatura que induce deformaciones dimensionales. Los resultados experimentales muestran que más de un 95% de las inexactitudes de un robot manipulador son debidas a errores geométricos.

Los métodos de calibración estática, como el que se presenta en este trabajo, se basan en métodos de identificación, optimización de parámetros geométricos y sistemas de corrección para robots que influyen en su precisión. Los métodos de calibración dinámica parten de los resultados de la calibración estática y persiguen la obtención de modelos para describir el comportamiento dinámico de un robot, con influencias como fuerzas, gravedad, inercias, momentos y efectos no geométricos debidos a fricción o transmisión de movimiento entre los engranajes de las articulaciones.

Las aproximaciones típicas a la calibración de robots industriales se basan generalmente en métodos de lazo abierto y lazo cerrado, mientras que los métodos de medición *screw-axis* (eje-tornillo), en los cuales se focaliza este trabajo, han tenido tradicionalmente mucha menos atención. Aunque los procesos de identificación no garantizan el enlace entre la parte matemática y la física

de los parámetros del robot en los dos primeros grupos de técnicas, estas técnicas son generalmente más efectivas en reducir el error de posicionamiento global del robot. En el tercer grupo de técnicas, los errores cinemáticos se calibran mediante la determinación de la relación de transformación real entre articulaciones consecutivas, siendo capaces de obtener parámetros basados en la realidad física del robot, manteniendo de forma efectiva este enlace.

En este trabajo se pretende usar la calibración cinemática para mejorar la precisión de la posición y orientación del robot mediante el cálculo de los parámetros del modelo cinemático que, o bien minimizan el error causado por el manipulador, o bien consiguen encajar mejor en la cinemática existente en el robot. Se persigue por lo tanto desarrollar un nuevo método de calibración cinemática y de parametrización de los errores en la geometría cinemática en los robots manipuladores con articulaciones de giro en serie, basado en métodos de calibración de eje-tornillo y más concretamente en la técnica del *Circle Point Analysis* (CPA).

La técnica de *Circle Point Analysis* (CPA) se basa el movimiento individual de cada una de las articulaciones del robot en un círculo mientras se mide la trayectoria de la articulación descrita por un punto alrededor de cada articulación. Se toman medidas para cada una de las seis articulaciones y se calcula el círculo que mejor se ajusta a los puntos capturados para cada eje. Por lo tanto, es posible considerar la posición del eje como un vector que pasa por el centro del círculo con una dirección normal al plano que contiene dicho círculo. Este método tiene dos ventajas significativas: los parámetros cinemáticos se determinan analíticamente a partir de las relaciones de distancias y ángulos entre los vectores calculados, y se simplifica el método y se elimina la demanda de tiempo de cálculo que requiere el proceso de optimización no lineal convencional.

En el desarrollo del nuevo método de calibración cinemática de esta tesis se siguen los siguientes pasos que se detallan a continuación: En primer lugar, se determina el modelo cinemático del robot usando el modelo de Denavit-Hartenberg. Se procede a continuación al proceso de adquisición de datos mediante un láser tracker con un "active target", que maximiza el ángulo cubierto para cada articulación y simplifica enormemente el proceso de medida de cada eje. Como tercer paso se realiza el proceso de optimización o identificación de parámetros geométricos mediante procedimientos de aproximación basados en distintos tipos de ajuste por mínimos cuadrados a los datos medidos. Por último se finaliza con la identificación de las posibles causas y fuentes de error, juego y excentricidad de las articulaciones del robot analizado, y la implementación de modelos de corrección en el robot.

Una vez realizada la calibración cinemática de un robot real mediante la técnica del *Circle Point Analysis* (CPA), se expone el modelo matemático para el cálculo de la incertidumbre de la calibración del robot, que permite conocer la incertidumbre de posicionamiento del robot en función de su ubicación, para cualquier posición y orientación. Para ello se utilizó la técnica de simulación de Monte Carlo aplicada al análisis de la propagación de la incertidumbre de las variables de entrada, dando como resultado la incertidumbre de calibración de los parámetros cinemáticos identificados previamente.

# Development of uncertainty calculation methods for robot kinematic calibration

Manuel Ginés Buil

## Abstract

---

Industrial applications that include the use of robots require increasingly better performance, which depends on two important characteristics inherent to all robots: repeatability and accuracy. The process of determining the differences between the programmed and optimal trajectories to achieve the identification of the robot's kinematic parameters is known as kinematic calibration, and the calibration process carried out impacts the robot's precision.

The positional accuracy of a manipulator can be affected by geometric and non-geometric errors. Geometric errors can be caused due to displacements in the joints and errors in the nominal kinematic parameters. On the other hand, non-geometric errors include friction, inertia, applied load, bending, and temperature inducing dimensional deformations. Experimental results show that more than 95% of the inaccuracies of a manipulator robot are due to geometric errors.

Static calibration methods, such as the one presented in this paper, are based on methods of identification, optimisation of geometric parameters and correction systems for robots, which have an impact on their accuracy. Dynamic calibration methods start from the results of static calibration and aim to obtain models to describe the dynamic behaviour of a robot, with influences such as forces, gravity, inertias, moments and non-geometric effects due to friction or transmission of motion between joint gears.

Typical approaches to industrial robot calibration are generally based on open-loop and closed-loop methods, while screw-axis measurement methods, which are the focus of this work, have traditionally received much less attention. Although the identification processes do not guarantee the link between the mathematical and physical parts of the robot parameters in the first two groups of techniques, these techniques are generally more effective in reducing the overall positioning error of the robot. In the third group of techniques, kinematic errors are calibrated by determining the actual transformation ratio between consecutive joints, being able to obtain parameters based on the physical reality of the robot, effectively maintaining this link.

This work intends to use kinematic calibration to improve the accuracy of robot position and orientation by calculating the parameters of the kinematic model that either minimise the error caused by the manipulator or better fit the existing kinematics of the robot. The goal is therefore to develop a new method of kinematic calibration and the definition of the errors parameters in the kinematic geometry in manipulator robots with serial rotating joints, based on axis-screw calibration methods and more specifically on the Circle Point Analysis (CPA) technique.

The Circle Point Analysis (CPA) technique is based on the individual motion of each of the robot's joints in a circle while measuring the joint trajectory described by a point around each joint. Measurements are taken for each of the six joints and the circle that best fits the captured points for each axis is calculated. It is therefore possible to consider the position of the axis as a vector passing through the centre of the circle with a direction normal to the plane containing that circle. This method has two significant advantages: the kinematic parameters are determined analytically from the distance and angle relationships between the calculated vectors, and the method is simplified and the computational time demand required by the conventional non-linear optimisation process is eliminated.

In the development of the new kinematic calibration method of this thesis, the necessary steps are detailed as follows: First, the kinematic model of the robot is determined using the Denavit-Hartenberg model. Next, the data acquisition process is carried out using a laser tracker with an 'active target', which maximises the angle covered for each joint and greatly simplifies the measuring process for each axis. The third step is the optimisation process or identification of geometric parameters by means of approximation procedures based on different types of least squares adjustment to the measured data. Finally, we end with the identification of the possible causes and sources of error, play and eccentricity of the joints of the analysed robot, and the implementation of correction models in the robot.

Once the kinematic calibration of a real robot has been carried out using the Circle Point Analysis (CPA) technique, the mathematical model for calculating the uncertainty of the robot's calibration is presented, which allows the uncertainty of the robot's positioning to be known depending on its location, for any position and orientation. For this purpose, the Monte Carlo simulation technique applied to the analysis of the uncertainty propagation of the input variables was used, resulting in the calibration uncertainty of the kinematic parameters previously identified.

# 1 Introducción

---

## 1.1 Contexto de la tesis

Los tipos de robots manipuladores que se usan generalmente en la industria son los manipuladores serie o paralelo. Para cada tipo de manipulador, cada articulación conecta dos ejes que pueden tener grados de libertad (*Degrees of Freedom, DOF*) giratorios (uniones de revolución, o R-pares) o bien lineales (uniones prismáticas o P-pares). La calibración cinemática que se va a realizar en este trabajo se aplica exclusivamente a manipuladores serie con grados de libertad giratorios.

Por otra parte es importante destacar que las aplicaciones robotizadas industriales demandan mayores prestaciones que dependen de dos importantes características inherentes a todo robot, su repetibilidad y precisión. La repetibilidad evalúa la habilidad que tiene el robot de volver a la misma posición y orientación a lo largo del tiempo. La precisión se define como la capacidad que tiene el robot de moverse de forma exacta a un punto definido en el espacio 3D. La norma ISO 9283:1998 [1] es la norma internacional que especifica cómo estas características y otros criterios de eficiencia del robot se deben evaluar. Cuando los robots están siendo previamente programados *off-line*, la repetibilidad es un parámetro crítico. La posición exacta del robot es menos importante para el caso de programación *off-line*, pero debería ser capaz de volver a la misma posición con el menor error posible. Para conseguir este tipo de programación, todos los elementos que van a realizar alguna función han de estar en su sitio correcto, con lo que los robots no podrían programarse por anticipado, lo que daría a retrasos inaceptables. Para evitar este problema, los robots se pueden programar *off-line* con los movimientos y acciones necesarias usando programas CAD y programas de simulación. La precisión es por consiguiente un factor importante. Aunque la mayoría de los robots industriales tienen una adecuada repetibilidad, la precisión de posicionamiento no es siempre la que sería deseable para trabajar con entornos virtuales, y por tanto la diferencia entre el trazado programado y el deseado en la simulación puede llegar a ser muy significativa. Más aún, la importancia de la precisión se convierte en un factor más vital cuando se llevan a cabo técnicas de Simulación Avanzada de programación y *Virtual Commissioning*, que necesitan disponer de un interface mucho más preciso, en términos de correspondencia

matemática, entre la simulación y programación en el entorno virtual y la realidad que se traslada a las líneas de montaje o la aplicación industrial correspondiente.

El proceso para determinar las diferencias entre las trayectorias programadas y las óptimas para conseguir la identificación de los parámetros cinemáticos del robot recibe el nombre de calibración cinemática. Los diferentes métodos de calibración de robots se han mostrado de forma extensa en muchos trabajos. La precisión requerida depende de cómo se realiza el proceso de calibración en cada caso. Aquí se pretende usar la calibración cinemática para mejorar la precisión de la posición y orientación del robot mediante el cálculo de los parámetros del modelo cinemático que o bien minimizan el error causado por el manipulador o bien consiguen encajar mejor en la cinemática existente en el robot. Estas técnicas asumen que el error principal en la posición del brazo es debido a diferencias entre los parámetros cinemáticos nominales del robot y los parámetros reales. Las fuentes de estos errores pueden ser geométricas y no geométricas; por tanto, los datos tomados durante el proceso de identificación estarán afectados por estos errores.

Los procesos de calibración cinemática siguen la secuencia siguiente: primero, definición del modelo cinemático del robot, del cual el más ampliamente usado es el modelo de Denavit y Hartenberg [2]; segundo, la adquisición de datos, mediante el uso de dispositivos de medida de obviamente mayor precisión que la requerida en la calibración del robot; tercero, la identificación de los parámetros cinemáticos, basada en los datos obtenidos, que son analizados y combinados en la matriz de transformación, para definir los parámetros que mejor encajan con las mediciones hechas; y cuarto, la corrección del error, que son los parámetros que se van a introducir en el cálculo para para ajustar los parámetros a la realidad del robot analizado.

Asimismo, en lo que se refiere a los métodos de calibración cinemática según los sistemas de medición usados, *Hollerbach y Wampler* [3] consideran tres familias de métodos: los métodos de lazo abierto (*open-loop methods*), en los que el robot se mueve a posiciones predeterminadas moviendo todas las articulaciones y en esos puntos se determinan los parámetros cinemáticos; métodos de lazo cerrado (*closed-loop methods*), en los que el robot se transforma en una cadena cinemática cerrada mediante el uso de un sensor que lo une al suelo; y los métodos *screw-axis*, en los que se determina individualmente las posiciones de rotación de cada eje del robot, y a partir de estos datos mediante relaciones algebraicas se pueden determinar los parámetros cinemáticos.

El método de *Cicle Point Analysis (CPA)*, o Análisis de Círculo de puntos en español, es un método que destaca dentro de los métodos de calibración cinemática *screw-axis*. Este método calcula las ecuaciones de la línea de cada eje del robot, para una configuración arbitraria, mediante la estimación de un círculo dibujado por el movimiento de la articulación. Al usar la técnica de mínimos cuadrados, se necesitan al menos tres puntos para definir el círculo. Además se requiere mover una articulación cada vez. Los parámetros reales del modelo cinemático se pueden así conseguir con este método, a partir de las ecuaciones lineales que definen los ejes. En este método se han desarrollado dos estrategias: la primera *Stone* [4] consiste en derivar una fórmula analítica para los parámetros cinemáticos en términos de las matrices de transformación homogéneas de las articulaciones a partir del Modelo-S; la segunda según *Sklar* [5] consiste en calcular longitudes perpendiculares, distancias offset, y giros de ángulo directamente de las ecuaciones lineales identificadas usando relaciones estándar de álgebra de vectores y las relaciones geométricas. Aunque inicialmente el CPA presenta algunas desventajas, como que el método requiere que se

mueva sólo una articulación cada vez, y que se registre cada una de las medidas para poder disponer de una suficiente cantidad de datos, la propuesta del trabajo mostrará la rapidez y efectividad en su aplicación.

En este trabajo se va a abordar la calibración mediante un método de medida por eje, el antes denominado *Circle Point Analysis* (CPA). Este método se basa en mover cada una de las articulaciones una cada vez, a lo largo de un círculo, realizando la medición punto por punto alrededor de cada articulación. Por tanto, se considera de esta forma la posición del eje como un vector que pasa por el centro del círculo calculado, con una dirección perpendicular a la del plano que contiene el círculo. Este método se puede usar para la programación *off-line* de robots manipuladores.

Este método tiene dos claras ventajas: la primera, los parámetros cinemáticos se determinan analíticamente a partir de las relaciones de distancias y ángulos entre los vectores así calculados, lo que simplifica el método y evita la necesidad de complicado cálculo computacional; y la segunda, este método da una idea de los errores de fabricación y ensamblaje cometidos durante el proceso de manufactura del robot. Incluso cuando existen correlaciones obvias entre los resultados de calibración obtenidos y la realidad física del robot, los resultados de este método dan menos mejoras en precisión en comparación con los resultados obtenidos por métodos de lazo abierto o cerrado. Por tanto, se requiere encontrar una formulación matemática que mantenga el enlace físico de forma congruente y nos de unos resultados de calibración óptimos.

Por otra parte, el método *Circle Point Analysis* (CPA) no es apropiado cuando se usan reflectores convencionales para realizar la medición de cada articulación, tal y como se ha definido anteriormente. Es claro que los datos obtenidos durante el proceso de captura no se pueden tomar todos al mismo tiempo ya que el sistema de medida (normalmente *Laser Tracker*) no es capaz de seguir el movimiento del reflector. Sólo se puede llegar a realizar mediciones de un ángulo limitado, con los reflectores convencionales, normalmente uno  $30^\circ$ . Eso quiere decir que el reflector debería reposicionarse durante la captura de datos, lo que incrementaría enormemente la incertidumbre de la medición.

En este trabajo se va a usar un Láser Tracker como método de medición auxiliar en el proceso de captura de datos en combinación con el uso de un *Active Target* de API, que va a permitir resolver el problema de la medición de cada eje del robot, para realizar el proceso del CPA. El uso de un *Active Target* permite que el reflector se monte sobre un sistema giratorio con dos grados de libertad, que sigue la señal del *Laser Tracker* y supone una importante mejora en el conjunto del uso del método CPA. Mediante el uso de este dispositivo directamente sobre el punto de aplicación del robot, es posible realizar el proceso de medición completo para todos los ejes del robot, sin parar para cambiar la posición del reflector. Esto mejora el proceso de dos formas fundamentales: la primera, el proceso de medición en continuo reduce el tiempo necesario para la captura de datos; segunda, la precisión de la medición y por tanto de la calibración se mejora sensiblemente, con lo que se reduce la incertidumbre del posicionamiento del reflector.

Con el método *Circle Point Analysis* y los modelos matemáticos que se definan durante el proceso de investigación se puede llegar a definir el conjunto de parámetros que caracterizan el robot. Sin embargo, el trabajo que se pretende desarrollar no sólo pretende quedarse en ese punto,

sino que trata de determinar los errores de cada uno de los ejes y articulaciones del robot, tanto en lo que se refiere a la excentricidad como al juego de cada articulación, de tal forma que se obtenga un conjunto de parámetros que no solo caractericen al robot, sino a los errores que le son inherentes, de forma que el conjunto final de parámetros nos permita alcanzar una menor incertidumbre.

La *Guide to the Expression of Uncertainty of Measurement* (GUM) es un documento de referencia en los laboratorios metrológicos, que fue originariamente desarrollado para proveer un criterio uniforme para tanto la expresión como los cálculos de la incertidumbre en los procesos de medición o de calibración. El primer suplemento del GUM evita muchas de las limitaciones del método que está basado en la ley de propagación de incertidumbres. Este suplemento presenta un método de estimación de incertidumbres que se basa en simulaciones de ordenador mediante Monte Carlo. En lugar de propagar incertidumbres, este método propaga las distribuciones de probabilidad de las variables de entrada de la función, el cual da una distribución de probabilidad de la variable de salida desde la cual es posible obtener tanto el valor medio como su incertidumbre. Este nuevo método basado en la propagación de la distribución encaja muy bien en modelos complejos o en modelos con muchas variables de influencia, e igualmente perfectamente aplicable en el caso de la calibración cinemática de robots. Las simulaciones de Monte Carlo se usan para evaluar el efecto de la variabilidad de los errores y de los sistemas de captura de datos en la precisión de posicionamiento del robot. Adicionalmente, las simulaciones Monte Carlo se realizan para analizar el efecto de cada componente separadamente en los resultados de la calibración final. Así, usando esta aproximación, es posible saber cómo una variable de salida (la posición y orientación resultante) se ve influida por las posibles distribuciones de los valores de entrada. Por tanto, es posible obtener la incertidumbre de calibración como un valor característico y las incertidumbres de posicionamiento y orientación para una configuración definida. El valor de error se puede generalizar y predecir sobre el total del espacio de trabajo de acuerdo a la incertidumbre de calibración obtenida a partir de una posición específica del robot, el cual va a ser asimismo uno de los objetivos a alcanzar y determinar en este trabajo.

## 1.2 Objetivos de la tesis

Este trabajo de tesis tiene como objetivo principal desarrollar un nuevo método de calibración cinemática y de parametrización de los errores en la geometría cinemática en los robots manipuladores con articulaciones de giro en serie, basado en métodos de calibración de *screw-axis* y más concretamente en la técnica del Circle Point Analysis (CPA).

Igualmente persigue desarrollar un método de estimación de la incertidumbre de calibración del robot mediante simulación de Monte Carlo que permita calcular la incertidumbre de posición y orientación para cada uno de los parámetros cinemáticos identificados previamente mediante la técnica CPA. Conocer la incertidumbre en la determinación de los parámetros permite propagar las distribuciones de los errores de posición y orientación del robot calibrado para una pose determinada, pudiéndose aplicarse estos errores a la evaluación de todo el espacio de trabajo del robot.

Con el propósito de alcanzar este objetivo general, es necesario definir una serie de tareas de más bajo nivel cuya realización permita la consecución del objetivo principal definido y son las siguientes:

- Determinar y construir un modelo cinemático adecuado para la configuración del robot, indicando las transformaciones geométricas necesarias, la posición de los sistemas de referencia y el conjunto inicial de parámetros geométricos nominales.
- Realizar un procedimiento experimental de captura de los datos de la posición de todos los elementos del robot mediante un instrumento de medida *Láser Tracker* y el *Active target* anteriormente citado.
- Realizar un procedimiento de identificación de parámetros geométricos del robot mediante la técnica de Circle Point Analysis (CPA), optimizando los parámetros cinemáticos obtenidos con aproximación por mínimos cuadrados mediante el método de Levenberg-Marquardt.
- Determinar los errores en ejes y articulaciones del robot, analizando el juego y excentricidad por articulación.
- Generar datos de medida para la calibración mediante programación de un generador de datos sintéticos.
- Desarrollar un método de estimación de la incertidumbre de calibración del robot mediante simulación de Monte Carlo. La base del método de estimación de la incertidumbre de calibración es la simulación del procedimiento de captura de datos, el posterior cálculo de los parámetros cinemáticos mediante el método CPA y la utilización de una simulación estadística según el método Monte Carlo. La salida del procedimiento de calibración es la incertidumbre de calibración para cada parámetro identificado que depende de la configuración de la captura de datos y del dispositivo de medición externo utilizado. Este método de evaluación permite obtener una incertidumbre de calibración en función de la configuración, el equipo y el procedimiento de medición utilizados. Además, permite calcular y optimizar una captura de datos antes de la ejecución de la prueba para validar los resultados numéricos.

El trabajo persigue desarrollar un método que permita realizar el cálculo de la incertidumbre en el proceso de identificación de parámetros cinemáticos o calibración cinemática para robots manipuladores. El método se va a basar en la identificación de los parámetros cinemáticos mediante el método Circle Point Analysis modificado y optimizado, uso de un Láser Tracker conjuntamente con un Active Tracker para la toma de valores reales de los ejes de robot, para conseguir una baja incertidumbre de medición y un sistema de toma de datos optimizado y mejorado en relación con anteriores trabajos basados en CPA, obteniendo un modelo cinemático que asimismo incluya la compensación de los errores por excentricidad. Se pretende desarrollar, dentro del método, un sistema que permita el cálculo de la incertidumbre de calibración como un valor característico y las incertidumbres de posicionamiento y orientación para una configuración definida; a partir de ese punto, el valor de error se pretende generalizar y predecir sobre el total del espacio de trabajo de acuerdo a la incertidumbre de calibración obtenida a partir de una posición específica del robot.

### 1.3 Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis se estructura en cinco capítulos principales cuyos contenidos se describen a continuación.

El presente *capítulo 1* realiza una introducción al trabajo de tesis que comprende el documento.

En el *capítulo 2* se realiza una revisión de la descripción y estado actual de la clasificación de los robots, tomados estos en general, es decir, considerando tanto los industriales como los que tienen otras aplicaciones no industriales. Igualmente se realiza una revisión del estado del arte de las técnicas de evaluación de precisión y repetibilidad de los robots, revisando la normativa existente, y centrándose primeramente en estándar ISO 9283:1998, que es el que se refiere a los robots industriales manipuladores, y posteriormente revisando otros métodos de evaluación y test para otros tipos de robots y sistemas robóticos. Por último se hace una revisión de los sistemas de medición y verificación que se utilizan en procesos de calibración cinemática.

Como primer paso a realizar en los procesos de calibración cinemática, el *capítulo 3* trata sobre la realización del modelo cinemático que se va a utilizar en este trabajo. Para ello, se realiza una revisión de las diferentes formas que existen de realizar la representación de la posición y orientación de los robots manipuladores industriales, considerando al final las matrices de transformación homogéneas como forma de representar dicha posición y orientación. Asimismo se realiza una revisión del estado del arte con respecto a los métodos de modelado cinemático que existen aplicables a robots manipuladores industriales, como punto de partida para los procedimientos de calibración que se verán en siguiente capítulo. Se selecciona el modelo de Denavit-Hartenbert, modificado por la revisión de Hayati y Mirmirani para robots con articulaciones consecutivas con ejes casi paralelos. Una vez definido el modelo, se aplica al robot KUKA que es el

que se utiliza en esta tesis, y definiendo los sistemas de coordenadas a utilizar, con lo que se obtendrán los valores iniciales de los parámetros cinemáticos necesarios.

Una vez definido el modelo cinemático del robot, en el *capítulo 4* se va a abordar el desarrollo del método de calibración cinemática del robot, comenzando por una revisión de las diferentes fuentes de error que pueden afectar a dicha calibración, así como el estado del arte de los distintos métodos de calibración cinemática de los robots manipuladores industriales. Una vez realizada esta revisión, se va a centrar el estudio en la calibración cinemática de los robots industriales basada en la técnica del *Circle Point Analysis*, realizando una descripción y explicación de dicha técnica, tanto en lo que respecta al proceso de calibración, como su modelado matemático. Durante el análisis de esta técnica se revisarán y analizarán las diferentes situaciones y condiciones físicas y matemáticas que se pueden dar al aplicar esta técnica.

Se presenta a continuación el procedimiento experimental de captura de datos del proceso de calibración cinemática del robot en base al robot seleccionado, realizando diferentes ensayos, analizando resultado de los mismos y obteniendo los parámetros cinemáticos del robot, con lo que también se tendrán unos errores del resultado obtenido. Por último se podrán calcular los errores de juego y excentricidad de las articulaciones del robot analizado, a partir de los datos tomados en el propio proceso del *Circle Point Analysis*.

Una vez realizada la calibración cinemática del robot, se pasará a desarrollar el modelo para la estimación de la incertidumbre de la calibración cinemática del robot, el cual se aborda en el *capítulo 5*. En este capítulo se va a abordar la determinación de la incertidumbre de la calibración cinemática, mediante la aplicación del método de propagación de distribuciones de probabilidad de acuerdo al esquema de evaluación que figura en el anexo I de la GUM [6] y se realiza una simulación mediante el método Monte Carlo. Para ello se desarrolla un simulador de generación de un conjunto de puntos sintéticos que permita posteriormente aplicar el método de calibración y el método de propagación de distribuciones de probabilidad para obtener los resultados de incertidumbre de calibración que se buscan. Asimismo se ampliará el algoritmo desarrollado para poder integrar en el mismo los cálculos de los errores geométricos de excentricidad de las articulaciones, basados en la toma de datos del método CPA.

Finalmente en el *capítulo 6* se muestran las principales conclusiones de este trabajo de tesis realizado, así como las líneas futuras de trabajo identificadas.



## 2 Robots y técnicas de evaluación

---

### 2.1 Introducción

La robótica como ciencia que define, estudia y desarrolla la aplicación de los robots, se ha hecho cada década más extensa en su aplicación, tanto en diferentes sectores industriales, militares, sanitarios como en tareas diarias [7]. En aplicaciones y procesos industriales y de automatización, los robots manipuladores muestran un rol de lo más significativo. En el período reciente, casi desde 30 años a la actualidad, los robots se han empleado en los sectores industriales masivamente, y esta tendencia sigue creciendo día a día. La mayor parte de estos robots se usan para manipular piezas, soldar, aplicar pastas o sellantes, remachar, atornillar, acumular piezas u otras operaciones, la mayoría de ellas características de la industria automotriz, la cual ha sido la que históricamente ha empleado mayoritariamente los robots industriales [8] [9]. Sin embargo, con el paso del tiempo otras aplicaciones y sectores han sido objetivo de utilización de robots [10], que han permitido introducir la robótica en otros nichos de mercado, como por ejemplo, la aplicación de robots manipuladores donde las capacidades y habilidades similares a humanas se necesitan para llevar a cabo numerosas tareas [11] [12].

### 2.2 Descripción y clasificación de robots

La organización internacional de estandarización o *Internacional Organization for Standardization* (ISO) [13] define el término robot según el estándar ISO 8373:2021 [14] en su apartado 2.6, como “un mecanismo accionado programable en dos o más ejes, con un grado de autonomía, que se mueve dentro de su entorno, para realizar las tareas asignadas. El robot incluye el sistema de control y su interface”. A partir de esta definición, la norma ISO 8373:2021 también clasifica los robots básicamente en dos tipos: robots industriales y robots de servicio. Este trabajo se focaliza en robots industriales para los cuales la norma ISO 8373:2021 en su apartado 2.9 da la siguiente definición de robot industrial (ver Figura 2.1), “*un manipulador programable multipropósito, reprogramable, controlado automáticamente, de tres o más ejes, el cual puede estar bien fijo en un lugar o móvil, para su uso en aplicaciones de automatización industrial*”. Añade

que “el robot industrial incluye al manipulador con sus actuadores, y al controlador con su teach pendant y cualquier interfaz de comunicación, tanto software como hardware”. También cabe citar que el término manipulador también viene definido en el apartado 2.1 de la citada norma como “máquina en la que el mecanismo consiste en una serie de segmentos, articulados o deslizantes unos a otros, para el propósito de agarrar o mover objetos normalmente con varios grados de libertad”.

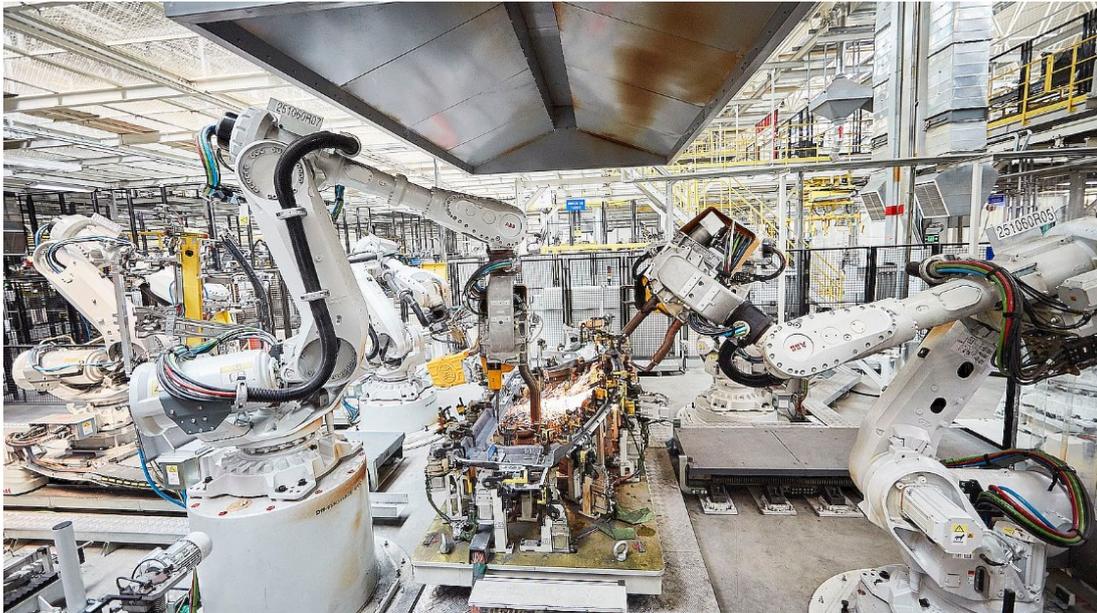


Figura 2.1. Robots en fábrica de automoción ©ABB. Fuente. [www.ifr.org](http://www.ifr.org)

Por otra parte, la *International Federation of Robotics (IFR)* [15], es decir, la Federación Internacional de Robótica, toma como definición de robot industrial la establecida por la ISO 8373:2021. Basándose en esta definición, explicita del siguiente modo los términos usados en esa definición:

- Reprogramable: diseñado para que los movimientos programados o las funciones auxiliares se puedan cambiar sin causar una alteración física;
- Multipropósito: que es capaz de adaptarse a diferentes aplicaciones con modificaciones físicas;
- Alteración física: alteración del sistema mecánico (el sistema mecánico no incluye los archivos de datos, ROMs, etc.);
- Ejes: direcciones usadas para especificar el movimiento del robot de un modo lineal o rotacional.

Existen diferentes estudios [16] que han tratado la clasificación de los robots, así como diferentes organizaciones, como la IFR, que también han aportado su experiencia para ofrecer clasificaciones de los robots, en función de diferentes consideraciones. Tanto Singh G. et al [16]

como la IFR dan una clasificación de los Robots Industriales, de acuerdo a su estructura mecánica que se muestra en la Figura 2.2:

- Robot Cartesiano: robot cuyos brazos tienen 3 articulaciones prismáticas y cuyos ejes se corresponden a los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas.
- Robot SCARA: robot que tiene dos articulaciones giratorias paralelas para dar servicio a un plano dado. Es decir, poseen dos articulaciones giratorias con los respectivos ejes de rotación paralelos, y una articulación prismática con la dirección de traslación en el mismo eje que los ejes de rotación anteriores. Los robots SCARA se conocen por sus rápidos ciclos de trabajo, excelente repetibilidad, gran capacidad de carga y su amplio campo de aplicación. Realizan principalmente aplicaciones de coger y dejar piezas de un punto A a un punto B, lo que en inglés se denomina como “*Pick and Place*”.
- Robot Articulado: un robot cuyos brazos tienen al menos tres articulaciones rotativas. Es el robot más extendido, y más usado, principalmente en la industria de la automoción.
- Robot Paralelo / Delta: un robot cuyos brazos tienen articulaciones giratorias o prismáticas concurrentes.
- Robot Cilíndrico: un robot cuyos ejes forman un sistema de coordenadas cilíndrico.

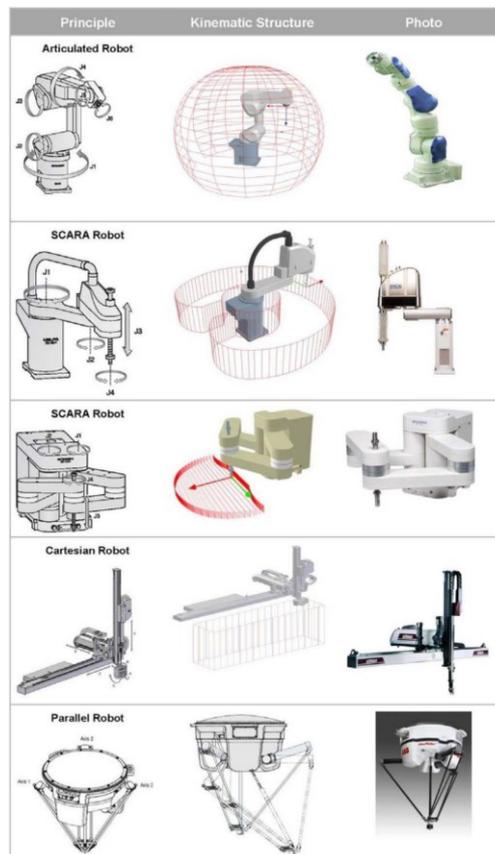


Figura 2.2. Clasificación de los robots industriales según su estructura mecánica

Adicionalmente a esta clasificación, Dobra A. [17] considera clasificar los robots en función de si son fijos o móviles, lo que daría lugar a una clasificación de los robots de la siguiente forma:

- Robots industriales fijos: Robots cuya base o eje 0 está fijo a un punto. Estos son la gran mayoría de los robots que se han considerado en la clasificación anterior. Aquí se podría distinguir entre:
  - o Robots No colaborativos o industriales estándar: robots que se deben de enjaular en un recinto con sistemas de seguridad, para salvaguardar la seguridad de los operarios y personal que haya a su alrededor.
  - o Robots Colaborativos: robots que están diseñados para realizar tareas en colaboración con los trabajadores en sectores industriales. Incluso aquí, la IFR distingue entre robots que cumplen la norma ISO 10218-1 [18], que especifica requisitos de seguridad para robots industriales, y los que no (ver Figura 2.3).

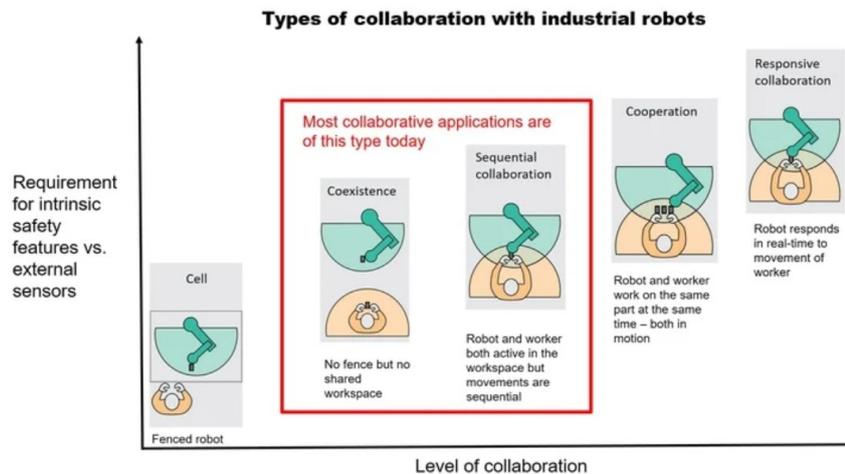


Figura 2.3. Área verde: espacio trabajo del robot. Área amarillo: espacio de trabajo del operario. Fuente. [www.ifr.org](http://www.ifr.org)

- Robots Móviles: aquí se considerarían los robots autónomos que permiten transportar material de un punto a otro, mediante sistemas filoguiados, mediante visión, reconocimiento, aprendizaje del entorno, GPS, etc. Aquí se incluirían los *autonomous guided vehicles* (AGVs), AGTs, *autonomous mobile robots* (AMRs) y otros similares (ver ejemplos en Figura 2.4).

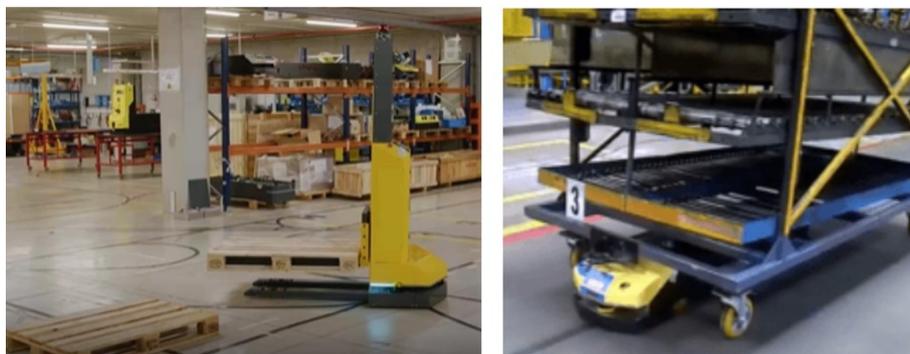


Figura 2.4. Robots móviles: AMR y AGV Kivnon™. Fuente: [www.kivnon.com](http://www.kivnon.com)

Asimismo, tanto la asociación francesa de robótica industrial, la AFRI, como Dobra A. [17] clasifican también los robots en función de su cronología o generación, teniendo los siguientes tipos:

- Robots de primera generación o robots manipuladores: La primera generación engloba los robots manipuladores, que son aquellos que repiten una o varias tareas de manera programada bajo un software, en secuencia. Estos no toman en consideración las alteraciones que se presenten en su entorno, además son utilizados a nivel industrial. Sus sistemas mecánicos están hechos bajo estructuras muy sencillas, aplicadas en oficios secuenciales que solo necesiten el movimiento continuo de unas pocas piezas. Generalmente son dirigidas a la distancia por un operador humano y reemplazan muchas manos humanas.
- Robots de segunda generación o robots en aprendizaje: Dentro de la clasificación de los robots de segunda generación, se encuentran los que realizan tareas después de aprender los movimientos que ejecutan los operadores humanos. A pesar de utilizar una tecnología más avanzada, los movimientos de este tipo de robots también se realizan en consecuencia. Disponen de sensores especializados y sistemas de retroalimentación. A través de estos logra captar qué tareas debe hacer, cuáles son los movimientos necesarios para ello y comprobar del resultado de su práctica. Este tipo de robots pueden utilizarse para procesos industriales como tareas de soldadura, corte, inyección de plásticos, fabricación, entre otros.
- Robots de tercera generación - robots con sensores: En la clasificación de los robots, la tercera generación es reprogramable a través de ordenadores. Estos también cuentan con sensores artificiales y otras piezas que permiten la visión y el tacto empleando lenguajes de programación. También se les conoce como robots con control sensorizado y suelen ser utilizados en áreas en las que se realiza múltiples tareas, ya que al ser programables los humanos pueden controlar su sistema mecánico a medida que necesiten ejecutar cada una.
- Cuarta generación, robots móviles: En la cuarta generación se encuentran los robots móviles, los cuales son capaces de participar en diversos procesos gracias a la inteligencia artificial. Estos también poseen sensores, a los que los ordenadores envían la información necesaria durante la realización de actividades. Pero a diferencia de la generación anterior, están programados para que puedan tomar decisiones y realizar más movimientos. Estos se utilizan en tareas que requieren la realización de varias actividades y la toma de decisiones en tiempo real, tal como lo harían los humanos.
- Quinta generación, robots inteligentes: En esta se encuentran las máquinas dotadas de inteligencia artificial y sistemas mecánicos de autónomo alcance a la hora de realizar tareas. En la quinta generación se desarrollan máquinas con elementos que permiten que se desplacen, ya sean ruedas o piernas artificiales, y resultan útiles en tareas de construcción, manufactura, diseño, entre otras parecidas.

Finalmente indicar una clasificación alternativa de los robots teniendo en cuenta la función o aplicación que se va a dar al robot:

- Militares: Según su funcionalidad específica, tienen la posibilidad de demostrar una morfología u otra. Son utilizados como auxiliares en las operaciones militares llevadas a cabo por ejércitos. Puede tratarse de robots que transporten material o robots controlados por control remoto, rastreadores, artificieros [19].
- Industriales: Esta clase de robots fueron creados para usar puestos de trabajo en las etapas de producción industrial. Principalmente hacen manipulaciones automáticas y específicas en procesos complicados y periódicos, con automatismos multifuncionales y reprogramables. Su localización frecuente ser accesible y enormemente controlable [9].
- Servicios: Dichos automatismos acostumbran ser dispositivos móviles autónomos controlables por medio de PCs. Sus primordiales funcionalidades son la ayuda a personas en trabajos bastante repetitivos, así como los peligrosos o más sucios. Asimismo, también se puedan dar robots en aplicaciones del sector servicios, en hostelería, como puntos de información móvil, o incluso dando apoyo a la distribución de platos en restauración, como robots móviles [20].
- Investigación: Son usados para examinar y explorar en diferentes espacios. La categorización de los robots de esta clase está compuesta por automatismos oruga o con cadenas, robots submarinos y aéreos entre otros [21].
- Domésticos: Son los artefactos que facilitan o hacen las labores de aseo y mantenimiento del hogar. Sus funcionalidades son rutinarias. Esta subcategoría además comprende los robots con otras funcionalidades. Ejemplificando, se encontrarían en esta parte los robots de vigilancia o estabilidad. Uno de los robots domésticos más conocidos son los robots móviles con función de aspiradora.
- Educativos: Su primordial funcionalidad es la ayuda en labores educativas por medio del entretenimiento. Son utilizados principalmente en centros educativos y aulas de clases. Además hay robots educativos que ayudan a reforzar habilidades cognitivas como la escritura, las matemáticas, los lenguajes o la lectura [22].
- Médicos: La categorización de los robots en la zona de la medicina es bastante vasta. Ejemplo, hay robots diseñados en especial para asistir a personas con variedad servible e inclusive hay prótesis de última generación [23]. En esta categoría se podrían integrar los nanorobots, un tipo de dispositivo compuesto a nanoescala (de entre 0,1 y 10 micrómetros). Esta clase de robots son introducidos en los cuerpos humanos por vía intravenosa para apoyar en el enfrentamiento a una patología.

Los robots industriales que se usan hoy en día para trabajar en entornos cerrados tienen definidas unas tareas relativamente simples, y la frecuencia con que estas tareas se cambian es muy baja. Este punto de partida hace que los usuarios de estos robots los programen de una forma manual, dado el hecho de que los robots van a trabajar con el mismo programa durante un largo tiempo. Tal programación puede llegar a ser poco eficiente en el caso de que se den cambios en las tareas a realizar o en el entorno, como por ejemplo, en el caso de que un robot tenga que trabajar en un entorno en el que hay seres humanos o un objeto se comparte con un ser humano, o la tarea es muy complicada para que se pueda programar de forma intuitiva, o en el caso de que haya muchos factores indefinidos o que cambien frecuentemente. En las industrias manufactureras de hoy en día la presencia de robots industriales ha crecido y está creciendo fuertemente. Sin embargo, las capacidades de los robots se han de mejorar para pasar de un entorno tradicional de

líneas de producción en masa a líneas dedicadas en pequeñas y medianas industrias [24]. La siguiente generación de sistemas de fabricación como la fabricación en la nube, fabricación distribuida, fabricación reconfigurable, y fabricación sostenible se enfoca en los sistemas flexibles y en su adaptación a cambios y sistemas no completamente definidos de antemano [25]–[27]. Los robots industriales, como uno de los mayores activos en la automatización de la fabricación, se espera que consigan una mayor autonomía en tanto el hardware como en el software, además de que cada vez están siendo complementados con diversos dispositivos que mejoran sus capacidades, como sistemas de visión, garras sofisticadas, para una amplia variedad de tareas. Esto hace que los requerimientos y las necesidades de la industria y del usuario final del robot cada vez sean más exigentes, haciendo necesario garantizar por parte de la industria en general estos requerimientos, así como la capacidad y robustez de los sistemas del robot. Para ello, es esencial cuantificar y evaluar el rendimiento de los robots de una forma científica, a través de unas métricas, medidas y metodologías de evaluación definidas [28]. En base a una caracterización y medición de las características del robot, diferentes robots se pueden comparar [24]. La situación de los estándares para los robots industriales actualmente, en cuanto a técnicas de evaluación se refiere, se va tratar en el siguiente apartado.

### 2.3 Técnicas de evaluación de la precisión y repetibilidad en robots

Las técnicas de evaluación de la precisión y repetibilidad en los robots son definidas en diferentes normativas de aplicación industrial. Hoy en día, el estándar activo para la evaluación de las características de los robots industriales es el estándar ISO 9283:1998 [1] que describe los métodos para especificar y ensayar las siguientes características de funcionamiento de los robots manipuladores industriales relacionadas con el posicionamiento y trayectoria que lleva a cabo el robot :

- precisión de posición y repetibilidad de posición;
- variación de la precisión de posición multidireccional;
- precisión de distancia y repetibilidad de distancia;
- tiempo de estabilización de posición;
- rebose de posición;
- deriva de las características de posición;
- intercambiabilidad;
- precisión y repetibilidad en la trayectoria;
- precisión en la reorientación durante la trayectoria;
- desviación en esquina;
- características de velocidad en la trayectoria;
- tiempo mínimo de posicionamiento;
- comportamiento estático;
- desviación de ondulación.

Esta norma tiene como objetivo verificar las especificaciones de los robots individuales pero no sugiere qué características se han de comprobar para un robot en particular. Para comparar las características de funcionamiento entre diferentes robots la norma indica los siguientes parámetros que tienen que ser iguales: tamaño de los cubos de ensayo, cargas de ensayo, velocidades del ensayo, trayectorias de ensayo, círculos de ensayo, condiciones ambientales.

Existe en la bibliografía analizada una gran cantidad de trabajos que se han centrado en procedimientos de evaluación y medición de sistemas robóticos, si bien sólo se han identificado un número reducido de trabajos que versan sobre métodos de ensayo y evaluación de los robots industriales referidos al estándar ISO 9283:1998, tal cual se muestra en la Tabla 2.1. Baker et al [29] aplican los métodos de ensayo basados en la norma ISO 9283:1998 para la evaluación de la repetibilidad de posición para robots colaborativos. Se utilizó el robot UR10 de Universal Robots™ como plataforma de pruebas, y su objetivo era verificar las características de los robots declaradas por fabricantes de robots. En un sentido similar, M.Hu et al. [30] también utiliza un robot colaborativo para, de acuerdo con la norma ISO 9283:1998, introducir un método de síntesis óptima de la repetibilidad de la pose para los robots colaborativos, proponiendo tres funciones objetivo de optimización. Maddahi et al. [31] presentaron sus evaluaciones experimentales de dos tipos de robots basadas en la norma técnica ISO 9283:1998, evaluando los índices de rendimiento de los experimentos frente a los valores nominales, y valorando las prestaciones de los mismos como precisión, repetibilidad y seguimiento de trayectorias sin carga.

<b>Fuente</b>	<b>Medición</b>	<b>Descripción</b>
M.Hu et al. [30]	Repetibilidad de posición	De acuerdo con la norma ISO 9283:1998, se introduce un método de síntesis óptima de la repetibilidad de la pose para robots colaborativos, y se proponen tres funciones objetivo de optimización
Baker et al. [29]	Repetibilidad de posición	Un robot UR10 se utilizó como plataforma de pruebas, y el objetivo era desarrollar las capacidades de verificar las características de los robots declaradas por sus fabricantes
Maddahi et al. [31]	Precisión, repetibilidad y trayectoria	Los experimentos de prueba se realizaron en dos tipos de robots para evaluar los índices de rendimiento basados en normas técnicas.
Park et al. [32]	Precisión de la posición y trayectoria	Se aplicó la norma ISO-9283 para medir las posiciones y trayectorias de robots de doble brazo.
Falco et al. [33]	Destreza, espacio de trabajo	La evaluación del rendimiento debe ser más específica cuando se consideran los tipos de operación. La destreza y el espacio de trabajo de un robot se midieron en un agarre cooperativo multibrazo para un conjunto de posturas en el espacio de trabajo
Falco et al. [34]	Importancia de las normas de ensayo	Se constató que las pruebas de rendimiento deben estar estandarizadas para proporcionar una evaluación imparcial de lo bien que un sistema realiza determinadas tareas, en lo relativo a la capacidad de una garra o mano robótica
Gadringer S. et al. [12]	Evaluación de calidad para robots con control de fuerza	Se propone un test para evaluar la calidad del control de fuerza en robots, dado que la norma ISO 9283:1998 no define ningún test al respecto.
Mosqueira et al. [10]	Alineación de un fuselaje con otro en la industria aeronáutica	Implementación y evaluación de un método de lazo cerrado de alineación del fuselaje en la industria aeronáutica, mediante el uso de indoor GPS, Laser Radar, y la evaluación de la precisión en la posición del robot mediante la norma ISO 9283:1998 (sección 3.2)

McGarry et al [35]	Identificación del marco de referencia de la base del robot	Desarrolla y demuestra un método para determinar el marco de referencia de la base del robot que integra hardware de metrología, así como una aproximación mediante Diseño de Experimentos (DOE) para elegir la rutina de medición más apropiada, dado que la ISO 9283:1998 no define un método para definir el sistema de referencia de la base del robot.
Ferrarini S. et al. [36]	Precisión de la posición y trayectoria	Método general para la evaluación de la precisión de la posición y trayectoria de un robot, enfocándose principalmente en la instrumentación y los procedimientos de prueba.
Rui Li et al. [37]	Compensación del error de trayectoria en tiempo real	Método de cálculo y compensación del error de la posición en la trayectoria en tiempo real mediante deformación temporal dinámica continua (CDTW)

Tabla 2.1. Trabajos en pruebas de estandarización de robots industriales relativo a la norma ISO 9283:1998. Fuente: [38] y propio.

Como se ha comentado anteriormente, la norma ISO 9283:1998 define los criterios de rendimiento y los métodos de prueba para robots industriales en general. Sin embargo, se observa tras el análisis de la bibliografía relacionada, algunos aspectos ausentes en el texto que los investigadores identifican.

Falco et al. [34] sostienen que, para los usuarios de robots es fundamental probar robots con un entorno de pruebas en el que los sistemas a usar y métricas de referencia a considerar para evaluar las características del robot a analizar estén claramente definidas por el estándar. Sin embargo, los métodos no incluyen información sobre la fiabilidad de las pruebas. Él sugirió desarrollar un entorno de pruebas para robots industriales, que proporcione a los usuarios información sobre la confianza de las características de rendimiento de las pruebas, en especial para robots multibrazo. La norma ISO 9283:1998 se focaliza principalmente en robots de un solo brazo, sin embargo, los métodos de ensayo especificados se pueden extender otros tipos de robots, como los robots de doble brazo. Park et al. [32] utilizan como referencia la norma ISO 9283:1998 para evaluar las características de pose y trayectoria de robots de doble brazo, como son la carga útil, repetibilidad, velocidad máxima y precisión de posición.

La evaluación del rendimiento de los robots en ocasiones debe ser más específica cuando se tienen en cuenta los tipos de operación. Por ejemplo, los fabricantes prevén que el ensamblaje podría ser la aplicación dominante para los robots industriales [39],[40]. Sin embargo, utilizar un brazo robótico convencional con 6 grados de libertad (DOF) y una garra con clampas, mordazas o un dispositivo de succión en operaciones de montaje ha mostrado limitaciones en el alcance, la capacidad de elevación, la capacidad de detección y la destreza de los robots. Varios nuevos robots redundantes con 7 o más DOF se han desarrollado, integrándose en ocasiones con sensores avanzados como sensores de fuerza y visores para ampliar las capacidades de los sistemas robóticos [41]. En relación con aplicaciones de ensamblaje, Falco et al. [33] analizaron la destreza de los brazos robóticos en el agarre en movimiento y en el agarre cooperativo de un multibrazo desde la perspectiva del espacio de trabajo para un conjunto de posturas que un brazo robot puede alcanzar, el espacio opcional para un subespacio de trabajo en el que un brazo robótico puede realizar la tarea requerida, y el espacio de trabajo confinado donde un robot puede operar sin colisionar con otros objetos.

Por otra parte, la norma ISO 9283:1998 define los criterios de ensayos para evaluar las características de los robots industriales, pero no contempla sistemas robóticos que integren sensores adicionales. Gadringer S. et al. [12] presentan un test para evaluar la calidad del control de fuerza en robots, dado que la norma ISO 9283:1998 no define ningún test al respecto. Asimismo, aunque los robots industriales se usan en gran medida en la industria automotriz, también hay cada vez más aplicaciones en otros sectores. En la industria aeronáutica cada vez requiere de un mayor grado de automatización de sus procesos. Sin embargo, esta industria tiene unos requerimientos de precisión de montaje muy severos. En concreto, para el alineamiento de los fuselajes en el sector aeronáutico durante el proceso de montaje de los mismos se usan métodos que son o bien manuales, o bien muy complejos, lo que hace que este proceso sea muy costoso. En este sentido, Mosqueira et al. [10] proponen un trabajo que supone la implementación y evaluación de un método de lazo cerrado de alineación del fuselaje en la industria aeronáutica, mediante el uso de *indoor GPS*, *Laser Radar*, y la evaluación de la precisión en la posición del robot mediante la norma ISO 9283:1998 (sección 3.2). Esto les permitió conseguir precisiones de 0,38mm y 0,01°, en comparación con la precisión media que alcanzaba el robot de 4,53mm y 0,21°, cuando éste operaba en una configuración de lazo abierto. También en el ámbito de la industria aeroespacial, McGarry et al. [35] proponen un método para determinar la referencia del sistema de coordenadas de la base del robot, basado en la integración de hardware de metrología, así como una aproximación mediante Diseño de Experimentos (DOE) para elegir la rutina de medición más apropiada. Esto se propone dado que tanto la ISO 9283:1998 como la ISO/TR 13309:1995 [42], que definen los requerimientos para calcular las características de precisión y repetibilidad de los robots industriales, requieren el establecimiento de dicho marco de referencia de la base del robot, pero sin embargo no definen un método de cómo establecer este marco con una metodología definida.

A pesar de su importancia, la estandarización de los ensayos de los robots industriales no ha captado a atención significativa debido a una serie de razones [7]: a) la mayoría de las aplicaciones convencionales, como la carga y descarga y la pintura, no exigen una gran precisión y repetibilidad; b) los robots se programan en su mayoría manualmente, lo que permite compensar los errores de los modelos cinemáticos o dinámicos; c) el número de fabricantes de robots es relativamente pequeño y el número total de robots industriales en todo el mundo es también pequeño en contraste con otras máquinas herramienta. Sin embargo, la situación está cambiando ya que a) cada vez más aplicaciones requieren una reprogramación frecuente debido a cambios e incertidumbres que existen para conseguir beneficios económicos de los robots; b) cada vez más hay aplicaciones, como la soldadura por arco y el montaje de dispositivos optoelectrónicos, que tienen un alto requisito de precisión y repetibilidad incluso con numerosas incertidumbres en las operaciones; c) las unidades robóticas integrales ya no se tratan como unidades operativas independientes. Los robots tienen que integrarse con muchos otros componentes heterogéneos cuyos sensores puedan medir variables del área donde opera el robot, o sistemas de visión que reconozcan el entorno, y poder cumplir misiones complejas en entornos dinámicos. Por lo tanto se prevé que cada vez más empresas tendrán necesidad de referencias normativas en evaluación de robots y sistemas integrados, de modo que puedan utilizarlas para obtener resultados específicos de las pruebas de rendimiento y diseñar sistemas personalizados para satisfacer sus necesidades de aplicación.

La norma ISO 9283:1998, tras más de veinte años de desarrollo de nuevas tecnologías robóticas, en algunos casos en los que estas nuevas tecnologías amplían sus horizontes más allá de lo que inicialmente esta norma consideraba, no es capaz de satisfacer las necesidades de la evaluación del rendimiento y las pruebas de los sistemas robóticos más modernos. Bosignorio y Messina [12], y Messina et al. [43], resumieron también las limitaciones de las normas desarrolladas. En primer lugar, no existe una norma aceptada para medir el rendimiento de los sistemas robóticos con respecto a los parámetros definidos por el usuario. En segundo lugar, no hay consenso sobre qué objetivo y qué procedimientos se utilizan para evaluar el rendimiento. En tercer lugar, hay una falta de métodos de ensayo reproducibles y repetibles, lo que supone un obstáculo para que los investigadores trabajen para alcanzar los objetivos comunes de intercambiar y comunicar resultados, comparar robots y aprovechar los trabajos existentes con trabajos repetidos minimizados para agilizar las transferencias de tecnología. En cuarto lugar, en un ámbito más amplio, las normas no deberían limitarse únicamente a los aspectos de hardware, sino que también deberían incluir el software y la interfaz. Por lo tanto, las cuestiones anteriores plantean una serie de retos a la estandarización de la tecnología [20], debido a la evolución de la tecnología actual, y además por la limitación de la normativa. Esto ha motivado que entidades, como el NIST en Estados Unidos, promuevan el desarrollo de nuevos estándares para cubrir las necesidades que estas nuevas tecnologías están generando en el conjunto de estándares existentes. Estos nuevos estándares desarrollados tanto en el NIST como en el *Engineering Laboratory* se pueden resumir en las siguientes áreas:

1. Estructuras y desarrollo de software: se refiere al desarrollo de programas robóticos para diferentes sistemas, como los trabajos de Balakisky et al. [44] para desarrollar un lenguaje canónico (CRCL) para representar acciones robóticas; como el desarrollo de ontología para aplicaciones robóticas, o el desarrollo de ontologías aplicables en el sistema operativo robótico (RoS), o interfaces entre el RoS y el sistema de simulación USARSim [45].
2. Manipulación y agarre: la comunidad robótica ha demostrado la importancia de las pruebas de rendimiento estandarizadas; las pruebas estandarizadas proporcionan métodos imparciales para evaluar el rendimiento del sistema para determinadas tareas [34]. La manipulación con destreza refiere a operaciones robóticas con múltiples brazos robóticos, o dedos robóticos, y para ello y debido a limitaciones adicionales del sistema integrado, Falco et al. [33] sugirieron métodos de evaluación teniendo en cuenta estas limitaciones.
3. Visión y medición: Evans et al. [46] analizaron las normas relativas a la metrología dimensional para identificar las limitaciones de las normas existentes, hicieron las recomendaciones para el desarrollo de normas identificando veintidós interfaces de programación de aplicaciones (API) y formatos de datos en metrología dimensional. El NIST colaboró en la evaluación de nuevas tecnologías relacionadas con aplicaciones militares, una de las cuales fue el marco de evaluación de sistemas, componentes y evaluación operativa (SCORE) para evaluar sensores y tecnologías de la información, y la otra era la tecnología de comunicación para uso táctico.
4. Robots Móviles: independientemente de los estándares aplicables según las normas ISO a los robots móviles, como la norma ISO 3691-4:2023 para sistemas de guiado y robots móviles autónomos [47], complementada por la norma EN 1175:2020 [48], el NIST desarrolló sistemas para evaluar los componentes de un sistema y apoyar las actividades de alcanzar una decisión en un sistema integrado, como los trabajos de Balakirsky y

Messina [49] que desarrollaron un entorno híbrido virtual-real para facilitar el diseño de sistemas y su integración; Huang et al. [50] ampliaron las evaluaciones más allá del nivel de autonomía en los marcos de medidas de rendimiento para sistemas no tripulados (PERMFUS). Las métricas de rendimiento ampliadas se basaban en las mediciones de movilidad/navegación, detección/percepción, energía/potencia, comunicación potencia, comunicación, interacción persona-sistema, efectores finales, colaboración/coordiación y cargas útiles. colaboración/coordiación y carga útil. Las métricas eran el cumplimiento de la misión precisión, tiempo de respuesta, nivel de autonomía, fiabilidad, otros factores como la seguridad, la integridad y la protección.

5. Interacciones Hombre-Robot: Uno de los ámbitos emergentes de las aplicaciones robóticas es el de las interacciones humano-robot (HRI). Diversos estudios se han realizado en este ámbito, pero no son estudios que se refieran a los métodos de ensayo de las características de robots, sino más bien a los interfaces y a la interfaz humano-robot (HRI) [51].
6. Integración de sistemas: en este apartado se consideran los trabajos llevados a cabo para el análisis de los sistemas integrados, y de los métodos y ensayos que se han desarrollado para su análisis y posterior comparación. Diferentes estudios se han realizado al respecto sobre la integración de sistemas robóticos. Messina et al [52] expuso algunos puntos de vista generales sobre este tema y resumió las experiencias que el NIST ha acumulado con competiciones de robótica como catalizadores de la tecnología de integración de sistemas.

Si bien todos estos estudios y análisis expanden el área de aplicación de los métodos de ensayo y test de las características de robots manipuladores industriales a sistemas que incluirían sistemas robóticos, sistemas integrados, estructuras de desarrollo de software, interacciones hombre-máquina y hombre-robot, sistemas avanzados de manipulación y agarre, sistemas avanzados de visión y medición sin contacto, robots móviles, y otros; en el ámbito del trabajo que se aborda en esta tesis, se va trabajar con un robot manipulador industrial de 6 ejes, con lo cual se puede considerar válido el marco de referencia para evaluación y ensayo definido en la norma ISO 9283:1998. Por tanto, esta norma será el estándar que sirva de base en el desarrollo del método de calibración mediante el método Circle Point Analysis. A partir de este punto, en el apartado siguiente se revisan los diferentes sistemas de medición y verificación que existen, para poder determinar cuál es el óptimo a utilizar en el trabajo.

## 2.4 Sistemas de medición y verificación

El sistema de medición permitirá, durante el proceso de calibración cinemática, la captura de puntos que hará posible la identificación de los parámetros cinemáticos del robot. Por lo tanto, es necesario realizar una revisión de los distintos sistemas de medición y verificación existentes para determinar el óptimo a utilizar.

En términos generales, el proceso de captura de puntos consiste en obtener pares de datos consistentes en la posición y orientación del robot, junto con los valores de entrada al modelo matemático correspondientes a la posición medida, habitualmente los valores de las variables de las articulaciones en esa posición. Posteriormente, el error cometido por el robot será evaluado comparando la posición real obtenida por el robot con la posición destino programada. Para ello,

es necesaria la introducción de un sistema de medida externo al robot que permita obtener las coordenadas reales del punto alcanzado, en un caso, o del medido en el otro. De este modo, la información geométrica proporcionada por el sistema de medida externo constituirá el conjunto de coordenadas nominales reales para el procedimiento de calibración. Sin embargo, dicho equipo de medida siempre va a tener un error de medición evaluado en la calibración del equipo y normalmente proporcionado por el fabricante, que se propagará, a los resultados en la identificación de parámetros. Por tanto, y dado que no existen instrumentos de medida libres de errores, es necesario que el instrumento de medición a utilizar en el proceso de captura de datos tenga una precisión superior al robot cuyos parámetros se pretendan identificar. En el caso de los robots esta premisa resulta sencilla de cumplir, ya que, normalmente, la precisión de los robots manipuladores es mucho más baja que la de los instrumentos de medida usados en esta fase.

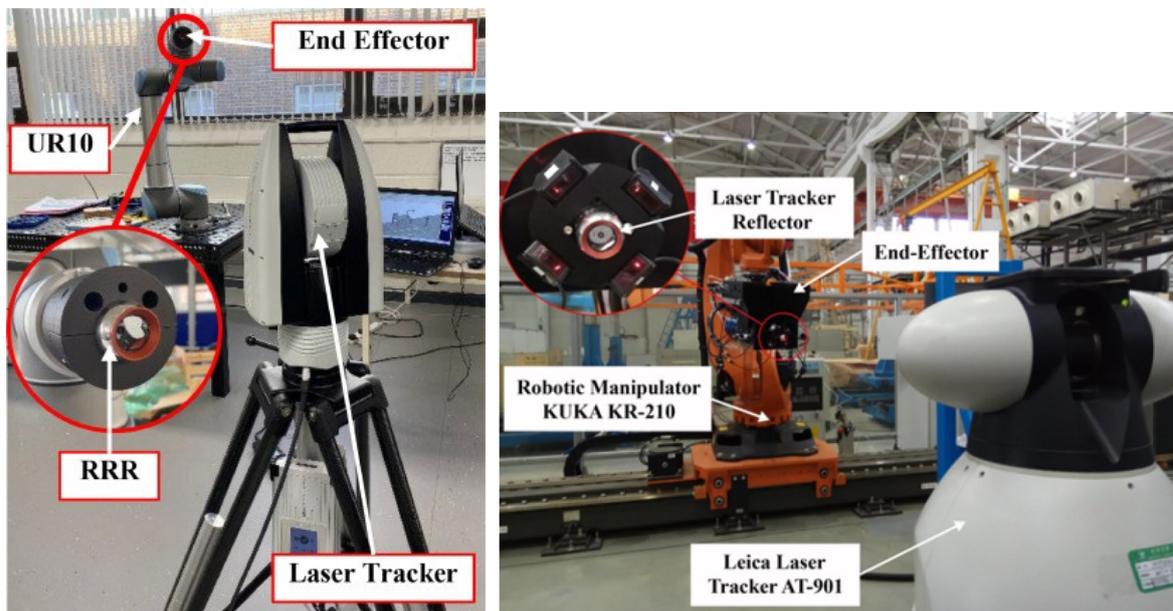


Figura 2.5. Medición de brazos robóticos en diferentes experimentos. Fuente: [35] [53]

Hay una gran cantidad de procedimientos de medida con contacto y sin contacto externos empleados en procedimientos de calibración y verificación de robots que se identifican en la bibliografía (ver ejemplos en la Figura 2.5 y Figura 2.6), siendo algunos de los más habituales los que se listan a continuación:

- Láser Trackers: un Láser tracker Leica AT960 MR se ha usado en el trabajo de McGarry et al [35] junto con un reflector de anillo, o en Yuan et al. [53] donde usaron un Láser Tracker Leica AT901 junto con un SMR (reflector montado esféricamente) para la calibración de un robot KUKA taladrador usado en la industria aeronáutica;
- Teodolitos [54];
- Máquinas de medición por coordenadas [55];
- Interferómetros láser: por ejemplo usado conjuntamente con un sensor PSD en [56] aplicado a un robot tipo Scara;

- Barras de bolas telescópicas [57] o barra de bolas doble [58], que combina la barra de bolas doble junto con una medición en dirección del eje Y con un interferómetro láser;
- Brazos articulados de medición por coordenadas [59];
- Sistemas de ultrasonidos [60], en este caso usados conjuntamente con acelerómetros y giróscopos, para poder definir con ellos la orientación, mientras que los sensores de ultrasonidos dan soporte para poder realizar la triangulación del TCP;
- Cámaras CCD, una o varias, que captan coordenadas absolutas de un patrón de puntos conocidos [61], [62].
- *GPS Indoor*: Mosqueira et al. [10] propusieron un trabajo que supone la implementación y evaluación de un método de lazo cerrado de alineación del fuselaje en la industria aeronáutica, mediante el uso de indoor GPS, Laser Radar, y la evaluación de la precisión en la posición del robot mediante la norma ISO 9283:1998,
- Patrones físicos, con esferas y sensor de contacto de precisión: aunque está más extendido el uso de patrones físicos en brazos articulados de medición por coordenadas, también en el caso de robots se utilizan estos patrones para extraer una geometría nominal conocida y compararla con la obtenida mediante movimientos del brazo. Por ejemplo, en el trabajo de Joubair A. y Bonev I. [63], se dotó a un brazo robot de un sensor o palpador automático de contacto, y muestra un procedimiento de identificación de parámetros usando este sensor de contacto y unas esferas calibradas y medidas, de las que se conoce su posición con precisión.

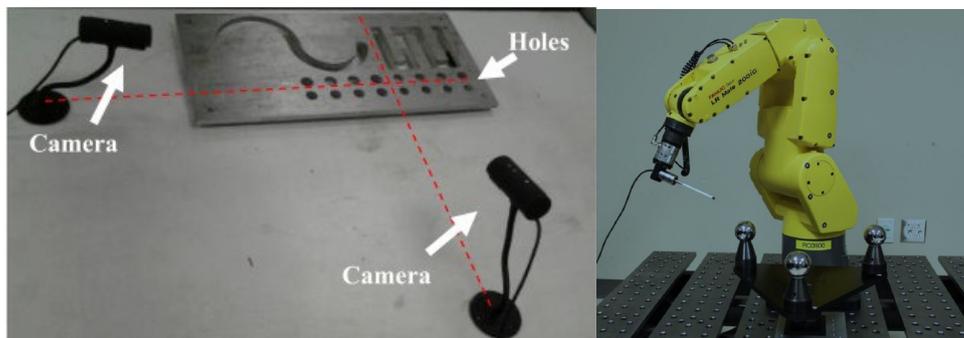


Figura 2.6. Medición de brazos robóticos en diferentes experimentos. Fuente: [61] [63]

La selección del sistema de medición va a depender, por un lado, del elemento que se desea medir, y por otro, del método de medición que se va a utilizar. En este trabajo, como se verá posteriormente en el capítulo 4, el método que se va a utilizar para la calibración cinemática del robot industrial va a estar basado en el método de *Circle Point Analysis (CPA)*, que implica una captura de una serie de puntos alrededor de cada uno de las articulaciones, moviendo únicamente cada articulación una a una. Esto va a hacer que se necesite un sistema de medición con la precisión que requiere la calibración de un robot industrial y la versatilidad para medir tantos puntos como sea necesario sin cambiar la ubicación del sistema de medición, ya que la toma de muestras de puntos en el espacio para cada articulación se ha de hacer de una sola vez.

En el caso de este trabajo, se selecciona un Láser Tracker API modelo 3. Este un equipo de medición de alto rango, con un alcance de 15 m y una precisión de  $\pm 15 \mu\text{m}$  (ADM) o 1,5 ppm. Los Laser Tracker se encuentran entre los sistemas de medición de posición de sensores móviles alrededor de los ejes de robots más precisos y rápidos en alto rango. Sin embargo, surgen limitaciones cuando se utilizan para cubrir intervalos angulares elevados. En estos sistemas, se posiciona un retrorreflector o *surface mounted reflector* (SMR) en el mismo eje o después del eje que se está midiendo para medir la rotación de la articulación. El LT captura las posiciones del reflector en su movimiento rotativo alrededor del eje mientras registra datos de posición a intervalos regulares. Los espejos tienen un rango angular limitado de operación; por lo tanto, el reflector puede perder la línea visual con el haz del LT durante el proceso de rotación del eje. En estos casos, es necesario cambiar la posición del reflector durante el proceso de medición y capturar los puntos de cada eje en un intervalo. Esta reorientación manual introduce una importante fuente de incertidumbre en la repetibilidad de la posición del reflector, ya que los reflectores deben ser liberados de sus soportes y reposicionados para cada intervalo angular a medida que aumenta el ángulo de cobertura.

Para evitar este aspecto, en el método de calibración de *Circle Point Analysis* desarrollado en este trabajo se va a utilizar el Láser tracker mencionado conjuntamente con un reflector de seguimiento activo llamado Active Target. Este reflector, disponible en *Automated Precision Inc.* (API) [64], cuenta con tecnología de motorización incorporada que posiciona automáticamente el reflector para que siempre esté frente al laser tracker independientemente del movimiento. La precisión de este dispositivo es de  $\pm 12,5 \mu\text{m}$  en el centro óptico. El uso del *Active Target* supone una importante mejora en el conjunto del uso del método CPA. Mediante el uso de este dispositivo directamente sobre el efector final del robot, es posible realizar el proceso de medición completo para todos los ejes del robot, sin parar para cambiar la posición del reflector. Esto mejora el proceso de dos formas fundamentales: la primera, el proceso de medición en continuo reduce el tiempo necesario para la captura de datos; segunda, la precisión de la medición y por tanto de la calibración se mejora sensiblemente, con lo que se reduce la incertidumbre del posicionamiento del reflector.

## 2.5 Conclusiones

En este capítulo se ha realizado una revisión de los diferentes tipos de robots y su clasificación según el estado actual de la técnica, incluyendo no sólo robots industriales manipuladores, sino extendiéndola a robots en general. Asimismo, se han analizado la situación actual y estado del arte de las técnicas de evaluación de la precisión y repetibilidad de los robots. Tras la revisión bibliográfica realizada, se constata que la investigación actual en el campo de técnicas de evaluación y calibración de robots sigue utilizando la norma ISO 9283:1998 como el estándar de referencia para la evaluación de las características de los robots manipuladores industriales, y en concreto, para la evaluación de la precisión y repetibilidad de éstos. También se ha constatado que esta norma lleva en vigencia más de 20 años, y que, dado el avance de la técnica, han surgido más tipos de robots y aplicaciones, para los cuales la evaluación según norma ISO 9283:1998 es insuficiente. Este hecho ha generado la proliferación de numerosos estudios y trabajos que han tratado de dar

respuesta a estas necesidades en estos nuevos ámbitos de la técnica. Sin embargo, y dado que el trabajo que se presenta en esta tesis doctoral queda circunscrito a los robots manipuladores industriales, la citada norma ISO 9283:1998 da la suficiente cobertura a las necesidades de este trabajo de tesis. Por último, se ha revisado el estado del arte de los sistemas de evaluación y medición existentes en el campo de la calibración de robots industriales, refiriendo a los diferentes trabajos y aplicaciones, en función de la precisión y funcionalidad requerida. Esta revisión ha permitido analizar las diferentes características y prestaciones de los mismos, hecho que ha servido de base para la selección del sistema de medición a utilizar en el proceso de calibración cinemática mediante *Circle Point Analysis* y específicamente en el procedimiento de captura de puntos que hará posible la identificación de los parámetros cinemáticos del robot. Finalmente, se decide el uso de un sistema de medición de alto rango, un Láser Tracker API modelo 3 con un alcance de 15m y una precisión de  $\pm 15\mu\text{m}$  (ADM) o 1,5ppm conjuntamente con reflector de seguimiento activo llamado Active Target, con precisión de  $\pm 12,5\mu\text{m}$  en el centro óptico, que permite en el desarrollo del método *Circle Point Analysis* que se muestra en los siguientes capítulos, tomar datos de cada una de las articulaciones, maximizando el número de puntos tomados y evitando tener que reubicar y recalibrar el sistema de medición y su marco de referencia con la consiguiente pérdida de repetibilidad asociada. Esto mejora el proceso de dos formas fundamentales: la primera, el proceso de medición en continuo reduce el tiempo necesario para la captura de datos; segunda, la precisión de la medición y por tanto de la calibración se mejora sensiblemente, con lo que se reduce la incertidumbre del posicionamiento del reflector.

De esta forma se han sentado las bases necesarias para pasar al siguiente capítulo, en el que desarrollará el modelo cinemático del robot de utilización en este trabajo.

## 3 Modelado cinemático de Robots

---

### 3.1 Introducción

El modelo cinemático se puede definir, en el área de los brazos robots o robots manipuladores, como una relación matemática entre todas y cada una de las articulaciones que forman su estructura, y la posición y orientación del “*Tool Centre Point*” (TCP) o Punto central de la herramienta. El TCP se define según ISO 9787:2013 [65], como el punto definido para una aplicación dada en referencia al sistema de coordenadas del interface mecánico. Este sistema de referencia se denomina “*Tool Coordinate System*” (TCS), definido en el mismo estándar ISO, y es el sistema de coordenadas referido a la herramienta o útil que se encuentra solidario a la interface mecánica del robot. Como se explicará en detalle a lo largo de este capítulo, la definición de un modelo que describa la cinemática de un robot manipulador para cualquier posición de éste, se basa en situar sistemas de referencia en distintos lugares del brazo siguiendo una serie de reglas predefinidas que permitan obtener, mediante la combinación de parámetros geométricos, la relación entre dos sistemas de referencia sucesivos, de forma y manera que mediante la composición de estas relaciones se pueda obtener la posición y orientación del TCP en el extremo del robot, para cualquier posición de sus articulaciones, siempre con respecto al sistema de referencia global del equipo. Para conseguir este objetivo se necesitan que las relaciones entre dos sistemas de referencia sucesivos se definan mediante matrices de giro y traslación, y una tras otra estas relaciones se concatenen, de tal forma que al final se obtenga una matriz general que permita obtener cualquier punto del TCP en el sistema de referencia global. Es decir, que se tendrá la relación geométrica de la posición del TCP en función de variables que permitan describir cualquier cambio en la posición y orientación del mismo, con lo cual, las entradas del modelo matemático son, por una lado, las variables que describen la geometría del brazo robot, y por otro, los ángulos girados para cada articulación en cada momento, de tal modo que para cada valor de estas variables se puede determinar la relación entre la posición y orientación del TCP y el sistema de referencia original del brazo.

Un ejemplo de modelo cinemático de los brazos robots basado en la representación Denavit-Hartenberg se puede ver en la Figura 3.1. Asimismo se puede ver un ejemplo de la representación de Denavit-Hartenbert, aplicado a un robot manipulador o robot industrial real, en la Figura 3.2.

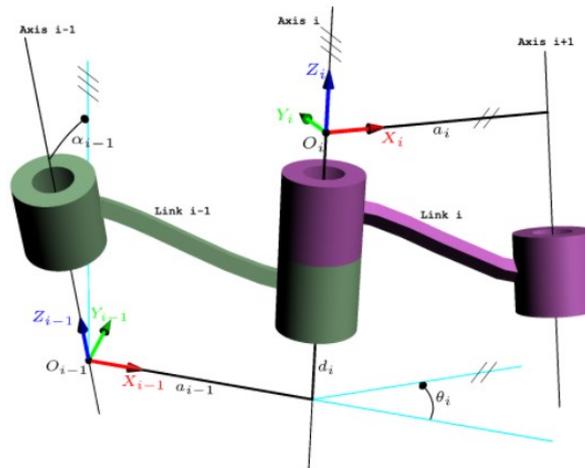


Figura 3.1. Representación Denavit-Hartenberg para el modelo cinemático de robots. Fuente: Vinogradov, O. (2000) Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms.

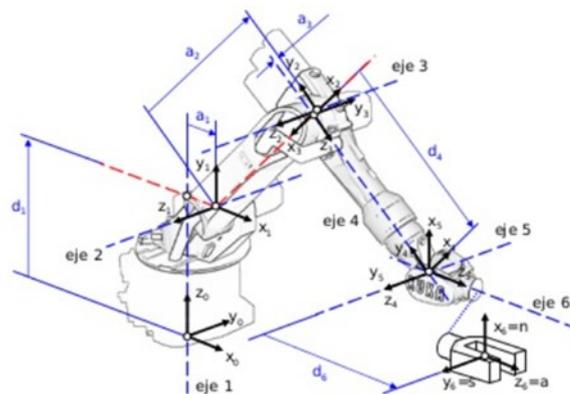


Figura 3.2. Representación parámetros D-H en un robot manipulador de 6 ejes. Fuente: Manipuladores robóticos, Miguel Torres T., 2005.

Es muy extensa la bibliografía existente en este campo debido a que numerosos investigadores han centrado sus estudios en el modelado cinemático y dinámico de posicionadores automáticos [66]–[68], bien sea robots de cualquiera de los tipos vistos en el anterior capítulo, bien sea de otros tipos de actuadores, buscando, determinando y mejorando los modelos matemáticos en cada caso, en función de las tareas y de la aplicación determinada. El modelado matemático va acompañado siempre, en todos estos estudios, de métodos de identificación de parámetros geométricos óptimos que minimicen el error de posicionamiento de la última articulación del robot manipulador, que es la que normalmente lleva el útil o herramienta que realiza la tarea para la cual el robot ha sido diseñado. El estudio de la precisión de posicionamiento de los brazos robot, el modelado matemático de su comportamiento y el estudio y corrección de sus fuentes de error para incrementar su precisión ha estado, desde principios de los años 60, en continua evolución,

aportando nuevas soluciones matemáticas dirigidas a conseguir métodos de identificación y corrección cada vez más exactos.

Los robots manipuladores, también denominados brazos robots, o como se ha visto en el apartado anterior, específicamente los denominados robots industriales, tienen como característica necesaria principal el alcanzar una elevada repetibilidad, pero en la gran mayoría de los casos no se necesita que alcancen un alto grado de precisión de posicionamiento, dado que son sistemas que realizan tareas repetitivas que habitualmente se programan por aprendizaje. Esto es lo que se hace en general, en la mayoría de la industria del automóvil, auxiliar del automóvil, tanto en las naves de montaje en bruto / carrocerías, como en las áreas de pintura o montaje final, por poner algunos ejemplos. Es por esto que estos sistemas tienen que ser capaces de repetir las posiciones programadas, sin que se necesite que estas posiciones sean precisas en un determinado sistema de coordenadas dentro de su espacio de trabajo. Por otra parte, existen aplicaciones de robots industriales en los que también se pueden necesitar una gran precisión en el posicionamiento del robot manipulador: en estas aplicaciones se necesitarán, sin duda alguna, métodos de modelado matemático, estimación de parámetros y correcciones de errores [10], [41]. Para los brazos robots o robots industriales convencionales se pueden esperar errores de posicionamiento en el rango de los milímetros, a diferencia, por ejemplo, de los sistemas de medición por coordenadas, o brazos de medición, que suelen tener errores de posicionamiento en el rango de decenas de micrómetros. Los robots industriales que se estudian en este trabajo, del tipo robot articulado, contienen más elementos mecánicos de transmisión en su cadena cinemática, lo cual hace que tengan más fuentes de error que al final influyen en su posicionamiento final.

## 3.2 Representación de la posición y orientación

El término pose (“*pose*” en Inglés) se utiliza en mecánica para representar tanto la posición como la orientación de un cuerpo. Es bien conocido que el número de grados de libertad que se necesitan para definir la pose de un objeto en un espacio tridimensional son seis: tres para la posición y tres para la orientación.

Para la definición de una u otra representación de la posición y orientación de un robot manipulador, se parte de la base del Teorema de Chasles [69], el cual define que cada movimiento, dentro de un espacio Euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , viene dado por un así llamado giro o movimiento de tornillo; esto es, por una rotación alrededor de una línea, llamada eje de giro, seguida por una traslación paralela a la misma línea. Como tal rotación y traslación se pueden conmutar, también se considera la traslación y rotación de un giro como si ocurriera en el orden contrario. En otras palabras, la posición y la orientación de las piezas se pueden tratar independientemente. La posición viene definida por un vector  $p \in \mathbb{R}^3$  que viene normalmente dado en coordenadas cartesianas. En el caso de la orientación, sin embargo, no hay un método

generalizado para describirla, y esto es debido principalmente al hecho de que el conjunto de orientaciones no es un espacio vectorial, sino un grupo de Lie.

La representación mínima de la orientación se define con tres parámetros, por ejemplo, que pueden ser los ángulos de Euler. Pero a pesar de su popularidad, los ángulos de Euler sufren del inconveniente de singularidades y ambigüedades [70], las cuales suceden cuando la primera y la última rotación son relativas al mismo eje. Hay otras parametrizaciones de orientación no mínimas las cuales usan un conjunto de  $3 + k$  parámetros, relacionado por un número  $k$  de restricciones holonómicas, para mantener los necesarios tres grados de libertad. Ejemplos comunes de estos son las matrices de rotación, las parejas de ejes-ángulo, y los parámetros Euler.

El problema del control de la pose consiste en hacer que la postura actual del robot (o cuerpo en general) alcance la postura deseada, a lo largo del tiempo. Este problema se muestra más relevante en los últimos años debido, por una parte, al uso de nuevos dispositivos electrónicos para obtener las señales de orientación o los sensores de posición, y por otra parte a la aplicación de herramientas matemáticas, como los cuaterniones unitarios [71] y *screws* (tornillos), los cuales facilitan el análisis del espacio de configuración de la pose.

Entre los diferentes sistemas que existen para representar la orientación de un objeto, los más relevantes pueden ser (según [72][73]):

- 1) Matriz de rotación,
- 2) Ángulos de Euler, incluyendo aquí los ángulos de Tait-Bryan (o ángulos de navegación),
- 3) Pareja eje-ángulo de rotación,
- 4) Parámetros de Euler, también llamados cuaterniones unitarios,
- 5) Cuaterniones duales,
- 6) Otros sistemas de representación, como pueden ser la representación Cayley-Klein[74], que representa las operaciones como operaciones sobre números complejos.

Se comienza en este trabajo abordando el tema de la representación de la posición, que es a priori la más sencilla, para pasar a ver los diferentes sistemas de representación de la orientación de un objeto.

### 3.2.1 Representación de la posición

Para localizar un cuerpo rígido en el espacio se necesitan herramientas que permitan conocer la ubicación espacial de sus puntos. En el plano la localización se describe por dos componentes independientes, mientras que en el espacio tridimensional se tiene un vector de tres componentes que definen la ubicación de un punto en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Existen diferentes formas de representar la posición en el espacio, aunque la más común es por medio de coordenadas cartesianas; pero existen además de éste otros métodos como las coordenadas cilíndricas o esféricas para el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

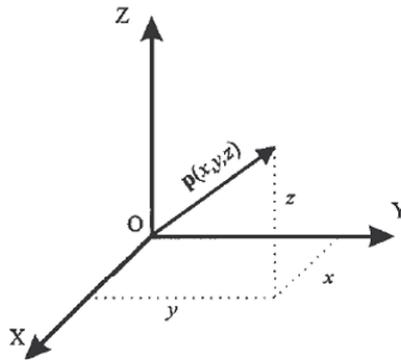


Figura 3.3. Punto  $p(x,y,z)$  en el espacio. Fuente: [76]

En coordenadas cartesianas en el espacio, sea  $P$  un punto en el espacio del sistema de coordenadas definido por  $OXYZ$ . Este punto se definirá por un vector de posición, de componentes  $(x,y,z)$ , de tal forma que su representación matemática será la siguiente [75], siendo  $p_x$ ,  $p_y$  y  $p_z$  las coordenadas o componentes en cada eje del sistema de coordenadas, tal y como se ve en la Figura 3.3 y en la ecuación (3—1):

$$P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

La posición de un punto en el espacio también se puede representar mediante coordenadas cilíndricas, tal y como se muestra en la Figura 3.4 [76]. En este caso las coordenadas o componentes son la distancia  $r$ , el ángulo  $\theta$  y la distancia  $z$  entre el punto y su proyección sobre el plano  $X_a - Y_a$ . Las dos primeras componentes, en realidad, tiene el mismo significado que unas coordenadas polares en el espacio bidimensional.

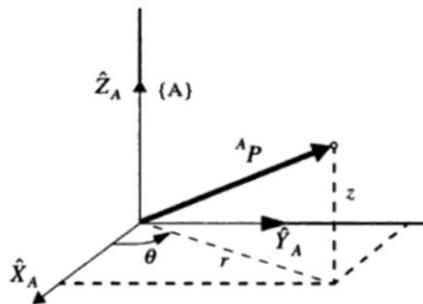


Figura 3.4. Representación de la posición empleando coordenadas cilíndricas. Fuente: [76]

Por último, en la Figura 3.5 se puede ver una representación de las coordenadas esféricas, que permite representar la posición de un punto en el espacio mediante la distancia  $r$ , y los dos ángulos  $\phi$  y  $\theta$ .

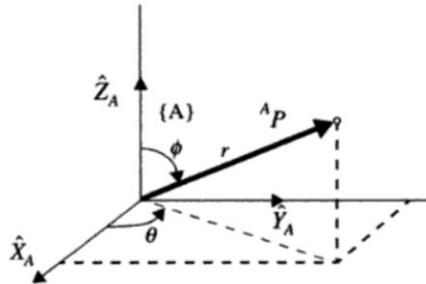


Figura 3.5. Representación de la posición empleando coordenadas esféricas. Fuente: [76]

En este trabajo, dado que se va a trabajar con robots manipuladores o robots industriales y estos son robots articulados, como se vio en el capítulo anterior, se tomará la representación por coordenadas cartesianas, que es la que mejor se adapta a las necesidades de desarrollo del trabajo a realizar.

### 3.2.2 Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler constituyen un conjunto de tres coordenadas angulares que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia de ejes ortogonales, que puede ser habitualmente móvil, respecto a otro sistema de referencia de ejes ortogonales normalmente fijos. Estos fueron introducidos Leonhard Euler en la mecánica del sólido rígido en su "*Theoria motus corporum solidorum*" [77], para describir la orientación de un sistema de referencia solidario con un sólido rígido en movimiento.

Dados dos sistemas de coordenadas  $xyz$  y  $XYZ$  con origen común, es posible especificar la posición de un sistema en términos del otro usando tres ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ . La definición matemática es estática y se basa en escoger dos planos, uno en el sistema de referencia y otro en el triedro rotado. En la Figura 3.6 serían los planos  $xy$  y  $x^*y^*$ . Escogiendo otros planos se obtendrían distintas convenciones alternativas, como por ejemplo la convención de Tait-Bryan [78] cuando los planos de referencia son no-homogéneos, convención que se usa mayormente en el área de la aeronáutica.

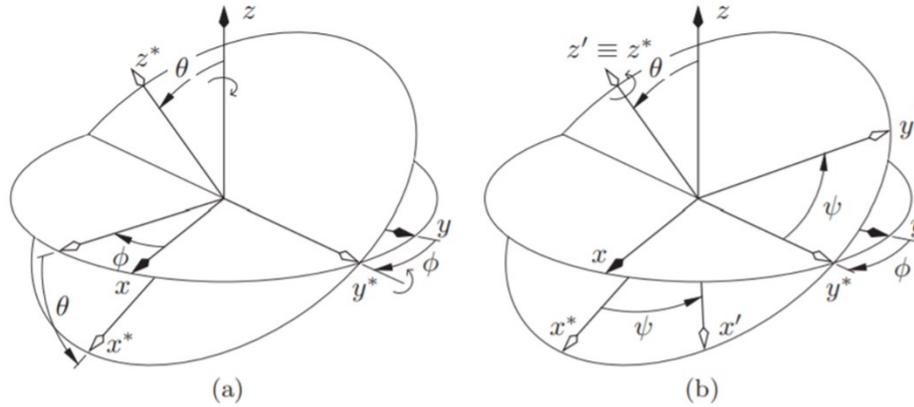


Figura 3.6. Representación ángulos Euler: sucesivas rotaciones, a) precesión, nutación, b) rotación intrínseca (spin)

La intersección de los planos coordenados  $xy$  y  $x^*y^*$  escogidos se llama línea de nodos, y se usa para definir los tres ángulos:

- $\phi$  es el ángulo entre el eje  $x$  y la línea de nodos.
- $\theta$  es el ángulo entre el eje  $z$  y el eje  $z^*$ .
- $\psi$  es el ángulo entre la línea de nodos y el eje  $x'$ .

Más adelante se establecerá que los tres ángulos de Euler descritos son los valores de las tres rotaciones intrínsecas que describen el sistema.

La transformación de coordenadas asociada con el cambio de orientación viene dada por una matriz de rotación  $3 \times 3$ ,  $R$ . Considerando que  $p$  es un vector cuyas coordenadas están expresadas en el sistema de referencia fijo,  $O_{xyz}$  (el sistema de referencia base), y  $p'$  es el mismo vector expresado en el sistema de coordenadas rotado, que será  $O'_{x'y'z'}$ , resulta la siguiente expresión en la ecuación siguiente:

$$p = R p' \tag{3-2}$$

Cuando  $R$  representa la rotación de un ángulo  $\alpha$  alrededor de un eje de coordenadas  $x$  esto tiene una forma ampliamente conocida, que se denota por  $R_{x,\alpha}$ . Lo mismo se puede aplicar en caso de que las rotaciones sean alrededor de los otros dos ejes  $y$  o  $z$ , considerando ángulos diferentes. Además, para describir completamente la orientación mediante los ángulos de Euler se tiene que realizar una única rotación arbitraria, que ha de ser una secuencia preseleccionada de rotaciones alrededor de los ejes de coordenadas, para al final, poder expresar cualquier matriz de rotación  $R$  como un producto ordenado de tres matrices. Dado el hecho de que la multiplicación de matrices no es una operación conmutativa, el orden a elegir es importante. De hecho, dependiendo del orden elegido, se tiene al final doce secuencias diferentes de multiplicación de matrices para estas tres rotaciones, y de facto, hay doce convenciones de ángulos de Euler:  $XYZ$ ,  $XZY$ ,  $YXZ$ ,  $YZX$ ,  $ZXY$ ,  $ZYX$ ,  $XYX$ ,  $XZX$ ,  $YXY$ ,  $YZY$ ,  $ZXZ$  y  $ZYZ$ .

Las numerosas posibles convenciones y sus múltiples interpretaciones físicas han llevado a cierta confusión en el uso del término “ángulos de Euler”. Diferentes textos usan diferentes convenciones, y algunas veces otros nombres propios han sido usados para describir alguna de estas convenciones, como por ejemplo los ángulos Fick (ZYX) o los ángulos Helmholtz (YZX). Afortunadamente, se han establecido algunas prácticas de estandarización en el marco del uso de ángulos Euler, en los diferentes campos. Por ejemplo, muchos libros de texto de física usan la convención ZXZ y refieren a los correspondientes ángulos de Euler denominándolos precesión, nutación y rotación intrínseca (o spin). Los ingenieros aeronáuticos generalmente usan la convención XYZ y se refieren a los tres ángulos como “roll, pitch, yaw”. La misma convención se usa asimismo en la industria del automóvil y en la industria de la máquina herramienta.

Entonces, tomando la convención ZXZ, y a partir de la relación entre los ángulos de Euler y el movimiento de los soportes de Cardano, se puede probar que todo sistema de coordenadas puede ser descrito con los tres ángulos de Euler. Si se llama  $[R]$  a la matriz de rotación tridimensional que representa la transformación de coordenadas desde el sistema fijo, que se podría asimilar al sistema de coordenadas original de la base del robot o al sistema de referencia inicial de una articulación, al sistema móvil, que podría ser la ubicación final de la articulación o del TCP del robot, el teorema de Euler sobre rotaciones tridimensionales afirma que existe una descomposición única en función de los términos de los tres ángulos de Euler según la ecuación (3—3):

$$\begin{aligned}
 [R] &= R_{\phi,\theta,\psi} = R_{z,\phi}R_{x,\theta}R_{z,\psi} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3-3)
 \end{aligned}$$

Hay que hacer destacar que tras cada uno de los giros el sistema de referencia queda girado, esto es, el primer giro de ángulo  $\psi$  es alrededor del eje Z1, el segundo giro de ángulo  $\theta$  es alrededor del eje X2, y el tercer giro de ángulo  $\theta$  es alrededor del eje Z3.

La ventaja fundamental de la representación mediante ángulos de Euler estriba en describir la posición y orientación de un objeto mediante un vector de seis elementos XYZ $\phi\theta\psi$ , lo que supone un ahorro de memoria con respecto a almacenar nueve componentes de la matriz de rotación completa con respecto a otras representaciones. Debido a este hecho, y a la generalización de soluciones para el problema cinemático inverso, la práctica totalidad de los modelos matemáticos en los robots industriales comerciales se basan en este tipo de representación para almacenar y controlar la postura (posición y orientación) del TCP del robot.

### 3.2.3 Eje y ángulo de rotación

Otro método para la determinación de la rotación es el método de **eje y ángulo de rotación**. Este método se basa en una única rotación del sistema u objeto entorno a un eje de rotación, el cual no coincide o no tiene por qué coincidir con los ejes coordenados, y de un ángulo con el giro

realizado alrededor de ese eje. La matriz de rotación  $R$  [79] se puede representar por medio de esa única rotación alrededor del eje adecuado, que viene representado por el vector unitario  $\vec{a}$ , y del ángulo de rotación adecuado, representado por  $\phi$ . Entonces esta matriz de rotación vendrá definida de la siguiente forma, según la ecuación (3—4):

$$R = \begin{bmatrix} a_x^2 + (a_y^2 + a_z^2)c_\phi & (1 - c_\phi)a_x a_y - a_z s_\phi & (1 - c_\phi)a_z a_x - a_y s_\phi \\ (1 - c_\phi)a_x a_y - a_z s_\phi & a_y^2 + (a_z^2 + a_x^2)c_\phi & (1 - c_\phi)a_y a_z - a_x s_\phi \\ (1 - c_\phi)a_z a_x - a_y s_\phi & (1 - c_\phi)a_y a_z - a_x s_\phi & a_z^2 + (a_x^2 + a_y^2)c_\phi \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

donde  $c_\phi$  y  $s_\phi$  son la forma abreviada para representar  $\cos(\phi)$  y  $\sin(\phi)$ , respectivamente.

De esta forma, se puede obtener también las ecuaciones (3—5) y (3—6) para determinar el eje y ángulo de rotación introducidos en el matriz de rotación, de forma y manera que se tendrá:

$$\phi = \cos^{-1} \left( \frac{R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1}{2} \right) \quad (3-5)$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \phi} \begin{bmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

Donde  $R_{ij}$  es el elemento de la matriz  $\mathbf{R}$  en la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima.

### 3.2.4 Parámetros de Euler, Cuaterniones

Otra representación habitual de la rotación es la representación mediante los **parámetros de Euler**. Ésta parte de la fórmula de Euler-Rodrigues [80][81] que describe la rotación de un vector en tres dimensiones. Se basa en la fórmula de rotación de Rodrigues, pero utiliza una parametrización diferente. La rotación se describe mediante cuatro parámetros de Euler, ideados igualmente por Leonhard Euler. La fórmula de Rodrigues es un método para calcular la posición de un punto girado, que se usa en algunas aplicaciones de software, como simuladores de vuelo y juegos de ordenador. La rotación sobre el origen se representa por cuatro números reales,  $(a,b,c,d)$ , de modo que se tendrá la ecuación (3—7):

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad (3-7)$$

Cuando se aplica una rotación, un punto en la posición  $\vec{x}$  gira a su nueva posición en  $\vec{x}'$ , teniéndose que el nuevo punto vendrá definido por la ecuación (3—8):

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix} \vec{x} \quad (3-8)$$

Donde la matriz de transformación de rotación es la matriz R que sería la siguiente, según la ecuación (3—9):

$$R = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

El parámetro  $a$  puede llamarse el parámetro escalar, mientras que la terna  $\vec{\omega} = (b, c, d)$  es el parámetro vectorial. En notación vectorial estándar, la fórmula de rotación de Rodrigues toma la siguiente forma compacta como se ve en la ecuación (3—10):

$$\vec{x}' = \vec{x} + 2a(\vec{\omega} \times \vec{x}) + 2(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})) \quad (3-10)$$

Por otro lado, cuando se tienen los parámetros en la forma  $(a, b, c, d)$ , el conjunto de parámetros  $(-a, -b, -c, -d)$  describen la misma rotación. Además de esta simetría, cada conjunto de parámetros describe una rotación única en el espacio tridimensional.

En cuanto a la composición de rotaciones, se tiene que la composición es en sí misma una rotación. Sean  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  y  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$  los parámetros de Euler de dos rotaciones. Los parámetros de la rotación compuesta (rotación 2 después de la rotación 1) vendrán dados por las siguientes ecuaciones (3—11),(3—12),(3—13) y (3—14):

$$a = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \quad (3-11)$$

$$b = a_1 b_2 + b_1 a_2 - c_1 d_2 + d_1 c_2 \quad (3-12)$$

$$c = a_1 c_2 + c_1 a_2 - d_1 b_2 + b_1 d_2 \quad (3-13)$$

$$d = a_1 d_2 + d_1 a_2 - b_1 c_2 + c_1 b_2 \quad (3-14)$$

Es sencillo, aunque muy largo y tedioso, verificar que también aquí se cumple que  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , lo cual es simplemente la identidad de los cuatro cuadrados de Euler.

Asimismo, cualquier rotación central en tres dimensiones está determinada únicamente por su eje de rotación y por el ángulo de rotación. Teniendo en cuenta que se puede representar el eje de rotación como el vector unitario  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ , y el ángulo de rotación por  $\phi$ , los parámetros de Euler para esta rotación se calculan de la siguiente manera según las ecuaciones (3—15), (3—16),(3—17) y (3—18):

$$a = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (3-15)$$

$$b = k_x \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (3-16)$$

$$c = k_y \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (3-17)$$

$$d = k_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (3-18)$$

Por el contrario, conocida la matriz de rotación  $R$  según la ecuación (3—9), y buscando obtener los parámetros de Euler a partir de esta matriz de rotación conocida, entonces se pueden determinar estos parámetros a través de la siguiente formulación, según se muestra en las ecuaciones (3—19),(3—20),(3—21) y (3—22):

$$a = \sqrt{\frac{\text{tr}(R) + 1}{4}} \quad (3—19)$$

$$b = \frac{R_{23} - R_{32}}{4a} \quad (3—20)$$

$$c = \frac{R_{31} - R_{13}}{4a} \quad (3—21)$$

$$d = \frac{R_{12} - R_{21}}{4a} \quad (3—22)$$

Hay que volver a recordar aquí que la suma de los cuadrados de los parámetros de Euler es igual a 1, por lo que sólo tres de ellos son independientes. Además, si  $\phi$  aumenta una rotación completa, de 360 grados, los argumentos seno y coseno sólo aumentan 180 grados. Además, las rotaciones de 180 grados sobre cualquier eje dan como resultado que  $a=0$ . En particular, la transformación de identidad (rotación nula,  $\phi=0$ ) corresponde a unos valores de los parámetros tales que se tendrá la ecuación (3—23):

$$(a, b, c, d) = (\pm 1, 0, 0, 0) \quad (3—23)$$

Además de esto, los parámetros de Euler pueden verse como los **coeficientes de un cuaternión**. Los cuaterniones fueron descubiertos en 1843 por el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). Estos se pueden usar para conseguir una mejor interpolación de la orientación, ya que no sufren de las singularidades como en los ángulos de Euler. En el caso de los cuaterniones, los coeficientes se pueden asimilar por un lado, a que el parámetro escalar  $a$  es la parte real, y los parámetros vectoriales  $b, c, d$  son las partes imaginarias. Así se tiene el cuaternión, según se muestra en la ecuación (3—24):

$$q = a + bi + cj + dk \quad (3—24)$$

que es uno de las dos formulaciones [73] que puede tener un cuaternión, el cual sin embargo también se puede mostrar también, según otros textos, con la siguiente nomenclatura, tal y como se en la ecuación (3—25):

$$q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \quad (3—25)$$

Donde  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{R}$  y las tres componentes imaginarias  $i, j, k$  se definen en la ecuación (3—26):

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1 \quad (3—26)$$

Y tienen las siguientes propiedades que se ven en la ecuación (3—27):

$$ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j \quad (3-27)$$

La otra definición de cuaternión es como un par  $(s, \vec{v})$ , donde  $s \in \mathfrak{R}$  es un escalar, y  $\vec{v} \in \mathfrak{R}^3$ . Por definición, si tenemos que  $\lambda$  es un escalar, un cuaternión satisface la siguiente propiedad que se muestra en la ecuación (3—28):

$$\lambda(s, \vec{v}) = (\lambda s, \lambda \vec{v}) \quad (3-28)$$

La adición y multiplicación entre dos cuaterniones  $q_1$  y  $q_2$  se define respectivamente por las ecuaciones (3—29) y (3—30):

$$q_1 + q_2 = (s_1 + s_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) \quad (3-29)$$

$$q_1 q_2 = (s_1 s_2 - \vec{v}_1 \vec{v}_2, s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \quad (3-30)$$

La conjugación y norma de un cuaternión vienen dados por las ecuaciones (3—31) y (3—32):

$$q^* = (s, -\vec{v}) \quad (3-31)$$

$$\|q\| = qq^* \quad (3-32)$$

Si  $\|q\| = 1$ , entonces  $q$  es un **cuaternión unitario**. El cuaternión unitario se puede usar para representar una rotación de un ángulo  $\theta$  alrededor de un vector unitario  $\vec{n}$  en el espacio tridimensional Euclidiano, como se muestra en la ecuación (3—33):

$$q = \left( \cos \frac{\theta}{2}, \vec{n} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (3-33)$$

### 3.2.5 Cuaterniones duales

Otra representación de la rotación que aparece en la bibliografía existente es la representación de la rotación mediante cuaterniones duales. Para ello hay que introducir primeramente el concepto de número dual.

Los números duales fueron introducidos por Clifford [82] y se definen según la ecuación (3—34):

$$\hat{z} = a + \varepsilon a', \text{ con } \varepsilon^2 = 0 \text{ pero } \varepsilon \neq 0 \quad (3-34)$$

Donde  $a$  es la parte real y  $a'$  es la parte dual.

El operador  $\varepsilon$  se puede usar para representar cualquier cantidad dual como vector dual, cuaternión dual, etc. Un concepto útil se refiere a los vectores duales con partes dual y real ortogonal. Tales particulares vectores duales representan líneas en  $\mathfrak{R}^3$  conocidas como coordenadas Plücker (o líneas de Plücker). La parte real  $\vec{l}$  es la dirección de la línea y la parte dual  $\vec{m} = \vec{p} \times \vec{l}$  es su momento, como se ve en la Figura 3.7.

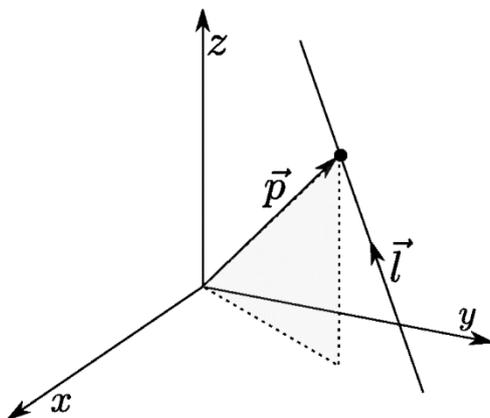


Figura 3.7. Representación geométrica de una línea Plücker. Fuente: [73]

El producto interior entre estos dos vectores es igual al coseno del ángulo dual  $\hat{\theta} = \theta + \varepsilon d$ , el cual tiene la siguiente interesante interpretación geométrica:  $\theta$  es el ángulo entre las dos líneas en el espacio, y  $d$  su distancia mínima perpendicular a ambas líneas.

En cuanto al cuaternión dual, éste se define como un número dual donde  $q$  y  $q'$  son cuaterniones, según la ecuación (3—35):

$$\underline{q} = q + \varepsilon q' \quad (3-35)$$

Alternativamente, los cuaterniones duales se pueden mapear como un vector espacial del tipo que se ve en la ecuación (3—36):

$$\underline{\vec{q}} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8]^T \quad (3-36)$$

Las operaciones algebraicas normales con cuaterniones, con el añadido del operador  $\varepsilon$ , se pueden aplicar igualmente a los cuaterniones duales, como por ejemplo en las ecuaciones (3—37)(3—38)(3—39):

$$\lambda \underline{q} = \lambda q + \varepsilon \lambda q' \quad (3-37)$$

$$\underline{q}_1 + \underline{q}_2 = q_1 + q_2 + \varepsilon(q'_1 + q'_2) \quad (3-38)$$

$$\underline{q}_1 \underline{q}_2 = q_1 q_2 + \varepsilon(q_1 q'_2 + q'_1 q_2) \quad (3-39)$$

La norma de un cuaternión dual viene dada por  $\|\underline{q}\|^2 = \underline{q} \underline{q}^*$ , siendo  $\underline{q}^* = q^* + \varepsilon q'^*$ , y la condición para cuaternión dual unitario entonces se tendrá como muestra la ecuación (3—40):

$$qq^* = 1, \text{ y además } q^*q' + q'^*q = 0 \quad (3-40)$$

Los cuaterniones duales unitarios se pueden usar para representar cualquier transformación rígida incluyendo traslación y rotación, de forma similar al modo en que los cuaterniones se pueden usar para representar rotaciones. La transformación rígida de una línea a través de un punto  $\vec{p}$ , representada por su dirección  $\vec{l}$  y por su momento  $\vec{m} = \vec{p} \times \vec{l}$ , viene dado por la ecuación (3-41):

$$\underline{q}(l + \varepsilon m)\underline{q}^* \quad (3-41)$$

Donde el cuaternión dual  $\underline{q} = q + \varepsilon q'$ , con  $q' = \frac{1}{2}tq$ , con  $q$  siendo el cuaternión unitario que describe la rotación, y  $t = (0, \vec{t})$  es el cuaternión que describe la traslación representada por el vector  $\vec{t}$ , y  $l$  y  $m$  son los cuaterniones definidos como  $l = (0, \vec{l})$  y  $m = (0, \vec{m})$ , respectivamente.

Por tanto, el cuaternión dual unitario es una herramienta útil para representar la transformación entre dos sistemas de coordenadas  $F_1$  y  $F_2$ , resultante o bien de una rotación  $q$  sucedida por una traslación  $t_2$  con respecto a  $F_2$ , de lo que se tendrá la ecuación (3-42),

$$\underline{q} = q + \varepsilon \frac{1}{2}qt_2 \quad (3-42)$$

o bien una traslación  $t_1$  con respecto a  $F_1$  sucedida por una rotación  $q$ , que vendrá definida, en este caso, por la ecuación (3-43):

$$\underline{q} = q + \varepsilon \frac{1}{2}t_1q \quad (3-43)$$

### 3.2.6 Matrices de rotación

Las matrices de rotación son probablemente el método más extendido para describir la orientación, principalmente debido a la sencillez de uso de las operaciones de álgebra de matrices. Consideremos por ejemplo un sistema de referencia  $S_0$  y otro en movimiento  $S_b$ . En lo que a la orientación se refiere, asumamos que los orígenes de ambos sistemas de referencia coinciden en el mismo punto. La matriz de rotación de  $S_b$  con respecto a  $S_0$  la podemos denominar  $R \in S_0(3)$ , teniendo en cuenta que  $S_0(3)$  es el grupo de todos los movimientos de rotación sobre el origen de coordenadas en el espacio Euclídeo tridimensional  $R^3$ .

Entonces podemos designar un punto, según el sistema referencia  $S_0$ , y el mismo punto según el sistema de referencia  $S_b$ , de acuerdo a las ecuaciones (3-44) y (3-45):

$$\vec{P}_{xyz}\{S_0\} = [p_x, p_y, p_z]^T = p_x\vec{l}_x + p_y\vec{l}_y + p_z\vec{l}_z \quad (3-44)$$

$$\vec{P}_{uvw}\{S_b\} = [p_u, p_v, p_w]^T = p_u \vec{l}_u + p_v \vec{j}_v + p_w \vec{k}_w \quad (3-45)$$

Las coordenadas del punto  $P$  con respecto al sistema fijo se pueden determinar utilizando el producto punto entre el vector  $\vec{P}_{u,v,w}$  y el unitario correspondiente a la coordenada que se desea encontrar. Por tanto, se tendrán las ecuaciones (3-46),(3-47) y (3-48):

$$p_x = \vec{P}_{u,v,w} \cdot \vec{i}_x = (p_u \vec{l}_u + p_v \vec{j}_v + p_w \vec{k}_w) \cdot \vec{i}_x \quad (3-46)$$

$$p_y = \vec{P}_{u,v,w} \cdot \vec{j}_y = (p_u \vec{l}_u + p_v \vec{j}_v + p_w \vec{k}_w) \cdot \vec{j}_y \quad (3-47)$$

$$p_z = \vec{P}_{u,v,w} \cdot \vec{k}_z = (p_u \vec{l}_u + p_v \vec{j}_v + p_w \vec{k}_w) \cdot \vec{k}_z \quad (3-48)$$

Estas tres ecuaciones se pueden presentar en notación matricial de la siguiente forma, según la ecuación (3-49):

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}_x \vec{l}_u & \vec{i}_x \vec{j}_v & \vec{i}_x \vec{k}_w \\ \vec{j}_y \vec{l}_u & \vec{j}_y \vec{j}_v & \vec{j}_y \vec{k}_w \\ \vec{k}_z \vec{l}_u & \vec{k}_z \vec{j}_v & \vec{k}_z \vec{k}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

A partir de estas ecuaciones podemos obtener la equivalencia que se ve en la ecuación (3-50):

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (3-50)$$

De donde se tiene que la matriz de rotación  $R$  es la que muestra la ecuación (3-51):

$$R = \begin{bmatrix} \vec{i}_x \vec{l}_u & \vec{i}_x \vec{j}_v & \vec{i}_x \vec{k}_w \\ \vec{j}_y \vec{l}_u & \vec{j}_y \vec{j}_v & \vec{j}_y \vec{k}_w \\ \vec{k}_z \vec{l}_u & \vec{k}_z \vec{j}_v & \vec{k}_z \vec{k}_w \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

Donde  $R$  es la matriz de rotación que define la rotación del sistema de referencia  $S_b$  con respecto al sistema  $S_o$ , y que contiene los vectores unitarios del sistema de coordenadas móvil con respecto al sistema de coordenadas fijo, y que es una matriz ortonormal.

Asimismo, esta matriz también se puede representar en función de sus cosenos directores. A continuación se muestran las matrices de rotación en función de sus cosenos directores para los giros respecto a los tres ejes. Una rotación del sistema móvil  $S_b$  de un ángulo  $\alpha$  con respecto al eje  $OX$  se representaría según muestra la ecuación (3-52):

$$R(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

De la misma, podemos representar la rotación del sistema de referencia móvil  $S_b$  con respecto al  $S_o$ , cuando se gira un ángulo  $\phi$  con respecto al eje OY, según muestra la ecuación (3—53):

$$R(y, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3-53)$$

E igualmente se puede representar la rotación del sistema  $S_b$  con respecto al  $S_o$ , cuando se gira un ángulo  $\theta$  con respecto al eje OZ, según se ve en la ecuación (3—54):

$$R(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

Las anteriores tres matrices se denominan matrices básicas de transformación para un sistema de tres dimensiones. Las rotaciones que vienen definidas por cada una de estas tres ecuaciones se pueden ver representadas gráficamente en la Figura 3.8 [83].

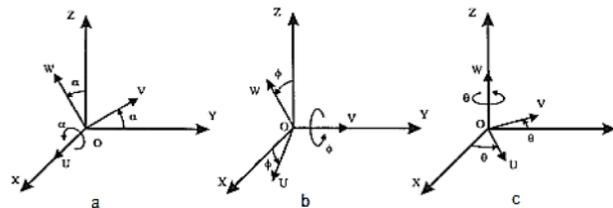


Figura 3.8. Rotación del Sistema OUVW alrededor de x, un ángulo  $\alpha$ , de y, un ángulo  $\phi$ , y de z, un ángulo  $\theta$ . Fuente: M.V. Granja Oramas, Modelación y Análisis de la cinemática directa e Inversa del Manipulador Stanford de seis grados de libertad [83]

A partir de estas matrices, se puede obtener la matriz de transformación compuesta para representar la aplicación continua de varias rotaciones. Es importante recordar y resaltar que el producto de matrices no es conmutativo, por lo que el orden en el que se realizan las operaciones debe tomarse en cuenta. Por tanto, si tenemos, por ejemplo, que se aplica una rotación del sistema de referencia  $S_o$  al sistema de referencia  $S_b$ , y que primero se aplica una rotación de un ángulo  $\alpha$  sobre OX, a continuación una rotación de un ángulo  $\phi$  sobre OY, y seguidamente una rotación de un ángulo  $\theta$  sobre OZ, la rotación total se podrá expresar como se muestra en la ecuación (3—55):

$$R(z, \theta)(y, \phi)(x, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3-55)$$

Es decir, si al sistema de coordenadas móvil se le realizan varios movimientos de rotación referidos al último sistema de coordenadas, en este caso se puede multiplicar las matrices de rotación en la misma secuencia de los movimientos, lo cual se conoce como postmultiplicación matricial. En caso de que los movimientos sean realizados con referencia a un sistema de

coordenadas fijo, se tienen que multiplicar las matrices en secuencia inversa a la de los movimientos de rotación, de tal forma que a este proceso se le llama premultiplicación matricial.

### 3.2.7 Matrices de Transformación homogénea MTH

En los apartados anteriores se ha visto la forma de realizar la representación algebraica de la traslación de un punto o sistema de coordenadas, así como los distintos tipos de formas que se tienen para conseguir la representación de la rotación de un objeto, desde los ángulos de Euler, los pares eje-ángulo de rotación, los parámetros de Euler, que se pueden asimilar en su forma de cuaterniones, y los cuaterniones duales, en el que se ha tenido que introducir el concepto de número dual, el cual se puede aplicar tanto a los cuaterniones, como a vectores, y otros. Por último se ha presentado la matriz de rotaciones, en la cual se ha mostrado con distintas aproximaciones, en función de si la rotación a considerar es en torno al eje de coordenadas X, Y o Z. En el presente trabajo se va a tomar el cálculo matemático de las rotaciones mediante las matrices de rotación, ya que es un método que permite realizar una clara correlación entre la aproximación física, que es lo que posteriormente se verá con el método de generación de puntos sintética a través del Análisis del Círculo de Puntos (*Circle Point Analysis*, CPA), y la aproximación matemática que se va utilizar para realizar el cálculo.

Hay que recordar como se muestra al principio de este capítulo que el objetivo de todos estos métodos es, no sólo definir y representar la posición de un punto u objeto, su traslación o su rotación, o la traslación y rotación de un sistema de coordenadas a otro, para transformar la definición del punto o sistema de coordenadas de un sistema a otro, sino llegar a definir completamente lo que se ha denominado como *pose*, esto es, la traslación y la orientación conjuntamente. Para llegar a definir completamente esta pose se necesita conjugar ambas descripciones en una sola definición matemática, lo cual se consigue mediante la Matriz de Transformación Homogénea (MTH).

La matriz de transformación homogénea (MTH) se define como una matriz de dimensión 4x4, que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro. Su representación matemática se puede ver en la ecuación (3—56):

$$MTH = \begin{bmatrix} R_{3x3} & T_{3x1} \\ f_{1x3} & w_{1x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix} \quad (3—56)$$

donde, como se puede ver en la propia ecuación,  $R_{3x3}$  representa la matriz de rotación 3x3,  $T_{3x3}$  representa el vector que define la traslación de dimensión 3x1,  $f_{1x3}$  es el vector que aporta la perspectiva, y  $w_{1x1}$  es una submatriz 1x1 que es la que define el factor de escalado. En las aplicaciones de representación de la pose y en los cálculos que se realizan para el modelo cinemático y la posterior calibración cinemática de los robots industriales y brazos robots, tanto el parámetro de perspectiva como el escalado no se usan, por lo que se toma que las componentes de  $f$  son nulas, y la componente de  $w$  como escala se define en la unidad, ya que esta escala no se

aplica. Por tanto, la matriz de transformación homogénea, que se puede llamar  $A$ , vendrá dada por la siguiente ecuación (3—57):

$$A = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & T_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

Esta matriz representa la orientación y posición de un sistema de coordenadas  $Oxyz$  rotado y trasladado a un sistema de referencia  $O'xyz$ . Esta matriz entonces puede servir para conocer las coordenadas  $(r_x, r_y, r_z)$  del vector  $r$  en el sistema  $O'xyz$  a partir de sus coordenadas  $(r_u, r_v, r_w)$  en el sistema  $Oxyz$ , según muestra la ecuación (3—58):

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

### 3.3 Modelado cinemático de robots manipuladores

En el estudio de los robots manipuladores, la descripción cinemática de los mismos es una pieza fundamental para poder determinar la relación entre las articulaciones del robot y la posición del efector final o TCP. En concreto, la cinemática de un robot es el área que estudia los movimientos de un robot, de tal forma que el análisis cinemático de éste engloba no solamente la posición, sino también la velocidad y aceleración de cada una de las articulaciones y elementos del robot, eso sí, sin considerar las fuerzas que causan el movimiento. Esa relación, la que existe entre el movimiento y fuerzas asociadas, se encuadran en la dinámica de robots.

El estudio cinemático de los robots se puede considerar desde dos perspectivas diferentes: la cinemática directa y la cinemática inversa. En la cinemática directa, el problema consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto al sistema de coordenadas que se toma como referencia, partiendo de que se conocen los valores de las articulaciones y parámetros geométricos de los elementos del robot. Es decir, se tiene que tener un modelo paramétrico de este comportamiento cinemático que permita determinar la relación existente entre las variables de cada articulación y la posición de la herramienta o TCP del robot, para cualquier posición del brazo robot. De forma generalizada un modelo cinemático directo puede formularse según la siguiente ecuación (3—59):

$$y = f(\theta_i, p) \quad (3-59)$$

siendo  $i$  un valor desde 1 hasta  $n$ , para un brazo robot con  $n$  articulaciones. Este modelo por tanto permite calcular la posición y orientación del efector final  $y$  en función del valor de las variables de las articulaciones  $\theta_i$ , y de las ecuaciones definidas en  $f$ , que dependerán del vector de parámetros  $p$ . Como se ha visto en el apartado anterior, en función del modelo geométrico elegido la forma de obtener las ecuaciones en  $f$  variará, así como el número de parámetros a tener en cuenta en  $p$ .

Por otro lado, la cinemática inversa trata de resolver el problema inverso, esto es, la obtención de los parámetros numéricos de cada una de las articulaciones, a partir de la posición y orientación del efector final o TCP del robot en su extremo. Es decir, se trata de establecer un modelo matemático, que permita una posterior identificación de los parámetros geométricos óptimos. Considerando y la posición y orientación del efector final del robot, y  $p$  el vector de los parámetros de las articulaciones, la expresión que para obtener el valor de las variables de las articulaciones vendrá dada por la siguiente ecuación (3—60):

$$\theta_i = f^{-1}(y, p) \quad (3—60)$$

Sin embargo, el cálculo de la cinemática inversa es un problema complejo que consiste en la resolución de una serie de ecuaciones, cuya solución generalmente no es única. Esto provoca problemas de identificación de las posibles soluciones de combinaciones físicamente posibles del robot, para las cuales se tiene la posición dada del efector final.

La selección de un modelo cinemático u otro se tiene que hacer en base a consideraciones no sólo acerca de su funcionamiento, sino también como acerca de su idoneidad para poder llevar a cabo un proceso de calibración con éxito. Everett et al. [84] y D.Chao-Chia [85] hacen una propuesta de cuáles son las características que debe tener un buen modelo cinemático de un manipulador serie para llevar a cabo una posterior calibración, mostrando las siguientes tres propiedades:

- Debe ser *Completo*: debe contener el mínimo número de parámetros requeridos para describir todas las variables del manipulador, y viene dado por la ecuación:  $C = 4R + 2P + 6$ , donde C es el número total de parámetros independientes R es el número de articulaciones de revolución, y P es el número de articulaciones prismáticas, y el número 6 es el número de parámetros que se necesitan para describir completamente la pose del sistema de coordenadas del efector final relativa al sistema de coordenadas origen.
- *Proporcionalidad*: esta propiedad se refiere al hecho de que un buen modelo cinemático debe reflejar pequeñas variaciones en los parámetros cinemáticos, ante pequeñas variaciones o desviaciones en la estructura del robot. Dado el hecho de que la mayoría de los procedimientos de calibración se basan en algoritmos numéricos, un modelo cinemático debe tener esta proporcionalidad, para asegurar la estabilidad numérica.
- *Equivalencia*: se refiere a la habilidad y capacidad de transformar los parámetros cinemáticos de un modelo a otro modelo. Esta propiedad evita que un modelo pueda producir mejores resultados que otros.

Uno de los métodos más extendidos para desarrollar modelos cinemáticos es el propuesto por Denavit y Hartenberg (D-H) [2], en 1955. Inicialmente propuesto para modelar el movimiento de un mecanismo de cadena cerrada, es decir, todas sus barras conectadas entre sí en un lazo cerrado, posteriormente se aplicó del mismo modo a mecanismos de cadena abierta, ya que éste es un caso particular del anterior. El método de D-H consiste en asignar un sistema de coordenadas a cada articulación en su eje de rotación, en el caso de articulaciones rotativas, y expresar la relación entre los sistemas de referencia consecutivos mediante matrices de transformación homogéneas.

Todas las transformaciones individuales entre los sistemas de referencia consecutivos pueden ser multiplicadas para obtener como resultado una única matriz de transformación homogénea, que relaciona el sistema de referencia de la última articulación del robot, donde se encuentra la herramienta o TCP, y el sistema de coordenadas global del robot, que se encuentra en la base del robot. De esta forma la matriz de transformación obtenida será una función de los parámetros geométricos definidos en el modelo, así como de las variables de cada articulación, diferentes en cada posición del brazo.

A partir del trabajo de Denavit y Hartenberg, Pieper [86] aplicó esta representación matricial de las relaciones entre dos barras conectadas por una articulación, para sistematizar la obtención del modelo cinemático directo de robots. Posteriormente Paul y Shimano [87] y otros investigadores divulgaron y popularizaron el método de Denavit-Hartenberg (D-H).

Sin embargo, el modelo de D-H presenta una indeterminación en el caso de la existencia de articulaciones sucesivas que tengan ejes paralelos, ya que en este caso no existiría una única recta normal a ambos ejes, lo cual generaría una indeterminación. Incluso cuando se consideran sistemas reales, en el cual dos ejes teóricamente paralelos en la realidad no lo son, y se puede decir que son casi-paralelos, los parámetros resultantes no son continuos, y pequeñas variaciones en las alineaciones de estos ejes repercutirá en el resultado, en los parámetros obtenidos, provocando grandes variaciones en el resultado, lo cual hace que el modelo no pueda ser aplicado. Debido a este problema, numerosos métodos se han desarrollado para lograr solucionar esta indeterminación en el modelo de D-H, formulando modificaciones que incluyen tanto cuatro, cinco o más parámetros. Hayati y Mirmirani [88] en 1985 proponían un nuevo método de calibración aplicado a robots que permite cualquier combinación de articulaciones prismáticas o rotativas con ejes paralelos, haciendo que el parámetro  $d_i$  fuera cero, e incluyendo un nuevo parámetro de rotación  $\beta_i$  que relaciona ambos sistemas de referencia consecutivos con ejes paralelos o casi-paralelos. Asimismo también Hayati [89] propuso modelos de cinco parámetros para articulaciones prismáticas. Hsu and Everett [90], y también Veitschegger y Wu [91], [92] y [93] presentan modelos con cinco parámetros aplicables a cualquier tipo de articulación, y que se pueden usar igualmente con ejes de articulaciones nominalmente perpendiculares. Estas aproximaciones se usan comúnmente como modelos cinemáticos para realizar la calibración, ya que permiten mantener la simplicidad de la convención del modelo de D-H.

Por otra parte, existen otros modelos alternativos desarrollados para la calibración cinemática. Por un lado, Stone, Sanderson y Neuman [94] proponen un modelo conocido como S-Model, que añade dos nuevos parámetros  $\gamma_i, b_i$  al modelo D-H como desplazamientos (*offsets*) de traslación y rotación de los ejes que modelizan la posición variable de los sistemas de referencia de las articulaciones. Esto significa que este modelo permite que cada sistema de coordenadas para cada articulación se vea desplazado una distancia y ángulo arbitrario de la ubicación definida teóricamente por el modelo D-H. Este modelo permite obtener una solución a la indeterminación del modelo de D-H, pero teniéndose un modelo en el que los parámetros identificados no se pueden determinar exactamente debido a la redundancia paramétrica. También se aportaron modificaciones al modelo de D-H con el trabajo de Morris y Driels [95]. Hollerbach y Wampler [96] propusieron una modelización basada en una mezcla de parámetros de D-H y la notación propuesta por Hayati, de tal forma que se utilizan para el modelado geométrico unos parámetros u otros

según sea el tipo de articulación, para consecuentemente evitar indeterminaciones, como en el modelo D-H original.

Por otro lado, Zhuang y otros [97],[98] propusieron el modelo CPC, *Complete and Parametrically Continuous*, el cual puede representar eslabones consecutivos de una manera continua usando seis parámetros, tres de los cuales son usados para representar la orientación, y los otros tres para la posición. Sin embargo, este modelo tiene el mismo problema de redundancia de parámetros que el S-Model.

Otra alternativa a los modelos cinemáticos descritos anteriormente, son los métodos de identificación de parámetros indirecto empleando los modelos de referencia-cero (*zero-reference models*) [67],[99], los cuales buscan los parámetros esenciales, tales como el tornillo cinemático, que genera una configuración relativa a la denominada “configuración de referencia cero”. Los modelos de referencia cero simplifican el proceso de modelado, y no restringen como se definen los sistemas de coordenadas de las articulaciones. Además, tal y como se definía anteriormente en las características de un modelo cinemático, este modelo es completo, garantiza la continuidad de los parámetros [100],[101] y la proporcionalidad del modelo, aunque se tiene que seguir tratando la redundancia de los parámetros [102]. Entre los modelos de referencia cero existentes, el modelo cinemático POE (*Product of Exponentials*) es particularmente interesante [103],[101]. Los parámetros cinemáticos relativos al movimiento de tornillo, basados en el modelo POE, varían ligeramente con cambios en los ejes de las articulaciones, lo que garantiza la bondad del modelo. Park y Okamura [101] propusieron la formulación del error basado en el estándar POE para la calibración. Chen y Yang [104] establecieron un modelo POE local que permite la representación de las coordenadas de giro con respecto a un sistema de referencia asignado arbitrariamente para mejorar el modelado cinemático. He et al. [105] desarrolló un método analítico que efectivamente elimina los posibles errores asociados con la redundancia de los parámetros cinemáticos del modelo POE. Más recientemente, Yang et al. [106] propusieron un modelo cinemático mínimo usando la fórmula POE que era libre de parámetros cinemáticos dependientes mediante la definición de relaciones cinemáticas invariantes existentes en las articulaciones físicas.

Sin embargo, y al contrario de los métodos de calibración que tratan con parámetros geométricos, sólo se pueden encontrar un puñado de estudios que consideren los parámetros no geométricos, como son la elasticidad de la articulación, el desgaste de los engranajes, y los efectos térmicos, en la calibración, y la mayoría se enfocan en la no rigidez de las articulaciones, esto es, en su efecto elástico [107]–[109]. Las articulaciones de los robots en muchos robots manipuladores industriales generan impulsos armónicos debido a la alta reducción de sus engranajes dentro de un pequeño volumen y falta de reacción, pero su inconveniente principal es su relativamente baja rigidez estructural causada por el uso de trayectorias coaxiales de tipo *spline*<sup>1</sup> [110]. Así, la precisión cinemática está afectada por la indeterminación de la deformación elástica en los impulsos armónicos, cuando la carga se incrementa. Además, algunos recientes tipos de robots

---

<sup>1</sup> Función *Spline* es la función continua usada por el controlador del robot para aproximar un conjunto de funciones que son unívocamente definidas a partir de un conjunto de subintervalos. La función de aproximación y el conjunto de funciones que son aproximadas intersectan en un número suficiente de puntos la curva *spline* resultante, para asegurar un alto grado de precisión en la aproximación. El propósito de la función es permitir que el robot realice la tarea sin que se produzca un movimiento a golpes, sino continuado.

manipuladores, por ejemplo, los brazos robots ligeros centrados en personas [111], o los robots colaborativos [112],[113], simplemente por mencionar algunos, han sido intencionadamente contruidos con menor rigidez o fabricados con elementos elásticos, los así llamados articulaciones y actuadores elásticos en serie, para proteger a los seres humanos durante las tareas realizadas de forma cooperativa. Los mecanismos de las articulaciones, que pueden alterar la rigidez de las articulaciones dependiendo de la cantidad de carga externa, han sido asimismo desarrollados para ese fin [114]. Es evidente, sin embargo, que el paradigma del diseño del robot recientemente ha cambiado y llevará a reducir la precisión cinemática, aunque ayude por otra parte a incrementar el nivel de seguridad en entornos colaborativos en los que el robot y ser humano trabajan conjuntamente.

### 3.4 Representación según modelo de Denavit-Hartenberg

El modelo propuesto por Denavit y Hartenberg (D-H) [2] establece el modo en que deben seleccionarse los sistemas de coordenadas asociados a los eslabones o barras de la cadena cinemática del robot, para sistematizar la obtención de las matrices de cambio de coordenadas entre el sistema de referencia a la barra  $i-1$  y la barra  $i$ . La multiplicación de estas matrices permite obtener la matriz de cambio de coordenadas entre los sistemas asociados a la base y al extremo del robot o TCP del robot, es decir, conocer la expresión que define la pose del TCP (posición y orientación) en función de las coordenadas de cada articulación. Estas relaciones, definidas en este sentido (cálculo de la matriz de cambio de sistemas de referencia de la base del robot al TCP) constituye el denominado Modelo Cinemático Directo.

El método de Denavit-Hartenberg, como se puede ver representado en la Figura 3.9, permite establecer la relación entre dos barras rígidas consecutivas unidas por una articulación de un grado de libertad, mediante una matriz  ${}^{i-1}A_i$ , función de cuatro parámetros  $(\theta, d, a, \alpha)$  asociados

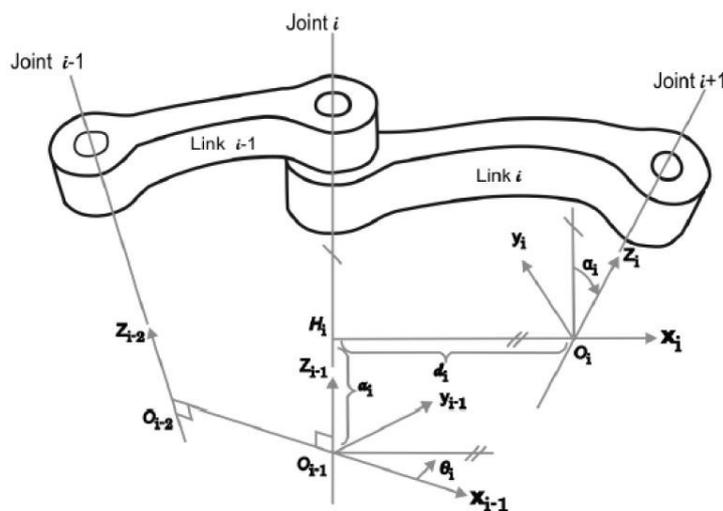


Figura 3.9. Modelo Denavit-Hartenberg: asignación de ejes y parámetros.  
Fuente: Denavit-Hartenbert, 1955 [2].

a cuatro movimientos consecutivos (rotación y traslación en  $\vec{z}$ , seguidos de traslación y rotación en  $\vec{x}$ ). Para llegar a esta situación, se necesita que se asocie a cada barra un sistema de coordenadas proporcionado de acuerdo a unas determinadas reglas. Para ello se identifica la matriz de D-H ( ${}^{i-1}A_i$ ) con la matriz que define el cambio de base entre los sistemas asociados de las barras  $i-1$  e  $i$ , siendo ésta la función del grado de libertad de la articulación ( $q_i$ ). Obtenidas las matrices  ${}^{i-1}A_i$  para  $i$  desde 1 a  $n$  (número de grados de libertad del robot), su producto da lugar a la matriz de cambio de coordenadas  $T_n$ , entre el sistema base y el TCP del robot, que expresa la localización de su extremo en función de las articulaciones  $q_i$ .

Para poder poner las bases para todo el desarrollo posterior, primero se va a describir el modelo de D-H, cuáles son los principios y los fundamentos del mismo, los parámetros geométricos que lo define y la forma de establecer los sistemas de referencia en un brazo robot o robot manipulador, para posteriormente poder desarrollar y explicar sus debilidades frente a otros modelos, y apuntar su idoneidad en el presente trabajo.

### 3.4.1 Cadenas cinemáticas y convenciones

Un robot manipulador se puede describir esquemáticamente en un conjunto de eslabones conectados mediante articulaciones. Estas articulaciones pueden bien ser muy simples, como una articulación rotativa o prismática, o bien pueden ser más complejas, como una esfera o una articulación de bola. Considérese que una articulación rotativa es como una bisagra y sólo permite el giro sobre un eje único, una articulación prismática permite un movimiento longitudinal a lo largo de un solo eje, llamándose a este movimiento extensión o retracción. La diferencia entre ambas situaciones es que, en el primer caso la articulación tiene sólo un grado de libertad (DOF, *Degree of freedom*): el ángulo de rotación para el caso de la articulación de revolución, y la cantidad de desplazamiento lineal para el caso de la articulación prismática. En el caso de los robots manipuladores, y en el presente trabajo de tesis, se va a considerar que las articulaciones tienen un grado de libertad. Nótese que esta asunción no implica una pérdida de generalidad, ya que en realidad articulaciones tales como las articulaciones de bola o encaje (con dos grados de libertad) o las articulaciones esféricas (de tres grados de libertad) se pueden igualmente considerar como una sucesión de articulaciones de un solo grado de libertad con eslabones de longitud cero entre ellas.

Con la presunción que cada articulación tiene un grado de libertad, la acción de cada una se puede describir con un único número real: el ángulo de rotación para las articulaciones rotativas o el desplazamiento para las articulaciones prismáticas. El objetivo de la cinemática directa, como se ha descrito en el capítulo 3.3, es determinar el efecto acumulativo del conjunto entero de las variables de las articulaciones. Aquí se van a introducir ciertas convenciones que darán un procedimiento sistemático para realizar el análisis que se va a llevar a cabo. Esto va a ser útil, ya que el análisis cinemático de un robot manipulador de  $n$ -articulaciones puede ser extremadamente complejo, y las convenciones introducidas a continuación ayudarán a simplificar el análisis. Además,

éstas permiten tener un lenguaje universal con el cual los ingenieros de robótica pueden comunicarse.

Un robot manipulador con  $n$  articulaciones tendrá  $n+1$  eslabones, ya que cada articulación conecta dos eslabones. El número de articulaciones será de 1 a  $n$ , y el número de eslabones será de 0 a  $n$ , comenzando por la base. Con esta convención, la articulación  $i$  conecta el eslabón  $i-1$  al eslabón  $i$ . Se considera la ubicación de la articulación  $i$  que será fija con respecto a la articulación  $i-1$ . Cuando la articulación  $i$  es activada, el eslabón  $i$  es el que se mueve. De esta forma, el eslabón 0 (el primer eslabón) es fijo, y no se mueve cuando la articulación se ve activada. Por supuesto que el robot manipulador, el mismo, podría ser un robot móvil (por ejemplo, montado sobre una plataforma móvil o un vehículo autónomo), pero no se considerará este caso, ya que se puede manejar sencillamente mediante una ligera ampliación de las técnicas presentadas.

Con la articulación  $i$ -ésima, se asocia una variable de articulación, denotada por  $q_i$ . En el caso de una articulación rotativa,  $q_i$  es el ángulo de rotación, y en el caso de una articulación prismática, es el desplazamiento de la articulación, es decir, que se tiene la siguiente ecuación (3—61):

$$q_i = \left\{ \begin{array}{l} \theta_i : \text{joint } i \text{ revolute} \\ d_i : \text{joint } i \text{ prismatic} \end{array} \right\} \quad (3-61)$$

Para conseguir el análisis cinemático, se va a anexar un sistema de coordenadas a cada articulación. En particular, se añadirá el sistema de coordenadas  $o_i x_i y_i z_i$  a la articulación  $i$ . Esto significa que, para cualquier movimiento que el robot ejecute, las coordenadas de cada punto de la articulación  $i$  son constantes cuando se expresan en el sistema de coordenadas  $i$ -ésimo. Más aún, cuando la articulación  $i$  se ve activada, el eslabón  $i$  y su sistema de coordenadas asociado  $o_i x_i y_i z_i$  experimentan el movimiento resultante. El sistema de coordenadas  $o_0 x_0 y_0 z_0$ , el cual está asociado a la base del robot, se considera el sistema base del robot.

Ahora supóngase que  $A_i$  es la matriz de transformación homogénea que expresa la pose (posición y orientación) del sistema  $o_i x_i y_i z_i$  con respecto a  $o_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ . La matriz  $A_i$  no es constante, ya que varía según varía la configuración del robot. Sin embargo, la presunción de que todas las articulaciones son bien de revolución o prismáticas implica que la matriz  $A_i$  es una función de una única variable de articulación, como se ha llamado anteriormente  $q_i$ . En otras palabras se tiene la ecuación (3—62):

$$A_i = A_i(q_i) \quad (3-62)$$

La matriz de transformación homogénea que expresa la posición y orientación de  $o_j x_j y_j z_j$  con respecto a  $o_i x_i y_i z_i$  se llama, por convención, la **matriz de transformación**, y se denota por  $T_j^i$ . Se tienen las siguientes ecuaciones (3—63), (3—64) y (3—65):

$$T_j^i = A_{i+1} A_{i+2} \dots A_{j-1} A_j, \text{ siempre que } i < j \quad (3-63)$$

$$T_j^i = I, \text{ si } i = j \quad (3-64)$$

$$T_j^i = (T_i^j)^{-1}, \text{ si } j > i \quad (3-65)$$

Por el modo en el que se han asociado rígidamente los diversos sistemas de referencia a las articulaciones correspondientes, se tiene que la posición de cualquier punto del efector final, si se quiere expresar en coordenadas del sistema de referencia  $n$ , es una constante independiente de la configuración del robot. Si se denomina la posición y la orientación del TCP del robot con respecto al sistema de coordenadas base mediante un vector de tres coordenadas llamado  $O_n^0$  (que da las coordenadas del origen del TCP con respecto al sistema de coordenadas base), y la matriz de rotación 3 x 3 que se denota como  $R_n^0$ , la matriz de transformación homogénea se define con la siguiente ecuación (3—66):

$$H = \begin{bmatrix} R_n^0 & O_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-66)$$

Entonces la posición y orientación del efector final o TCP en el sistema de coordenadas base viene dado por la ecuación (3—67):

$$H = T_n^0 = A_1(q_1) \dots A_n(q_n) \quad (3-67)$$

Cada transformación homogénea  $A_i$  es de la forma dada por la ecuación (3—68):

$$A_i = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & O_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-68)$$

De ahí que se tenga la siguiente ecuación (3—69):

$$T_j^i = A_{i+1} \dots A_j = \begin{bmatrix} R_j^i & O_j^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-69)$$

La matriz  $R_j^i$  expresa la orientación de  $o_j x_j y_j z_j$  relativa a  $o_i x_i y_i z_i$  y viene dada por las partes rotacionales de las matrices  $A$ , lo que es, en términos de ecuación (3—70):

$$R_j^i = R_{i+1}^i \dots R_j^{j-1} \quad (3-70)$$

Los vectores de las coordenadas vienen dados por la ecuación recursiva siguiente (3—71):

$$O_j^i = O_{j-1}^i + R_{j-1}^i O_j^{j-1} \quad (3-71)$$

Esto es precisamente lo que busca la cinemática directa: determinar la posición del efector final, del TCP, en el sistema de coordenadas base del robot. Y esto se consigue mediante la determinación de las funciones  $A_i(q_i)$  y multiplicarlas todas como se requiere. Sin embargo, se puede conseguir una considerable simplificación mediante la introducción de convenciones adicionales, como la representación de Denavit-Hartenbert de una articulación, que se muestra a continuación.

### 3.4.2 La representación de Denavit-Hartenberg

La convención que se va a usar en este trabajo, es la convención de Denavit-Hartenberg (D-H). En esta convención, cada transformación homogénea  $A_i$  se representa como el producto de cuatro transformaciones básicas, como se muestra en la ecuación (3—72):

$$\begin{aligned}
 A_i &= R_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} R_{x,\alpha_i} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-72) \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde  $c\theta_i$  denota la forma abreviada de  $\cos \theta_i$ , y  $s\theta_i$  denota la forma abreviada para  $\sin \theta_i$ , y donde las cuatro cantidades  $\theta_i, a_i, d_i, \alpha_i$  son los parámetros asociados con el eslabón  $i$  y la articulación  $i$ . Estos cuatro parámetros  $a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$  en la ecuación anterior generalmente se denominan longitud del eslabón, giro del eslabón, desplazamiento del eslabón y ángulo de la articulación<sup>2</sup>. Estos nombres derivan de los aspectos específicos de las relaciones geométricas entre los dos sistemas de coordenadas, como se verá más adelante. Dado que la matriz  $A_i$  es una función de una única variable, esto implica que tres de las cantidades arriba mencionadas son constantes para un eslabón dado, mientras el cuarto parámetro,  $\theta_i$  para una articulación de revolución y  $d_i$  para una articulación prismática, es la variable de la articulación.

En el capítulo 3.2.7 se ha visto que una matriz de transformación homogénea arbitraria se puede caracterizar mediante seis números, como por ejemplo, tres números para especificar la cuarta columna de la matriz (traslación) y tres ángulos de Euler para especificar la matriz de rotación de 3x3. En la representación D-H, sin embargo, solo se tienen cuatro parámetros. Esto es posible ya que mientras que el sistema de referencia  $i$  se tiene que tener rígidamente asociado al eslabón  $i$ , se tiene una considerable libertad para elegir el origen y los ejes de coordenadas de dicho sistema. Por ejemplo, no es necesario que el origen  $O_i$  del sistema de referencia  $i$  se coloque en el final físico del eslabón  $i$ . De hecho, no es siquiera necesario que el sistema de referencia  $i$  se coloque dentro del eslabón físico; el sistema de referencia  $i$  puede ser asignado a un espacio libre, en tanto en cuanto el sistema de referencia  $i$  se encuentre rígidamente unido al eslabón  $i$ . Haciendo una elección inteligente del origen y de los ejes de coordenadas, es posible reducir el número de parámetros que se necesitan de seis a cuatro (o incluso menor en algunos casos). A continuación se verá porqué y bajo qué condiciones esto se puede hacer, y posteriormente se mostrará cómo realizar exactamente la asignación de sistemas de coordenadas.

<sup>2</sup> En inglés: *link length, link twist, link offset, joint angle*

Claramente no es posible representar una transformación homogénea arbitraria usando sólo cuatro parámetros. Por tanto, lo primero es determinar qué transformaciones homogéneas se pueden expresar según la forma expresada en la forma vista en la ecuación (3—72). Supóngase que se tienen dos sistemas de referencia, definidos como sistemas 0 y 1, respectivamente. Entonces existe una única matriz de transformación homogénea  $A$  que toma las coordenadas del sistema de referencia 1 en el sistema 0. Ahora supóngase que los dos sistemas de referencia tienen dos características adicionales, que son:

(DH1) El eje  $x_1$  es perpendicular al eje  $z_0$ .

(DH2) El eje  $x_1$  intersecta al eje  $z_0$ .

Esto se puede ver en la Figura 3.10. Bajo estas circunstancias, se define que existen unos números únicos, tales que se tiene la ecuación (3—73):

$$A = R_{z,\theta} Trans_{z,d} Trans_{x,a} R_{x,\alpha} \quad (3—73)$$

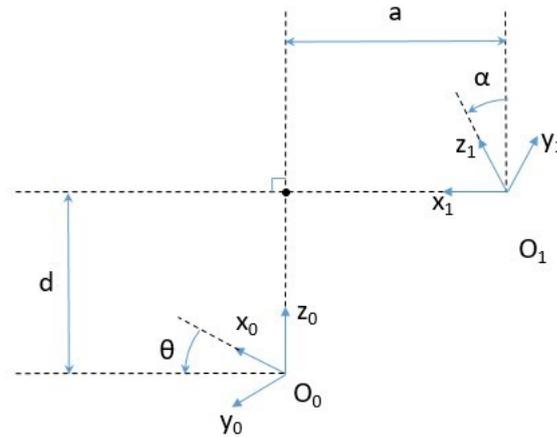


Figura 3.10. Sistema de coordenadas D-H que satisface las suposiciones DH1 y DH2. Fuente: propia.

Por supuesto, dado que  $\theta$  y  $\alpha$  son ángulos, lo que realmente la ecuación anterior quiere decir es que estos parámetros son únicos dentro de un múltiplo de  $2\pi$ . Por tanto, la matriz  $A$  se puede expresar según la ecuación (3—74), definiendo  $r_i$  como el vector que corresponde a la columna  $i$ -ésima de la matriz de rotación  $R_1^0$ :

$$A = \begin{bmatrix} R_1^0 & O_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3—74)$$

A continuación se examinarán las implicaciones de las dos restricciones DH definidas anteriormente.

Si DH1 se cumple, entonces  $x_1$  es perpendicular a  $z_0$ , y se tiene entonces que  $x_1 \cdot z_0 = 0$ . Expresando esta restricción con respecto al sistema de referencia  $O_0x_0y_0z_0$ , y usando el hecho de que  $r_1$  es la representación del vector unitario  $x_1$  con respecto al sistema de referencia 0, se tiene la ecuación (3—75):

$$0 = x_1^0 \cdot z_1^0 = [r_{11}, r_{12}, r_{13}]^T \cdot [0, 0, 1]^T = r_{31} \quad (3-75)$$

Por lo que se tiene que  $r_{31} = 0$ , entonces solo se necesita mostrar que existen ángulos únicos  $\theta$  y  $\alpha$ , de tal forma que se tiene la ecuación (3-76):

$$R_1^0 = R_{x,\theta} R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta c\alpha & s\theta s\alpha \\ s\theta & c\theta c\alpha & -c\theta s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \quad (3-76)$$

La única información que se tiene es que  $r_{31} = 0$ , pero es suficiente. Primero, dado que cada columna de  $R_1^0$  tiene que tener la longitud unitaria,  $r_{31} = 0$  implica que se tienen las ecuaciones (3-77) y (3-78):

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1, \quad (3-77)$$

$$r_{32}^2 + r_{33}^2 = 1 \quad (3-78)$$

De ahí que existen unos únicos valores  $\theta$  y  $\alpha$ , tales que se tiene la ecuación (3-79):

$$(r_{11}, r_{21}) = (c\theta, s\theta), \quad (r_{33}, r_{32}) = (c\alpha, s\alpha) \quad (3-79)$$

Una vez ambos ángulos  $\theta$  y  $\alpha$  se han encontrado, queda como un trabajo rutinario determinar el resto de los elementos restantes de la matriz  $R_1^0$ , con la forma vista en la ecuación (3-76), teniendo en cuenta el hecho de que la matriz  $R_1^0$  es una matriz de rotación.

A continuación, la restricción DH2 implica que el desplazamiento entre  $O_0$  y  $O_1$  se puede expresar como una combinación lineal de los vectores  $z_0$  y  $x_1$ . Esto se puede escribir de la forma que se ve en la ecuación  $O_1 = O_0 + dz_0 + ax_1$ . De nuevo, se puede expresar esta relación en el sistema de coordenadas  $O_0x_0y_0z_0$ , obteniéndose la ecuación (3-80):

$$O_1^0 = O_0^0 + dz_0^0 + ax_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac\theta \\ as\theta \\ d \end{bmatrix} \quad (3-80)$$

Combinando los resultados obtenidos arriba, se obtiene la ecuación (3-72), como se necesitaba. Así, se puede ver que cuatro parámetros son suficientes para especificar cualquier transformación homogénea, que satisfaga las restricciones DH1 y DH2.

Ahora que se ha establecido que cada matriz de transformación homogénea que satisfaga las condiciones DH1 y DH2, se puede representar como se muestra en la ecuación (3-72), se puede efectivamente dar una interpretación física a cada una de las cuatro cantidades representadas en dicha ecuación. El parámetro  $a$  es la distancia entre el eje  $z_0$  y el eje  $z_1$ , medido a lo largo del eje  $x_1$ . El ángulo  $\alpha$  es el ángulo entre los ejes  $z_0$  y  $z_1$ , medido en el plano normal a  $x_1$ . El sentido positivo de  $\alpha$  se determina por la dirección desde  $z_0$  a  $z_1$ , por la regla de la mano derecha. El parámetro  $d$  es la distancia entre el origen  $O_0$  y la intersección del eje  $x_1$  con el eje  $z_0$ , medido a lo largo del eje  $z_0$ . Finalmente,  $\theta$  es el ángulo entre los ejes  $x_0$  y  $x_1$ , medido en el plano normal a  $z_0$ . Estas

interpretaciones físicas probarán su utilidad en el desarrollo del procedimiento para asignar los sistemas de coordenadas que satisfagan las restricciones DH1 y DH2, y ahora se va a pasar a ver ese procedimiento.

### 3.4.3 Asignación de los sistemas de coordenadas

Para un robot manipulador dado, es posible elegir diferentes sistemas de coordenadas de tal modo que satisfagan las dos condiciones antes mencionadas. En algunas circunstancias esto requerirá colocar el origen  $O_i$  del sistema de coordenadas  $i$ -ésimo en una ubicación tal, que puede que no sea intuitivamente satisfactoria, pero normalmente éste no va a ser el caso. Es importante tener en cuenta que las elecciones de los sistemas de coordenadas no son únicas, incluso considerando las restricciones definidas anteriormente. Así, es posible que diferentes ingenieros consideren y tomen diferentes sistemas de referencia, que sean igualmente correctos, para los eslabones del robot. Es muy importante hacer notar, sin embargo, que la resultante final, la matriz de transformación homogénea final, que relaciona el sistema de coordenadas de la base con el del efector final o TCP (por ejemplo, la matriz  $T_n^0$ ), deberá ser igual, independientemente de la asignación de los sistemas de coordenadas de los eslabones intermedios (asumiendo que el sistema de coordenadas para el eslabón  $n$  coincide). Se comenzará desarrollando el procedimiento general.

Para empezar, nótese que la elección del eje  $z_i$  es arbitraria. En concreto, desde la ecuación (3—76), se puede ver que si se elige  $\alpha_i$  y  $\theta_i$  de forma adecuada, se puede obtener cualquier dirección arbitraria de  $z_i$ . Así, en un primer paso, se asignan los ejes  $z_0, \dots, z_{n-1}$  de una forma intuitiva. Concretamente, se asigna  $z_i$  al eje del movimiento para la articulación  $i+1$ . De esta forma,  $z_0$  es el eje de actuación para la articulación 1,  $z_1$  es el eje de movimiento para la articulación 2, y así sucesivamente. Hay dos casos a considerar: (i) si la articulación  $i+1$  es una articulación de revolución,  $z_i$  es el sobre el que gira la articulación  $i+1$ ; (ii) si la articulación  $i+1$  es prismática, entonces  $z_i$  corresponde al eje de traslación de la articulación  $i+1$ . En un primer momento podría resultar confuso asociar el eje  $z_i$  con la articulación  $i+1$ , pero hay que recordar que esto satisface la convención que se ha establecido anteriormente, relativa a que la articulación  $i$  está fija con respecto al sistema de coordenadas  $i$ , y que cuando la articulación experimenta un movimiento, es el eslabón  $i$  y su sistema de coordenadas adjunto  $o_i x_i y_i z_i$ , los que experimentan el movimiento resultante.

Una vez se han establecido los ejes  $z$  para las articulaciones, se pasa a establecer el sistema de coordenadas base. La elección del sistema de coordenadas de la base es prácticamente arbitraria. Se debe elegir el origen  $O_0$  del sistema de coordenadas base en algún punto del eje  $z_0$ . Se pasa a elegir entonces los ejes  $x_0, y_0$  en cualquier ubicación que sea conveniente, siempre teniendo en cuenta que el sistema de coordenadas resultante ha de cumplir la regla de la mano derecha, es decir, debe ser un sistema de coordenadas dextrógiro. Esto define el sistema de coordenadas  $O$ .

Una vez este sistema de coordenadas  $O$  ha sido definido, se comienza a realizar un proceso iterativo, consistente en definir el sistema de referencia  $i$ , partiendo del sistema de coordenadas  $i-1$ , y comenzando por el sistema de coordenadas 1, ya que el  $O$  ya está determinado.

Para poder determinar los sistemas de coordenadas correctamente hay que tener en cuenta tres casos diferentes: (i) los ejes  $z_{i-1}$ ,  $z_i$  no son coplanares, (ii) los ejes  $z_{i-1}$ ,  $z_i$  intersectan, se cruzan entre sí, (iii) los ejes  $z_{i-1}$ ,  $z_i$  son paralelos. Nótese que en ambos casos (ii) y (iii) los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  son coplanares. Esta situación, de hecho, es bastante común, como se puede ver en la topología de diferentes robots en diferentes fabricantes actuales de robots industriales, por ejemplo, entre los ejes 2 y 3 en muchos robots manipuladores industriales de hoy en día. A continuación se ve en detalle estos tres casos:

- i.  **$z_{i-1}$  y  $z_i$  no son coplanares:** si  $z_{i-1}$  y  $z_i$  no son coplanares, entonces existe una única línea que es perpendicular a ambos  $z_{i-1}$  y  $z_i$ , tal que conecta ambos ejes y tiene la mínima longitud. La línea que contiene esta normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$ , define  $x_i$ , y el punto donde esta línea cruza  $z_i$  es el origen  $O_i$ . Por construcción, ambas condiciones DH1 y DH2 se satisfacen y el vector de  $O_{i-1}$  a  $O_i$  es una combinación lineal de  $z_{i-1}$  y  $x_i$ . La especificación del sistema de coordenadas  $i$  se completa eligiendo un eje  $y_i$  de forma que se cumpla la regla de la mano derecha, para tener un sistema de coordenadas dextrógiro. Dado que las restricciones DH1 y DH2 se ven satisfechas, la matriz homogénea  $A_i$  será de la forma que muestra la ecuación (3—72).
- ii.  **$z_{i-1}$  es paralelo a  $z_i$ :** si los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  son paralelos, entonces hay infinitas líneas perpendiculares entre ellas, y la condición DH1 no puede especificar  $x_i$  completamente. En este caso, de acuerdo al método y convención de D-H, se puede elegir un origen  $O_i$  en cualquier punto a lo largo del eje  $z_i$ . El eje  $x_i$  se elige entonces bien sea directamente de  $O_i$  hacia  $z_{i-1}$ , a lo largo de la normal común, o bien opuesto a este vector. Un método común para elegir  $O_i$  es elegir la normal que cruza a través de  $O_{i-1}$  como el eje  $x_i$ ;  $O_i$  es entonces el punto en el cual esta normal intersecta  $z_i$ . En este caso,  $d_i$  sería igual a cero. Una vez se fija  $x_i$ , entonces  $y_i$  se determina igualmente por la regla de la mano derecha. Dado que los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$  son paralelos,  $\alpha_i$  será cero en este caso. En el caso que ocupa este trabajo, se va a optar por usar la definición del modelo propuesto por Hayati- Mirmirani, para el caso de ejes paralelos, que se verá más adelante.
- iii.  **$z_{i-1}$  intersecta a  $z_i$ :** En este caso se elige  $x_i$  como la dirección normal al plano formado por  $z_i$  y  $z_{i-1}$ . La dirección positiva de  $x_i$  es elegida arbitrariamente. En general, la elección más natural del origen  $O_i$  es, en este caso, el punto de intersección de  $z_i$  y  $z_{i-1}$ . Sin embargo, cualquier punto elegido convenientemente a lo largo del eje  $z_i$  sería suficiente. Nótese que en este caso el parámetro  $a_i$  es igual a cero.

Este procedimiento funciona para sistemas de coordenadas  $0, \dots, n-1$  in un robot de  $n$ -eslabones. Para completar la construcción de todos los parámetros necesarios para producir la matriz de transformación homogénea  $A_i$ , se necesita especificar el sistema de coordenadas  $n$ . El sistema de coordenadas final  $o_n x_n y_n z_n$  se denomina, como hemos visto también anteriormente, **efector-final, tool-frame** o **TCP**. El origen  $O_n$  es a menudo colocado simétricamente entre los dedos de la garra del robot, en la punta de la pistola de aplicación de pasta o pintura, en la punta de los electrodos de la pinza de soldadura que porta el robot, o donde se considere según sea la aplicación o herramienta que tenga el robot asignada.

En los robots industriales modernos el movimiento de la última articulación es una rotación del efector final con un ángulo  $\theta_n$ , y los últimos dos ejes de las articulaciones,  $z_{n-1}$  y  $z_n$ , coinciden. En este caso, la transformación entre los dos últimos sistemas de coordenadas es una traslación a lo largo del eje  $z_{n-1}$  con una distancia  $d_n$ , seguido (o precedido) de una rotación de  $\theta_n$  radianes sobre  $Z_{n-1}$ .

Finalmente, nótese el siguiente hecho importante: en todos los casos, si la articulación en cuestión es de revolución o prismática, las cantidades  $a_i$  y  $\alpha_i$  son siempre constantes para todos los  $i$  y son características del robot manipulador. Si la articulación  $i$  es prismática, entonces  $\theta_i$  es también una constante, mientras que  $d_i$  es la variable de la articulación  $i$ -ésima. Igualmente, si la articulación  $i$  es de revolución, entonces  $d_i$  es constante y  $\theta_i$  es la variable de la articulación  $i$ -ésima.

### 3.4.4 Resumen del procedimiento

En general, un robot de  $n$  grados de libertad está formado por  $n+1$  eslabones unidos por  $n$  articulaciones, teniendo que a cada eslabón se le puede asociar un sistema de referencia solidario al mismo, y utilizando las matrices de transformaciones homogéneas representar las rotaciones y traslaciones relativas entre un eslabón  $i-1$  y un eslabón  $i$ , formando una a una las distintas MTH que componen el robot manipulador. Para ello, mediante el algoritmo de D-H obtendremos una MTH para cada grado de libertad, para cada articulación. Cada matriz de transformación homogénea tendrá la información de la posición y orientación de su sistema de referencia, relativo al sistema de referencia anterior. De esta forma se podrá obtener todas las ecuaciones cinemáticas de la cadena de eslabones completa.

Entonces se podrá pasar de uno a otro eslabón, según esta representación, escogiendo adecuadamente los sistemas de referencia asociados a cada articulación, y mediante la realización de cuatro transformaciones básicas cuyos parámetros dependerán únicamente de las características geométricas de cada articulación. Estas cuatro transformaciones básicas son:

1. Rotación alrededor del eje  $z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$ .
2. Traslación a lo largo del eje  $z_{i-1}$  una distancia  $d_i$ , siendo éste el vector  $d_i$  (0,0, $d_i$ ).
3. Traslación a lo largo del eje  $x_i$  una distancia  $a_i$ , siendo éste el vector  $a_i$  ( $a_i$ ,0,0).
4. Rotación alrededor del eje  $x_i$  un ángulo  $\alpha_i$ .

Es decir, ya que un robot se puede considerar como una cadena cinemática formada por objetos rígidos o eslabones unidos entre sí mediante articulaciones, se puede establecer un sistema de referencia fijo situado en la base del robot y describir la localización de cada uno de los eslabones con respecto a este sistema de referencia. Así, el problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz de transformación homogénea  $H$  que sea capaz de relacionar la pose del extremo o TCP del robot (posición y orientación) con respecto a un sistema de referencia fijo situado en la base del mismo, o con respecto al sistema mundial de coordenadas, sea el que se tome como referencia base. Esta matriz  $H$  será una función de las coordenadas de las articulaciones.

Para aplicar el modelo de D-H se tienen que seguir las siguientes reglas, para la definición de los sistemas de coordenadas en base a los que se definirán las matrices de transformación homogéneas que hemos visto anteriormente:

- La numeración de las articulaciones es tal que cuando se actúa la articulación  $i$  (con  $i=1,2,\dots,n$ ), se mueve el eslabón  $i$ .
- El sistema de coordenadas  $\{S_i\}$ , siendo la articulación  $i$  con  $i=1,2,\dots,n$ , es solidario con el eslabón  $i$ . El sistema de coordenadas  $\{S_0\}$  está fijo.
- El eje  $z_{i-1}$  se encuentra a lo largo de la articulación  $i$ .
- El eje  $x_i$  es normal al eje  $z_{i-1}$ , intersecta a  $z_{i-1}$ , y apunta hacia afuera de  $z_{i-1}$ .
- El eje  $y_i$  se tiene que definir de tal forma que el sistema de coordenadas asociado  $\{S_i\}$  es un sistema dextrógiro, de tal forma que se cumple que se cumple la ecuación (3—81):

$$y_i = \frac{z_i \times x_i}{\|z_i \times x_i\|} \quad (3-81)$$

Asimismo, la representación de D-H emplea cuatro parámetros que describen completamente la geometría de cada eslabón. Estos cuatro parámetros son los que van a ayudarnos a generar y definir las matrices de transformación homogénea que nos van a dar la relación entre cada una de las articulaciones  $i$  y su precedente  $i-1$ . Estos parámetros son:

- $\theta_i$  : es el ángulo existente cuando se gira desde  $x_{i-1}$  hasta  $x_i$ , girando en torno al eje  $z_{i-1}$ , usando la regla de la mano derecha (ángulo de rotación).
- $d_i$  : es la distancia que existe, a lo largo del eje  $z_{i-1}$ , desde el origen del sistema de coordenadas  $\{S_{i-1}\}$  hasta la intersección de  $z_{i-1}$  con  $x_i$  (offset del eslabón).
- $a_i$  : es la distancia que hay, a lo largo del eje  $x_i$ , desde la intersección de  $z_{i-1}$  con  $x_i$ , hasta el origen del sistema  $\{S_i\}$ ; o lo que es lo mismo, la distancia más corta entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$  (largo del eslabón).
- $\alpha_i$ : es el ángulo existente cuando se gira desde  $z_{i-1}$  hasta  $z_i$ , girando en torno al eje  $x_i$ , usando la regla de la mano derecha (ángulo de torsión del eslabón).

De esta forma, tanto  $a_i$  como  $\alpha_i$  definen los parámetros del eslabón, mientras que  $\theta_i$  y  $d_i$  definen los parámetros de la articulación, siendo  $\theta_i$  el parámetro que será una variable para las distintas poses del robot en una articulación de revolución, mientras que  $d_i$  será el parámetro variable en una articulación prismática.

A partir de estas consideraciones iniciales, el procedimiento a seguir para la localización de los sistemas de coordenadas y el cálculo de los parámetros, según el método de D-H, para el caso general de un brazo robot con  $n$  grados de libertad, es el siguiente:

1. Localizar y numerar los eslabones  $i=0..n$
2. Establecer el sistema de coordenadas de la base: establecer un sistema de coordenadas ortonormal dextrógiro  $(x_o, y_o, z_o)$  en la base soporte con el eje  $z_o$ , estando a la largo del eje de movimiento de la articulación 1. Los ejes  $x_o$  y  $y_o$  se pueden establecer convenientemente y son normales al eje  $z_o$ .
3. Inicializar y repetir: para cada  $i$ , tal que  $i=1,\dots,n-1$ , realizar los pasos 4 a 7.

4. Establecer el origen del sistema de coordenadas  $i$ -ésimo, denominado  $O_i$ . Localizar el origen del sistema de coordenadas  $i$ -ésimo en la intersección de los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$ , o en la intersección de las normales comunes entre los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$  y el eje  $z_i$ .
5. Establecer el eje  $x_i$ . Establecer  $x_i$  normal al eje  $z_{i-1}$  o a lo largo de la normal común entre los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$ , cuando son paralelos.
6. Establecer el eje  $y_i$ . Asignar  $y_i$  para completar el sistema de coordenadas dextrógiro.
7. Encontrar los parámetros de la articulación y del elemento. Para  $i$ , tal que  $i=1, \dots, n$ , realizar los pasos 8 a 11.
8. Encontrar  $d_i$ :  $d_i$  es la distancia del origen del sistema de coordenadas  $(i-1)$ -ésimo hasta la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$ , a lo largo del eje  $z_{i-1}$ .
9. Encontrar  $a_i$ :  $a_i$  es la distancia desde la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$  hasta el origen del sistema de coordenadas  $i$ -ésimo, a lo largo del eje  $x_i$ .
10. Encontrar  $\theta_i$ :  $\theta_i$  es el ángulo de rotación desde el eje  $x_{i-1}$  hasta el eje  $x_i$ , respecto del eje  $z_{i-1}$ .
11. Encontrar  $\alpha_i$ :  $\alpha_i$  es el ángulo de rotación desde el eje  $z_{i-1}$  hasta el eje  $z_i$ , respecto del eje  $x_i$ .
12. En caso de que para el eje en consideración se aplique la modificación dada por Hayati, para ejes paralelos a casi paralelos, como se ha visto anteriormente, habrá que encontrar el parámetro  $\beta_i$ .

Una vez se ha definido el sistema de coordenadas para cada elemento, y los parámetros de cada una de las articulaciones, se puede tener una matriz de transformación homogénea que relacione el sistema de coordenadas  $i$ -ésimo con el sistema de coordenadas anterior, esto es, el  $(i-1)$ -ésimo. Así, un punto que se defina como  $P_i$ , expresado en el sistema de coordenadas  $i$ -ésimo, se podrá expresar en el sistema de coordenadas  $(i-1)$ -ésimo, como  $P_{i-1}$ , realizando las siguientes transformaciones sucesivas:

- Girar respecto del eje  $z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$ , para alinear el eje  $x_{i-1}$  con el eje  $x_i$  (el eje  $x_{i-1}$  es paralelo a  $x_i$ , y apunta en la misma dirección).
- Trasladar a lo largo del eje  $x_{i-1}$  una distancia  $d_i$ , para hacer coincidir los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$ .
- Trasladar a lo largo del eje  $x_i$  una distancia de  $a_i$ , para hacer coincidir los dos orígenes de los ejes  $x$ .
- Girar respecto del eje  $x_i$  un ángulo  $\alpha_i$ , para hacer coincidir los sistemas de coordenadas.

Cada una de estas cuatro transformaciones sucesivas se puede expresar mediante una matriz homogénea básica, ya que estamos hablando de giros y traslaciones. Por tanto, el producto de estas cuatro matrices de transformación homogéneas básicas dará lugar a una matriz de transformación homogénea compuesta, que se denominará  ${}^{i-1}A_i$ , conocida como la matriz de transformación Denavit-Hartenberg para sistemas de coordenadas adyacentes  $i$  e  $i-1$ , que es la ecuación que se ha mostrado en (3—72).

Aún con todo, este modelo presenta singularidades, cuando se tiene el caso en el que dos articulaciones consecutivas presentan sus ejes  $z$  como dos líneas en el espacio paralelas. Esto implica que existe un infinito número de normales comunes a estos ejes, de igual longitud. Sin embargo, y dado que es imposible en la práctica fabricar un eslabón con dos ejes perfectamente paralelos, lo que se tendrá en la práctica es un eslabón con 2 ejes que son prácticamente paralelos. Esto provoca que, a muy ligeras variaciones en los valores de los ejes o de los ángulos que hay entre

ellos, implica unos cambios muy elevados en la normal común generada, lo que por consiguiente genera una inestabilidad numérica en el modelo y en el proceso de calibración cinemática.

Para evitar esta inestabilidad numérica en el modelo, para el caso de ejes casi paralelos, se aplica la convención de Hayati-Mirmirani mencionada en la introducción en el apartado 3.3, que supone una modificación del modelo D-H visto anteriormente.

### 3.4.5 Convención de Hayati-Mirmirani: el modelo D-H modificado

Hayati y Mirmirani [88] propusieron un modelo de cuatro parámetros para solucionar el problema causado por los ejes de articulaciones casi paralelos. El modelo define un plano perpendicular al eje  $z_i$  en el cual  $d_i = 0$ , como se ve en la Figura 3.11. En lugar de considerar la normal entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$  (que tendría infinitas soluciones), se considera que el eje  $x_i$  se define como la recta que directamente conecta el eje  $z_{i-1}$  y  $z_i$ , en el plano definido anteriormente.

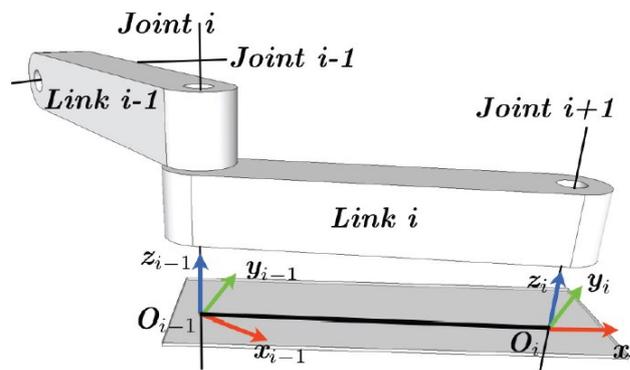


Figura 3.11. Sistemas de coordenadas para ejes casi paralelos, según la convención de Hayati-Mirmirani. Fuente: [85].

Las siguientes son las transformaciones consecutivas de los ejes de coordenadas que se aplican a la transformación del sistema de coordenadas  $\{S_{i-1}\}$  a  $\{S_i\}$  :

- Rotación del sistema de coordenadas  $\{S_{i-1}\}$  sobre el eje  $z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$ .
- Traslación del sistema de coordenadas  $\{S_{i-1}\}$  a lo largo del eje  $x_i$  una longitud  $a_i$ .
- Rotación del sistema de coordenadas  $\{S_{i-1}\}$  sobre el eje  $x_i$  un ángulo  $\alpha_i$ .
- Rotación del sistema de coordenadas  $\{S_{i-1}\}$  sobre el eje  $y_i$  un ángulo, que se denomina como  $\beta_i$ , para convertirse en el sistema de coordenadas final  $\{S_i\}$ .

Las transformaciones consecutivas que se han indicado anteriormente se pueden mostrar igualmente en términos de matrices de transformación homogéneas, y se tendrá la siguiente matriz que muestra la ecuación (3—82):

$$\begin{aligned}
 A_i &= R_{z,\theta_i} Trans_{x,a_i} R_{x,\alpha_i} R_{y,\beta_i} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta_i & 0 & s\beta_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta_i & 0 & c\beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-82) \\
 &= \begin{bmatrix} -s\theta_i s\alpha_i s\beta_i + c\theta_i c\beta_i & -s\theta_i c\beta_i & s\theta_i s\alpha_i c\beta_i + c\theta_i s\beta_i & a_i c\theta_i \\ c\theta_i s\alpha_i s\beta_i + s\theta_i c\beta_i & c\theta_i c\beta_i & -c\theta_i s\alpha_i c\beta_i + s\theta_i s\beta_i & a_i s\theta_i \\ & -c\alpha_i s\beta_i & s\alpha_i & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### 3.5 Aplicación del modelo cinemático según modelo de Denavit-Hartenberg - Hayati-Mirmirani y determinación de los parámetros nominales

En este trabajo se ha realizado el modelado cinemático de un robot KUKA KR 5 sixx R650 según el método de Denavit-Hartenberg con la modificación del modelo propuesta por Hayati-Mirmirani para articulaciones consecutivas con ejes casi paralelos. El modelo realmente implementado es un modelo híbrido, que usa el modelo Denavit-Hartenberg para articulaciones en general, y el modelo de representación Hayati-Mirmirani para articulaciones paralelas, el cual añadirá para el caso aquí expuesto el parámetro angular  $\beta_2$  en la articulación paralela o casi paralela correspondiente a los ejes  $z_2$  y  $z_3$ . El robot es un robot de seis ejes con un alcance de 650 mm, capacidad de carga de 5 kg y repetibilidad nominal de  $\pm 0.02$  mm. En la Figura 3.12 se pueden ver las dimensiones de este robot, y en la Figura 3.13 se puede ver el robot utilizado en esta tesis.

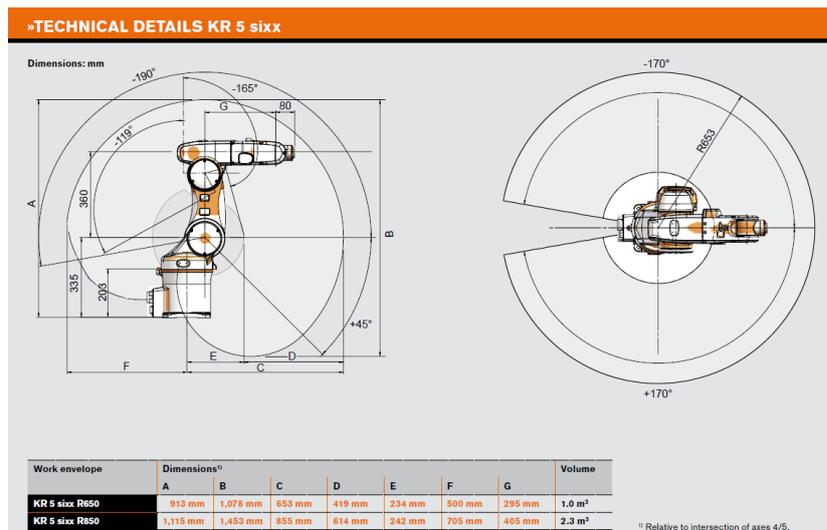


Figura 3.12. KUKA KR 5 sixx R650 - Dimensiones. Fuente: www.kuka-robotics.com



Figura 3.13. Detalle del robot KUKA KR 5. Fuente: Propia.

Aplicando el modelo Denavit-Hartenberg, modificado por Hayati-Mirmirani, visto en el capítulo anterior, se definen los sistemas de coordenadas, empezando por la base y pasando por las seis articulaciones, así como que se definen las direcciones de los ejes  $z_i$  y de los ejes  $x_i$ . Para cada una de las articulaciones se obtienen los cuatro parámetros cinemáticos característicos del modelo Denavit-Hartenberg, que serán  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$  y  $d_i$ , y el parámetro  $\beta_i$  del modelo Hayati-Mirmirani.

Se muestra en la imagen de la Figura 3.14 una vista del robot que constituye la posición inicial del modelo en la cual todas las articulaciones están en la posición de  $0^\circ$  y se representan los seis sistemas de coordenadas localizados en las articulaciones del robot partiendo del sistema de referencia global  $SR_0 (x_0, y_0, z_0)$  y finalizando con el sexto sistema de referencia  $SR_6 (x_6, y_6, z_6)$  ligado al TCP del robot.

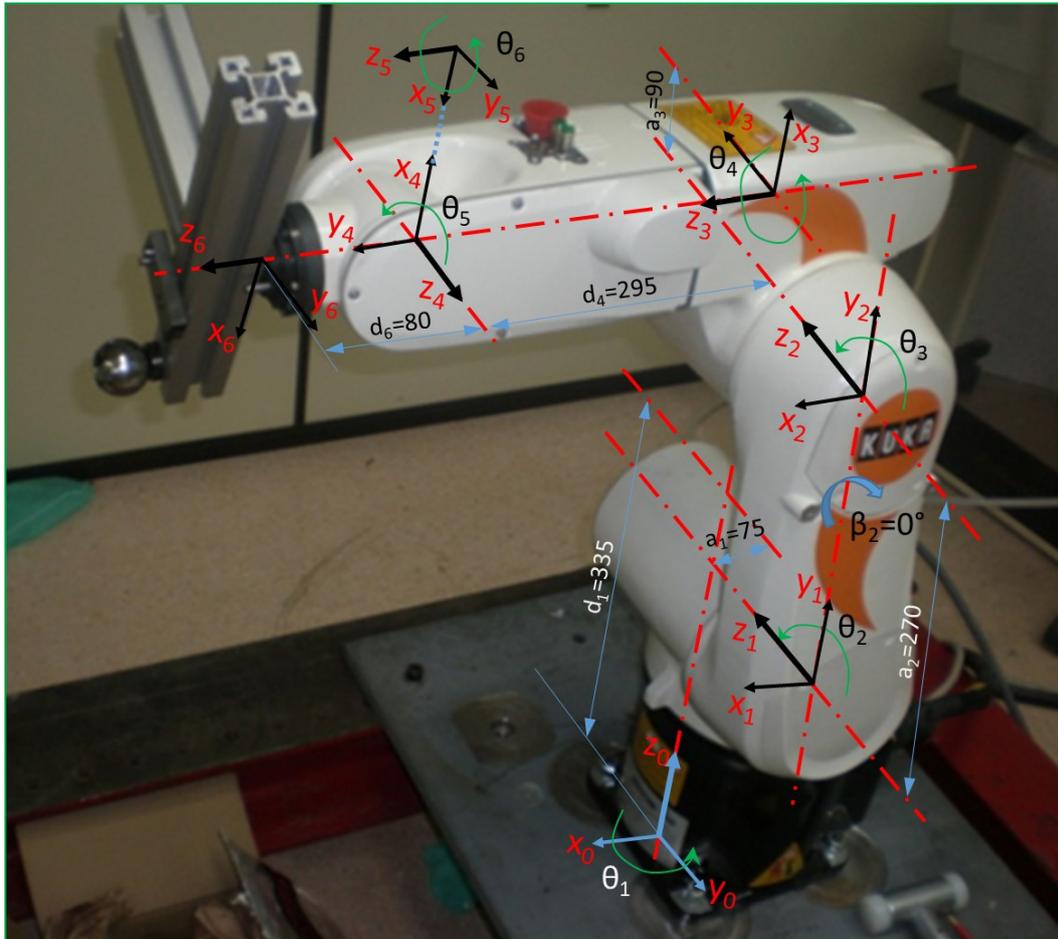


Figura 3.14. Robot KUKA KR 5 sixx y definición de Sistemas de Coordenadas y parámetros modelo D-H. Fuente: propia.

Una vez definidos los sistemas de coordenadas del modelo, el siguiente paso es la determinación de los parámetros geométricos  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$ ,  $d_i$  y  $\beta_i$  que relacionan las distintas articulaciones del modelo de D-H modificado con el modelo de Hayati-Mirmirani. Los valores finales de estos parámetros, ver Tabla 3.1, minimizarán el error de posicionamiento del robot y son los siguientes para cada una de las articulaciones del robot.

Articulación	$d_i$ (mm)	$\theta_i$ (°)	$a_i$ (mm)	$\alpha_i$ (°)	$\beta_i$ (°)
1	335	0	75	90	
2	0	0	270	0	0
3	0	90	90	90	
4	295	0	0	90	
5	0	180	0	90	
6	80	0	0	0	

Tabla 3.1. Parámetros cinemáticos teóricos del robot KUKA KR 5 sixx R650

El sistema de ecuaciones que se tiene para expresar un punto definido en el efector final, esto es, en el  $SR_6$  (definido por  $x_6, y_6, z_6$ ), en el sistema de referencia base o global  $SR_0$  ( $x_0, y_0, z_0$ ), expresado en los términos de los parámetros cinemáticos definidos por el modelo de D-H, viene dado por la siguiente ecuación (3—83):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}_{SR_0} = {}^0T_6 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}_{SR_6} \quad (3-83)$$

Que como se ha visto en la ecuación (3—69), la matriz de transformación homogénea  ${}^0T_6$  es el producto en cadena de matrices de transformación de coordenadas sucesivas  ${}^{i-1}A_i$ , que también se puede presentar, de forma extendida, como se ve en (3—84):

$${}^0T_6 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 \quad (3-84)$$

De esta forma, se ha de calcular cada una de estas matrices de transformación del  $SR_{i-1}$  a  $SR_i$ ; para al final poder obtener la matriz de transformación homogénea  $T$  que permita conocer las coordenadas de un punto, expresado inicialmente como un punto referido al TCP, para expresarlo finalmente en referencia al sistema de coordenadas base o global. Por tanto, se tendrá que aplicar la ecuación obtenida en (3—72), según el modelo de D-H, salvo en el caso de la matriz  ${}^1A_2$ , que al tener los ejes de las articulaciones casi paralelos, se aplicará la modificación de Hayati-Mirmirani, la cual ha dado lugar a la ecuación (3—82). Por tanto, las matrices  ${}^{i-1}A_i$  para cada una de las  $i$  articulaciones del robot serán las que se muestran en las siguientes ecuaciones (3—85),(3—86),(3—87),(3—88),(3—89) y (3—90):

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 75 \cdot c\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & 75 \cdot s\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 335 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-85)$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 270 \cdot c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 270 \cdot s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-86)$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} c(\theta_3 + 90) & 0 & s(\theta_3 + 90) & 90 \cdot c(\theta_3 + 90) \\ s(\theta_3 + 90) & 0 & -c(\theta_3 + 90) & 90 \cdot s(\theta_3 + 90) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-87)$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c(\theta_4) & 0 & s(\theta_4) & 0 \\ s(\theta_4) & 0 & -c(\theta_4) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 295 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-88)$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} c(\theta_5 + 180) & 0 & s(\theta_5 + 180) & 0 \\ s(\theta_5 + 180) & 0 & -c(\theta_5 + 180) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-89)$$

$${}^5A_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-90)$$

Donde  $\theta_i$  el parámetro que es una variable para las distintas poses del robot en una articulación de revolución, que es el parámetro que se va a hacer variar para el objeto de esta tesis, durante el proceso de toma de puntos con el método de Circle Point, como se verá en el siguiente capítulo.

### 3.6 Conclusiones

En este capítulo se ha introducido el concepto de modelo cinemático, se han analizado diferentes modelos matemáticos para realizar la representación de la orientación y de la posición, determinando al final el uso en esta tesis de la Matriz de Transformación Homogénea, para su aplicación posterior a la calibración cinemática que se desarrollará en el siguiente capítulo. Asimismo, se ha llevado a cabo una revisión bibliográfica del estado del arte con respecto a los métodos de modelado cinemático aplicables a robots manipuladores, como punto de partida para los procedimientos de calibración de éstos. Una vez realizada esta revisión y análisis del estado de arte, se ha seleccionado el modelo de Denavit-Hartenberg, modificado por la revisión de Hayati y Mirmirani, como el más apropiado para este trabajo, debido a que los robots manipuladores cuentan con articulaciones consecutivas con ejes casi paralelos, lo que supone una inestabilidad en el cálculo numérico para el modelo D-H original.

Una vez seleccionado y justificado el modelo cinemático a utilizar, se ha aplicado al robot KUKA KR 5 sixx R650, que es el que se va utilizar para el desarrollo de esta tesis. Para ello, y según indica el procedimiento del modelo de D-H, se han definido los sistemas de coordenadas asociados a las articulaciones del robot, y se han identificado los valores iniciales de los parámetros cinemáticos del modelo, paso previo a la calibración cinemática del robot, que se desarrolla en el capítulo siguiente.



# 4 Calibración cinemática de robots

---

## 4.1 Introducción

Las aplicaciones que incorporan el uso de robots requieren mejores sistemas y prestaciones día a día. Su mejora depende de dos importantes características inherentes a todo robot, su repetibilidad y precisión. La repetibilidad mide la habilidad que tiene el robot de volver a la misma posición y orientación a lo largo del tiempo. La precisión se define como la capacidad que tiene el robot de moverse de forma exacta a un punto definido en el espacio 3D. Cuando los robots están siendo previamente programados off-line, la repetibilidad es un parámetro crítico. La posición exacta del robot es menos importante para el caso de programación off-line, pero debería ser capaz de volver a la misma posición con el menor error posible. El proceso para determinar las diferencias entre las trayectorias programadas y las óptimas para conseguir la identificación de los parámetros cinemáticos del robot recibe el nombre de calibración cinemática. Los diferentes métodos de calibración de robots se han mostrado de forma extensa en muchos trabajos. La precisión obtenida depende de cómo se realiza el proceso de calibración en cada caso.

En este trabajo se pretende usar la calibración cinemática para mejorar la precisión de la posición y orientación del robot mediante el cálculo de los parámetros del modelo cinemático que, o bien minimizan el error causado por el manipulador, o bien consiguen encajar mejor en la cinemática existente en el robot. Estas técnicas asumen que el error principal en la posición del brazo es debido a diferencias entre los parámetros cinemáticos nominales del robot y los parámetros reales. Las fuentes de estos errores pueden ser geométricas y no geométricas [3], [115], [116]; por tanto, los datos tomados durante el proceso de identificación estarán afectados por estos errores. Sin embargo, sólo los parámetros geométricos se pueden variar para minimizar el error final del brazo robot.

Existe una distinción en la bibliografía [3] en lo que se refiere a calibración estática, entendida como la identificación de modelos y parámetros adecuados que influyen sobre la precisión del robot, y los métodos de calibración dinámica que, partiendo de los resultados de la calibración estática persiguen la obtención de modelos para describir el comportamiento dinámico de un robot, con influencias como fuerzas, gravedad, inercias, momentos y efectos no geométricos debidos a fricción o transmisión de movimiento entre los engranajes de las articulaciones de un robot [117]–[119]. Las técnicas de modelado y calibración dinámica exigen medidas del movimiento

del robot y de las fuerzas que actúan sobre él, hecho que genera un proceso de identificación de estos parámetros difícil y costoso que hace que los métodos y algoritmos de corrección dinámica estén mucho menos extendidos que los referidos a calibración estática.

El trabajo presentado en esta tesis doctoral se centra en el primer grupo de métodos de calibración estática, es decir, en métodos de identificación, optimización de parámetros geométricos y sistemas de corrección para robots que habitualmente siguen los siguientes pasos:

1. Determinación y construcción del modelo cinemático adecuado para la configuración del robot, indicando las transformaciones geométricas necesarias, la posición de los sistemas de referencia y el conjunto inicial de parámetros geométricos nominales. El modelo más usualmente utilizado es el modelo de Denavit-Hartenberg [2].
2. Captura de datos mediante el uso de un dispositivo de medición con mayor precisión que la precisión de calibración requerida para el robot. Las coordenadas se miden en posiciones conocidas en el espacio de trabajo del robot.
3. Optimización, también conocida como identificación de parámetros geométricos normalmente realizada mediante procedimientos de aproximación basados en distintos tipos de ajuste por mínimos cuadrados a los datos medidos.
4. Identificación de las posibles causas y fuentes de error y modelado e implementación de modelos de corrección. Una vez calculados los parámetros cinemáticos, es necesario introducir estos parámetros en el rendimiento del robot. Esto se realiza mediante correcciones en el software del robot o mediante circuitos externos que compensan las señales de los actuadores en función de los parámetros calculados.

El trabajo desarrollado en este capítulo presenta las distintas fuentes de error en calibración de robots y los métodos existentes, para finalmente desarrollar una metodología de calibración cinemática. Esta calibración cinemática se va a realizar de acuerdo al grupo de métodos de calibración de eje-tornillo, llamados en inglés *screw-axis calibration method*.

El capítulo se organiza de forma siguiente: primero se presenta una visión de las fuentes de error que pueden aparecer en procesos de calibración de robots y los diferentes métodos de calibración identificados en la literatura específica; a continuación se pasa a describir la calibración mediante la técnica de *Circle Point*, y su interpretación tanto matemática como geométrica; posteriormente se presenta la descripción y explicación de la captura de datos, así como de la identificación de parámetros cinemáticos del robot realizada mediante la citada técnica de *Circle Point*; y finalmente se determinan los errores en los ejes y articulaciones del robot que se han obtenido con los datos recopilados. La última sección de este capítulo se dedica a realizar un resumen del capítulo y establecer las conclusiones que se han obtenido de los datos y cálculos realizados.

## 4.2 Fuentes de error en la calibración de robots

Como se ha visto en el capítulo 3.2, el término pose (“pose” en Inglés) se utiliza en mecánica para representar tanto la posición como la orientación de un cuerpo. Es bien conocido que el número de grados de libertad que se necesitan para definir la pose de un objeto en un espacio tridimensional son seis: tres para la posición y tres para la orientación.

De acuerdo al estándar UNE-ISO 9283:1998 [1] hay dos valores importantes que describen la eficiencia en la exactitud de un manipulador dado, los cuales establecen el criterio de rendimiento de los manipuladores industriales, y son la precisión y la repetibilidad de posición (*pose repeatability* y *pose accuracy*, en sus términos en inglés). La precisión de posición expresa la desviación entre las posiciones programadas y la media de las posiciones alcanzadas cuando el robot se aproxima, siempre en la misma dirección, al punto programado. Con lo cual, es una medida de la capacidad del robot para moverse de forma precisa a una posición definida en el espacio 3D. La precisión de posición se divide en los siguientes conceptos:

- precisión de posicionamiento: la diferencia entre la posición de un punto programado y el baricentro de las posiciones alcanzadas. Esto se puede ver en la Figura 4.1.
- precisión de orientación: la diferencia entre la orientación de un punto programado y el promedio de las orientaciones alcanzadas. Esto se puede ver en la Figura 4.2.

La precisión de posicionamiento en el punto P, denominado en la ecuación inferior (4—1) como  $AP_p$ , se calcula como sigue:

$$AP_p = \sqrt{(\bar{x} - x_c)^2 + (\bar{y} - y_c)^2 + (\bar{z} - z_c)^2} \quad (4-1)$$

siendo  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  las coordenadas del baricentro de la nube de puntos obtenidos tras repetir la misma posición  $n$  veces.

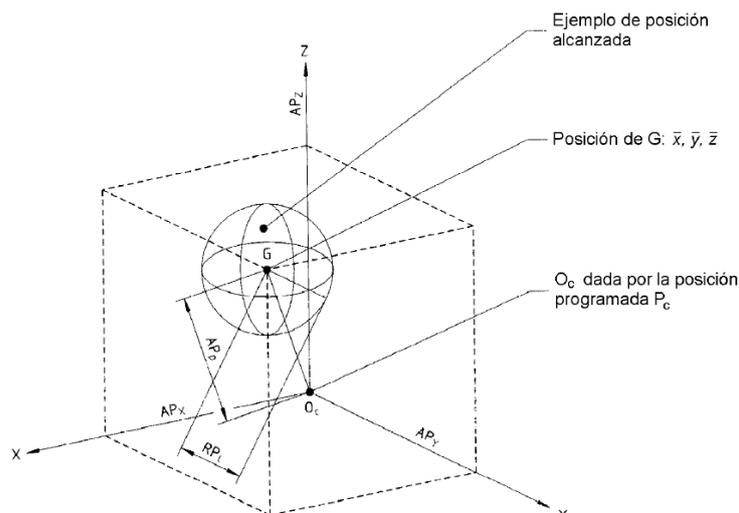


Figura 4.1. Precisión de posicionamiento y repetibilidad. Fuente: [1]

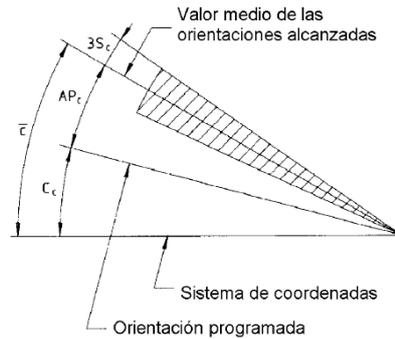


Figura 4.2. Precisión de orientación y repetibilidad. Fuente: [1]

La repetibilidad de posición expresa la dispersión de las posiciones alcanzadas tras  $n$  visitas repetidas en la misma dirección a una posición programada. Es decir, evalúa la capacidad del robot de volver siempre a una misma posición y orientación dada. Para una posición dada, la repetibilidad se expresa mediante:

- a) el valor de RPI que es el radio de la esfera cuyo centro es el baricentro (véase la Figura 4.1).
- b) la dispersión de ángulos  $\pm 3S_a, \pm 3S_b, \pm 3S_c$  respecto a la media de valores,  $a, b$  y  $c$  donde  $S_a, S_b,$  y  $S_c$  son las desviaciones estándar (véase la Figura 4.2).

donde la repetibilidad de posicionamiento (RP<sub>i</sub>) se puede calcular de la forma que muestra la ecuación (4-2):

$$RP_i = \bar{l} + 3S_l \tag{4-2}$$

Considerando las ecuaciones (4-3) y (4-4):

$$l = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n l_j \tag{4-3}$$

$$l_j = \sqrt{(x_j - \bar{x})^2 + (y_j - \bar{y})^2 + (z_j - \bar{z})^2} \tag{4-4}$$

En parte de aplicaciones industriales de hoy en día la programación de los robots manipuladores se sigue haciendo on-line, donde los puntos de ubicación del robot y sus instrucciones se adquieren en modo *Teach*, esto es, llevando el robot manualmente a las posiciones que se necesitan. En estos casos la especificación más relevante del robot es la repetibilidad.

La repetibilidad que llega a conseguir un robot industrial manipulador es muy elevada, y llega a conseguir valores por debajo de 0,1mm en muchos robots. Como ejemplos de estos valores podemos ver en la Figura 4.3 y Figura 4.4 las hojas de características técnicas de robots industriales actuales de las marcas Fanuc© y Kuka©, donde pueden observarse valores de repetibilidad de  $\pm 0,05$  mm. Sin embargo, la precisión de posición que suelen dar los robots industriales puede variar en un rango entre 1 mm y varios milímetros, y puede ser incluso mayor, dependiendo de la marca y del modelo que se tome [120] [117].

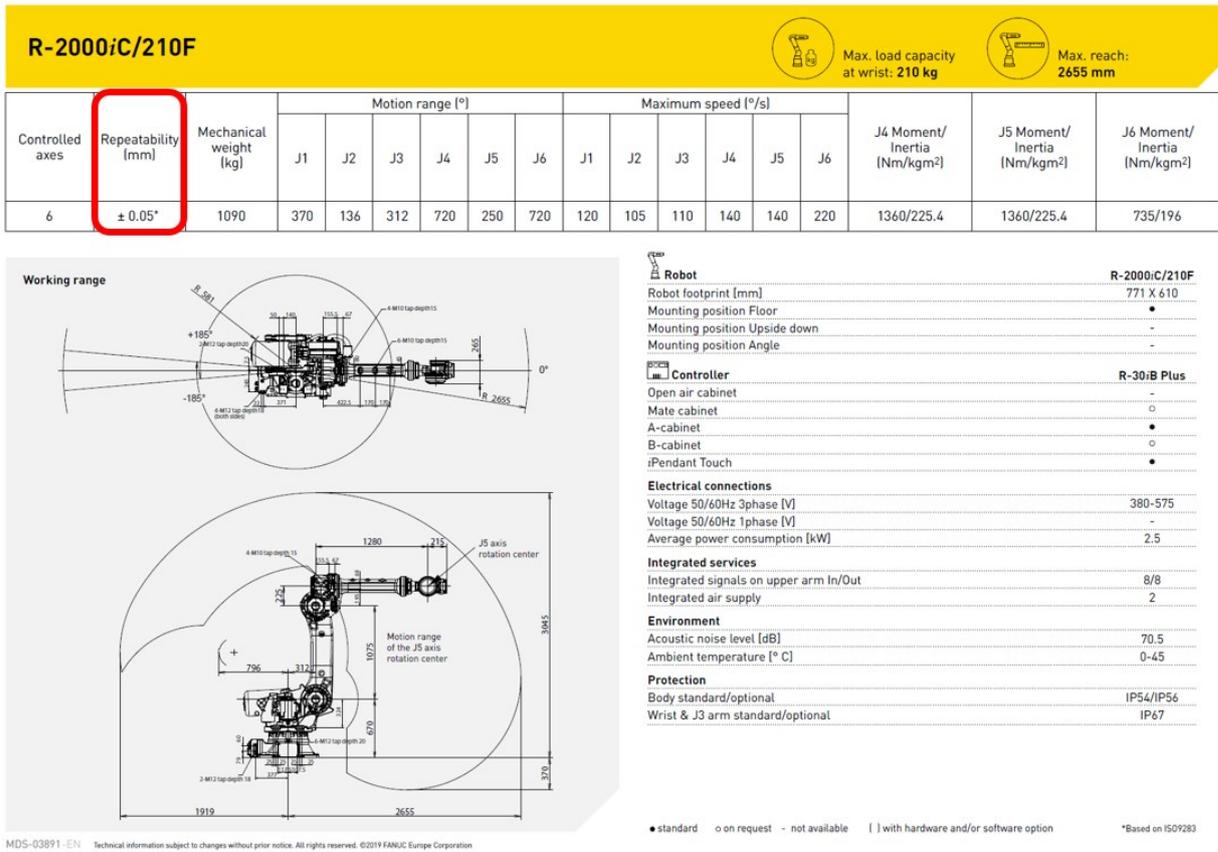


Figura 4.3. Hoja características técnicas Robot Fanuc R-2000iC/210F. Valor de repetibilidad. Fuente: [www.fanuc.eu](http://www.fanuc.eu)

## KR 120 R2700-2



### Datos técnicos

Alcance máximo	2701 mm
Carga máxima	167 kg
Carga nominal	120 kg
Carga adicional nominal columna giratoria/brazo de oscilación/brazo	0 kg / 0 kg / 50 kg
<b>Repetibilidad de posición (ISO 9283)</b>	<b>± 0,05 mm</b>
Número ejes	6
Posición de montaje	Suelo
Superficie de colocación	754 mm x 754 mm
Peso	aprox. 1069 kg

### Datos de los ejes

Rango de desplazamiento	
A1	±185 °
A2	-140 ° / -5 °
A3	-120 ° / 168 °
A4	±350 °
A5	±125 °
A6	±350 °
Velocidad con carga nominal	
A1	120 °/s
A2	115 °/s
A3	120 °/s
A4	190 °/s
A5	180 °/s
A6	260 °/s

### Condiciones de servicio

Temperatura ambiente durante el ser-vicio	0 °C hasta 55 °C (273 K hasta 328 K)
---	--------------------------------------

### Tipo de protección

Tipo de protección (IEC 60529)	IP65
Tipo de protección muñeca de robot (IEC 60529)	IP65 / IP67

### Unidad de control

Unidad de control	KR C5; KR C4
-------------------	-----------------

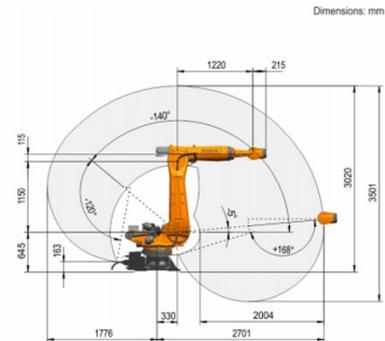
### Certificados

Requisitos ESD	IEC61340-5-1; ANSI/ESD S20.20
----------------	-------------------------------

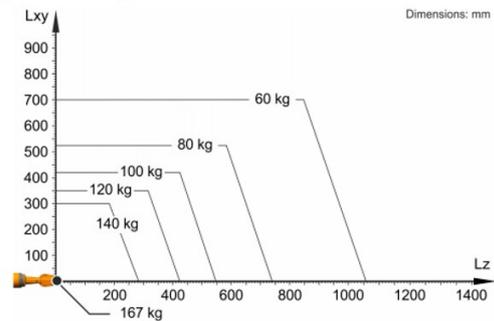
### Dispositivo de mando manual

Dispositivo de mando manual KUKA smartPAD-2

### Gráfica del campo de trabajo

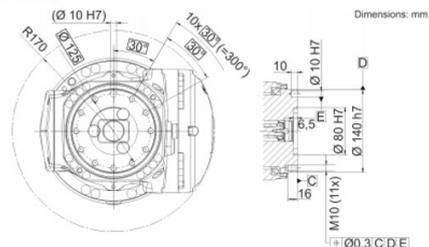


### Diagrama de cargas



KR 120 R2700-2 está configurado para una carga nominal de 120 kg para aprovechar de forma óptima el rendimiento y la dinámica del robot. Con intervalos de carga reducidos también se pueden aplicar cargas superiores hasta la capacidad de carga máxima. La situación de carga concreta debe controlarse con KUKA.Load. Para un asesoramiento individual, póngase en contacto con KUKA Support.

### Brida de acople



Las indicaciones sobre las características y la usabilidad de los productos no representan una confirmación de las propiedades, sino sirven únicamente a título informativo. El alcance de los productos entregados y servicios realizados viene determinado por el contenido específico del contrato. Los datos técnicos y las figuras no son vinculantes para los suministros. Reservado el derecho de modificaciones.  
0000-325-899 / V9.1 / 01.04.2021 / es  
KUKA Deutschland GmbH Zugsplitzstrasse 140, 86165 Augsburg, Alemania. Tel.: +49 821 797-4000, www.kuka-robotics.com

Figura 4.4. Hoja características técnicas Robot KUKA KR 120 R2700-2. Valor de repetibilidad. Fuente: www.kuka-robotics.com

Los errores de repetibilidad están primordialmente causados por la incapacidad del controlador de conseguir exactamente los mismos valores de las articulaciones en diferentes ejecuciones, y la posible presencia de holguras en los engranajes reductores del robot manipulador (*backlash*). Sin embargo, este último efecto es menos posible hoy en día debido a los desarrollos de engranajes de cero-holguras (*zero-backlash*).

Los errores de precisión pueden ser debidos tanto por parámetros geométricos como a parámetros no geométricos. La precisión de posicionamiento implica usar un modelo de cinemática inversa para el cálculo de los valores de las articulaciones que correspondan a la pose 3D requerida y por tanto los errores serán causados por defectos en este modelo. Los principales parámetros geométricos que afectarán a este modelo son la dimensión de los eslabones del robot manipulador y la orientación de las articulaciones. Durante el proceso de fabricación, la variación de las dimensiones de las piezas es inevitable de un robot a otro, debido a las tolerancias de las mismas y de los procesos de fabricación. En los robots manipuladores de 6 grados de libertad la longitud de las tres primeras articulaciones contribuye principalmente a la posición, mientras que las articulaciones 4, 5 y 6 (muñeca) contribuyen principalmente a la orientación de la herramienta o TCP. Otros parámetros que corresponden a errores no geométricos, y afectan a la precisión de la pose son: la elasticidad de las articulaciones y eslabones, la carga aplicada y la flexión o pandeo de los eslabones, la estabilidad de los sensores o codificadores de la posición de los engranajes y su posible deriva, la flexibilidad (o no completa rigidez) y excentricidad de los engranajes y la influencia de la temperatura, por ejemplo debida a calentamiento de los motores o la temperatura de trabajo del ambiente [121]. Además, la posición fija del efector final y la determinación del sistema de coordenadas pueden también afectar la precisión del entorno de trabajo, y por ende, la del resultado de la calibración.

Este trabajo se va a centrar en los errores geométricos y en el desarrollo de un método de calibración que permita minimizarlos, mejorando la técnica existente, como se verá en los siguientes apartados.

### 4.3 Métodos de calibración cinemática de robots

El uso de los robots industriales se ha incrementado en los últimos años debido a su flexibilidad y la elevada productividad que brindan en aplicaciones tales como soldadura, pintura, ensamblado, empaclado o atornillado, entre otras [122]. Igualmente, la investigación relativa a la calibración de robots ha sido ampliamente desarrollada durante las tres pasadas décadas. Para controlar la correcta posición y orientación del efector final del robot en aplicaciones industriales, es necesario definir un modelo matemático válido de la estructura cinemática existente. El modelo matemático se obtiene así de ecuaciones asociadas a la cinemática directa e inversa del robot [123]–[125]. Este modelo matemático relaciona las posiciones de las articulaciones del robot y la pose del efector final en relación a un sistema de coordenadas fijo. Mientras que la mayoría de los trabajos se enfocan en la calibración cinemática basada en el modelo, errores no geométricos como por ejemplo las deformaciones elásticas también juegan un rol importante afectando a la precisión del robot [126].

El objetivo fundamental de cualquier método de calibración en robots es evitar errores de posicionamiento del extremo del robot que actúa como herramienta para realizar cualquier tarea. En el caso de los robots en el entorno industrial se da más importancia a la repetibilidad, es decir, a la capacidad del robot para volver a un punto del espacio, que a la precisión, ya que habitualmente se emplean en tareas repetitivas que exigen ir a las mismas posiciones de trabajo.

La calibración de los robots normalmente incluye las siguientes fases:

1. Determinación y construcción del modelo cinemático adecuado para la configuración del robot, indicando las transformaciones geométricas necesarias, la posición de los sistemas de referencia y el conjunto inicial de parámetros geométricos nominales.
2. Captura de datos de la posición de todos los elementos del robot mediante un instrumento de medida como un interferómetro láser o un *Láser Tracker*.
3. Optimización, también conocida como identificación de parámetros geométricos normalmente realizada mediante procedimientos de aproximación basados en distintos tipos de ajuste por mínimos cuadrados a los datos medidos.
4. Implementación y evaluación del modelo óptimo en posiciones distintas a las de identificación.
5. Identificación de las posibles causas y fuentes de error y modelado e implementación de modelos de corrección.

Las técnicas de calibración de robots documentadas [3] (cuando se considera en términos de sistemas de medición usados en captura de datos, restricciones, o muestreo de datos secuenciados y tratamiento posterior) pueden clasificarse en tres grupos: a) métodos de lazo abierto (*open loop methods*), b) métodos de lazo cerrado (*closed-loop methods*) y c) métodos de medida de eje-tornillo (*screw measurement methods*). En el primer grupo de técnicas de lazo abierto [127], las poses del robot real son capturadas usando un sistema de medición externo. El segundo grupo de técnicas se basa en la pose diferencial [128], donde la información del error se toma de la creación de cadenas cinemáticas cerradas que fijan una o más de las restricciones de orientación y posición del efector final. Esto permite establecer un sistema de ecuaciones que determine un conjunto de parámetros, los cuales se conocen como técnica de auto-calibración. En términos de la solución matemática del procedimiento, los primeros dos grupos usan unas técnicas de optimización iterativa no lineal para ajustar el conjunto de parámetros identificados de los datos que se toman de los diferentes posiciones y orientaciones del mecanismo, ayudando a minimizar el error. Para calcular el error obtenido en las posiciones muestreadas y eventualmente evaluar la generalización del error, los datos se obtienen después de la calibración en diferentes posiciones de las posiciones usadas en el procedimiento de optimización. El tercer grupo de técnicas [4] se basa en las mediciones de movimientos independientes para cada una de las articulaciones del robot. En este caso, y para el procesado de los datos tomados, es posible extraer los parámetros del modelo cinemático y analizar el valor medio de los ejes de las articulaciones así obtenidos.

Tanto en la literatura como en la práctica, los primeros dos grupos de técnicas, debido al método de identificación, no mantienen un enlace ni físico ni matemático entre los parámetros cinemáticos identificados y los parámetros cinemáticos reales del robot. Por el contrario, en términos de la precisión de la posición conseguida, estos son perfectamente capaces de conseguir su objetivo, el cual es obtener un resultado final preciso. Para aplicaciones con muy pocas ubicaciones, este tipo de técnica puede conseguir una precisión muy alta. Para estas técnicas, es extremadamente importante elegir correctamente las posiciones y evaluar la solución generalizada sobre el total del espacio de trabajo, en aplicaciones donde la precisión de la posición en el volumen total es importante. El tercer grupo de técnicas es el que mejor mantiene el enlace tanto físico como matemático entre los parámetros identificados y los parámetros reales del robot, ya que los parámetros se basan en un cálculo independiente para eje de la articulación.

En los métodos de calibración de lazo abierto, se usan sistemas de metrología externos para tomar las medidas. Dos ejemplos de métodos de calibración de lazo abierto se tienen en [122] y [129], en los cuales un *láser tracker* y una única barra de bolas telescópica, respectivamente, se usan para la toma de datos. En los métodos de lazo cerrado, no se necesitan dispositivos de medición externa. Al efector final o TCP del robot se le acopla un elemento que lo une al suelo, de tal forma que se forma una cadena cinemática de lazo cerrado móvil, si el robot es redundante a las restricciones del efector final. Entonces los parámetros cinemáticos se identifican usando las lecturas de los ángulos de las articulaciones. La metodología y aplicaciones de esta metodología se pueden ver en [128]. Por último, en los métodos de medida *screw-axis*, los errores cinemáticos se calibran mediante la determinación de la relación de transformación real entre articulaciones consecutivas. Un método de medida *screw-axis* típico es el *Circle Point Analysis (CPA)* desarrollado en [5], del cual se muestran varios ejemplos de aplicación en [130]–[132].

Por otra parte, la tecnología de calibración de robots se clasifica generalmente entre calibraciones basadas en modelos y calibraciones no basadas en modelo [133]. La calibración paramétrica basada en un modelo es el método que se emplea más ampliamente, debido a las ventajas en poderse definir mediante unas pocas mediciones y un algoritmo simple [134]. En años recientes la precisión de las calibraciones basadas en un modelo se ha mejorado mediante el uso de equipos de medida modernos, diferentes métodos de notación y métodos computacionales modificados [135]–[137]. Sin embargo, las desviaciones relativas a diferentes configuraciones de robots no se consideran en el modelo cinemático de calibración, para el cual se hace difícil compensar los errores de posicionamiento no lineales existentes en trayectorias muy grandes [138]. Entonces, los parámetros cinemáticos estructurales, representados normalmente con la notación D-H, pueden conducir a que el robot vaya a configuraciones con diferente rigidez estructural, la cual se tiene en cuenta en el modelo [139],[140], sino también modelos que consideran otros impactos, como el juego de los engranajes, decodificadores de posición del motor no uniformes, etc., los cuales introducen errores no lineales al modelo de calibración final [141],[142].

Para conseguir incluir los errores no lineales y mejorar la precisión de posicionamiento del robot, algunos investigadores han intentado incluir en el modelo los errores no lineales, tales como la rigidez de las articulaciones [143], [144]. Pashkevich et al. tienen en cuenta la influencia de las cargas en diferentes configuraciones de robot e introducen el modelo de rigidez no lineal [145]. Los efectos de la carga en el efector final o TCP en el robot se pueden asimismo compensar usando la regresión del proceso Gausiano (GP) con una elevada precisión, como indica Wei et al. [146]. Sin embargo, otros impactos mencionados anteriormente no son modelados, ya que se acoplan unos a otros y son difíciles de cuantificar independientemente. Así, algunos investigadores intentan derivar estas no linealidades usando métodos de identificación de caja negra, los cuales confían en métodos no analíticos [147][148]. Jang et al. usa la red de función básica radial para estimar los errores no paramétricos de acuerdo a condiciones de contorno en diferentes regiones locales [149]. De forma similar, en la investigación de Aoyagi, los errores residuales se reducen usando una red neuronal mientras que los datos de entrenamiento se obtienen por la cinemática inversa nominal del robot. Estos métodos, sin embargo, simplemente niegan el modelo analítico, de ahí que incrementan enormemente el esfuerzo computacional, empleando mucho tiempo y perdiendo en precisión.

En la investigación que se desarrolla en este trabajo, se ha optado por un modelo cinemático basado en el modelo de D-H modificado por Hayati-Mirmirani para el caso de articulaciones cuasi-paralelas, empleando un método de calibración *screw-axis* descrito anteriormente. Uno de los ejemplos más representativos de los métodos de calibración eje-tornillo es el método de Análisis por círculo de puntos, o *Circle Point Analysis*, que permite tener una correlación entre la matemática del modelo que se necesita y las magnitudes y mediciones físicas que se realizan en el robot a realizar la calibración cinemática. En los siguientes apartados de este capítulo se va a presentar y desarrollar el método de calibración de CPA.

#### 4.4 Calibración mediante la técnica de Circle Point Analysis (CPA)

La precisión de un brazo robot industrial típico puede ser mejorada mediante la calibración precisa o determinando los parámetros geométricos del sistema. La técnica de *Circle Point Analysis* (CPA) se basa el movimiento individual de cada una de las articulaciones del robot en un círculo mientras se mide la trayectoria de la articulación descrita por un punto alrededor de cada articulación. Se toman medidas para cada una de las seis articulaciones y se calcula el círculo que mejor se ajusta a los puntos capturados para cada eje. Por lo tanto, es posible considerar la posición del eje como un vector que pasa por el centro del círculo con una dirección normal al plano que contiene dicho círculo. Este método puede utilizarse para la programación offline de robots manipuladores [150] y tiene dos ventajas significativas. En primer lugar, los parámetros cinemáticos se determinan analíticamente a partir de las relaciones de distancias y ángulos entre los vectores calculados. Este proceso simplifica enormemente el método y elimina la demanda de tiempo de cálculo que requiere el proceso de optimización no lineal convencional. Además de la información sobre la posición de los ejes, este método da una idea de los errores de fabricación y montaje cometidos durante el proceso de fabricación del robot.

Aunque existen correlaciones evidentes entre los resultados de calibración obtenidos a partir del método CPA y la realidad física del robot, los resultados del método CPA proporcionan menos mejoras de precisión en comparación con los resultados recogidos mediante los métodos de calibración en bucle abierto y cerrado. Por lo tanto, es necesario encontrar una formulación matemática que mantenga la interpretación física del CPA y proporcione unos resultados de calibración óptimos.

Básicamente, cada uno de las articulaciones de los ejes del sistema se localiza en el espacio para una única configuración. Cada par de líneas adyacentes en el espacio formado por los ejes es entonces analizado para determinar completamente los parámetros para ese enlace. Las primeras ventajas de esta técnica son que se da un indicio geométrico real de cada enlace y que la medición 3D de un punto objetivo único se puede hacer en un sistema de coordenadas arbitrario. Los parámetros fijados relativos a dos líneas en el espacio son independientes del sistema de coordenadas usado para definir las líneas.

El conjunto completo de parámetros geométricos y notación cinemática requerido para calcular de forma precisa la ubicación de un elemento final en un sistema de referencia de coordenadas bien definido, dados los desplazamientos de las articulaciones variables, es bien

conocido. Los parámetros cinemáticos que pueden ser determinados por el análisis del CPA incluyen los siguientes:

- Ángulos de giro:  $\alpha_{12} \dots \alpha_{N-1,N}$
- Longitudes de los enlaces:  $a_{12} \dots a_{N-1,N}$
- Desplazamientos:  $d_1 \dots d_{N-1}$
- Ángulos de articulaciones:  $\theta_1 \dots \theta_{N-1}$

A notar que los parámetros relativos al sistema de coordenadas de referencia a la primera articulación,  $a_{01}$  y  $\alpha_{01}$ , y aquellos relativos a la localización de una herramienta (*tool frame*) en la última articulación,  $d_N$ ,  $a_{N,N+1}$ , y  $\alpha_{N,N+1}$ , no pueden ser fácilmente determinados mediante esta técnica. Esto es debido al hecho de que sólo los ejes de los sistemas en los que el movimiento ocurre pueden ser ubicados en el espacio. Así, sólo aquellos parámetros entre la primera y última articulación del eje pueden ser determinados. Aunque no se hace aquí, esta técnica puede ser mejorada de forma inteligente suministrando medios de localizar en el espacio la referencia del eje-Z y del eje-Z de la herramienta local,  $\overrightarrow{S_{N+1}}$ . Una sugerencia para localizar el eje-Z de la herramienta es montar un objetivo en una fijación unida al conjunto del eje, el cual esté obligado a deslizarse a lo largo o rotar alrededor del eje-Z.

Los parámetros arriba representan los términos cinemáticos puros. Para todos los ejes, dependiendo del tipo de articulación, bien el ángulo  $\theta_i$  o el valor de desplazamiento  $d_i$ , es un parámetro fijo, y los otros representan las variables en movimiento. La técnica del CPA normalmente determina los parámetros geométricos fijos. Sin embargo, es posible determinar también las variables de la articulación para una configuración final o para una serie de movimientos de articulaciones. Esto se explica más adelante en la siguiente sección. Para el caso de una articulación de revolución, la dimensión de desplazamiento  $d_j$  es el parámetro fijo y el ángulo cinemático  $\theta_j$  representa la variable, movimiento de revolución. Lo opuesto es cierto para uniones prismáticas (desplazadores). En este capítulo, las figuras representan todos los sistemas en revolución y el análisis se apoya primeramente en este hecho. Sin embargo, la técnica se modifica fácilmente para manejar sistemas los cuales contienen ejes prismáticos.

Las técnicas de ejes independientes, basadas en la geometría, no son tan comunes entre los investigadores. Sin embargo, unos pocos investigadores han desarrollado técnicas similares a las del Círculo de Puntos, aquí presentada. El trabajo de R. P. Judd y A. B. Knaisnski [151] en particular es casi una técnica idéntica.

#### 4.4.1 Descripción de la Técnica del Circle Point

El primer objetivo del método de calibración mediante *Circle Point Analysis*, CPA, es ubicar cada uno de los ejes de articulación en el espacio. Hay que notar que la localización de una línea en el espacio requiere tanto la dirección de la línea como las coordenadas de un punto arbitrario en la línea. Un único punto objetivo capaz de ser colocado en cualquier lugar de un brazo y un sistema de medición 3D se necesitan para este experimento. Una vez cada línea es localizada en el espacio para la configuración final del robot, el análisis geométrico de las coordenadas de la línea da los

parámetros calibrados geométricos requeridos. Las técnicas analíticas se muestran en las siguientes secciones. El procedimiento experimental básico consiste en los siguientes pasos:

1. El robot se coloca en la configuración inicial, que se graba como un conjunto de ángulos de las articulaciones. Un único punto objetivo  $P$  se adhiere al brazo, después del primer eje (no en la base), a una distancia perpendicular del eje igual a un radio de valor definido  $R_1$ .
2. El robot entonces se comanda para moverse alrededor de la primera articulación únicamente, parándose en un número de localizaciones discretas. La localización del objetivo, el cual traza un camino aproximadamente circular, se mide en cada posición en cualquier sistema de coordenadas elegido convenientemente. Esto crea un círculo de puntos de datos, lo que le da el nombre a esta técnica de Círculo de Puntos. Los valores de desplazamiento de la articulación para el primer eje se graban para cada posición. La Figura 4.5 ilustra los puntos en el círculo de la articulación 1, para todo un sistema en completa revolución. Nótese que todas las articulaciones excepto la primera permanecen fijas. Obviamente, cualquier robot calibrado mediante esta técnica deben ser capaces de un control de movimiento por articulación individual.
3. Los datos de puntos del círculo son entonces analizados para definir la ubicación del eje. Primero, los puntos del círculo se encajan en un plano que es el que mejor se aproxima, mediante una aproximación por mínimos cuadrados, que consigue definir la ecuación del plano. La normal del plano resultante define la dirección del eje de la articulación, definida como  $\vec{S}_1$ . Los puntos entonces se proyectan sobre el plano, en dirección perpendicular al mismo. Los puntos proyectados se encajan, otra vez usando la solución de mínimos cuadrados, en la ecuación de un círculo en el plano. El centro de este círculo, que se denota como  $\vec{r}_1$ , representa un punto en el eje o línea definido por el eje de la articulación.
4. El punto objetivo  $P$  se adhiere entonces al brazo en una posición después del segundo eje (es decir, en un punto afectado por el movimiento del eje 2), a una distancia perpendicular al eje aproximadamente igual al radio de valor  $R_2$ .
5. El robot se controla entonces para moverse alrededor del eje 2 solamente. Otra vez, el punto  $P$  traza un camino aproximadamente circular y se miden y graban los valores individuales de desplazamiento de las articulaciones. Nótese que la articulación 1 no se debe mover, ya que esto causaría el movimiento del eje 2. El objeto de este paso es localizar el eje 2 el cual por consiguiente permanece fijo. Los puntos del círculo son entonces analizados usando la misma técnica analítica que en el paso 3, que permite obtener la dirección  $\vec{S}_2$  del eje y un punto  $\vec{r}_2$  en el eje o línea. Los puntos del círculo para el eje 2 se muestran también en la figura.
6. Un proceso idéntico se debe repetir para cada eje en el sistema. Hay que prestar un cuidado extremo en evitar mover cualquier eje que esté ubicado en la cadena de enlaces cinemática antes del eje que se está moviendo en cada momento.

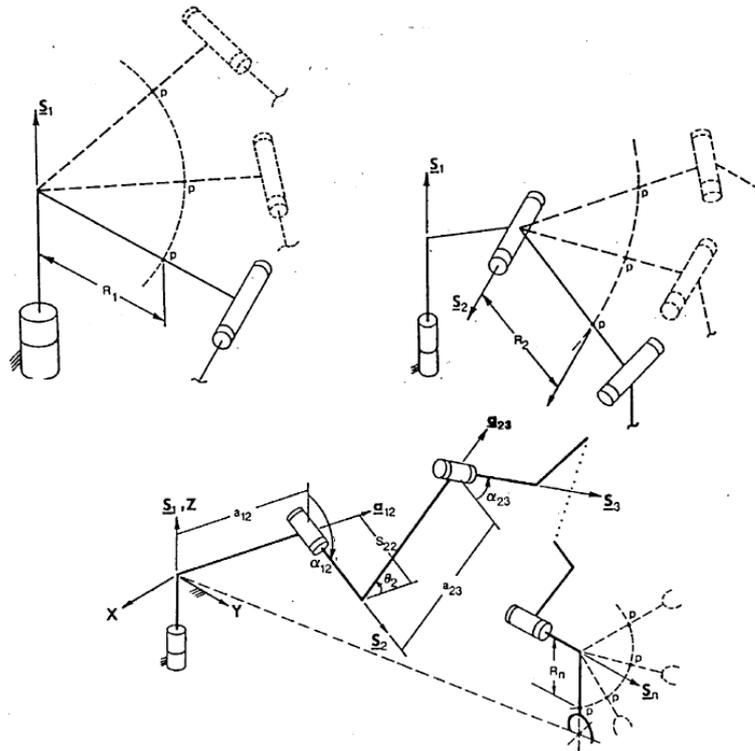


Figura 4.5. Movimiento del Círculo de Puntos para ejes individuales. Fuente: [19]

El procedimiento antes mostrado no da un indicio de la configuración inicial o final que se debe usar. El rango de movimiento y valores iniciales de cada desplazamiento de la articulación tampoco está definido, siendo las directrices generales las siguientes:

1. Cada unión debería moverse a través de un rango tan grande como sea posible para generar su círculo de puntos.
2. La configuración inicial debería resultar en pares de torsión tan bajos como sea posible debido a la gravedad sobre los primeros ejes.
3. La configuración final debería estar cerca de la región que se pretenda que sea para la mayoría de aplicaciones.

Obviamente, para aplicaciones en general, la última directriz no es posible. No está claro actualmente si varias configuraciones causan una diferencia en los parámetros calibrados o no. Se requieren futuras investigaciones para mejorar las configuraciones seleccionadas y los rangos de movimiento para este procedimiento. La razón fundamental por la que el experimento debe ser dependiente de la configuración es que las deformaciones del sistema son causadas por cargas de la gravedad. Un interesante resultado de la técnica del Círculo de Puntos es que las deformaciones debido a la gravedad en realidad deben ser tenidas en cuenta y compensadas usando los parámetros calibrados así determinados. Los parámetros calibrados determinados representan en realidad el sistema en un estado deformado "medio", debido a la carga de la gravedad.

El método de Círculo de Puntos es la técnica más útil para los fabricantes porque provee una indicación directa de los errores de fabricación y ensamblado en la geometría del sistema y un indicio de la integridad mecánica global de cada articulación. Cuando se encaja el Círculo de Puntos en un plano, el valor medio de los errores residuales o distancias de cada punto al plano que "mejor encaja" da un indicio de la dirección del movimiento del eje de la articulación o "cabeceo"

("wobble"). Cuando se encaja los puntos proyectados en el plano en un círculo, el valor medio de los errores residuales o distancia radial entre cada punto y el círculo da una indicación de las traslaciones del eje de la articulación o espacio entre rodamientos, comúnmente llamada como "juego" ("slop").

Los datos resultantes del procedimiento experimental  $(\vec{S}_1, \vec{r}_1, \vec{S}_2, \vec{r}_2, \dots, \vec{S}_n, \vec{r}_n)$  pueden ser usadas para especificar completamente cada eje como una línea en el espacio para la configuración final alcanzada. Cada par de líneas adyacentes es entonces analizado para determinar los valores de  $\alpha$ ,  $a$ ,  $d$  y  $\theta$  para cada enlace en el sistema. Nótese, que para cada configuración final alcanzada, tanto los parámetros  $d$  (desplazamientos del enlace) y  $\theta$  (ángulo cinemático) se pueden determinar para cada articulación, sin importar qué valor se fije. Así, para un eje en revolución, el parámetro variable  $\theta$  se puede comparar al valor del ángulo del *encoder* del sistema grabado para el último punto del círculo. Este par de datos únicos de ángulos reales versus ángulo del sensor se pueden usar como un parámetro de corrección para los sensores de las articulaciones. Judd and Knasinski incluso dan una mejora que va más allá en su técnica [151]. Para cada eje, la cantidad de movimiento angular desplazado entre cada par de puntos discretos en el círculo se puede calcular. Entonces estos valores se pueden comparar a las diferencias en los valores de los ángulos de sensores grabados, los cuales dan un número de datos para calcular los parámetros de corrección. Los ejes prismáticos no dan dificultades inherentes en este análisis. Todas las técnicas y datos mencionados anteriormente se pueden determinar para ejes prismáticos, ya que el análisis está basado únicamente en la localización de líneas o ejes en el espacio. La ubicación de un eje prismático se determina por un punto objetivo, el cual describe una trayectoria aproximadamente a lo largo de una línea recta. Los puntos medidos se pueden encajar de forma simple, a través del método de mínimos cuadrados, en la ecuación de una línea un único paso analítico. Nótese que el método explícito para encajar puntos en la línea o círculo no se describe en este documento. La mayoría de los sistemas de medición 3D basados en ordenador suministran esta capacidad automáticamente. Los únicos datos presentados al análisis metrológico por ordenador han sido las direcciones de los ejes de las articulaciones ( $\vec{S}$ ) y los puntos en los ejes ( $\vec{r}$ ). Cada par de líneas o ejes 1-2, 2-3, ..., (N-1)-N se debe analizar individualmente para dar los parámetros requeridos de la unión o articulación. Los análisis de dos líneas arbitrarias en el espacio se presentan en las siguientes secciones.

#### 4.4.2 Revisión de la definición de líneas y planos en el espacio

Una definición clara, sea tanto matemática como geométrica, de tanto líneas como de planos en un espacio tridimensional es lo que se necesita para analizar completamente las líneas adyacentes formadas por los ejes de un manipulador. Estas definiciones se revisan aquí brevemente. Una línea general en el espacio es la que se muestra en la Figura 4.6. Los únicos parámetros requeridos para especificar completamente una línea que tiene una dirección y ubicación fijas son:

$$\vec{S}_l (L, M, N) \rightarrow \text{Dirección del vector correspondiente a la línea.}$$

$$\vec{r}_l (x_i, y_i, z_i) \rightarrow \text{Un punto cualquiera dado en la línea.}$$

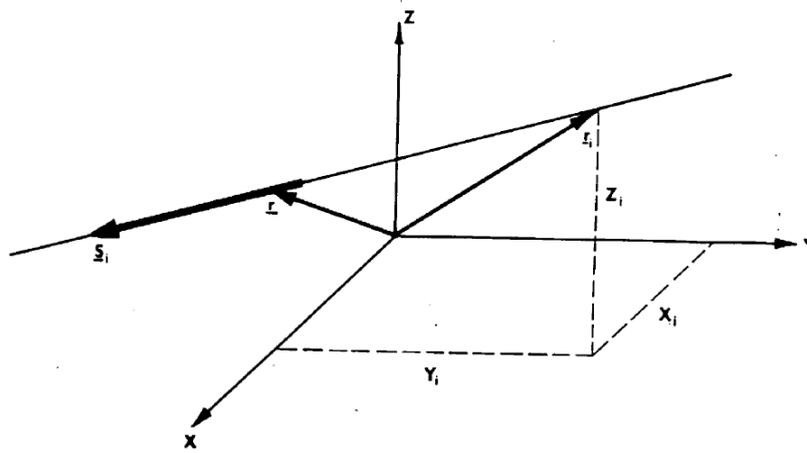


Figura 4.6. Definición de una Línea en el espacio. Fuente: [5]

Nótese que el vector dirección puede ser considerado como un vector libre que se puede colocar en cualquier lugar a lo largo de la línea. Considerando un punto general en la línea, sea  $\vec{r}(x,y,z)$ , la siguiente ecuación (4—5) de producto cruzado es obviamente válida:

$$(\vec{r} - \vec{r}_i) \times \vec{S}_i = 0 \quad (4-5)$$

Reescribiendo esta ecuación se obtiene la ecuación de una línea (4—6):

$$\vec{r} \times \vec{S}_i = \vec{r}_i \times \vec{S}_i = \vec{S}_{0i} \quad (4-6)$$

donde  $\vec{S}_{0i}$  representa los momentos de cada componente del vector dirección sobre los ejes. El vector momento  $\vec{S}_{0i}(P,Q,R)$  está definido directamente de los datos dados anteriormente, como sigue en la ecuación (4—7):

$$\begin{cases} P = y_i \cdot N - z_i \cdot M \\ Q = z_i \cdot L - x_i \cdot N \\ R = x_i \cdot M - y_i \cdot L \end{cases} \quad (4-7)$$

Así, una línea está completamente especificada por las coordenadas dadas en (4—8):

$$(\vec{S}_i; \vec{S}_{0i}) = (L, M, N; P, Q, R) \quad (4-8)$$

las cuales se refieren a las coordenadas Plücker. Nótese que el vector  $\vec{S}$  siempre debe ser especificado como un vector unidad.

Un plano general en el espacio se ilustra en la Figura 4.7. Los parámetros requeridos para especificar completamente un plano ubicado en una ubicación y orientación fijas en el espacio son los siguientes:

$$\vec{S}_i(L, M, N) \rightarrow \text{Dirección del vector normal al plano.}$$

$\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i) \rightarrow$  Un punto cualquiera dado sobre el plano.

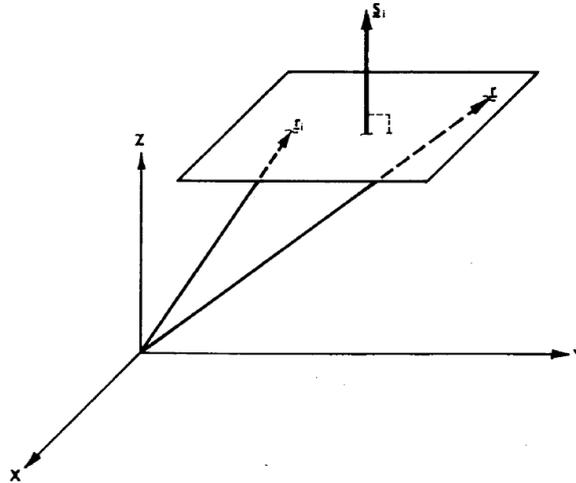


Figura 4.7. Definición de un Plano en el espacio. Fuente: [5]

Considerando un punto cualquiera sobre el plano,  $\vec{r}(x,y,z)$ , la siguiente ecuación (4—9) de producto escalar es obviamente válida:

$$(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot \vec{S}_i = 0 \quad (4-9)$$

Reescribiendo esta ecuación se obtiene la ecuación de un plano (4—10):

$$\vec{r} \cdot \vec{S}_i = \vec{r}_i \cdot \vec{S}_i = S_{0i} \quad (4-10)$$

donde  $S_{0i}$  es una cantidad escalar definida por los datos dados. Ésta es una ecuación escalar que se puede reescribir en una forma algebraica más familiar, que es la siguiente (4—11):

$$L \cdot x + M \cdot y + N \cdot z = S_{0i} \quad (4-11)$$

Los cuatro parámetros que especifican un plano en el espacio son  $(\vec{S}_i; S_{0i})$ , donde  $\vec{S}_i$  está siempre escrito como un vector unidad.

### 4.4.3 Análisis de Línea adyacente

Las coordenadas Plücker de una línea  $(\vec{S}_i; \vec{S}_{0i})$  para cada eje se calculan fácilmente de los datos de las líneas  $(\vec{r}_i; \vec{S}_i)$  obtenidos mediante la técnica experimental del Círculo de Puntos. Cada par de líneas adyacentes  $j$  y  $k$  (por ejemplo, los ejes 1-2, 2-3, ..., (n-1)-n) se deben analizar para dar los parámetros geométricos requeridos  $(\alpha_{jk}, a_{jk}, d_j, d_k, \theta_j, \theta_k)$ , para cada articulación. Esta sección presenta una solución analítica completa para el problema de líneas adyacentes para todos los

casos posibles. Como repaso, la definición matemática precisa del ángulo de giro  $\alpha$ , requerido para este análisis, se repite debajo en las ecuaciones (4—12) y (4—13):

$$\cos \alpha_{jk} = \vec{S}_j \cdot \vec{S}_k \quad (4-12)$$

$$\text{sen } \alpha_{jk} = \overline{a}_{jk} \cdot \vec{S}_j \times \vec{S}_k \quad (4-13)$$

La Figura 4.8 muestra el caso general de dos líneas o ejes adyacentes en el espacio. Todos los datos requeridos se pueden determinar a partir de las coordenadas de las líneas  $L_j(\vec{S}_j; \vec{S}_{0j})$  y  $L_k(\vec{S}_k; \vec{S}_{0k})$  y los puntos de intersección  $\vec{P}_j$  y  $\vec{P}_k$  de la línea que es mutuamente perpendicular. Nótese que un par de líneas no paralelas sólo tienen una única línea que las intercepta y es perpendicular a ambas. Recapitulando, las ecuaciones de cada línea son (4—14) y (4—15):

$$\vec{r}_j \times \vec{S}_j = \vec{P}_j \times \vec{S}_j = \vec{S}_{0j} \quad (4-14)$$

$$\vec{r}_k \times \vec{S}_k = \vec{P}_k \times \vec{S}_k = \vec{S}_{0k} \quad (4-15)$$

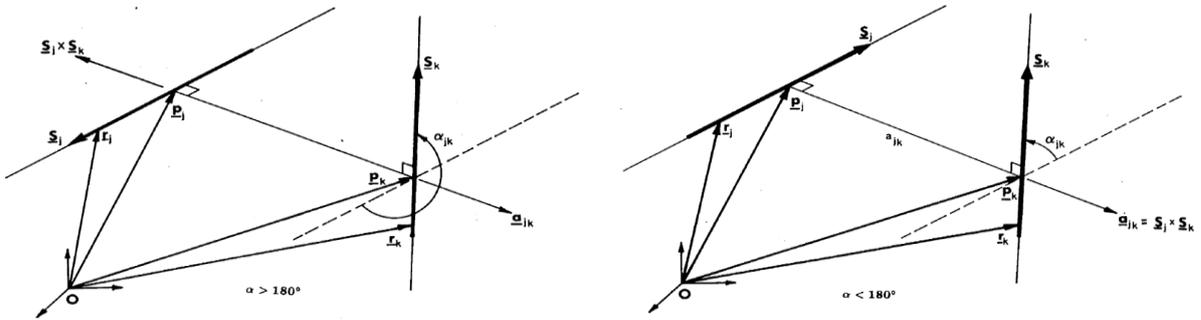


Figura 4.8. Casos generales de Líneas Adyacentes, para  $\alpha < 180^\circ$ , y para  $\alpha > 180^\circ$ . Fuente: [18]

Los puntos de intersección obviamente dan de inmediato la longitud de la articulación  $a_{jk}$  y el vector dirección de la articulación  $\overline{a}_{jk}$ . Los valores de desplazamiento se proveen también. Por ejemplo, en el eje  $j$ , el valor de desplazamiento  $d_j$  es la distancia entre el punto de intersección  $\vec{P}_j^{prev}$ , el cual se determina analizando la articulación  $ij$ , y  $\vec{P}_j^{sig}$ , determinado analizando la articulación  $j-k$ . Así el punto principal de este análisis es el cálculo de los puntos de intersección dado que estos proveen casi todos los parámetros requeridos.

Antes de continuar, los siguientes dos vectores identidad (usados extensamente en este análisis) se definen con el propósito de su revisión. Considerando tres vectores generales  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , el triple producto escalar se muestra en la ecuación (4—16):

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad (4-16)$$

Y el triple producto vector identidad es el que aparece en la ecuación (4—17):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (4-17)$$

La ecuación principal usada para determinar las condiciones iniciales de las dos líneas (paralelas, con intersección, u oblicuas) es llamada como la ecuación del Momento Mutuo (MM). Esta se deriva de expandir las expresiones del momento mutuo de cada línea sobre la otra, las cuales vienen dadas por (4—18) y (4—19):

$$\left( (\vec{P}_k - \vec{P}_j) \times \vec{S}_k \right) \cdot \vec{S}_j \quad (\text{momento de } \vec{S}_k \text{ sobre } \vec{S}_j) \quad (4-18)$$

$$\left( (\vec{P}_j - \vec{P}_k) \times \vec{S}_j \right) \cdot \vec{S}_k \quad (\text{momento de } \vec{S}_j \text{ sobre } \vec{S}_k) \quad (4-19)$$

Expandiendo sólo la primera expresión y substituyendo la ecuación de la línea  $j$  se tiene (4—20):

$$\left( (\vec{P}_k - \vec{P}_j) \times \vec{S}_k \right) \cdot \vec{S}_j = \vec{P}_k \times \vec{S}_k \cdot \vec{S}_j - \vec{P}_j \times \vec{S}_k \cdot \vec{S}_j = \vec{S}_{0k} \cdot \vec{S}_j + \vec{S}_k \times \vec{P}_j \cdot \vec{S}_j \quad (4-20)$$

Substituyendo el triple producto escalar identidad en el segundo término del lado derecho, la ecuación de la línea  $k$  queda según (4—21) y (4—22):

$$\left( (\vec{P}_k - \vec{P}_j) \times \vec{S}_k \right) \cdot \vec{S}_j = \vec{P}_k \times \vec{S}_k \cdot \vec{S}_j - \vec{P}_j \times \vec{S}_k \cdot \vec{S}_j = \vec{S}_{0k} \cdot \vec{S}_j + \vec{S}_k \times \vec{P}_j \cdot \vec{S}_j \quad (4-21)$$

$$\boxed{MM = \vec{S}_{0k} \cdot \vec{S}_j + \vec{S}_k \cdot \vec{S}_{0j}} \quad (4-22)$$

Esta ecuación final (4—22) da el momento mutuo en términos de las coordenadas de la línea únicamente. Expandiendo la expresión del segundo momento mutuo arriba quedaría el mismo resultado. Por tanto, el momento de cada línea sobre la otra es idéntico, como el término momento mutuo. El vector formado por los puntos de intersección es en realidad el vector dirección de la articulación, que se calcula como (4—23):

$$\vec{P}_k - \vec{P}_j = a_{jk} \cdot \vec{a}_{jk} = \vec{a}'_{jk} \quad (4-23)$$

Substituyendo esta expresión en la expresión del primer momento mutuo se tiene la siguiente ecuación (4—24):

$$a_{jk} \cdot \vec{a}_{jk} \times \vec{S}_k \cdot \vec{S}_j = \vec{a}'_{jk} \cdot \vec{S}_k \times \vec{S}_j = -\vec{a}'_{jk} \cdot \vec{S}_j \times \vec{S}_k \quad (4-24)$$

La cual es también equivalente al momento mutuo. Substituyendo la definición del ángulo de giro, ver ecuación (4—13), e igualando con la expresión del momento mutuo queda la ecuación (4—25) esperada del momento mutuo:

$$\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{0k} + \vec{S}_k \cdot \vec{S}_{0j} = -a_{jk} \cdot \text{sen}(\alpha_{jk}) \quad (4-25)$$

Nótese que el momento mutuo indica si el ángulo de giro es menor o mayor que  $180^\circ$ . Dado que  $a_{jk}$  es una longitud real que es positiva siempre, la anterior ecuación (4–25) nos da las siguientes indicaciones:

$$\alpha_{jk} > 180^\circ \text{ cuando } MM > 0$$

$$\alpha_{jk} < 180^\circ \text{ cuando } MM < 0$$

La ecuación del momento mutuo (4–25) indica la condición de las dos líneas. Cuando  $MM \neq 0$ , entonces se tiene que  $a_{jk} \neq 0$  y  $\alpha_{jk} \neq 0$ , y hay una distancia finita y un ángulo entre las líneas y ejes. Por tanto, las líneas deben ser oblicuas entre sí. Cuando  $MM=0$ , las líneas se cruzan una con otra si  $a_{jk}=0$ , o bien son paralelas si  $\alpha_{jk}=0$ . Los puntos de intersección  $\vec{P}_j$  y  $\vec{P}_k$  se determinan usando una única derivación para cada condición.

Los puntos de intersección para ciertas condiciones se deben escribir en términos del vector unidad  $\vec{a}_{jk}$ . Por tanto, una expresión para este vector únicamente en términos de las coordenadas de la línea se debe derivar primero. Como se ve en la Figura 4.8, los puntos  $\vec{a}_{jk}$  están en la misma dirección que  $\vec{S}_j \times \vec{S}_k$ , si  $\alpha_{jk} < 180^\circ$ , y en la dirección opuesta cuando  $\alpha_{jk} > 180^\circ$ . Por consiguiente, el vector  $\vec{a}_{jk}$  se puede escribir como se ve en la ecuación (4–26):

$$\vec{a}_{jk} = \pm \frac{\vec{S}_j \times \vec{S}_k}{|\vec{S}_j \times \vec{S}_k|} \quad (4-26)$$

De la ecuación del Momento Mutuo, se puede ver que si  $\alpha_{jk} < 180^\circ$ , entonces  $MM < 0$ , y viceversa. Por tanto, el signo en la anterior ecuación es simplemente el opuesto del signo algebraico de  $MM$ . Así, el vector  $\vec{a}_{jk}$  en la ecuación anterior se puede reescribir según (4–27):

$$\vec{a}_{jk} = -\text{sgn}(\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{0k} + \vec{S}_k \cdot \vec{S}_{0j}) \cdot \frac{\vec{S}_j \times \vec{S}_k}{|\vec{S}_j \times \vec{S}_k|} \quad (4-27)$$

Donde la función *sgn* representa el signo algebraico. Nótese que a lo largo de este capítulo la siguiente notación que se sigue:

$$|\vec{a}| \rightarrow \text{longitud del vector}$$

$$|a| \rightarrow \text{valor absoluto de una cantidad escalar}$$

La derivación de los puntos de intersección para cada una de los pares de condiciones se da a continuación.

#### 4.4.3.1 Condición 1: Líneas oblicuas ( $MM \neq 0$ )

Los puntos de intersección  $\vec{P}_j$  y  $\vec{P}_k$  para las líneas oblicuas se derivan a través de una técnica directa, por considerar las observaciones geométricas que se ven a continuación. El vector  $\vec{a}_{jk}$  y su línea perpendicular mutuamente asociada están en el plano conteniendo  $\vec{a}_{jk}$  y  $\vec{S}_k$ . La línea formada

por el eje  $j$  se cruza con la línea perpendicular mutua y así como al plano en el punto de intersección  $\vec{P}_j$ . Asimismo el punto de intersección  $\vec{P}_k$  es la intersección de la línea  $k$  y el plano formado por  $\vec{S}_j$  y por  $\vec{a}_{jk}$ . El plano formado por  $\vec{a}_{jk}$  y  $\vec{S}_k$  se usa para determinar  $\vec{P}_j$ . La normal a este plano viene dada por la ecuación (4—28):

$$\vec{n}_k = \vec{a}_{jk} \times \vec{S}_k \quad (4-28)$$

La ecuación del plano (4—29) es la siguiente:

$$\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k = n_k \quad (4-29)$$

donde  $\vec{r}_k$  es un punto arbitrario en la línea  $k$  y obviamente está sobre el plano. Substituyendo en la ecuación (4—28) y calculando se obtienen las ecuaciones (4—30) y (4—31):

$$\vec{r}_k \cdot (\vec{a}_{jk} \times \vec{S}_k) = n_k \quad (4-30)$$

$$-\vec{r}_k \cdot (\vec{S}_k \times \vec{a}_{jk}) = n_k \quad (4-31)$$

Substituyendo el producto escalar identidad y la ecuación de la línea  $k$  quedan las ecuaciones (4—32) y (4—33):

$$(-\vec{r}_k \times \vec{S}_k) \cdot \vec{a}_{jk} = n_k \quad (4-32)$$

$$-\vec{S}_{0k} \cdot \vec{a}_{jk} = n_k \quad (4-33)$$

En general, el punto de intersección  $\vec{P}_j$  del plano  $(\vec{n}_k; n_k)$  y la línea  $(\vec{S}_j; \vec{S}_{0j})$  vienen dados como (4—34):

$$\vec{P}_k = \frac{\vec{n}_k \times \vec{S}_{0j} + n_k \vec{S}_j}{\vec{n}_k \cdot \vec{S}_j} \quad (4-34)$$

Este resultado general se obtiene mediante la manipulación de la ecuación de la línea y substituyendo la ecuación del plano. Este análisis no se mostrará aquí. Substituyendo la expresión para  $\vec{n}_k$  y  $n_k$  dada anteriormente en la ecuación (4—25) y en la ecuación (4—33), dentro de la ecuación (4—34), se tiene la ecuación (4—35):

$$\vec{P}_j = \frac{(\vec{a}_{jk} \times \vec{S}_k) \times \vec{S}_{0j} - (\vec{S}_{0k} \cdot \vec{a}_{jk}) \vec{S}_j}{(\vec{a}_{jk} \times \vec{S}_k) \cdot \vec{S}_j} \quad (4-35)$$

Ésta es la expresión final para el punto de intersección. El punto de intersección  $\vec{P}_k$  se deriva de manera análoga, calculando la intersección del plano formado por  $\vec{a}_{jk}$  y  $\vec{S}_j$  y la línea  $k$ . La expresión resultante es (4—36):

$$\vec{P}_k = \frac{(\vec{a}_{jk} \times \vec{S}_k) \times \vec{S}_{0k} - (\vec{S}_{0j} \cdot \vec{a}_{jk}) \vec{S}_k}{(\vec{a}_{jk} \times \vec{S}_j) \cdot \vec{S}_k} \quad (4-36)$$

#### 4.4.3.2 Condición 2: Líneas que se cruzan ( $MM=0, a_{jk}=0$ )

Las ecuaciones para la derivada de los puntos de la intersección para la condición arriba indicada, que son las ecuaciones (4—35) y (4—36), no están en una forma simplificada ni conveniente para esta condición. Se necesita una ecuación alternativa, la cual conduzca a una expresión altamente simplificada. La única ecuación de vector disponible es (4—37):

$$\vec{a}'_{jk} = \vec{P}_k - \vec{P}_j \quad (4-37)$$

La cual se puede reescribir como (4—38):

$$\vec{P}_k = \vec{a}'_{jk} + \vec{P}_j \quad (4-38)$$

Esta ecuación se manipula tomando el producto cruzado de cada lado con el vector  $\vec{S}_k$ , el cual nos da la siguiente ecuación (4—39):

$$\vec{P}_k \times \vec{S}_k - \vec{a}'_{jk} \times \vec{S}_k = \vec{P}_j \times \vec{S}_k \quad (4-39)$$

Y substituyendo de la ecuación de la línea  $k$  nos da la ecuación (4—40):

$$\vec{S}_{0k} - \vec{a}'_{jk} \times \vec{S}_k = \vec{P}_j \times \vec{S}_k \quad (4-40)$$

Tomando el producto cruzado de cada lado de la ecuación con un vector el cual es perpendicular a  $\vec{P}_j$ , que lo es a  $\vec{S}_{0j}$ , nos conduce a una solución  $\vec{P}_j$  que es como muestra (4—41):

$$\vec{S}_{0j} \times \vec{S}_{0k} - \vec{S}_{0j} \times (\vec{a}'_{jk} \times \vec{S}_k) = \vec{S}_{0j} \times (\vec{P}_j \times \vec{S}_k) \quad (4-41)$$

Substituyendo el triple producto identidad nos da la siguiente expresión (4—42) para el lado derecho de la ecuación:

$$\vec{S}_{0j} \times (\vec{P}_j \times \vec{S}_k) = (\vec{S}_{0j} \cdot \vec{S}_k) \vec{P}_j - (\vec{S}_{0j} \cdot \vec{P}_j) \vec{S}_k = (\vec{S}_{0j} \cdot \vec{S}_k) \vec{P}_j \quad (4-42)$$

Dado que  $\vec{S}_{0j} \cdot \vec{P}_j = 0$ , substituyendo esta expresión en la ecuación (4—41), y resolviendo para  $\vec{P}_j$ , nos da la expresión final (4—43):

$$\vec{P}_j = \frac{\vec{S}_{0j} \times \vec{S}_{0k} - \vec{S}_{0j} \times (\vec{a}'_{jk} \times \vec{S}_k)}{(\vec{S}_{0j} \cdot \vec{S}_k)} \quad (4-43)$$

Para esta condición las líneas se cruzan y  $\vec{a}'_{jk} = 0$ , obteniéndose una expresión simplificada para el punto de cruce. El proceso completo se puede repetir tomando el producto cruzado de la ecuación original (véase la ecuación (4-38)), con  $\vec{S}_j$  y después con  $\vec{S}_{0k}$ , el cual conducirá a una expresión idéntica para  $\vec{P}_k$ , que es lo que se esperaba. El punto de intersección común viene dado por la ecuación (4-44):

$$\vec{P} = \vec{P}_j = \vec{P}_k = \frac{\vec{S}_{0j} \times \vec{S}_{0k}}{\vec{S}_{0j} \cdot \vec{S}_k} = \frac{\vec{S}_{0k} \times \vec{S}_{0j}}{\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{0k}} \quad (4-44)$$

Los denominadores en la ecuación antes mostrada son iguales y opuestos, dado que  $MM=0$ , y por tanto las expresiones son equivalentes.

Hay un problema con la definición del vector dirección  $\vec{a}_{jk}$  de la articulación, para esta condición. La definición expone los puntos  $\vec{a}_{jk}$  en la dirección del eje  $j$  al eje  $k$ , cuyo enrevesamiento no tiene sentido en el caso de líneas cruzadas. Por tanto la convención estándar que se seguirá para esta condición será que  $\vec{a}_{jk}$  está en la dirección de  $\vec{S}_j \cdot \vec{S}_k$ , y así  $\alpha < 180^\circ$ , siempre.

Se podría cuestionar por qué esta derivación no se usó para la condición de líneas oblicuas. La razón es que la presenta una indeterminación, o tiende a infinito cuando  $\vec{S}_{0j} \cdot \vec{S}_k = 0$ . La ecuación para  $\vec{P}_k$  que tenga la misma forma, presenta problemas idénticos cuando  $\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{0k} = 0$ . Ninguno de estos casos representa una condición especial o particular. Estos suceden para muchas combinaciones de líneas estándar oblicuas, y así las ecuaciones no se pueden usar para el caso de líneas oblicuas.

#### 4.4.3.3 Condición 3: Líneas paralelas ( $MM=0$ , sin $\alpha_{jk}=0$ )

Para el caso de líneas paralelas únicas, los puntos de cruce mutuamente perpendiculares no existen. Hay un número infinito de líneas perpendiculares mutuas conectando dos líneas paralelas. Sin embargo, el vector  $\vec{a}_{jk}$  se debe determinar para calcular la longitud de la articulación  $\vec{a}_{jk}$ . En esta condición,  $\cos \alpha_{jk} = \pm 1$ , y los vectores dirección son paralelos pero deben estar en direcciones opuestas. Por tanto se tiene la ecuación (4-45):

$$\vec{S}_j = \cos \alpha_{jk} \vec{S}_k \quad (4-45)$$

O bien la ecuación (4-46):

$$\vec{S}_k = \cos \alpha_{jk} \vec{S}_j \quad (4-46)$$

La ecuación que relaciona cualquier par de puntos que se cruzan se escribe como en la condición anteriormente vista, que sería la ecuación (4–38) ( $\vec{P}_k = \vec{a}'_{jk} + \vec{P}_j$ ).

Tomando el producto cruzado con el vector  $\vec{S}_j$  queda (4–47):

$$\vec{P}_j \times \vec{S}_j + \vec{a}'_{jk} \times \vec{S}_j = \vec{P}_k \times \vec{S}_j \quad (4-47)$$

Substituyendo las ecuaciones de las líneas y en la ecuación (4–45) queda la siguiente ecuación (4–48):

$$\vec{S}_{0j} + \vec{a}'_{jk} \times \vec{S}_j = \cos \alpha_{jk} \vec{S}_{0k} \quad (4-48)$$

donde los puntos de intersección no-únicos han quedado eliminados. La solución para  $\vec{a}'_{jk}$  se consigue tomando el producto cruzado de la ecuación con un vector perpendicular a  $\vec{a}'_{jk}$ , el cual  $\vec{S}_j$ , quedando como sigue (4–49):

$$\vec{S}_j \times \vec{S}_{0j} + \vec{S}_j \times (\vec{a}'_{jk} \times \vec{S}_j) = \vec{S}_j \times \cos \alpha_{jk} \vec{S}_{0k} \quad (4-49)$$

El término del triple producto escalar se expande como sigue en la ecuación (4–50):

$$\vec{S}_j \times (\vec{a}'_{jk} \times \vec{S}_j) = (\vec{S}_j \cdot \vec{S}_j) \vec{a}'_{jk} - (\vec{S}_j \cdot \vec{a}'_{jk}) \vec{S}_j = \vec{a}'_{jk} \quad (4-50)$$

Dado que  $\vec{S}_j$  es un vector unidad perpendicular a  $\vec{a}'_{jk}$ , substituyendo dentro de la ecuación (4–49) queda el resultado explícito para  $\vec{a}'_{jk}$ , que se muestra en las ecuaciones (4–51) y (4–52):

$$\vec{a}'_{jk} = \cos \alpha_{jk} \vec{S}_j \times \vec{S}_{0k} - \vec{S}_j \times \vec{S}_{0j} \quad (4-51)$$

$$\vec{a}'_{jk} = \vec{S}_j \times (\cos \alpha_{jk} \vec{S}_{0k} - \vec{S}_{0j}) \quad (4-52)$$

La magnitud de este vector nos da la longitud de la articulación  $j_{jk}$ .

Calcular los desplazamientos en este caso presenta un problema. Dado que no hay unos puntos de intersección únicos que conecten las líneas  $j$  y  $k$ , los desplazamientos  $d_j$  y  $d_k$  no se pueden calcular. Sin embargo, en el eje  $j$ , realmente existe un punto de intersección de la línea perpendicular común al eje previo  $i$ , que será  $\vec{P}_j^{prev}$ . En el eje  $k$ , existe un punto de intersección de la línea perpendicular común al siguiente eje  $l$ ,  $\vec{P}_k^{prox}$  (los puntos  $\vec{P}_j^{prox}$  y  $\vec{P}_j^{prev}$  son los puntos que no existen). La distancia entre estos puntos medida a lo largo de la dirección común  $\vec{S}_j$  o  $\vec{S}_k$  representa la suma de los desplazamientos individuales  $d_j + d_k$ . Así, para el caso de líneas paralelas, esta suma se calcula en lugar de los desplazamientos individuales. La posición de la articulación final está completamente determinada usando la suma de los desplazamientos.

Las tres soluciones anteriores representan una base teórica completa para analizar líneas adyacentes en el espacio, para cualquier condición posible. Desafortunadamente, esta es una aproximación puramente teórica, la cual muestra fuertes limitaciones in la práctica real para el caso de líneas oblicuas que son casi paralelas. Este es exactamente el caso los brazos robot que tienen ejes adyacentes nominalmente paralelos, lo que sucede en la gran mayoría de los sistemas disponibles actualmente. La próxima sección muestra tres aproximaciones diferentes para manejar este problema.

#### 4.4.4 Análisis de ejes nominalmente paralelos

Los ejes adyacentes nominalmente paralelos, situación que ocurre en muchos robots, no serán exactamente paralelos debido a errores de producción y ensamblado. Como se mencionó anteriormente, esto causa problemas numéricos difíciles en ciertos casos, que algunos investigadores han solucionado añadiendo un parámetro cinemático extra. La técnica CPA, a través del uso del análisis de geometría de líneas, se ha extendido para manejar esta dificultad. Se han desarrollado tres métodos alternativos. La desventaja de añadir un parámetro cinemático extra al modelo de geometría del robot es que requiere grandes modificaciones al programa controlador, haciéndolo difícil de implementar en sistemas actuales. Dos de los métodos presentados aquí evitan esta dificultad, y no requieren un parámetro extra en el modelo.

El problema numérico con ejes casi paralelos se muestra en las figuras siguientes. El vector  $\vec{S}_k^{nom}$  representa exactamente la condición nominal o paralela, y  $\vec{S}_k^{real}$  es la orientación actual de la línea  $k$ . Todo el error es modelado como una traslación y orientación de la línea  $k$  con respecto a la línea  $j$ , y por tanto  $j$  sólo tiene una posición nominal y exacta. En la Figura 4.9 el error,  $d_\alpha$ , representa un giro solamente sobre la línea nominal perpendicular. Esto no provoca ninguna dificultad. Tanto el  $\vec{a}_{jk}$  como los puntos de intersección ( $\vec{P}_j$  y  $\vec{P}_k$  no mostrados) permanecen sin cambios del caso nominal. El único error en los parámetros de la articulación sucede en el ángulo de giro  $\alpha$ . Esto se identifica fácilmente en casi todas las técnicas. Desafortunadamente, no hay garantías de que los ejes estarán descolocados en esta forma ideal.

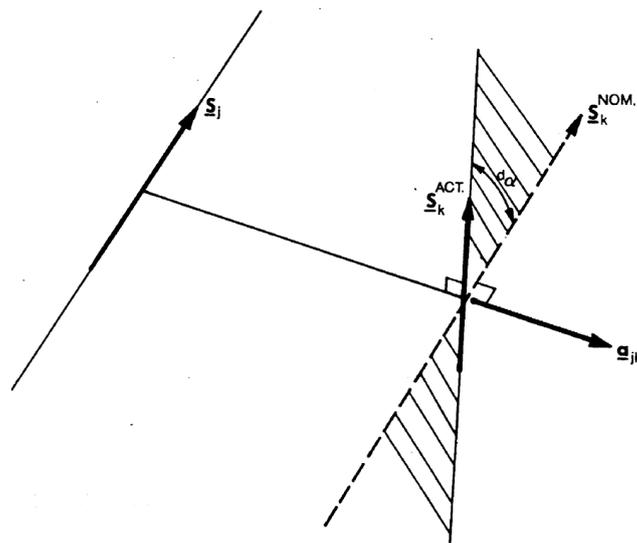


Figura 4.9. Ejes adyacentes paralelos - Caso Ideal. Fuente: [5]

En lugar del error,  $d_\alpha$ , puede ser debido a un giro del eje  $k$  alrededor de la dirección normal al plano original que contiene los ejes nominalmente paralelos. Esto se muestra en la Figura 4.10. El desplazamiento del eje  $k$  sucede en el plano original. Esto es que los 3 vectores  $\vec{S}_j$ ,  $\vec{S}_k^{real}$  y  $\vec{S}_k^{nom}$  están sobre el plano. El efecto de esto es que las líneas reales se cruzan y  $\vec{a}_{jk}$  va desde una longitud finita hasta 0. El vector dirección de la articulación real,  $\vec{a}_{jk}^{real}$  (perpendicular a los vectores  $\vec{S}$ ) se convierte en perpendicular a la dirección nominal original  $\vec{a}_{jk}^{nom}$ . Un problema añadido es que el error  $d_\alpha$  es normalmente pequeño (menor que unos pocos grados) y así las líneas se cruzan casi en el infinito, provocando que los valores de desplazamiento  $d_j$  y  $d_k$  vayan desde un valor finito hasta el infinito. Así todos los parámetros de las articulaciones cambian drásticamente debido a unos errores muy pequeños en el radio de giro. La extrema sensibilidad numérica hace difícil determinar de forma preciso los parámetros. En la práctica, normalmente se da una combinación del caso ideal y del peor caso. Esto es, que el error es debido a tanto un giro alrededor de  $\vec{a}_{jk}^{nom}$  como a otro giro alrededor de la dirección normal al plano original. Los métodos para manejar esta dificultad se presentan a continuación.

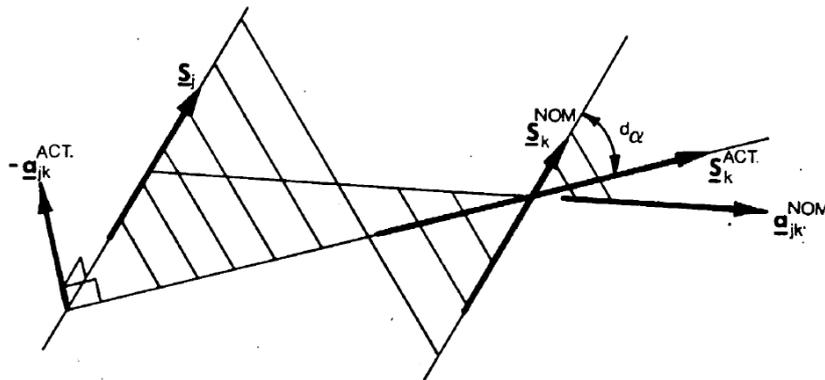


Figura 4.10. Ejes adyacentes paralelos - Peor Caso. Fuente: [5]

#### 4.4.4.1 Solución 1: Análisis exacto

El método más directo es tener confianza en la medición y en la precisión del cálculo numérico, y asumir que los parámetros exactos para las líneas adyacentes, sin importar los problemas de sensibilidad numérica, se pueden calcular. Esto significa simplemente tratar las líneas como líneas oblicuas o que se cruzan en caso extremo. Los métodos desarrollados en la sección previa se usan para este análisis. Si esto se puede conseguir de forma precisa, todavía queda el problema con la determinación de los ángulos de la articulación medidos por el transductor. El transductor mide los ángulos de la articulación (ángulos entre los vectores de la articulación  $\vec{a}$ ) con respecto al vector nominal  $\vec{a}_{jk}^{nom}$ . Sin embargo, los parámetros de la articulación calibrada determinados representan un modelo en el cual la dirección de la articulación real  $\vec{a}^{real}$  está desplazada de  $\vec{a}^{nom}$  por una cantidad significativa. Por tanto, los valores del transductor medidos se deben corregir.

Los ángulos de corrección que se deben añadir a los valores del transductor, cuando se usa el modelo exacto, se determinan fácilmente. Nótese, que dado que  $\vec{a}_{jk}$  se usa para calcular tanto  $\theta_j$  como  $\theta_k$ , ambos ángulos se deben corregir. El ángulo final para el eje  $j$  requerido para calcular la posición del robot es el ángulo cinemático real  $\theta_j^{real}$ , que es el ángulo entre  $\vec{a}_{ij}$  y  $\vec{a}_{jk}^{real}$ . Dado que el ángulo nominal  $\theta_j^{nom}$ , que es el ángulo entre  $\vec{a}_{ij}$  y  $\vec{a}_{jk}^{nom}$ , se conoce, la corrección es el ángulo entre  $\vec{a}_{jk}^{nom}$  y  $\vec{a}_{jk}^{real}$ . Estos ángulos se ilustran en la Figura 4.11. La definición matemática del ángulo de corrección es la siguiente:

$$\sin \phi_j^C = \vec{a}_{jk}^{nom} \times \vec{a}_{jk}^{real} \cdot \vec{S}_j \quad (4-53)$$

El problema aquí es que sólo  $\vec{a}_{jk}^{real}$  se determina de la localización real de los ejes y vectores  $\vec{S}_j$  y  $\vec{S}_k^{real}$ . La dirección nominal  $\vec{a}_{jk}^{nom}$ , que no tiene existencia física debe ser aproximada. Las soluciones 2 y 3 también hacen uso del vector  $\vec{a}_{jk}^{nom}$ . Una vez los ángulos de corrección están calculados, el ángulo cinemático real viene dado por la siguiente fórmula (4-54):

$$\theta_j^{real} = \theta_j^{nom} + \phi_j^C \quad (4-54)$$

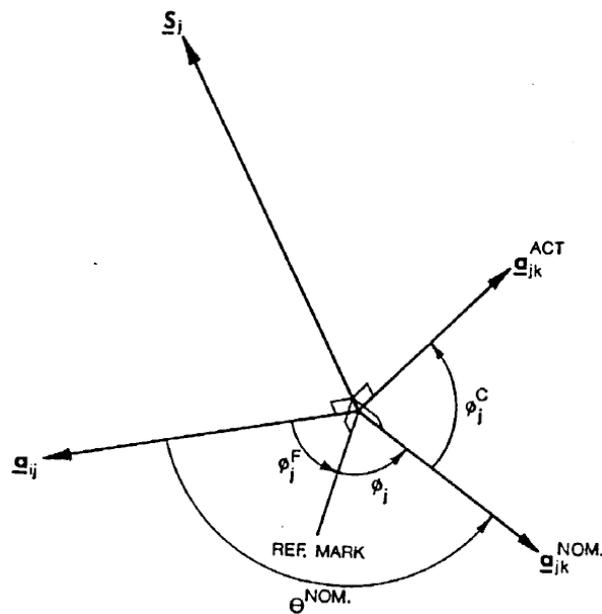


Figura 4.11. Modelo exacto de corrección del ángulo del transductor para eje  $j$ . Fuente: [5]

El ángulo nominal sin calibrar  $\theta_j^{nom}$  depende del ángulo del transductor medido  $\phi_j$ , y un ángulo dado de desplazamiento de la referencia fija  $\phi_j^F$ , el cual se calcula como muestra (4-55):

$$\theta_j^{nom} = \phi_j + \phi_j^F \quad (4-55)$$

El concepto de valores de desplazamiento del transductor, introducido por primera vez aquí, debería ser bien entendido. Los errores en la medida del transductor se pueden modelar como variaciones o correcciones de estos valores. El ángulo cinemático real final es simplemente el siguiente según la ecuación (4—56):

$$\theta_j^{real} = \phi_j + \phi_j^F + \phi_j^C \quad (4-56)$$

En la práctica, dado que ambos son en esencia constantes de calibración,  $\phi_j^F$  y  $\phi_j^C$  simplemente se combinan en un desplazamiento general para el modelo exacto.

El ángulo para el eje  $k$  se corrige de una forma similar usando la misma constante de corrección. Esta corrección se ilustra en la Figura 4.12. El ángulo cinemático real viene dado por la fórmula (4—57):

$$\theta_k^{real} = \theta_k^{nom} - \phi_j^C \quad (4-57)$$

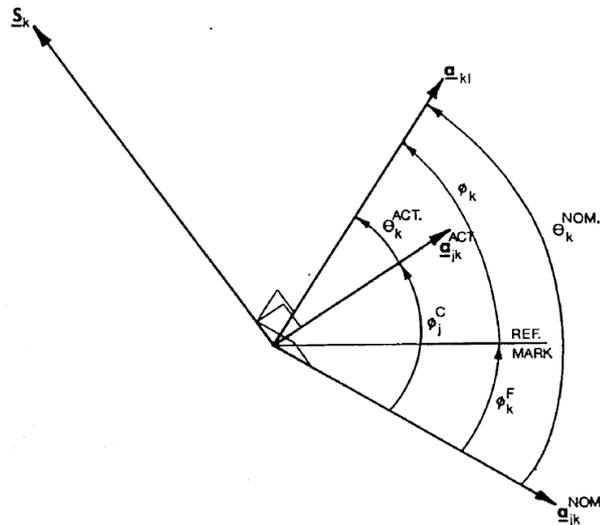


Figura 4.12. Modelo exacto para corrección del ángulo del transductor para eje  $k$ . Fuente: [5]

Otra vez, el ángulo nominal sin calibrar  $\theta_k^{nom}$  depende del ángulo del transductor y un desplazamiento de la referencia fijo, y viene dado por la fórmula (4—58):

$$\theta_k^{nom} = \phi_k + \phi_k^F \quad (4-58)$$

Y así el ángulo cinemático real final viene dado por (4—59):

$$\theta_k^{real} = \phi_k + \phi_k^F - \phi_j^C \quad (4-59)$$

Así, un modelo exacto se debe usar mientras los ángulos del transductor son correctos. Obviamente, para el caso ideal de errores en el ángulo de giro sólo,  $\vec{a}^{real} = \vec{a}_{jk}^{nom}$ , y así el ángulo de corrección es 0.

#### 4.4.4.2 Solución 2: Análisis aproximado

El segundo método de manejar ejes nominalmente paralelos evita el problema de la sensibilidad numérica, mediante la aproximación del ángulo de giro a cero, y calcular un error o valor calibrado sólo para la longitud de la articulación  $\overline{a_{jk}}$ . Esto es que  $\alpha_{jk}$  se modela o fuerza a ser 0 o  $\pi$ , y que se calcula la longitud real de la articulación  $\overline{a_{jk}}$  para este modelo. Dado que se asume que las líneas son paralelas, los desplazamientos  $d_j$  y  $d_k$  no se pueden calcular mediante esta técnica. La longitud de la articulación  $\overline{a_{ij}}$ , que es el único parámetro calculado, se determina mediante el siguiente análisis. El único vector dirección usado para representar tanto a  $\overline{S_j}$  como a  $\overline{S_k}$  se calcula como una dirección media de los valores exactos de las direcciones de los ejes determinados en el método del CPA. Ambas líneas se modelan como apuntando en la dirección media, pero giradas sobre los puntos de intersección originales para el caso nominal,  $\overline{P_j}$  y  $\overline{P_k}$ . El punto  $\overline{P_j}$  se calcula del desplazamiento nominal (ya conocido) para los ejes  $j$ ,  $d_j$ , y por tanto viene dado por la ecuación (4—60):

$$\overline{P_j} = \overline{P_j^{prev}} + d_j \overline{S_j} \quad (4-60)$$

donde  $\overline{P_j^{prev}}$  es el punto de intersección de la línea perpendicular común entre los ejes  $i$  y  $j$ . El punto  $\overline{P_k}$ , el cual representa el punto de intersección cuando  $j$  y  $k$  son exactamente paralelos, se calcula como la intersección de la línea real ( $\overline{r_k}$ ,  $\overline{S_k^{real}}$ .) para el eje  $k$ , y un plano que es perpendicular a la línea real ( $\overline{P_j}$ ,  $\overline{S_j^{real}}$ .) para el eje  $j$ . Los ejes aproximados o modelados se denotan por los vectores  $\overline{S^{med}}$ , que se muestran en la Figura 4.13 <sup>(3)</sup>.

---

<sup>3</sup> En la figura se denota como  $\overline{S^{ave}}$ , del inglés *average* (promedio).

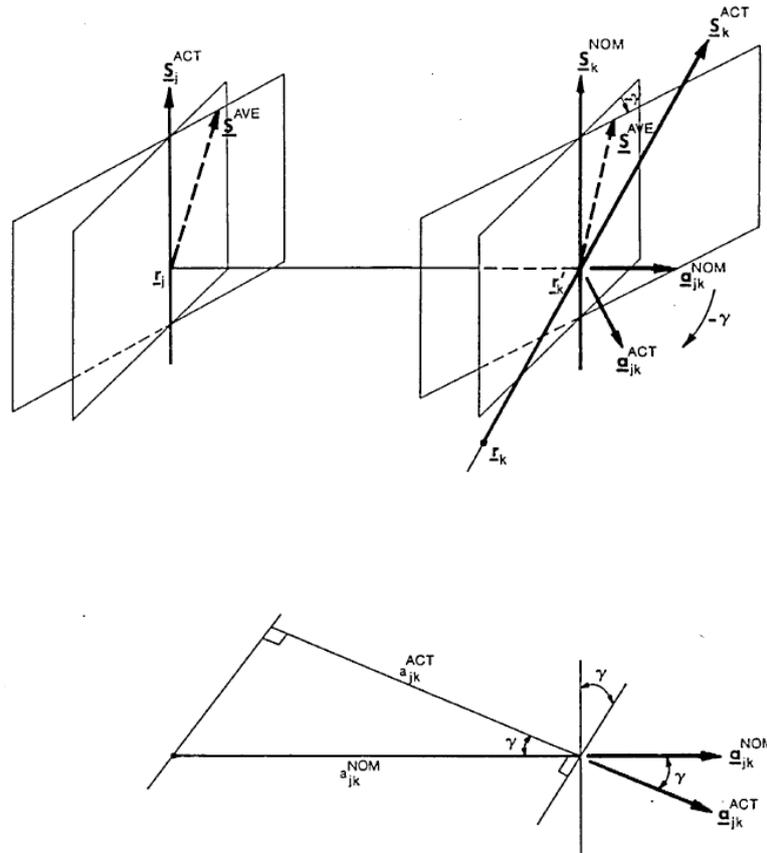


Figura 4.13. Aproximación de ejes adyacentes mediante vector promedio. Fuente: [5]

Nótese que  $\overline{S_k^{nom}}$  es paralelo a  $\overline{S_j}$  como se ve en la Figura 4.13. Esto es debido al hecho de que todos los errores están en la ubicación del eje  $k$  con respecto a  $j$ , como se explica en la solución 1. La dirección media de los dos vectores  $\overline{S_k^{real}}$  y  $\overline{S_j}$  (o  $\overline{S_k^{nom}}$ ), es simplemente la bisectriz de los vectores en el plano que forman, como viene dado por la ecuación (4-61):

$$\overline{S^{med}} = \frac{(\overline{S_j} + \overline{S_k})}{|\overline{S_j} + \overline{S_k}|} \quad (4-61)$$

Este vector hace bisectriz ya que las magnitudes de los vectores unidad,  $\overline{S_j}$  y  $\overline{S_k}$ , son equivalentes. Nótese que esta operación de promediar no tiene sentido si el ángulo de giro nominal es  $180^\circ$  y los vectores están en direcciones casi opuestas. En este caso, uno de los vectores debe apuntar en la dirección opuesta antes de promediar. Por convenio, el eje  $k$  se cambiará si es necesario para este análisis. Por tanto, la expresión correcta para el vector promedio es la que se muestra en (4-62):

$$\overline{S^{med}} = \frac{\overline{S_j} + (\cos \alpha_{jk})\overline{S_k}}{|\overline{S_j} + (\cos \alpha_{jk})\overline{S_k}|} \quad (4-62)$$

donde  $\alpha_{jk}$  es el valor nominal de  $0^\circ$  o de  $180^\circ$ . Nótese, a través de esta solución, todos los ajustes hechos a los ejes actuales son temporales y se hacen únicamente con el propósito de calcular la longitud de la articulación calibrada  $\overline{a}_{jk}$ .

El punto de intersección nominal se determina desde el plano perpendicular a  $\overline{S}_j$ , el cual pasa a través del punto  $\overline{P}_j$ . El plano viene dado por la fórmula (4–63):

$$\vec{r} \cdot \overline{S}_j = \overline{P}_j \cdot \overline{S}_j \quad (4-63)$$

El punto de intersección es la intersección de este plano y el real (medido) eje  $k$  ( $\overline{S}_k; \overline{S}_{0k}$ ). El resultado se determina mediante la intersección general de una línea y un plano dados en la ecuación (4–34), teniéndose la ecuación (4–64):

$$\overline{P}_k = \frac{\overline{S}_j \times \overline{S}_{0k} + (\overline{P}_j \cdot \overline{S}_j) \overline{S}_k}{\overline{S}_j \cdot \overline{S}_k} \quad (4-64)$$

Este es el punto de intersección nominal, que representaría la intersección perpendicular común si ambos ejes  $j$  y  $k$  fueran exactamente paralelos sin ningún error. Las dos líneas modificadas para los ejes  $j$  y  $k$  respectivamente usadas para esta solución vienen dadas por las ecuaciones (4–65) y (4–66):

$$(\overline{S}^{med}; \overline{P}_j \times \overline{S}^{med}) = (\overline{S}'_j; \overline{S}'_{0j}) \quad (4-65)$$

$$(\overline{S}^{med}; \overline{P}_k \times \overline{S}^{med}) = (\overline{S}'_k; \overline{S}'_{0k}) \quad (4-66)$$

El vector perpendicular común entre estas líneas paralelas modificadas,  $\overline{a}'_{jk}{}^{real}$ , se puede determinar de la solución de la condición de líneas paralelas (dadas en la sección 4.4.3.3 *Condición 3: Líneas paralelas (MM=0, sin  $\alpha_{jk}=0$ )*). El resultado después de sustituir las coordenadas de la línea modificada, dadas en ecuación (4–64) y (4–65), en la ecuación (4–51), es la siguiente ecuación (4–67):

$$\overline{a}'_{jk}{}^{real} = a'_{jk}{}^{real} \cdot \overline{a}'_{jk}{}^{real} = \overline{S}^{med} \times (\overline{S}'_{0k} - \overline{S}'_{0j}) \quad (4-67)$$

donde precisamente la convención establecida  $\cos \alpha_{jk} = \pm 1$  se ha sustituido aquí. Sustituyendo los momentos para las líneas modificadas como se ve en la ecuación (4–64) y (4–65), conduce a la siguiente ecuación (4–68):

$$\begin{aligned} \overline{a}'_{jk}{}^{real} &= \overline{S}^{med} \times \left( (\overline{P}_k \times \overline{S}^{med}) - (\overline{P}_j \times \overline{S}^{med}) \right) \\ &= \overline{S}^{med} \times \left( (\overline{P}_k - \overline{P}_j) \times \overline{S}^{med} \right) \end{aligned} \quad (4-68)$$

Sustituyendo el triple producto escalar identidad, y con el hecho de que  $\overrightarrow{S^{med}}$  es un vector unidad, queda el siguiente resultado final (4—69):

$$\overrightarrow{a_{jk}^{real}} = (\overrightarrow{P_k} - \overrightarrow{P_j}) - \left( \overrightarrow{S^{med}} \cdot (\overrightarrow{P_k} - \overrightarrow{P_j}) \right) \overrightarrow{S^{med}} \quad (4-69)$$

La única constante deseada para esta técnica es la longitud de la articulación, la cual es simplemente la magnitud siguiente mostrada en (4—70):

$$a_{jk}^{real} = \left| \overrightarrow{a_{jk}^{real}} \right| \quad (4-70)$$

Nótese que el ángulo  $\gamma$  en la Figura 4.13, que representa el ángulo entre los planos de rotación o error de desplazamiento entre los casos de errores ideal y real, en el ángulo girado. Como se ve en la vista de planta del dibujo, el error en la longitud  $\overrightarrow{a_{jk}}$  para esta técnica de modelado es una función directa de este ángulo. Esta función se puede determinar a partir de la figura, y viene dada por la ecuación siguiente (4—71):

$$a_{jk}^{real} = a_{jk}^{nom} \cdot \cos \gamma \quad (4-71)$$

Esta técnica de aproximación no está limitada por problemas de sensibilidad extrema. La precisión será razonablemente buena en casos en los que el error del ángulo de giro sea leve y la longitud de la articulación sea grande. Esta será una solución especialmente precisa para errores de ángulo de giro muy pequeños, lo cual sucede en el caso del peor escenario donde los ejes  $j$  y  $k$  se acercan a una condición en la que se cruzan.

#### 4.4.4.3 Solución 3: Modelo cinemático de parámetro adicional

Un cierto número de investigadores han considerado usar un modelo cinemático con un quinto parámetro, para cada articulación, con la técnica de calibración de datos de la posición del robot. La técnica del CPA es también capaz de calibrar un sistema usando el modelo modificado. El parámetro adicional representa una rotación adicional entre los sistemas de coordenadas de las articulaciones adyacentes. Esto alivia el problema de la sensibilidad numérica para ejes adyacentes. El parámetro extra dado como ángulo  $\beta$ , representa una rotación de un sistema de coordenadas de la articulación adyacente sobre un eje  $y$  local. Así, la transformación total entre los sistemas de coordenadas o ejes adyacentes contiene dos traslaciones ( $a_{jk}$ ,  $d_j$ ) y tres rotaciones ( $\theta$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ). Para el caso de ejes  $j$  y  $k$  casi paralelos, la rotación del eje  $y$  llamada  $\beta_{jk}$  tiene el efecto de colocar los ejes en planos paralelos. Así, el término  $\alpha_{jk}$  representa el caso ideal de ejes nominalmente paralelos, descrito al principio de esta sección y que se ve en la Figura 4.9. Ejes adyacentes paralelos - Caso Ideal. Fuente: [5].

Usando un modelo de 5 parámetros, la transformación total desde el sistema de coordenadas en la articulación  $k$ ,  $b_k[\overrightarrow{a_{k\ell}} \ \overrightarrow{b_{k\ell}} \ \overrightarrow{S_k}]$ , hasta el sistema en la articulación  $j$ ,  $b_j[\overrightarrow{a_{j\ell}} \ \overrightarrow{b_{j\ell}} \ \overrightarrow{S_j}]$ , vendrá dada por (4—72):

$$[T_j^k] = \text{trans}(\vec{a}, a) \text{rot}(\vec{a}, \alpha') \text{rot}(\vec{b}, \beta) \text{trans}(\vec{S}, d) \text{rot}(\vec{S}, \theta_k) \quad (4-72)$$

donde las traslaciones y rotaciones genéricas son transformaciones homogéneas. Para mayor claridad, los subíndices  $jk$  o  $k$  se han dejado sin poner. El ángulo de giro  $\alpha'_{jk}$  representa el ángulo modificado para este modelo y no es el ángulo total entre las direcciones  $\vec{S}_j$  y  $\vec{S}_k$ , como en el modelo normal de 4 parámetros. Expandiendo esta transformación queda la única transformación completa para  $[T_j^k]$  usando el modelo modificado se tiene la ecuación (4-73):

$$\begin{bmatrix} \cos \beta_{jk} \cdot \cos \theta_k & -\cos \beta_{jk} \sin \theta_k & \sin \beta_{jk} & \sin \beta_{jk} d_k + a_{jk} \\ \cos \alpha_{jk} \sin \theta_k + \sin \alpha_{jk} \sin \beta_{jk} \cos \theta_k & \cos \alpha_{jk} \cos \theta_k - \sin \alpha_{jk} \sin \beta_{jk} \sin \theta_k & -\sin \alpha_{jk} \cos \beta_{jk} & -\sin \alpha_{jk} \cos \beta_{jk} d_k \\ \sin \alpha_{jk} \sin \theta_k - \cos \alpha_{jk} \sin \beta_{jk} \cos \theta_k & \sin \alpha_{jk} \cos \theta_k + \cos \alpha_{jk} \sin \beta_{jk} \sin \theta_k & \cos \alpha_{jk} \cos \beta_{jk} & \cos \alpha_{jk} \cos \beta_{jk} d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-73)$$

Donde se puede usar también la siguiente notación abreviada que se muestra en (4-74), para reducir la longitud de la matriz:

$$\begin{aligned} \cos \beta_{jk} &= cb_{jk} & \cos \alpha_{jk} &= c_{jk} & \cos \theta_k &= c_k \\ \sin \beta_{jk} &= sb_{jk} & \sin \alpha_{jk} &= s_{jk} & \sin \theta_k &= s_k \end{aligned} \quad (4-74)$$

Nótese que el parámetro extra sólo se calcula y usa para ejes nominalmente paralelos. Para articulaciones estándar, el parámetro  $\beta$  es igual a cero.

El análisis para esta solución es similar a la técnica aproximada enseñada en la Solución 2. Los parámetros cinemáticos y la localización de los ejes nominales y reales se ilustra en la Figura 4.14. Los parámetros  $a_{jk}$ ,  $\alpha'_{jk}$ ,  $\beta_{jk}$  y los puntos de intersección  $\vec{P}_j$  y  $\vec{P}_k$  deben ser determinados. De nuevo, los errores en el eje  $k$  se modelan asumiendo que los ejes giran alrededor del punto de intersección nominal original  $\vec{P}_k$ . Esto es idéntico a la asunción hecha en la Solución 2 y así el punto de intersección  $\vec{P}_k$  previamente derivado en la ecuación (4-63) es válido. Nótese que para este caso  $\vec{a}_{jk}$  tiene una dirección equivalente para tanto el caso nominal como para el caso real. Por tanto la longitud de la articulación es simplemente la siguiente en la ecuación (4-75):

$$a_{jk} = |\vec{P}_k - \vec{P}_j| \quad (4-75)$$

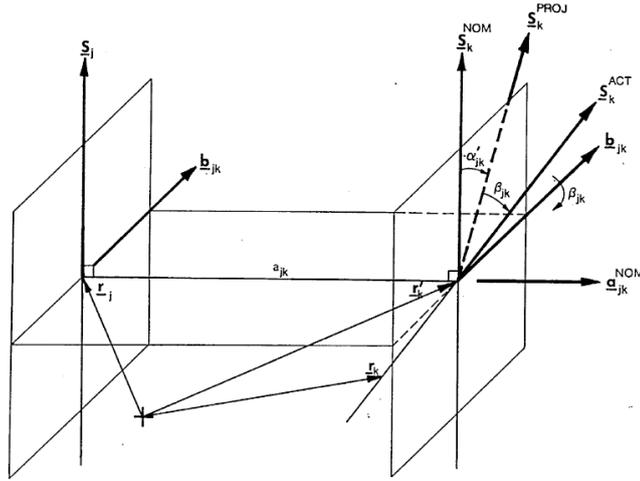


Figura 4.14. Descripción del modelo cinemático de 5 parámetros. Fuente: [5]

El punto  $\vec{P}_j$  es el punto de intersección nominal el cual también se dio en la Solución 2. El ángulo  $\beta_{jk}$  es el ángulo entre el eje real  $\vec{S}_k^{real}$  y el plano que es perpendicular a  $\vec{a}_{jk}$ . Este ángulo se determina por proyección. La proyección de  $\vec{S}_k^{real}$  en el plano,  $\vec{S}_k^{prj}$ , viene dada por (4-76):

$$\vec{S}_k^P = \vec{S}_k^{prj} = \vec{S}_k - (\vec{S}_k \cdot \vec{a}_{jk}^{nom}) \vec{a}_{jk}^{nom} \quad (4-76)$$

donde la notación abreviada  $\vec{S}_k^P$  ha sido introducida. El ángulo  $\beta_{jk}$  representa un giro dextrógiro alrededor del vector  $b_{jk}$  y, por tanto, la definición matemática queda según las ecuaciones (4-77) y (4-78):

$$\cos \beta_{jk} = \frac{\vec{S}_k^P}{|\vec{S}_k^P|} \cdot \vec{S}_k \quad (4-77)$$

$$\sin \beta_{jk} = \frac{\vec{S}_k^P}{|\vec{S}_k^P|} \times \vec{S}_k \cdot \vec{b}_{jk} \quad (4-78)$$

Substituyendo la ecuación (4-75) en la ecuación (4-76) queda el siguiente resultado más simplificado, según (4-79):

$$\cos \beta_{jk} = \sqrt{[1 - (\vec{S}_k \cdot \vec{a}_{jk}^{nom})^2]} \quad (4-79)$$

La expresión para  $\sin(\beta)$  no se puede simplificar. El nuevo ángulo de giro  $\alpha'_{jk}$  es el ángulo entre  $\vec{S}_j$  y  $\vec{S}_k^{prj}$  alrededor del eje  $\vec{a}_{jk}$  y viene dado por las siguientes definiciones (4-80) y (4-81):

$$\cos \alpha'_{jk} = \frac{\vec{S}_k^P}{|\vec{S}_k^P|} \cdot \vec{S}_j \quad (4-80)$$

$$\sin \alpha'_{jk} = \vec{S}_j \times \frac{\vec{S}_k^P}{|\vec{S}_k^P|} \cdot \vec{a}_{jk}^{nom} \quad (4-81)$$

Todos los parámetros requeridos por este modelo se pueden calcular mediante las ecuaciones anteriores. El análisis del Círculo de Puntos, como se ha visto en las anteriores tres soluciones especiales para ejes nominalmente paralelos, es capaz de entregar los mismos parámetros dados por las técnicas de los Datos de Postura (*Pose Data techniques*).

#### 4.4.5 Resumen de la técnica analítica del Círculo de Puntos (Circle point analysis, CPA)

La técnica analítica y experimental del CPA aquí descrita suministra en un sentido absoluto todos los parámetros geométricos fijos requeridos para calcular la posición y orientación de la articulación final con un grado mayor de precisión que el que fuera posible con los parámetros nominales. Los únicos datos no suministrados por esta técnica son las constantes de errores del transductor de las uniones. Sin embargo, se han sugerido mejoras para incluir las constantes de error, basadas en pares de datos de errores múltiples o únicos. Un resumen completo del procedimiento se da a continuación.

El experimento entrega datos de puntos en un círculo que representan los movimientos individuales de cada eje. Para cada eje, los puntos primeramente se encajan en un plano. La dirección normal al plano es el vector dirección al plano. Es necesario asegurar que los puntos vectores en la dirección asumida por el modelo cinemático nominal, están en contraposición a la dirección opuesta. Dentro del plano obtenido, los puntos son entonces encajados en un círculo cuyo centro representa un punto arbitrario en el eje, el cual está representado por una línea en el espacio. Así, el experimento da las líneas de dirección y puntos arbitrarios  $(\vec{S}_i, \vec{r}_i)$  para cada  $i = 1$  hasta  $N$ . Las coordenadas de líneas *Plücker* para cada línea  $(\vec{S}_i; \vec{r}_i \times \vec{S}_i)$  se calculan entonces. Cada par de ejes adyacentes  $j-k$ , para  $j = 1$  hasta  $N-1$ , se analiza entonces para determinar los parámetros cinemáticos para cada articulación. El análisis se basa en las derivadas mostradas en las secciones anteriores, dependiendo de si las líneas son paralelas, casi paralelas, se cruzan o son oblicuas. El análisis para un par dado de ejes o líneas adyacentes en el espacio se revisa a continuación.

Las coordenadas de las líneas son  $(\vec{S}_j; \vec{S}_{0j})$  y  $(\vec{S}_k; \vec{S}_{0k})$  :

1. Se calcula  $\cos \alpha_{jk}$ , y si es igual a  $\pm 1$ , dentro de una tolerancia especificada las líneas son exactamente paralelas y la longitud de la articulación  $a_{jk}$ , que como se ha visto anteriormente es la distancia perpendicular entre los ejes adyacentes  $j$  y  $k$ , se determina por la ecuación (4-82):

$$\vec{a}'_{jk} = a_{jk} \cdot \vec{a}_{jk} = \vec{S}_j \times (\cos \alpha_{jk} \vec{S}_{0k} - \vec{S}_{0j}) \quad (4-82)$$

Esta es la magnitud de vector mutuamente perpendicular a los ejes de ambas articulaciones. El ángulo de giro se calcula simplemente mediante (4-83):

$$\alpha_{jk} = \cos^{-1}(\vec{S}_j \cdot \vec{S}_k) \quad (4-83)$$

Los puntos de intersección únicos no existen y  $d_j, d_k$  no se pueden calcular explícitamente.

2. Si  $\cos \alpha_{jk}$  es aproximadamente  $\pm 1$  dentro de una tolerancia dada, las líneas se tratan como casi paralelas y una de las 3 soluciones especiales (solución exacta con correcciones de ángulo, técnica de media aproximada, o modelo de parámetro adicional) se usa para analizar las líneas (ver apartado 4.4.4 Análisis de ejes nominalmente paralelos).
3. Se calcula el Momento Mutuo (MM), el cual viene dado por la fórmula (4-84):

$$MM = \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{0k} + \vec{S}_k \cdot \vec{S}_{0j} \quad (4-84)$$

Si  $MM=0$ , entonces las líneas se cruzan y  $\alpha_{jk} = 0$ . El punto de intersección común vendrá dado por la ecuación (4-44), que es la que muestra la ecuación (4-85):

$$\vec{P}_j^{prox} = \vec{P}_k^{prev} = \frac{\vec{S}_{0j} \times \vec{S}_{0k}}{\vec{S}_{0j} \cdot \vec{S}_k} \quad (4-85)$$

Por convención,  $\alpha_{jk} < 180^\circ$ , y por tanto se tienen las ecuaciones (4-86) y (4-87):

$$\sin \alpha_{jk} = |\vec{S}_j \times \vec{S}_k| \quad (4-86)$$

$$\alpha_{jk} = \tan^{-1} \left( \frac{\sin \alpha_{jk}}{\cos \alpha_{jk}} \right) \quad (4-87)$$

4. Si  $MM \neq 0$ , y  $\cos \alpha_{jk} \neq \pm 1$ , lo cual sucede en la mayoría de los casos, las líneas son oblicuas. El vector dirección de la articulación viene dado por la ecuación (4-28), que es la fórmula (4-88):

$$\vec{a}_{jk} = -sgn(MM) \cdot \frac{\vec{S}_j \times \vec{S}_k}{|\vec{S}_j \times \vec{S}_k|} \quad (4-88)$$

Los puntos de intersección se calculan a partir de las ecuaciones. La longitud  $a_{jk}$  es la distancia entre estos puntos. El ángulo girado se calcula en base a la ecuación (4—25), que vienen dado por la siguiente ecuación (4—89):

$$\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{0k} + \vec{S}_k \cdot \vec{S}_{0j} = -a_{jk} \cdot \text{sen}(\alpha_{jk}) \quad (4-89)$$

Y despejando el ángulo se tiene la siguiente ecuación (4—90):

$$\alpha_{jk} = \tan^{-1} \left( \frac{\sin \alpha_{jk}}{\cos \alpha_{jk}} \right) \quad (4-90)$$

5. Para todos los casos, el valor de desplazamiento  $d_j$ , si está disponible, se calcula a partir de los puntos de intersección comunes a lo largo del eje  $j$  (definido por el vector  $\vec{S}_j$ ) determinados mediante el análisis de los pares de líneas  $i-j$  y  $j-k$  en la ecuación (4—91):

$$d_j = \left| \overline{P_j^{prox}} - \overline{P_j^{prev}} \right| \quad (4-91)$$

6. Por último, el ángulo de la articulación  $\theta_j$  define la relación entre dos articulaciones adyacentes. Es el ángulo entre dos articulaciones adyacentes  $i-j$  y  $j-k$ , y se mide como una rotación en el sentido de las agujas del reloj desde el vector  $\vec{a}_{ij}$  al vector  $\vec{a}_{jk}$ , alrededor del vector  $\vec{S}_j$ . Las siguientes fórmulas (4—92),(4—93) y (4—94) aseguran las restricciones direccionales dadas:

$$\cos \theta_{jk} = c_j = \vec{a}_{ij} \cdot \vec{a}_{jk} \quad (4-92)$$

$$\sin \theta_{jk} = s_j = (\vec{a}_{ij} \times \vec{a}_{jk}) \times \vec{S}_j \Rightarrow \quad (4-93)$$

$$\sin \theta_{jk} = s_j = \tan^{-1} \left( \frac{\sin \alpha_{jk}}{\cos \alpha_{jk}} \right) \quad (4-94)$$

El procedimiento arriba expuesto permite obtener los parámetros disponibles para todas las condiciones físicas posibles. Sin embargo, las ecuaciones presentadas antes se obtuvieron para suministrar una comprensión clara del análisis, y no deben ser el conjunto más eficiente. Se deben buscar mejoras en la eficiencia, aunque el problema de la calibración no es normalmente un procedimiento sensible al tiempo. Esta técnica provee unos parámetros geométricos reales, y es el único que da un indicio exacto de la naturaleza y fuente de los errores en un manipulador manufacturado. Por consiguiente, será el método más útil para calibraciones del fabricante dentro de sus instalaciones.

## 4.5 Captura de datos e identificación de parámetros cinemáticos del robot mediante la técnica de Circle Point

Como se ha indicado en el apartado 4.3 Métodos de calibración cinemática de robots, la calibración de los robots normalmente incluye las siguientes fases: (i) Determinación y construcción del modelo cinemático adecuado para la configuración del robot; (ii) Captura de datos de la posición de todos los elementos del robot mediante un instrumento de medida; (iii) Optimización o identificación de parámetros geométricos, (iv) Implementación y evaluación del modelo óptimo en posiciones distintas a las de identificación, (v) Identificación de las posibles causas y fuentes de error y modelado e implementación de modelos de corrección. La primera fase de modelado cinemático del robot indicando las transformaciones geométricas necesarias, la posición de los sistemas de referencia y el conjunto inicial de parámetros geométricos nominales se aborda en la sección 3.5 de la tesis, presentándose a continuación el desarrollo de las fases de captura de datos, identificación de parámetros, evaluación de los parámetros identificados en el volumen de trabajo del robot y la aplicación de modelos de corrección.

El análisis CPA determina los parámetros cinemáticos de un robot a partir de las relaciones geométricas entre los ejes de dos articulaciones consecutivas del robot. Los ejes de las articulaciones se obtienen a partir de un sensor que se mueve alrededor de cada uno de los ejes del robot de forma independiente. Para ello es necesario utilizar un sistema de medición que registre las posiciones tridimensionales de una sonda fijada al robot. Durante su desplazamiento alrededor de cada eje, el sensor describe trayectorias casi circulares. Estas trayectorias se aproximan matemáticamente a la circunferencia que mejor se ajuste a los puntos registrados; de este modo, el centro de esa circunferencia será un punto perteneciente a un eje articular, y su dirección será la normal al plano que mejor se ajuste a los puntos capturados. Este procedimiento se repite para cada articulación del robot comenzando por la que se encuentra inmediatamente por encima del suelo y terminando por la correspondiente al efector final del robot. Cada articulación debe quedar inmóvil después de su medición, utilizando frenos mecánicos cuando sea posible. Esto es esencial para que este método funcione correctamente, ya que con el anterior para determinar los parámetros cinemáticos; desplazamientos de las articulaciones medidas pueden dar lugar a parámetros incorrectos.

Se pueden utilizar varios modelos matemáticos para analizar la relación entre dos ejes consecutivos y para calcular los parámetros cinemáticos. El método original desarrollado por Stone [4] y modificado por Sklar [5] y Mooring [127] se basa en el álgebra de líneas. En este trabajo, utilizaremos la notación y la metodología propuestas por Sklar. Se proponen varios cambios para mejorar el método y obtener parámetros que no se mencionan en el método original. También se introducen cambios en el tratamiento matemático de los datos para eliminar las incertidumbres en casos particulares.

*Cálculo de los parámetros de la primera articulación*  $\rightarrow d_1$  : La ubicación del sistema de referencia de la base del robot es arbitraria. Por lo tanto, el parámetro  $d_1$  o  $\theta_1$  puede determinarse en función del sistema donde se encuentra. El método CPA, por definición, no puede determinar estos parámetros, lo que no es un problema en casos en los que la definición del sistema se realizó durante una calibración. Sin embargo, para obtener un conjunto de parámetros que se ajusten a

los parámetros reales del robot con un modelo previamente definido, que es la situación más común en la práctica, el método CPA original ha sido mejorado con algunas adiciones que permiten calcular estos datos sin requerir matrices de conexión entre un sistema de referencia arbitrario y el sistema de referencia base del robot.

En primer lugar, se obtiene la matriz de transformación del sistema base del robot al equipo de medición. Esta matriz se consigue moviendo el robot a  $n$  puntos en diferentes áreas del espacio de trabajo del robot y determinando tanto las coordenadas del robot y las coordenadas del equipo de medición de estos puntos. Con estos puntos, se obtiene una matriz de transformación mediante un método de ajuste que asegura la ortonormalidad de la matriz de transformación mediante el uso de un ajuste directo del método de mínimos cuadrados seguido de la descomposición polar o métodos directos que se han realizado previamente. Por consiguiente, el sistema de referencia de la base del robot se obtiene en el sistema de referencia del marco del equipo de medición. Tomando este valor y comparándolo con el valor (0, 0, 0) en el sistema de coordenadas del robot, se calcula el parámetro  $d_i$ , independientemente de la posición en la que se encuentre el reflector del sistema de medición.

*Cálculo de los parámetros de la primera articulación  $\rightarrow \theta_1$*  : Como en el caso anterior, el método CPA no define un sistema de referencia a partir del cual se establecen los cálculos, es decir, la forma de calcular el parámetro  $\theta_1$  no se especifica. El parámetro  $\theta_j$  se calcula mediante las ecuaciones (4–95) y (4–96), vistas en el capítulo anterior, que se reproducen aquí para mayor claridad:

$$\begin{aligned}
 A_i &= R_{z,\theta_i} \text{Trans}_{z,d_i} \text{Trans}_{x,a_i} R_{x,\alpha_i} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-95) \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$${}^0T_6 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 \quad (4-96)$$

donde se tiene que  $\vec{a}_{ij}$  es el vector normal entre los ejes  $i$  y  $j$ , y  $\vec{S}_j$  representa la dirección de la articulación. Sin embargo, no se puede calcular directamente  $\theta_1$  dado que el vector  $\vec{a}_{01}$  no se conoce (ver las ecuaciones (4–92)(4–93)(4–94)). Sin embargo, con el método CPA y los datos que se van a tomar y medir de las articulaciones, este vector se puede calcular ya que se toma de la componente del eje X del sistema de referencia de la base del robot dado en coordenadas del sistema de medición. Una vez este vector  $\vec{a}_{01}$  se ha calculado, entonces es posible calcular el valor de  $\theta_1$ .

*Cálculo del parámetro del modelo Hayati-Mirmirani  $\rightarrow \beta_2$*  : Este parámetro se utiliza, como se ha visto en el capítulo anterior, para modificar el modelo D-H añadiendo este parámetro adicional, el cual se añade en el caso de tener ejes paralelos. El cálculo de este parámetro se basa

en el coseno de  $\beta_{jk}$ , el cual devuelve ángulos en el rango  $0^\circ - 180^\circ$ . Para ello se aplican las siguientes ecuaciones (4—97) y (4—98):

$$\cos \beta_{jk} = \sqrt{\left[1 - \left(\vec{S}_k \cdot \vec{a}_{jk}^{nom}\right)^2\right]} \quad (4-97)$$

$$\sin \beta_{jk} = \frac{\vec{S}_k^p}{|\vec{S}_k^p|} \times \vec{S}_k \cdot \vec{b}_{jk} \quad (4-98)$$

En el cálculo del seno de  $\beta_{jk}$  en la ecuación que se muestra aquí (ver ecuación(4—73)) el vector  $\vec{b}_{jk}$  no se conoce. El nuevo parámetro define una rotación alrededor de este vector  $\vec{S}_k^p$  (ecuación (4—98)) representa la proyección del eje de la articulación actual en el plano que es perpendicular al vector, el cual contiene el eje de la articulación. De este modo el  $\sin \beta_{jk}$  se calcula sin conocer previamente el vector  $\vec{b}_{jk}$ , y de esta forma se tiene que el seno de  $\beta_{jk}$  se calcula sólo con la información conocida de los datos medidos en el proceso de toma de datos de cada articulación, según se ha visto anteriormente en el modelo CPA. Por tanto se tiene la ecuación (4—99):

$$\beta_{jk} = \cos(Sk \mapsto ajk) = \vec{S}_k \cdot \vec{a}_{jk} \quad (4-99)$$

donde  $(Sk \mapsto ajk)$  es la proyección de  $\vec{S}_k$  en  $\vec{a}_{jk}$ . A partir de esta ecuación,  $\beta_{jk}$  se calcula usando la ecuación siguiente (4—100):

$$\beta_{jk} = \text{atan2}(\cos Sk \mapsto ajk, \cos \beta_{jk}) \quad (4-100)$$

con la que se tienen unos ángulos en el rango  $[-180^\circ, +180^\circ]$ .

*Cálculo de los ángulos  $\alpha, \beta, \theta$*  → Estos ángulos se calculan usando la función *arc tan*, la cual da unos valores de ángulos en el rango  $[-180, +180]$ . Sin embargo, se tiene que para ángulos que estén muy cerca del entorno  $\pm 180^\circ$ , esta técnica obtiene una gran variabilidad debido al hecho de que para la misma configuración de los ejes del robot, da valores del orden entre  $+180,001^\circ$  o  $-180,001^\circ$ , y teniendo en cuenta que hay muy poco error debido al sistema de medida. Por este motivo, y para evitar esta oscilación de valores en el entorno de  $\pm 180^\circ$ , para ángulos muy cercanos a este valor, el rango obtenido para la función atan se convertirá al rango  $[0^\circ, +360^\circ]$  para mejorar la efectividad del método.

*Verificación de la dirección del vector  $\vec{S}_j$*  → En las funciones que se han implementado la dirección de los vectores  $S_j$  es la misma que las direcciones nominales definidas por el modelo DH-Hayati, implementado en el robot. El resultado del método CPA siempre es válido desde el punto de vista del modelado, pero el resultado no tiene por qué coincidir con el modelo real que se tiene para el

robot o el modelo implementado para su control. Por lo tanto, se necesita garantizar que este vector se ajusta correctamente a la realidad de la medición y del modelo del robot, de manera que la solución dada en la calibración a partir de los datos medidos coincida con el modelo cinemático que se pretende calibrar. En el caso de que el resultado del método muestre la dirección opuesta para el vector del eje de la articulación con respecto al eje Z nominal de la articulación, las funciones desarrolladas para desarrollar este método invierten la dirección del vector, antes de calcular el resto de parámetros.

#### 4.5.1 Equipos utilizados y sistemas de medición

Para el desarrollo de este trabajo se han empleado los siguientes equipos y sistemas de medición:

- **Robot KUKA KR5 sixx:** este es el robot manipulador que va a ser objeto de la calibración. Es un robot industrial Kuka pequeño, de seis ejes, con un rango de 650mm y una capacidad de carga (*payload*) de 5 Kg. La repetibilidad nominal es de  $\pm 0,02\text{mm}$  [152] .
- **Laser Tracker API modelo 3:** Este un equipo de medición de largo alcance, con un alcance de 15m y una precisión de  $\pm 15\mu\text{m}$  (ADM) o 1,5ppm. Este equipo de medición se conecta a un programa para realizar el proceso de captura de datos.
- **Active Target API:** Este dispositivo tiene un reflector esférico o *Spherical Mounted Retroreflector (SMR)* que dispone de un mecanismo con dos grados de libertad [153]. El reflector del *active target* trabaja de forma similar a cualquier retro reflector esférico. La principal diferencia con otros dispositivos similares es que éste incorpora una motorización integrada en el mismo, que permite al SMR de forma automática posicionar el reflector para que encare el *Láser Tracker*, sin necesidad de mover éste último. Esto permitirá realizar el proceso de toma de datos de los puntos del círculo de puntos, para el *Circle Point Analysis*, como se comenta, en un solo paso y sin necesidad de mover el Láser Tracker (ver Figura 4.15). La precisión de este dispositivo es de  $\pm 12,5 \mu\text{m}$  en el centro óptico. Una parte de sus características técnicas se pueden ver en la Figura 4.15.

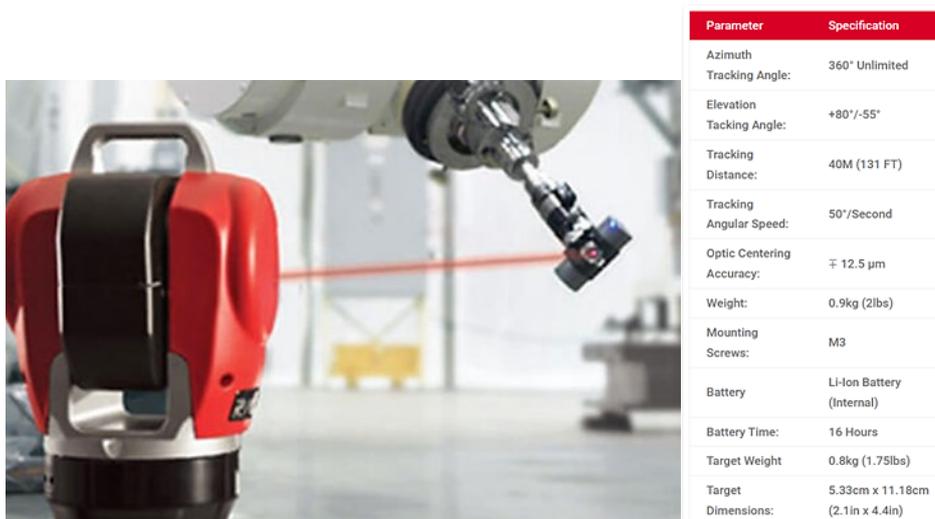


Figura 4.15. API Active Target: Características técnicas. Fuente: [153]

Se ha desarrollado un programa de software específico para capturar los datos del robot. A través de una interface entre el robot y un ordenador externo a éste, los ángulos del robot en cada posición predefinida se pueden capturar. Estos datos, tomados por el Láser Tracker a partir de las posiciones dadas por el Active Target de API, se analizan para darnos la información que se necesita para realizar el proceso de calibrado cinemático del robot.

#### 4.5.2 Definición y programación de trayectorias de robot

Una calibración precisa del brazo robótico Kuka KR5 sixx requiere una planificación cuidadosa de las trayectorias más convenientes y rangos angulares para cubrir el máximo espacio de trabajo posible. Para ello, se ha modelado el robot con los instrumentos de medición (*Láser tracker* y *Active target*) utilizando un programa de diseño paramétrico que permite simular el movimiento del robot y determinar los mayores rangos angulares para cada eje. Se han fijado retroreflectores al robot en varios puntos de cada eje para los que es necesario calcular la rotación. Dado que el reflector es una esfera colocada en un soporte esférico fijado al robot, el ángulo de visión del reflector no es suficiente para todo el ángulo de rotación a lo largo la trayectoria de rotación de la articulación [14]. Por lo tanto, es necesario retirar el reflector y colocarlo en otra posición para ajustar el ángulo de visión y seguir capturando puntos. Estas continuas manipulaciones del reflector pueden afectar los resultados y reducen la repetibilidad de la posición del reflector.

En las pruebas, se ha utilizado un reflector con seguimiento activo (*Active Target*) que permite al reflector girar sobre sus ejes de elevación y azimut. El *active target* incorpora una tecnología de motorización que hace que automáticamente el reflector siempre esté orientado hacia el *Láser Tracker* independientemente del movimiento. A continuación, es posible acoplar el reflector en el efector final del robot y realizar la prueba completa sin necesidad de mover el reflector. Esto es fundamental para lograr una alta precisión en la calibración del robot porque la incertidumbre del posicionamiento del reflector es de  $\pm 12,5 \mu\text{m}$  según las especificaciones del equipo. El tiempo necesario para cada prueba también se reduce significativamente. Para realizar un análisis preliminar de las trayectorias disponibles el robot se ha modelado (Figura 4.16) de tal manera que se puede establecer un algoritmo iterativo para maximizar los ángulos girados y mantener la línea visual entre la LT y el reflector. De este modo se pueden obtener las posiciones óptimas de la LT, el reflector, y las trayectorias máximas admisibles para cada una de las articulaciones del robot. A partir de este modelo, se han realizado varias simulaciones con distintas posiciones de partida para cada eje a fin de encontrar el rango angular máximo disponible para cada eje. El robot se programa dentro de los límites de rotación de su software. El sentido de rotación de cada eje y sus límites angulares también se han determinado en función de la configuración del robot (Figura 4.17). Por lo tanto, la simulación se realiza dentro las limitaciones físicas del robot.

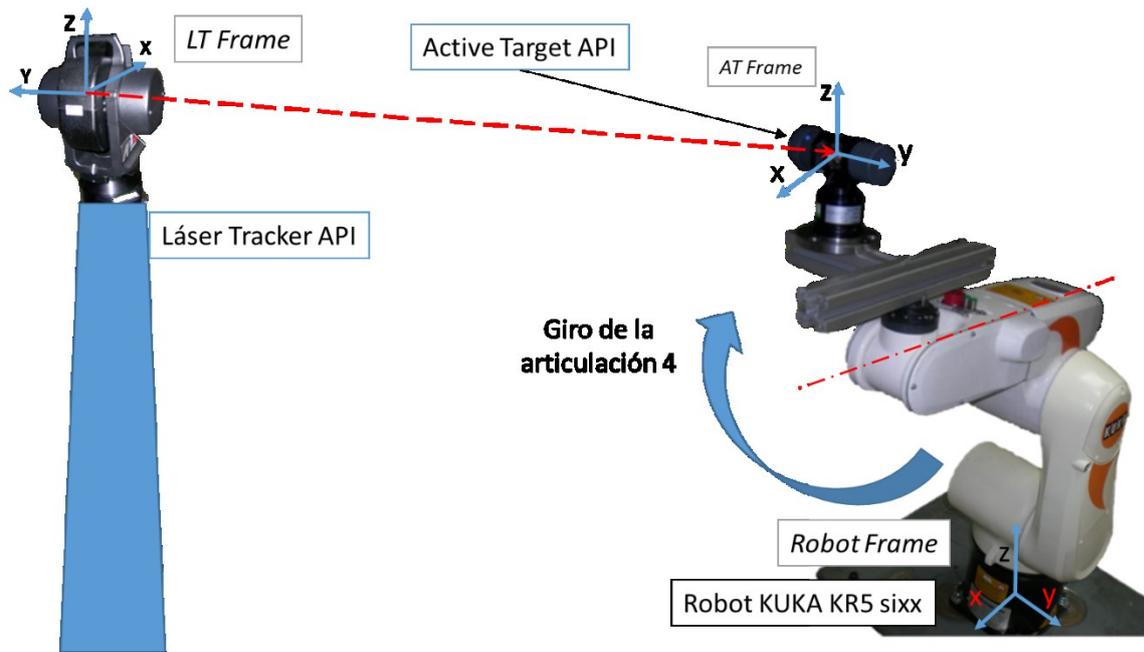
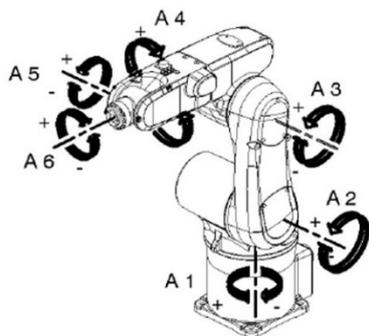


Figura 4.16 - Modelo de Robot KUKA con Láser Tracker y active target. Fuente: propia



Axis	Range of motion, software-limited	Speed with rated payload 5 kg
1	+/-170°	375 °/s with R650 250 °/s with R850
2	+45° to -190°	300 °/s with R650 250 °/s with R850
3	+166° to -119° with R650 +169° to -119° with R850	375 °/s with R650 250 °/s with R850
4	+/-190°	410 °/s
5	+/-120°	410 °/s
6	+/-350 °	660 °/s

Figura 4.17. Direcciones del movimiento y límites software para los ejes. Fuente: www.kuka.com

Aquí el robot se programa de tal forma que ejecuta los movimientos necesarios para alcanzar las posiciones de captura previamente definidas. Un programa generador (o simulador) automático se ha utilizado para esta tarea. El programa genera los códigos en el lenguaje del robot a partir de los datos definidos como ángulos iniciales y finales para cada articulación, las posiciones iniciales de cada eje, el número de puntos a capturar por eje en cada giro y el tiempo de espera en cada posición, necesario para la lectura de la posición y la adquisición de los datos a través de la información que se obtenga del binomio *Láser Tracker* con *Active Target*. Esta programación off-line reduce el tiempo que se necesita para programar el robot enormemente y permite rápidamente crear diferentes programas que se puedan adaptar o que se necesiten, en función de las condiciones y de los requerimientos de diferentes ensayos.

### 4.5.3 Ensayos experimentales de captura de datos y procedimiento de identificación de parámetros

Una vez generado el código del robot, éste se transfiere a la unidad de control del robot. Como medida de seguridad contra posibles colisiones entre el reflector y el robot, las trayectorias máximas disponibles se han reducido. Los rangos angulares finales se muestran en la Tabla 4.1. Se han programado seis ensayos diferentes para comprobar la precisión del método en diferentes condiciones, como el número de puntos capturados, el alcance angular y la velocidad del robot, puntos capturados, el rango angular y la velocidad del robot.

Articulación	Ángulo inicial (°)	Ángulo final (°)
1	167	-167
2	-5	-162
3	145	-114
4	177	-177
5	90	-90
6	178	-178

Tabla 4.1. Rangos angulares para cada articulación

El *Láser Tracker* utiliza su propio software para capturar puntos, lo que permite controlar el dispositivo de medición y capturar las coordenadas X, Y y Z de cada punto. El programa de control del *Láser Tracker* incluye variables temporales que definen el tiempo mínimo de estabilización de la señal y el número de puntos a capturar. La Figura 4.18 muestra una imagen de las pruebas y la Figura 4.19 muestra el montaje del reflector en el robot.

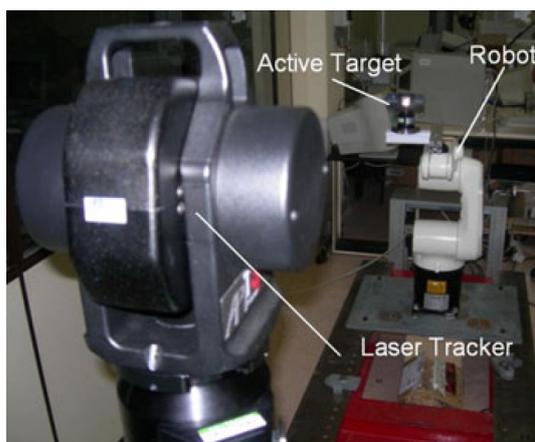


Figura 4.18. Vista general de los ensayos. Origen: propio.



Figura 4.19. Montaje del reflector. Origen: propio.

Las posiciones iniciales de cada articulación para cada rotación se muestran en la Tabla 4.2.

Articulación que se gira	Posición inicial de la articulación ( ° )					
	1	2	3	4	5	6
1	0	-90	90	0	-90	0
2	0	-90	45	-90	-90	0
3	0	-90	90	-90	-90	0
4	0	-90	90	0	-90	0
5	0	-90	90	0	0	0
6	0	-90	90	0	0	0

Tabla 4.2. Posiciones iniciales de cada articulación

#### 4.5.4 Implementación del Método

Para la realización y proceso de cálculo del método se han desarrollado unos algoritmos matemáticos, como se puede ver en la Figura 4.20. Estos algoritmos calculan los vectores  $\vec{S}_j$  y  $\vec{a}_{jk}$  de cada articulación y los parámetros cinemáticos del robot. En primer lugar, se calculan las coordenadas teóricas de cada una de las posiciones capturadas en el origen del sistema de referencia del robot a partir de los datos registrados del ángulo del robot y de sus parámetros cinemáticos nominales. A continuación, la matriz que referencia las coordenadas en el marco del LT (*Láser Tracker*) y la del robot puede calcularse a partir de las coordenadas de los puntos capturados en el marco del LT, y sus coordenadas equivalentes se pueden calcular a partir de los ángulos de las articulaciones del robot correspondientes a los puntos capturados y los parámetros

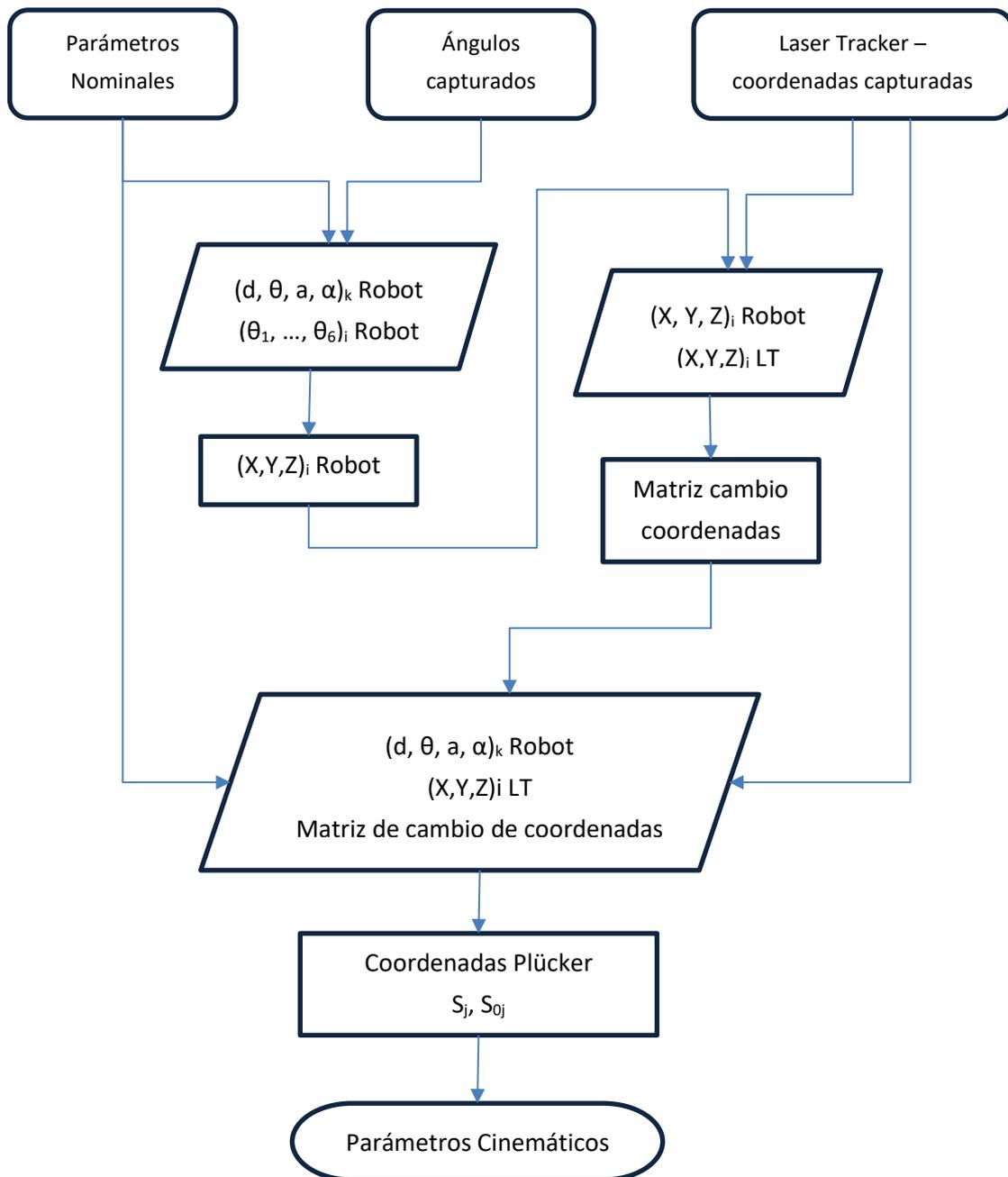


Figura 4.20. Diagrama de flujo del proceso de cálculo de los parámetros cinemáticos. Fuente: propia

cinemáticos nominales. Este proceso sigue la metodología de orientaciones absolutas para calcular la matriz de conversión con el uso de cuaterniones [25].

La metodología de cuaterniones requiere un mínimo de cuatro puntos para calcular la matriz. Si se utiliza un mayor número de puntos dará como resultado una matriz más precisa; por lo tanto, se han utilizado todos los puntos capturados para para calcular la matriz de conversión. El método también calcula el valor del error residual del cálculo de la matriz de conversión. A continuación, se calculan las coordenadas de Plücker a partir de las coordenadas registradas de los puntos capturados en el sistema de referencia del Láser Tracker [26]. Es decir, que se calculan los conjuntos

de vectores  $(\vec{S}_j, \vec{S}_{0j})$  de cada articulación, que son los vectores que identifican la línea que define la articulación y un punto inicial arbitrario. Los cálculos geométricos se realizan para poder ajustar los puntos capturados a la CPA. Una vez obtenidas las coordenadas de Plücker, los parámetros cinemáticos del robot se pueden calcular según los procedimientos algebraicos mostrados en el CPA [12, 27].

## 4.5.5 Ensayos realizados

### 4.5.5.1 Ensayo 1

El primer ensayo se puede considerar como una verificación inicial del rendimiento de cada parte del proyecto. Se ha realizado una prueba de diez puntos por articulación y la prueba de adquisición de trayectoria, lo que da un total de 120 puntos. Esto da como resultado una prueba rápida que nos muestra las correcciones necesarias para conseguir pruebas satisfactorias. Este primer ensayo se ha ejecutado para cubrir la máxima rotación posible para cada articulación al 3 % de la velocidad máxima del robot. Los parámetros de la primera prueba se pueden observar en la Tabla 4.3.

	<i>Limites angulares</i>		<i>Ángulo cubierto (°)</i>	<i>Número de puntos capturados por articulación y dirección</i>	<i>Incremento del ángulo (°)</i>
	<i>Inicial (°)</i>	<i>Final (°)</i>			
Articulación 1	167	-167	334	10	33,4
Articulación 2	-5	-162	157	10	15,7
Articulación 3	145	-114	259	10	25,9
Articulación 4	177	-177	354	10	35,4
Articulación 5	90	-90	180	10	18,0
Articulación 6	178	-178	356	10	35,6

Total puntos capturados = 120

Tabla 4.3. Parámetros del ensayo 1

### 4.5.5.2 Ensayo 2

En la segunda prueba, se ha buscado la máxima precisión posible cubriendo el mayor rango angular recorrido en incrementos angulares de aproximadamente 5° o 6° por articulación. La velocidad del robot se ha reducido al 1 % de su velocidad máxima. En la Tabla 4.4 se pueden ver los parámetros del segundo ensayo.

	<i>Limites angulares</i>		<i>Ángulo cubierto (°)</i>	<i>Número de puntos capturados por articulación y dirección</i>	<i>Incremento del ángulo (°)</i>
	<i>Inicial (°)</i>	<i>Final (°)</i>			
Articulación 1	167	-167	334	60	5,57
Articulación 2	-5	-162	157	30	5,23
Articulación 3	145	-114	259	50	5,18
Articulación 4	177	-177	354	60	5,9
Articulación 5	90	-90	180	30	6
Articulación 6	178	-178	356	60	5,93

Total de puntos capturados = 580

Tabla 4.4. Parámetros del ensayo 2

#### 4.5.5.3 Ensayo 3

La prueba 3 se realiza para determinar la influencia del tamaño de la muestra en la precisión de los resultados. Se han utilizado los parámetros angulares utilizados en la prueba 1, pero con la mitad del tamaño de la muestra. La velocidad se ha mantenido al 1 % de su velocidad máxima. En la Tabla 4.5 se pueden ver los parámetros de la tercera prueba.

	Límites angulares		Ángulo cubierto (°)	Número de puntos capturados por articulación y dirección	Incremento del ángulo (°)
	Inicial (°)	Final (°)			
Articulación 1	167	-167	334	30	11,13
Articulación 2	-5	-162	157	15	10,47
Articulación 3	145	-114	259	25	10,36
Articulación 4	177	-177	354	30	11,80
Articulación 5	90	-90	180	15	12,00
Articulación 6	178	-178	356	30	11,87

Total de puntos capturados = 290

Tabla 4.5. Parámetros del ensayo 3

#### 4.5.5.4 Ensayo 4

La prueba 4 tiene por objeto determinar la influencia del rango angular cubierto considerando un espacio de trabajo reducido con pequeños incrementos angulares a una velocidad del robot del 1 %. En la Tabla 4.6 se pueden ver los parámetros de esta prueba y de las pruebas siguientes.

	Límites angulares		Ángulo cubierto (°)	Número de puntos capturados por articulación y dirección	Incremento del ángulo (°)
	Inicial (°)	Final (°)			
Articulación 1	80	-80	160	30	5,33
Articulación 2	-40	-120	80	15	5,33
Articulación 3	80	-50	130	25	5,20
Articulación 4	90	-90	180	30	6,00
Articulación 5	45	-45	90	15	6,00
Articulación 6	90	-90	180	30	6,00

Total de puntos capturados = 290

Tabla 4.6. Parámetros de los ensayos 4, 5 y 6

#### 4.5.5.5 Ensayo 5

Aquí se aumenta la velocidad del robot para determinar la influencia de la velocidad en los resultados y encontrar el límite de velocidad a la que el *Láser Tracker* y el reflector no son capaces de seguirse mutuamente. En esta prueba se utilizan los mismos parámetros que en la prueba 4, pero la velocidad del robot se aumenta hasta el 3% de la velocidad máxima. En la Tabla 4.6 se pueden ver los parámetros de esta prueba.

#### 4.5.5.6 Ensayo 6

Este ensayo se ha realizado utilizando los mismos parámetros que los de la cuarta y quinta prueba, pero con la velocidad aumentada hasta el 10 % de la velocidad máxima del robot. Durante

la rotación del sexto eje, el *active target* casi pierde la referencia del Láser Tracker debido a la aceleración del robot; por lo tanto, éste parece ser el límite de velocidad del dispositivo. En la Tabla 4.6 se pueden ver los parámetros de esta prueba.

#### 4.5.6 Análisis de los datos

El primer objetivo de este trabajo es obtener los parámetros cinemáticos del robot KUKA KR5 sixx. Los parámetros calculados a partir de los datos de la primera prueba difieren en gran medida de los de las demás pruebas. Dado que la precisión de las pruebas depende del número de puntos capturados, debemos considerar que el número de puntos capturados para la prueba 1 está por debajo del umbral en el que los resultados pueden considerarse fiables. La prueba verifica que el proceso necesita capturar más de diez puntos por eje para que los resultados se consideren válidos. La Figura 4.21 muestra los puntos capturados junto con los círculos y ejes calculados a partir de estos puntos.

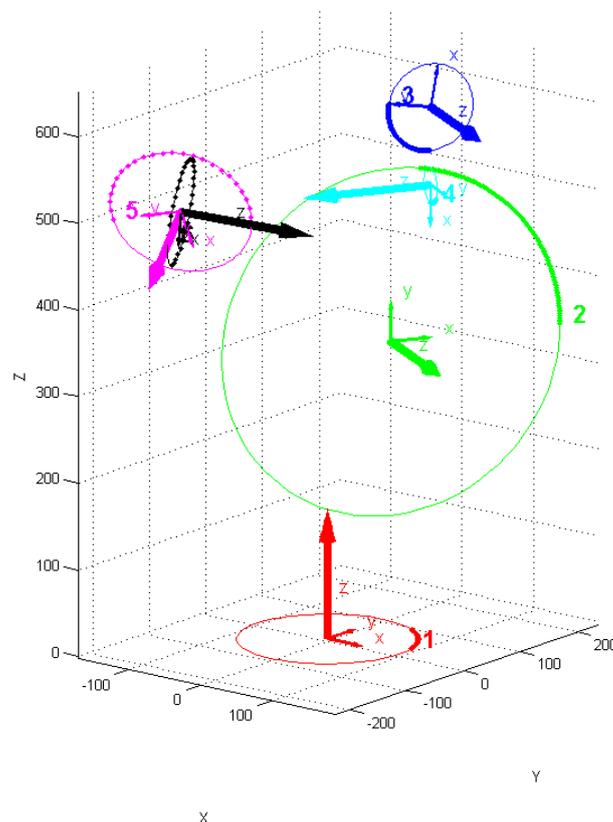


Figura 4.21. Puntos, círculos y ejes calculados. Fuente: propia.

La Tabla 4.7 muestra los valores de los parámetros cinemáticos obtenidos, sus valores medios y las desviaciones típicas. La media y la desviación típica de las seis pruebas y las de las pruebas 2 a 6 se muestran por separado para demostrar la necesidad de un tamaño de muestra conveniente para validar la prueba. Los valores de  $d_2$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_{3-6}$  no se muestran porque todos son cero y no son calculados por el método. Tampoco se muestran los valores correspondientes a la

articulación 6 porque no es posible estimarlos por el método CPA, por lo que deben considerarse valores nominales.

Parámetro cinemático	Nominal	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 6	Media 1-6	Desv.Std. $\sigma$ 1-6	Media 2-6	Desv.Std. $\sigma$ 2-6
d1 (mm)	335	332,8307	335,2766	335,3591	335,1712	335,185	335,2024	334,8375	0,9856	335,2389	0,0786
d3 (mm)	0	-0,5332	-0,3389	-0,344	-0,3455	-0,3495	-0,3506	-0,3769	0,0767	-0,3457	0,0047
d4 (mm)	295	294,2804	295,2578	295,2325	295,2997	295,2996	295,2997	295,1116	0,4082	295,2779	0,0312
d5 (mm)	0	0,1751	0,029	0,0271	-0,0092	-0,0082	-0,0071	0,0345	0,0712	0,0063	0,0199
$\theta$ 1 (°)	0	0,1267	0,0778	0,0971	0,0745	0,0754	0,0766	0,088	0,0208	0,0803	0,0095
$\theta$ 2 (°)	0	-0,1459	-0,0236	-0,0225	-0,0344	-0,0332	-0,0301	-0,0483	0,0481	-0,0288	0,0055
$\theta$ 3 (°)	90	90,1702	89,9429	89,9436	89,9552	89,9525	89,9498	89,9857	0,0905	89,9488	0,0054
$\theta$ 4 (°)	0	0,2016	0,2071	0,2095	0,2151	0,215	0,2147	0,2105	0,0055	0,2123	0,0037
$\theta$ 5 (°)	180	180,0416	180,0626	180,0611	180,0604	180,0609	180,0605	180,0579	0,008	180,0611	0,0009
a1 (mm)	75	74,7028	74,8693	74,8659	74,804	74,82	74,8241	74,8144	0,0606	74,8367	0,0292
a2 (mm)	270	271,6223	270,3284	270,3301	270,3621	270,3476	270,3344	270,5542	0,5234	270,3405	0,0142
a3 (mm)	90	89,8065	90,2592	90,2418	90,2867	90,293	90,297	90,1974	0,1927	90,2756	0,0239
a4 (mm)	0	-0,2582	-0,0371	-0,0378	-0,0262	-0,0316	-0,0263	-0,0695	0,0926	-0,0318	0,0056
a5 (mm)	0	0,5201	0,0114	0,0145	-0,0103	-0,0106	-0,0065	0,0864	0,2127	-0,0003	0,0122
$\alpha$ 1 (°)	90	90,0208	90,0173	90,0161	90,0166	90,0178	90,0175	90,0177	0,0016	90,0171	0,0007
$\alpha$ 2 (°)	0	0,0063	0,0051	0,0057	0,0089	0,0096	0,009	0,0074	0,002	0,0077	0,0021
$\alpha$ 3 (°)	90	89,9701	89,9701	89,9698	89,9704	89,9703	89,9703	89,9702	0,0002	89,9702	0,0002
$\alpha$ 4 (°)	90	90,0366	90,0269	90,0263	90,0301	90,0304	90,0313	90,0303	0,0037	90,029	0,0022
$\alpha$ 5 (°)	90	90,0298	90,016	90,0153	90,0194	90,0199	90,0203	90,0201	0,0052	90,0182	0,0023
$\beta$ 2 (°)	0	0,0533	0,0509	0,0531	0,0554	0,0565	0,0547	0,054	0,002	0,0541	0,0022

Tabla 4.7. Parámetros cinemáticos calculados por el CPA.

Las diferencias máximas con respecto a los nominales corresponden a los parámetros  $d_3$  (345,7  $\mu\text{m}$ ) y  $\theta_4$  (0,2123°) y las diferencias mínimas corresponden a los parámetros  $a_5$  (0,3  $\mu\text{m}$ ) y  $\alpha_2$  (0,0077°). La Figura 4.22 muestra la diferencia entre las desviaciones de los resultados obtenidos con y sin considerar los parámetros de la primera prueba. La calidad de los resultados mejora cuando se elimina la dispersión producida en el primer ensayo tal cual se muestra en la figura en la línea naranja.

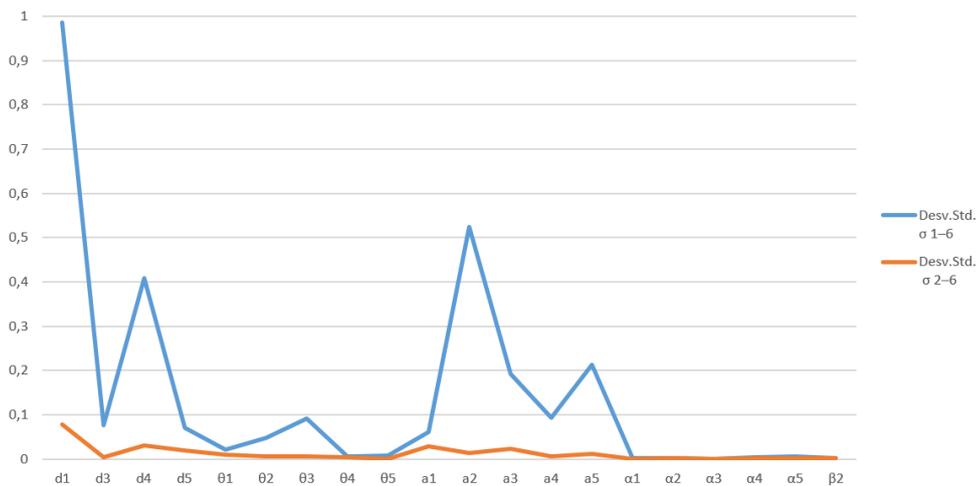


Figura 4.22. Comparación de la desviación estándar (medidas en mm). Fuente: propia.

### 4.5.7 Optimización y evaluación de los parámetros del modelo cinemático

Los métodos tradicionales de optimización se basan en procedimientos no lineales con un criterio para determinar si las sucesivas soluciones iterativas del proceso de optimización son mejores o peores que las anteriores. En los procedimientos de optimización generados en este trabajo se ha utilizado una aproximación por mínimos cuadrados mediante el método de Levenberg-Marquardt como algoritmo de optimización [152].

El criterio o función objetivo más común a optimizar se basa en el total de distancias euclidianas totales entre las posiciones reales de cada punto medido y las posiciones correspondientes calculadas con los parámetros cinemáticos según la siguiente formulación (4–101):

$$\Phi = \sum_n \sqrt{(x_{LT} - x_{optim})^2 + (y_{LT} - y_{optim})^2 + (z_{LT} - z_{optim})^2} \quad (4-101)$$

donde  $n$  es el número de puntos medidos, el sufijo LT indica las coordenadas medidas por el *Láser Tracker* y el sufijo *optim* indica coordenadas calculadas según parámetros optimizados. En este trabajo se propone un nuevo criterio de optimización utilizando las distancias euclidianas entre todos los puntos capturados mediante la comparación de las distancias reales optimizadas, considerando  $D_{ij\_LT}$  como la distancia euclídea real entre los puntos  $i$  y  $j$  según las mediciones del Láser Tracker, y siendo  $D_{ij\_optim}$  la distancia euclídea entre los puntos  $i$  y  $j$  según los parámetros optimizados, y  $n$  como el número de puntos medidos, se tiene la ecuación (4–102):

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sqrt{(D_{ij\_LT} - D_{ij\_optim})^2} \quad (4-102)$$

El uso del criterio tradicional requiere la relación entre los puntos capturados en el sistema de referencia del *Láser Tracker* y sus puntos correspondientes en el sistema de referencia del robot. Para ello es necesario calcular la matriz de conversión entre ambos sistemas de coordenadas. El cálculo de esta matriz se realiza por ajuste de mínimos cuadrados, lo que implica que la precisión en el cálculo de dicha matriz es función del número de puntos capturados y de la amplitud del espacio de trabajo cubierto. La Figura 4.23 muestra los errores residuales relativos al cálculo de las matrices de transformación en cada uno de los ensayos realizados.

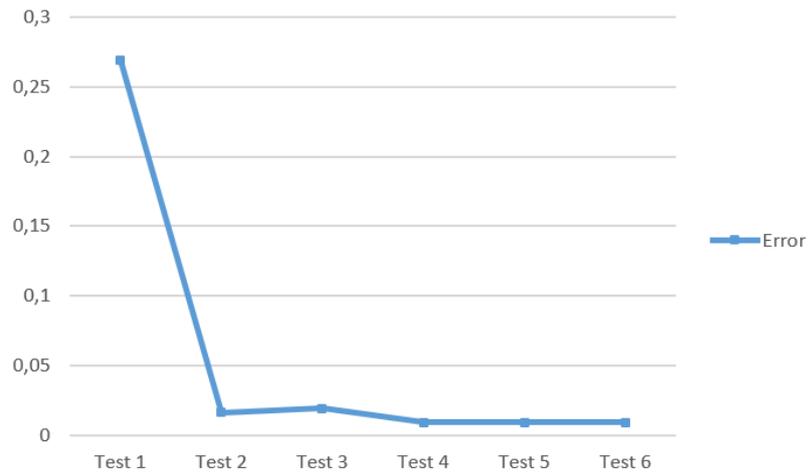


Figura 4.23. Errores residuales (en mm) resultantes de los cálculos de las matrices de conversión. Fuente: propia

El error máximo ( $269 \mu\text{m}$ ) se observa en la prueba con el tamaño de muestra más pequeño, mientras que el error mínimo ( $9 \mu\text{m}$ ) se encuentra en las pruebas 4, 5 y 6 con un espacio de trabajo más restringido. Para todo el rango de funcionamiento del robot, el error se sitúa entre  $16$  y  $19 \mu\text{m}$  en las pruebas 2 a 6 en función del número de puntos capturados. Estos errores introducen otro factor de incertidumbre en el proceso de optimización de los parámetros cinemáticos parámetros cinemáticos, además de su propia incertidumbre.

El método de las distancias entre todos los puntos no se ve afectado por la relación entre los sistemas de referencia del robot y del *Láser Tracker*. Por lo tanto, la precisión del método no depende de la incertidumbre del cálculo de la matriz de transformación; en cambio, sólo depende de la incertidumbre de los instrumentos de medición utilizados.

Los parámetros cinemáticos de las seis pruebas se han optimizado utilizando dos criterios de optimización: el criterio tradicional y las distancias entre todos los puntos. La Tabla 4.8 muestra los parámetros cinemáticos obtenidos por optimización según el criterio tradicional. Las diferencias máximas con respecto a los parámetros nominales se presentan en los parámetros  $a_3$  ( $466,8 \mu\text{m}$ ) y  $\theta_6$  ( $0,3382^\circ$ ) y las diferencias mínimas corresponden a los parámetros  $d_6$  ( $31 \mu\text{m}$ ) y  $\alpha_6$  ( $0,0016^\circ$ ).

Parámetro cinemático	Nominal	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 6	Datos de Tests 1 - 6		Datos de Tests 2 - 6	
								Media	Desv.Std. $\sigma$	Media	Desv.Std. $\sigma$
d1 (mm)	335	332,8758	334,9263	335,0457	334,9744	334,9035	334,9872	334,6188	0,8553	334,9674	0,0555
d2 (mm)	0	-0,6213	-0,2184	-0,194	-0,2638	-0,2228	-0,2714	-0,2986	0,1607	-0,2341	0,0326
d3 (mm)	0	-0,6185	-0,2176	-0,1936	-0,2625	-0,2215	-0,2701	-0,2973	0,16	-0,2331	0,0323
d4 (mm)	295	294,9277	295,2261	295,1845	295,4337	295,4249	295,4226	295,2699	0,2003	295,3384	0,1225
d5 (mm)	0	-0,0398	0,0903	0,1501	-0,038	-0,0239	0,0251	0,0273	0,078	0,0407	0,0791
d6 (mm)	80	81,2049	80,0155	80,0136	80,0244	80,0436	80,0581	80,2267	0,4795	80,031	0,0192
$\theta_1$ (°)	0	0,1158	0,0711	0,089	0,0584	0,0704	0,0594	0,0773	0,0218	0,0696	0,0123
$\theta_2$ (°)	0	-0,1433	-0,058	-0,0494	-0,0079	-0,0163	-0,0054	-0,0467	0,0522	-0,0274	0,0245
$\theta_3$ (°)	90	90,0997	89,9688	89,9637	89,933	89,9412	89,9282	89,9724	0,0645	89,947	0,0183
$\theta_4$ (°)	0	0,2683	0,2182	0,2289	0,2498	0,2514	0,2514	0,2447	0,018	0,24	0,0155
$\theta_5$ (°)	180	180,0239	179,9456	179,9454	179,935	179,933	179,9352	179,953	0,0351	179,9388	0,0061
$\theta_6$ (°)	0	-0,4193	-0,3551	-0,3598	-0,3253	-0,3252	-0,3257	-0,3517	0,0367	-0,3382	0,0176
a1 (mm)	75	74,3926	74,6851	74,7225	74,6438	74,6091	74,6449	74,6164	0,1163	74,6611	0,0436
a2 (mm)	270	271,023	270,3855	270,3261	270,1275	270,1959	270,1143	270,3621	0,3414	270,2299	0,1209
a3 (mm)	90	90,6815	90,4425	90,4361	90,4775	90,4819	90,4959	90,5026	0,0907	90,4668	0,0261
a4 (mm)	0	0,2257	0,0307	0,027	0,1229	0,1105	0,1216	0,1064	0,0732	0,0825	0,0493
a5 (mm)	0	0,9688	-0,0216	-0,0258	-0,0643	-0,0722	-0,0613	0,1206	0,4161	-0,049	0,0235
a6 (mm)	0	-0,1544	-0,1773	-0,1801	-0,1628	-0,1619	-0,1613	-0,1663	0,0101	-0,1687	0,0092
$\alpha_1$ (°)	90	90,0475	90,0294	90,0305	90,0401	90,026	90,0432	90,0361	0,0087	90,0338	0,0074
$\alpha_2$ (°)	0	-0,0096	-0,0011	-0,0015	0,0317	0,0224	0,0334	0,0125	0,0188	0,017	0,0172
$\alpha_3$ (°)	90	90,0455	89,9814	89,9831	89,9707	89,9686	89,9707	89,9867	0,0294	89,9749	0,0068
$\alpha_4$ (°)	90	90,0755	90,0213	90,0353	90,0079	90,0116	90,013	90,0274	0,0255	90,0178	0,0109
$\alpha_5$ (°)	90	89,9597	90,0143	90,0302	90,0092	90,0143	90,0262	90,009	0,0254	90,0188	0,0089
$\alpha_6$ (°)	0	0,2579	0,0037	-0,0003	-0,0044	-0,0041	-0,003	0,0416	0,106	-0,0016	0,0034
$\beta_2$ (°)	0	0,0977	0,0766	0,0827	0,1141	0,1022	0,1176	0,0985	0,0164	0,0986	0,0184

Tabla 4.8. Parámetros cinemáticos optimizados de acuerdo al criterio tradicional

En la Tabla 4.9 se muestran los parámetros cinemáticos obtenidos en las optimizaciones según el nuevo criterio de distancias totales. Las diferencias máximas respecto a los parámetros nominales se presentan en los parámetros  $d_3$  (452,2  $\mu\text{m}$ ) y  $\theta_6$  (0,3400°) y las diferencias mínimas corresponden a los parámetros  $d_5$  (14,8  $\mu\text{m}$ ) y  $\alpha_6$  (0,0025°).

Parámetro cinemático	Nominal	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 6	Datos de Tests 1 - 6		Datos de Tests 2 - 6	
								Media	Desv.Std. $\sigma$	Media	Desv.Std. $\sigma$
d1 (mm)	335	333,0532	334,9740	335,0397	334,8907	334,8827	334,8985	334,6231	0,7715	334,9371	0,0680
d2 (mm)	0	-0,0264	-0,0462	0,0068	0,3311	-0,3358	-0,2782	-0,0581	0,2377	-0,0645	0,2651
d3 (mm)	0	0,0129	-0,4492	-0,6180	-0,8098	-0,1529	-0,2312	-0,3747	0,3079	-0,4522	0,2710
d4 (mm)	295	294,8832	295,2077	295,1677	295,3887	295,3777	295,3850	295,2350	0,1977	295,3053	0,1084
d5 (mm)	0	-0,3574	0,0585	0,0911	-0,0784	-0,0694	-0,0755	-0,0719	0,1582	-0,0148	0,0826
d6 (mm)	80	81,1945	80,0127	80,0060	80,0387	80,0551	80,0459	80,2255	0,4751	80,0317	0,0213
$\theta_1$ (°)	0	0,1566	0,0769	0,0826	0,0721	0,0739	0,0738	0,0893	0,0332	0,0758	0,0041
$\theta_2$ (°)	0	-0,1346	-0,0603	-0,0584	-0,0292	-0,0292	-0,0287	-0,0568	0,0409	-0,0412	0,0166
$\theta_3$ (°)	90	90,1614	89,9758	89,9731	89,9506	89,9512	89,9465	89,9931	0,0834	89,9594	0,0139
$\theta_4$ (°)	0	0,1458	0,2037	0,2108	0,2473	0,2474	0,2481	0,2172	0,0402	0,2314	0,0222
$\theta_5$ (°)	180	179,9555	179,9245	179,9256	179,9183	179,9166	179,9188	179,9266	0,0146	179,9208	0,0040
$\theta_6$ (°)	0	-0,4630	-0,3069	-0,4080	-0,3295	-0,3285	-0,3269	-0,3605	0,0612	-0,3400	0,0392
a1 (mm)	75	75,0107	74,7086	74,6898	74,5833	74,5917	74,5735	74,6929	0,1660	74,6294	0,0644
a2 (mm)	270	271,3932	270,4020	270,3505	270,2807	270,2749	270,2760	270,4962	0,4424	270,3168	0,0572
a3 (mm)	90	89,8308	90,3916	90,3850	90,4567	90,4546	90,4681	90,3311	0,2477	90,4312	0,0396
a4 (mm)	0	0,1669	0,0028	-0,0037	0,0956	0,0846	0,0913	0,0729	0,0642	0,0541	0,0500
a5 (mm)	0	0,9036	-0,0422	-0,0369	-0,0783	-0,0834	-0,0737	0,0982	0,3951	-0,0629	0,0217
a6 (mm)	0	-0,1365	-0,2861	-0,0928	-0,1585	-0,1594	-0,1650	-0,1664	0,0644	-0,1724	0,0701
$\alpha_1$ (°)	90	89,9834	90,0419	90,0603	90,0253	90,0257	90,0288	90,0276	0,0254	90,0364	0,0150
$\alpha_2$ (°)	0	0,0318	-0,0014	-0,0023	0,0146	0,0140	0,0144	0,0118	0,0126	0,0078	0,0089
$\alpha_3$ (°)	90	90,0481	89,9793	89,9772	89,9578	89,9563	89,9567	89,9793	0,0353	89,9655	0,0117
$\alpha_4$ (°)	90	89,9374	90,0084	90,0197	90,0186	90,0220	90,0223	90,0047	0,0334	90,0182	0,0057
$\alpha_5$ (°)	90	89,8082	90,0018	90,0131	90,0027	90,0068	90,0050	89,9729	0,0808	90,0059	0,0045
$\alpha_6$ (°)	0	0,2903	0,0058	-0,0024	-0,0054	-0,0055	-0,0051	0,0463	0,1196	-0,0025	0,0048
$\beta_2$ (°)	0	0,0049	0,0673	0,0725	0,0889	0,0884	0,0881	0,0684	0,0324	0,0810	0,0104

Tabla 4.9. Parámetros cinemáticos optimizados según el criterio de distancias totales.

En ambos casos, se observa la importancia del tamaño de la muestra en la calidad de la calibración obtenida. Los resultados obtenidos en la primera prueba con un tamaño de muestra inferior difieren de los resultados obtenidos en las pruebas restantes con una mayor cantidad de datos iniciales.

La Tabla 4.10 muestra los valores de los errores medios y máximos de los seis ensayos basados en los parámetros nominales y comparándolos con las mejoras obtenidas aplicando los parámetros obtenidos por el CPA, una optimización de los parámetros con el enfoque tradicional y los calculados por otro criterio de optimización de las distancias entre todos los puntos. La evaluación se realizó desde el punto de vista tradicional.

	Parámetros nominales		Parámetros CPA		Parámetros optimizados				Mejora promedio (en %)		
	Error Medio (mm)	Error Máximo (mm)	Error Medio (mm)	Error Máximo (mm)	Criterio Tradicional		Criterio Distancias		CPA (%)	Tradicional (%)	Distancias (%)
					Error Medio (mm)	Error Máximo (mm)	Error Medio (mm)	Error Máximo (mm)			
Test 1	2,522	5,1867	1,5064	3,3501	0,7413	2,6756	1,3254	2,5733	40,27	70,61	47,45
Test 2	1,0015	1,9641	0,6498	1,5003	0,1461	0,5055	0,1768	0,5681	35,12	85,41	82,35
Test 3	1,1015	2,1017	0,6658	1,4814	0,1605	0,5741	0,232	0,693	39,56	85,43	78,94
Test 4	0,9139	1,9198	0,6101	1,0696	0,0928	0,3731	0,1507	0,4844	33,24	89,85	83,51
Test 5	0,9248	1,9352	0,6146	1,0778	0,0923	0,3653	0,1538	0,4838	33,54	90,02	83,37
Test 6	0,9344	1,9555	0,6158	1,0933	0,0958	0,3616	0,168	0,498	34,1	89,75	82,02

Tabla 4.10. Parámetros de calidad según el criterio de optimización tradicional.

La Tabla 4.11 muestra los mismos resultados citados anteriormente pero con evaluación de la mejora alcanzada obtenida por los tres métodos con el criterio de distancias entre todos los puntos.

	Parámetros nominales		Parámetros CPA		Parámetros optimizados				Mejora promedio (en %)		
	Error Medio (mm)	Error Máximo (mm)	Error Medio (mm)	Error Máximo (mm)	Criterio Distancias		Criterio Tradicional		CPA (%)	Tradicional (%)	Distancias (%)
					Error Medio (mm)	Error Máximo (mm)	Error Medio (mm)	Error Máximo (mm)			
Test 1	1,3444	4,8369	1,5587	4,0045	0,4421	2,7409	0,5505	3,022	-15,94	67,12	59,05
Test 2	0,4619	1,7168	0,4031	1,4906	0,0928	0,6919	0,1028	0,6697	12,73	79,91	77,74
Test 3	0,4883	1,7035	0,4152	1,4652	0,1008	0,7249	0,1138	0,6738	14,97	79,36	76,69
Test 4	0,4363	1,5403	0,2901	1,3057	0,0576	0,4496	0,0707	0,4554	33,51	86,80	83,80
Test 5	0,4406	1,5653	0,2946	1,3151	0,0566	0,437	0,0696	0,4444	33,14	87,15	84,20
Test 6	0,4399	1,5716	0,2907	1,3083	0,0566	0,4267	0,0724	0,4277	33,92	87,13	83,54

Tabla 4.11. Parámetros de calidad según el criterio de las distancias

Los resultados obtenidos mediante optimizaciones matemáticas son siempre mejores que los obtenidos por el *Circle Point Analysis* (CPA). Esto se debe a que el *Circle Point Analysis* sólo calcula las posiciones de los ejes de las articulaciones. Aunque este método proporciona información muy valiosa sobre la geometría del brazo del robot y la precisión en la fabricación y montaje, no proporciona información sobre otros errores geométricos o no geométricos en la rotación del robot. Los valores de los parámetros geométricos obtenidos por el *Circle Point Analysis* son los más precisos, en tanto en cuanto son los que representan mejor la realidad física del robot. Los parámetros optimizados matemáticamente son más precisos porque incluyen la influencia de cualquier otra fuente de incertidumbre.

Los mejores resultados son los obtenidos mediante la optimización tradicional, que conducen a una mejora de la precisión del robot de hasta al 85,43 % en el espacio de trabajo completo y al 90,02 % en el reducido. Sin embargo, este proceso de cálculo requiere unos recursos informáticos realmente significativos para obtener resultados óptimos. Se necesitan 380.000

iteraciones del proceso de optimización para alcanzar una solución estable. Aunque los resultados obtenidos con la nueva metodología propuesta son ligeramente más imprecisos (una mejora de hasta el 79,91 % en el espacio de trabajo completo y el 87,15 % para el espacio de trabajo reducido), el número de iteraciones necesarias para lograr un resultado estable se reduce a 240. Por tanto, la nueva metodología requiere una menor capacidad de cálculo y menos tiempo de proceso. Además, la fiabilidad de la mejora obtenida por el procedimiento tradicional está condicionada por los errores residuales resultantes del cálculo de la matriz de conversión, que varía entre 16 y 19  $\mu\text{m}$  y se ve incrementado por la incertidumbre del *Láser Tracker* ADM ( $\pm 15 \mu\text{m}$ ) y la del *Active Target* correspondiente ( $\pm 12,5 \mu\text{m}$ ) que se ha usado. En cambio, los resultados del análisis por el método que utiliza distancias presentan una incertidumbre menor porque depende únicamente de las incertidumbres del *Láser Tracker* y del *Active Target*.

La Figura 4.24 y Figura 4.25 muestran la evolución de los parámetros de calidad con la optimización tradicional y con el método de distancias para el ensayo 2, mostrando claramente la convergencia más rápida con el criterio de distancias.

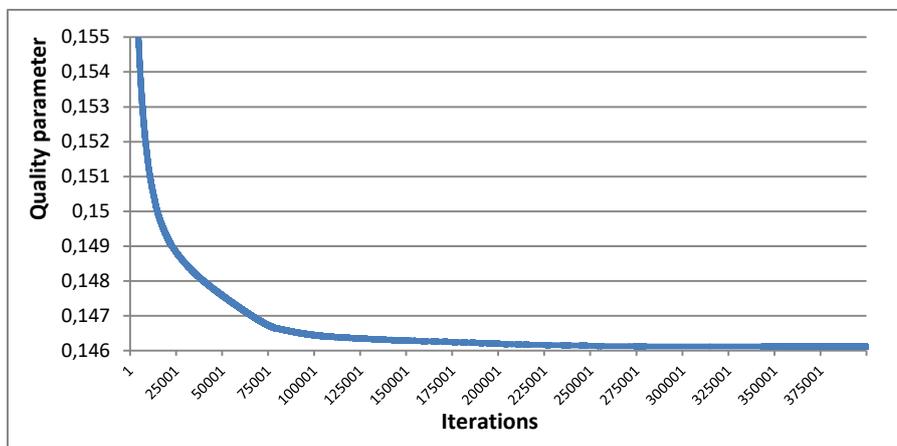


Figura 4.24. Convergencia de parámetros de calidad con criterio de optimización tradicional. Fuente: propia

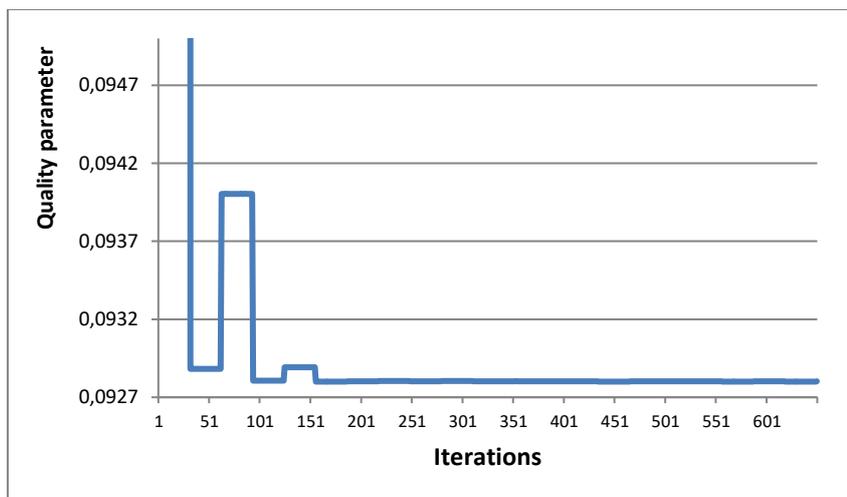


Figura 4.25. Convergencia de parámetros de calidad con criterio de optimización mediante distancias. Fuente: propia.

## 4.6 Determinación de errores en ejes y articulaciones del robot

El *Circle Point Analysis* (CPA) sólo proporciona información sobre la geometría real del robot, sin analizar los errores geométricos que puedan producirse en la rotación del robot. Los puntos capturados se han registrado girando el robot tanto en sentido positivo como negativo, alcanzando posiciones teóricamente idénticas en cada dirección. Las diferencias entre las posiciones de desplazamientos positivos y negativos muestran el juego correspondiente a cada articulación del robot. Las desviaciones que se puedan producir de cada punto medido al círculo teórico o *best-fit circle* (círculo que mejor encaje en el conjunto de puntos tomados), tanto por desviaciones en la dirección del eje de la articulación como en el plano perpendicular a dicho eje, serán las que darán lugar a la excentricidad, tanto axial como radial, respectivamente. Estos errores son los que se van a analizar en el siguiente apartado.

### 4.6.1 Análisis de juego y excentricidad por articulación

En las figuras siguientes se pueden ver los valores de juego y excentricidad para cada uno de los ejes tomando como ejemplo los resultados obtenidos en el ensayo 2. La Figura 4.26 muestra los valores del juego como un vector espacial que comienza en el punto capturado en el sentido positivo rotación de la articulación y terminando en su correspondiente punto en negativo rotación. Este valor está escalado por un factor de 500 para una mejor visualización.

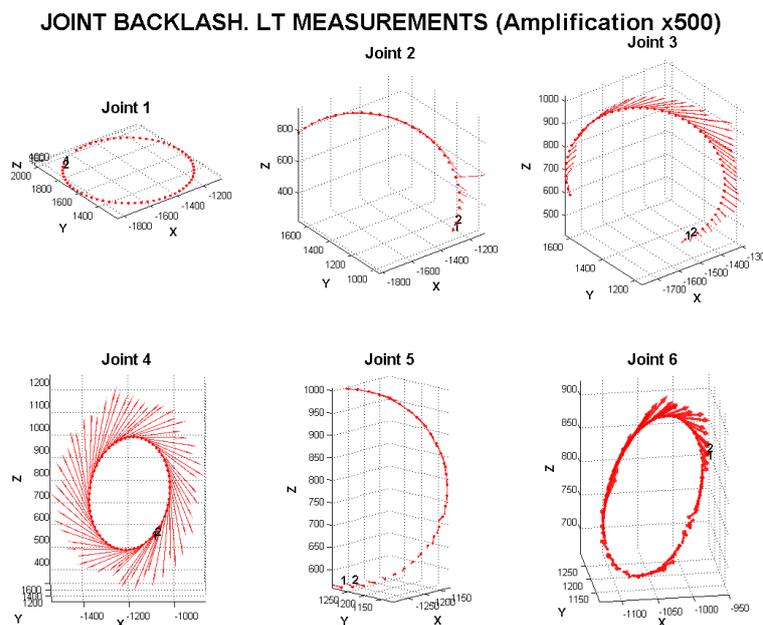


Figura 4.26. Juego por cada eje - Ensayo 2. Fuente: propia.

Se aprecia una importante diferencia en el juego calculado entre los diferentes ejes, siendo este juego el mayor en la tercera articulación y casi nula en la primera. La forma de cada uno de ellos también se puede ver en la figura. En la Figura 4.27, podemos ver las tres componentes (X, Y, Z) de este juego, para cada articulación.

**JOINT BACKLASH (Signed differences by coordinate mm) vs ANGLE (deg)**

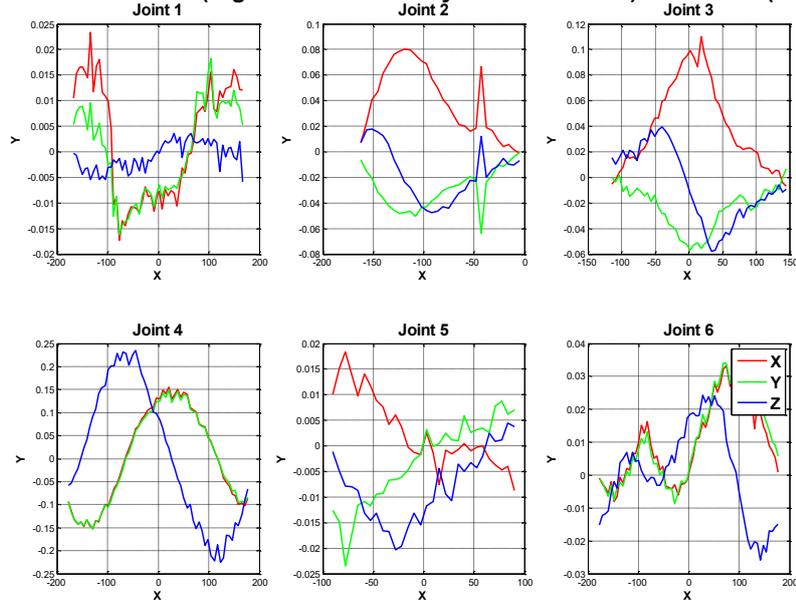


Figura 4.27. Juego para cada coordenada por eje - Ensayo 2. Fuente: propia.

Es claramente notable que la periodicidad y la forma sinusoidal del juego en esas articulaciones presentan valores más elevados. De hecho, el mayor juego es el que se ajusta a la forma sinusoidal. La articulación 4 es la que presenta un mayor juego y muestra más claramente el dibujo de la curva. En aquellos ejes con holguras pequeñas (1, 5 y 6), no se aprecia esta tendencia ya que las diferencias entre coordenadas capturadas son menores o muy cercanas a la repetibilidad del robot ( $\pm 20 \mu\text{m}$ ), por lo que se deben a la incertidumbre de posición del robot.

Los valores absolutos del juego por eje se muestran en la Figura 4.28.

**JOINT BACKLASH (EUCLIDEAN DISTANCE mm) vs ANGLE (deg)**

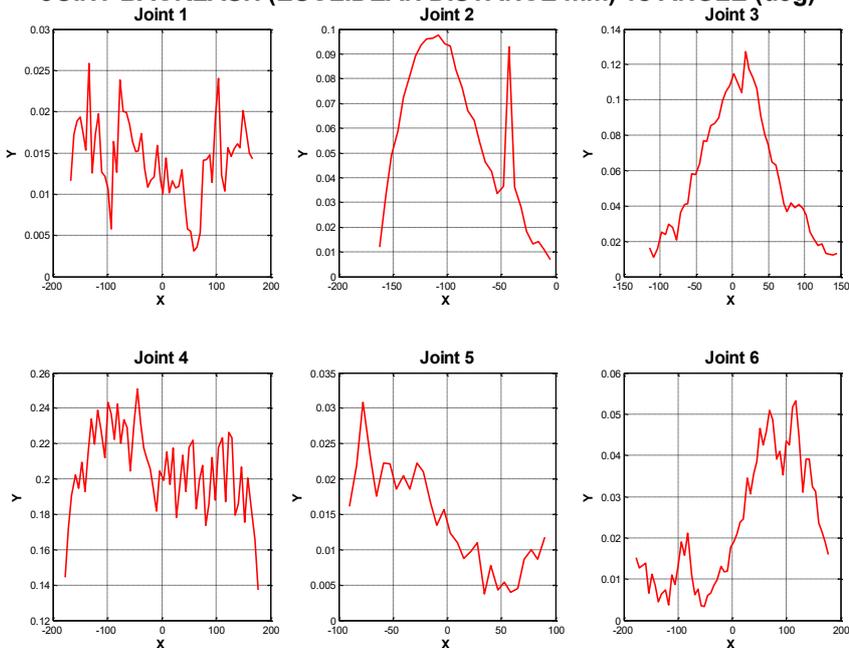


Figura 4.28. Distancias euclídeas del juego por articulación, en el ensayo 2. Fuente: propia.

Por otra parte, la excentricidad también se ha dividido en su componente esférico radial y axial. Se puede apreciar que la componente radial (10-30  $\mu\text{m}$ ) es siempre mayor que la componente axial (2,5-10  $\mu\text{m}$ ), lo que significa que los errores geométricos son debidos más a errores de excentricidad en la rotación de la articulación que a desplazamientos fuera del plano de rotación. En la Figura 4.29 y Figura 4.30 se muestran estas excentricidades.

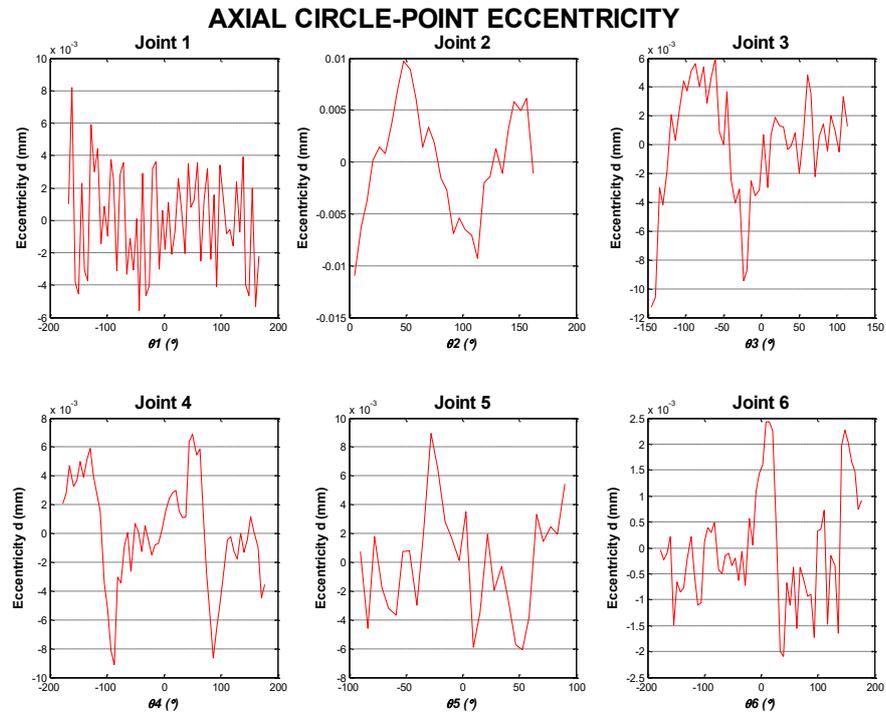


Figura 4.29. Excentricidad axial por articulación, ensayo 2. Fuente: propia

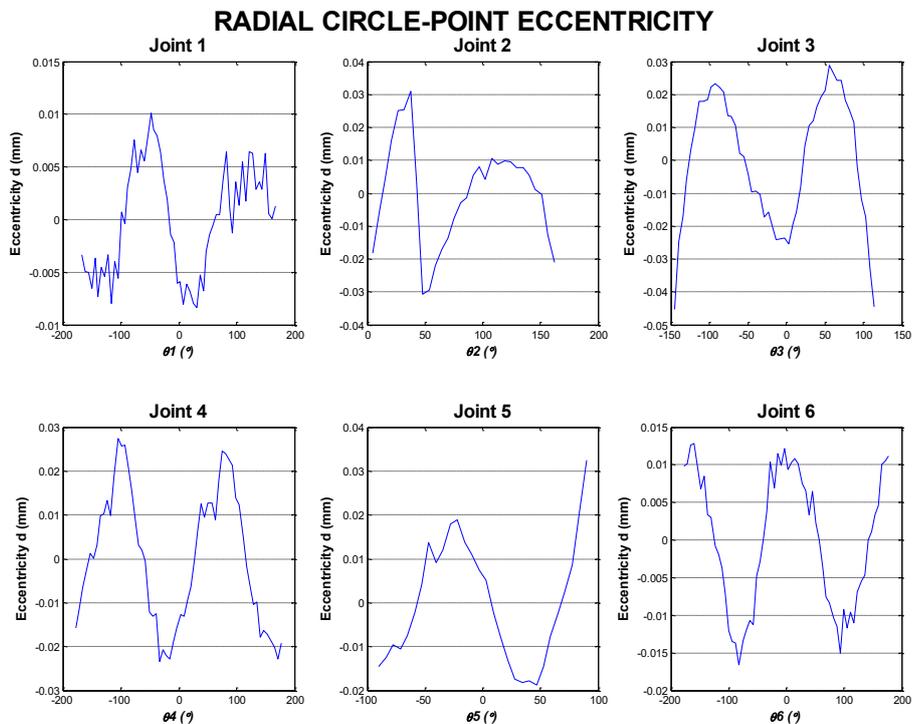


Figura 4.30. Excentricidad radial por articulación, ensayo 2. Fuente: propia.

Todos los valores de juego representados corresponden al ensayo 2; en el resto de los ensayos se han alcanzado resultados similares. Las tablas que se muestran a continuación (Tabla 4.12, Tabla 4.13., Tabla 4.14, Tabla 4.15, Tabla 4.16 y Tabla 4.17) muestran los valores absolutos de juego absolutos encontrados por articulación en cada ensayo. Estos valores corresponden a la Figura 4.28 para el ensayo 2.

Articulación 1	Máximo	Mínimo	Media
Test 1	0,0184	0,0038	0,0113
Test 2	0,0259	0,0031	0,0141
Test 3	0,0330	0,0094	0,0200
Test 4	0,0187	0,0029	0,0119
Test 5	0,0215	0,0010	0,0104
Test 6	0,0300	0,0123	0,0184
Media	0,0246	0,0054	0,0143
Desviación	0,0061	0,0044	0,0040

Tabla 4.12. Ensayo 2 Articulación 1 - Juego (mm)

Articulación 2	Máximo	Mínimo	Media
Test 1	0,0971	0,0103	0,0512
Test 2	0,0976	0,0070	0,0563
Test 3	0,0926	0,0089	0,0512
Test 4	0,1057	0,0142	0,0462
Test 5	0,1043	0,0152	0,0413
Test 6	0,1023	0,0116	0,0274
Media	0,0999	0,0112	0,0456
Desviación	0,0050	0,0032	0,0103

Tabla 4.13. Ensayo 2 Articulación 2 - Juego (mm)

Articulación 3	Máximo	Mínimo	Media
Test 1	0,0971	0,0103	0,0512
Test 2	0,0976	0,0070	0,0563
Test 3	0,0926	0,0089	0,0512
Test 4	0,1057	0,0142	0,0462
Test 5	0,1043	0,0152	0,0413
Test 6	0,1023	0,0116	0,0274
Media	0,0999	0,0112	0,0456
Desviación	0,0050	0,0032	0,0103

Tabla 4.14. Ensayo 2 Articulación 3 - Juego (mm)

Articulación 4	Máximo	Mínimo	Media
Test 1	0,2341	0,1097	0,1847
Test 2	0,2509	0,1372	0,2054
Test 3	0,2487	0,1420	0,1992
Test 4	0,2318	0,1040	0,1910
Test 5	0,1964	0,0860	0,1652
Test 6	0,1772	0,0821	0,1454
Media	0,2232	0,1102	0,1818
Desviación	0,0298	0,0251	0,0226

Tabla 4.15. Ensayo 2 Articulación 4 - Juego (mm)

Articulación 5	Máximo	Mínimo	Media
Test 1	0,0253	0,0052	0,0152
Test 2	0,0308	0,0038	0,0141
Test 3	0,0280	0,0051	0,0148
Test 4	0,0206	0,0086	0,0142
Test 5	0,0201	0,0055	0,0123
Test 6	0,0162	0,0062	0,0117
Media	0,0235	0,0057	0,0137
Desviación	0,0055	0,0016	0,0014

Tabla 4.16. Ensayo 2 Articulación 5 - Juego (mm)

Articulación 6	Máximo	Mínimo	Media
Test 1	0,0451	0,0073	0,0237
Test 2	0,0532	0,0034	0,0229
Test 3	0,0557	0,0027	0,0235
Test 4	0,0407	0,0028	0,0184
Test 5	0,0314	0,0021	0,0139
Test 6	0,0326	0,0093	0,0186
Media	0,0431	0,0046	0,0202
Desviación	0,0102	0,0030	0,0039

Tabla 4.17. Ensayo 2 Articulación 6 - Juego (mm)

## 4.7 Conclusiones

En este capítulo se ha introducido la calibración cinemática de los robots, se han analizado y se han revisado diferentes fuentes de error que pueden afectar a esta calibración, así como que se han revisado diferentes métodos de calibración cinemática de robots. De acuerdo a la bibliografía existente, las técnicas de calibración de robots documentadas pueden clasificarse en tres grupos: a) métodos de lazo abierto (*open loop methods*), b) métodos de lazo cerrado (*closed-loop methods*) y c) métodos de medida de eje-tornillo (*screw-axis measurement methods*). En el primer grupo de técnicas de lazo abierto, las poses del robot real son capturadas usando un sistema de medición externo. El segundo grupo de técnicas se basa en la pose diferencial, donde la información del error se toma de la creación de cadenas cinemáticas cerradas que fijan una o más de las restricciones de orientación y posición del efector final. El tercer grupo de técnicas se basa en las mediciones de movimientos independientes para cada una de las articulaciones del robot. En este caso, y para el procesado de los datos tomados, es posible extraer los parámetros del modelo cinemático y analizar el valor medio de los ejes de las articulaciones así obtenidos. Este método mantiene un mejor enlace tanto físico como matemático entre los parámetros identificados y los parámetros reales del robot, ya que los parámetros se basan en un cálculo independiente para eje de la articulación. Un método de medida de eje-tornillo típico es el *Circle Point Analysis* (CPA), que es el que se selecciona para su aplicación modificada en este trabajo de tesis. Se describe en este capítulo tanto la base matemática del mismo como el proceso a realizar. La técnica del CPA se basa el movimiento individual de cada una de las articulaciones del robot en un círculo mientras se mide la trayectoria de la articulación descrita por un punto alrededor de cada articulación. Se toman medidas para cada una de las seis articulaciones y se calcula el círculo que mejor se ajusta a los puntos capturados para cada eje. Por lo tanto, es posible considerar la posición del eje como un vector que pasa por el centro del círculo con una dirección normal al plano que contiene dicho círculo. Este método puede utilizarse para la programación offline de robots manipuladores presentando ventajas significativas, ya que los parámetros cinemáticos se determinan analíticamente a partir de las relaciones de distancias y ángulos entre los vectores calculados, se simplifica el método y se reduce el tiempo que requiere el proceso de optimización no lineal convencional. Además de la información sobre la posición de los ejes, este método da una idea de los errores de fabricación y montaje cometidos durante el proceso de fabricación del robot.

Por otra parte, y una vez presentadas las bases de la técnica del *Circle Point Analysis*, se ha procedido a su aplicación, realizando en primer lugar el proceso de captura de datos para el robot Kuka® KR 5 sixx. La calibración del robot requirió de una planificación cuidadosa de las trayectorias más convenientes y rangos angulares para cubrir el máximo espacio de trabajo posible. Para ello, se ha modelado el robot con los instrumentos de medición (*Láser Tracker* y *Active target*) utilizando un programa de diseño paramétrico que permite simular el movimiento del robot y determinar los mayores rangos angulares para cada eje. Para realizar un análisis preliminar de las trayectorias disponibles el robot se ha modelado de tal manera que se puede establecer un algoritmo iterativo para maximizar los ángulos girados y mantener la línea visual entre el LT y el reflector, pudiéndose obtener las trayectorias máximas admisibles para cada una de las articulaciones del robot.

A partir de este modelo, se han realizado varias simulaciones con distintas posiciones de partida para cada eje a fin de encontrar el rango angular máximo disponible para cada eje. A continuación, se realizan los ensayos experimentales programándose seis ensayos diferentes para comprobar la precisión del método en diferentes condiciones, tales como el número de puntos capturados, el alcance angular, la velocidad del robot, puntos capturados, el rango angular y la velocidad del robot.

Tras ello, se desarrollan los algoritmos que calculan los conjuntos de vectores  $(\vec{S}_j, \vec{S}_{0j})$  de cada articulación, que son las coordenadas Plücker. Esto mejora el proceso de dos formas fundamentales: la primera, el proceso de medición en continuo reduce el tiempo necesario para la captura de datos; segunda, la precisión de la medición y por tanto de la calibración se mejora sensiblemente, con lo que se reduce la incertidumbre del posicionamiento del reflector en cada articulación y los parámetros cinemáticos del robot mediante la aplicación del CPA. Estos parámetros cinemáticos identificados son optimizados en el trabajo mediante una aproximación por mínimos cuadrados mediante el método de Levenberg-Marquardt como algoritmo de optimización usando diferentes funciones objetivo.

Finalmente se determinan los errores en ejes y articulaciones del robot. El CPA sólo proporciona información sobre la geometría real del robot, sin analizar los errores geométricos que puedan producirse en la rotación del robot. Los puntos capturados se han registrado girando el robot tanto en sentido positivo como negativo, alcanzando teóricamente posiciones teóricamente idénticas en cada dirección. Las diferencias entre las posiciones de desplazamientos positivos y negativos muestran el juego correspondiente a cada articulación del robot, mientras que la excentricidad esférica axial y radial vendrá dada por las desviaciones en la dirección del eje de la articulación como en el plano perpendicular a dicho eje, respectivamente.

Una vez realizada la calibración cinemática de un robot real, ahora se pasará a exponer el modelo matemático para el cálculo de la incertidumbre de la calibración del robot, que nos permitirá calcular cuál es la incertidumbre que se tiene en este proceso de calibración, que es lo que se va a analizar y exponer en el siguiente capítulo.

# 5 Modelo de cálculo de incertidumbre de calibración de robot

---

## 5.1 Introducción

En este capítulo se realiza una estimación de la incertidumbre de la calibración cinemática de un robot industrial utilizando el método de Monte Carlo. Según se indica en el suplemento de la GUM [6], la estimación de incertidumbres mediante propagación de distribuciones utilizando como herramienta el método de Monte Carlo, permite resolver este problema con modelos donde la magnitud de salida se describe mediante una variable real que se estima mediante una función modelo que depende de  $n$  magnitudes de entrada, pudiendo ser esta función modelo no lineal, no derivable o la magnitud de salida claramente asimétrica, según se puede ver en su representación en la Figura 5.1. Definiendo un número determinado de iteraciones, este procedimiento genera el valor más probable de la magnitud de salida con un intervalo de cobertura asociado que permite la definición de la incertidumbre del modelo.

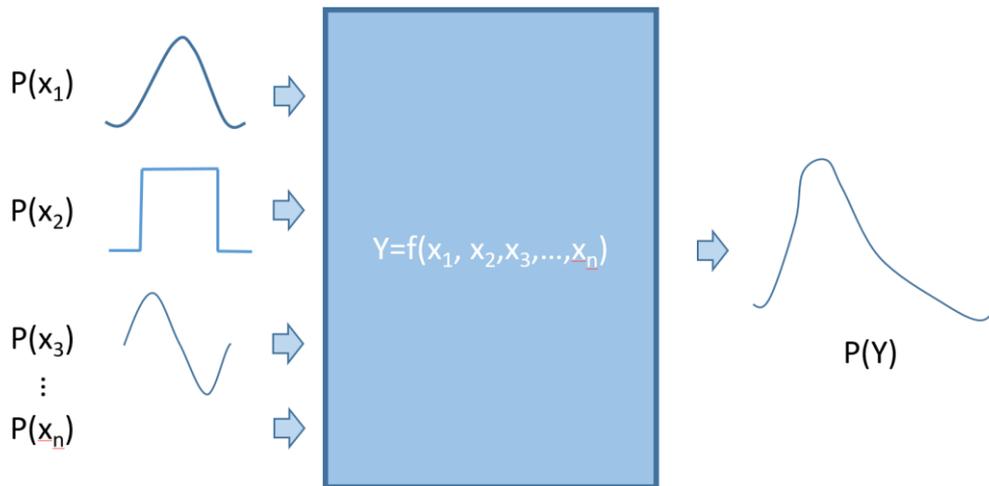


Figura 5.1. Propagación de las distribuciones de variables de entrada para obtener la variable de salida. Fuente: [6].

Utilizando este enfoque, es posible saber cómo una variable de salida (la posición y orientación del robot) se ve influida por las posibles distribuciones de los valores de entrada. Por lo tanto, es posible obtener la incertidumbre de calibración como un valor característico y las incertidumbres de posición y orientación del robot para una configuración definida. El valor del error puede generalizarse y predecirse en todo el espacio de trabajo en función de la incertidumbre de calibración obtenida a partir de una pose específica del robot. El procedimiento de simulación establece las distribuciones de probabilidad de las variables de influencia y obtiene los posibles valores de magnitud de salida para los distintos valores de las variables de entrada. Este procedimiento se plantea como un procedimiento matemático iterativo con un número de iteraciones elevado. Debido al elevado número de iteraciones, es adecuado para procedimientos de calibración basados en el cálculo matemático individual del eje de articulación, de modo que no es necesario establecer un procedimiento de optimización para cada iteración. Por tanto, se evita un coste computacional extremadamente elevado, y es posible generar herramientas de estimación de incertidumbre útiles y válidas para procedimientos de calibración industrial, no excesivamente largos para alcanzar resultados de incertidumbre acordes con la configuración de la variable de entrada. También es posible establecer una retroalimentación en el procedimiento para conseguir la menor incertidumbre posible en los resultados de la calibración.

En este capítulo se presenta el desarrollo de un método de estimación de la incertidumbre de calibración del robot mediante simulación de Monte Carlo organizándose el capítulo de forma siguiente. Primero se presenta una introducción a la estimación de la incertidumbre de calibración del robot mediante simulación de Monte Carlo; a continuación, se pasa a describir la definición tanto de las variables de entrada como de las variables de salida del modelo; posteriormente se pasa a explicar los resultados de la estimación de la incertidumbre de calibración del robots y finalmente se muestra el generador del simulador de calibración cinemática mediante *Circle Point*.

La última sección de este capítulo se dedica a realizar un resumen del capítulo y establecer las conclusiones que se han obtenido de los datos y cálculos realizados.

## 5.2 Estimación de la incertidumbre de calibración del robot mediante simulación de Monte Carlo

La base del método de estimación de la incertidumbre de calibración es la simulación del procedimiento de captura de datos, el posterior cálculo de los parámetros cinemáticos mediante el método CPA y la utilización de una simulación estadística según el método Monte Carlo. La salida del procedimiento de calibración es la incertidumbre de calibración para cada parámetro identificado. La incertidumbre obtenida para cada parámetro depende de la configuración de la captura de datos y del dispositivo de medición externo utilizado. Este método de evaluación permite obtener una incertidumbre de calibración en función de la configuración, el equipo y el procedimiento de medición utilizados. Además, permite calcular y optimizar una captura de datos antes de la ejecución de la prueba para validar los resultados numéricos. Conocer la incertidumbre en la determinación de los parámetros permite propagar las distribuciones de los errores de posición y orientación del robot calibrado para una pose determinada, pudiéndose aplicarse estos errores a la evaluación de todo el espacio de trabajo del robot.

Para ello, se establecen las siguientes fases en la aplicación del método:

- Definición de las variables de entrada, así como sus correspondientes distribuciones de probabilidad.
- Definición de la variable de salida.
- Desarrollo del modelo matemático que vincule la salida y las entradas.
- Propagación de las distribuciones de las magnitudes de entrada a través del modelo planteado para obtener la distribución de salida.
- Estimación de la magnitud de salida, su incertidumbre y los intervalos de confianza.

El diagrama de flujo del algoritmo que se ha desarrollado para la estimación de la incertidumbre de la calibración cinemática según Monte Carlo es el que se ve en la Figura 5.2. En los siguientes apartados, se va a ver en detalle cada uno de los pasos que integra este algoritmo, explicando asimismo cada uno de ellos, junto con sus algoritmos matemáticos.

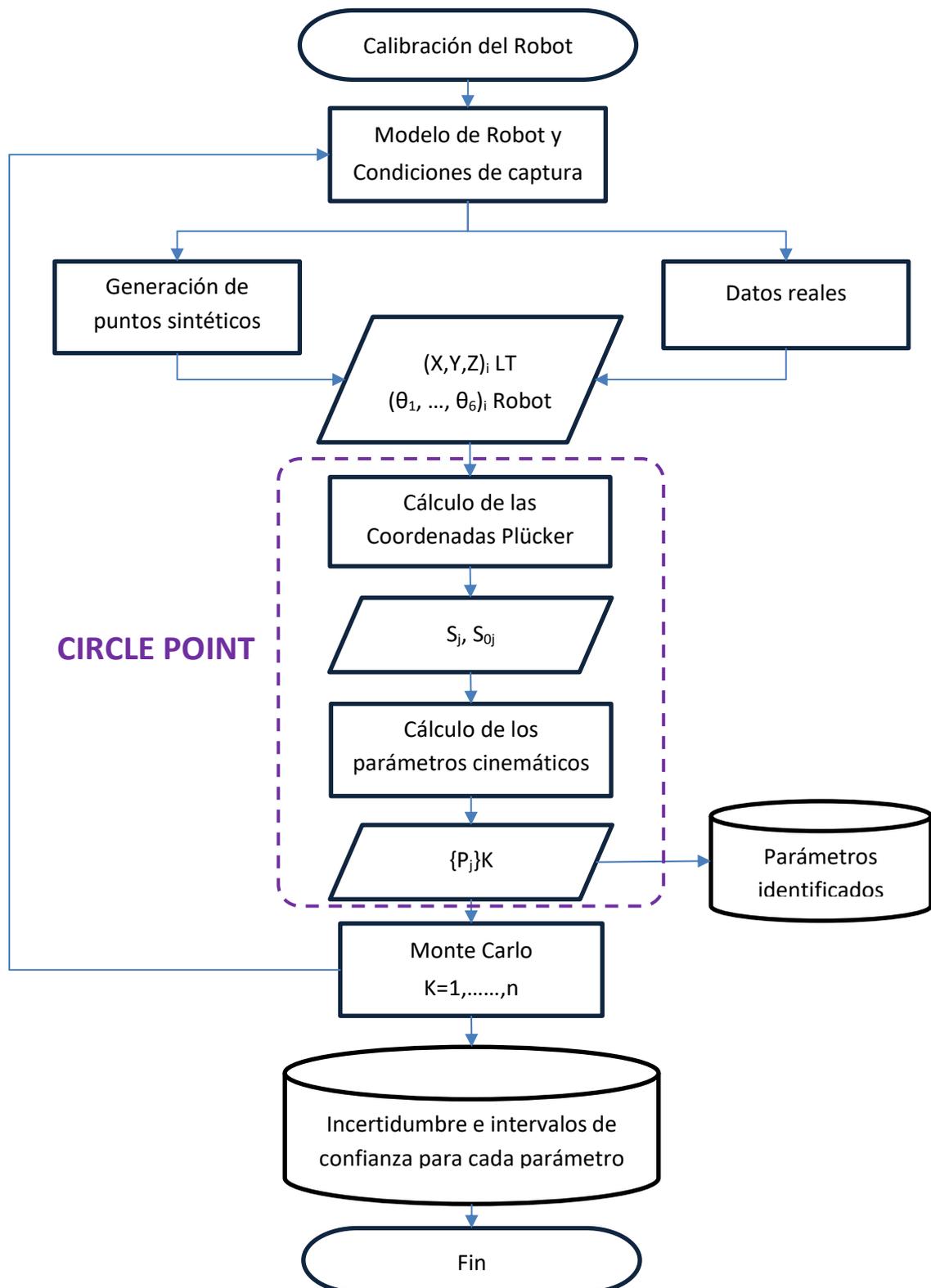


Figura 5.2. Generación de datos de medida para la calibración: generación de datos sintéticos. Fuente: propia.

### 5.2.1 Generación de datos de medida para la calibración: generación de datos sintéticos

En el método CPA, es posible obtener la información geométrica sobre la rotación de cada articulación mediante varios métodos de captura métodos de captura basados generalmente en sistemas de medición de coordenadas a gran escala sistemas de medición de coordenadas a gran escala, como *Láser Trackers*, *Total Station* o *GPS interior* (Figura 5.3) En el caso de este trabajo se utiliza un reflector colocado en un punto delantero en la estructura del robot relativo a la articulación giratoria actual, que tiene capacidad de seguimiento del *Láser Tracker*.

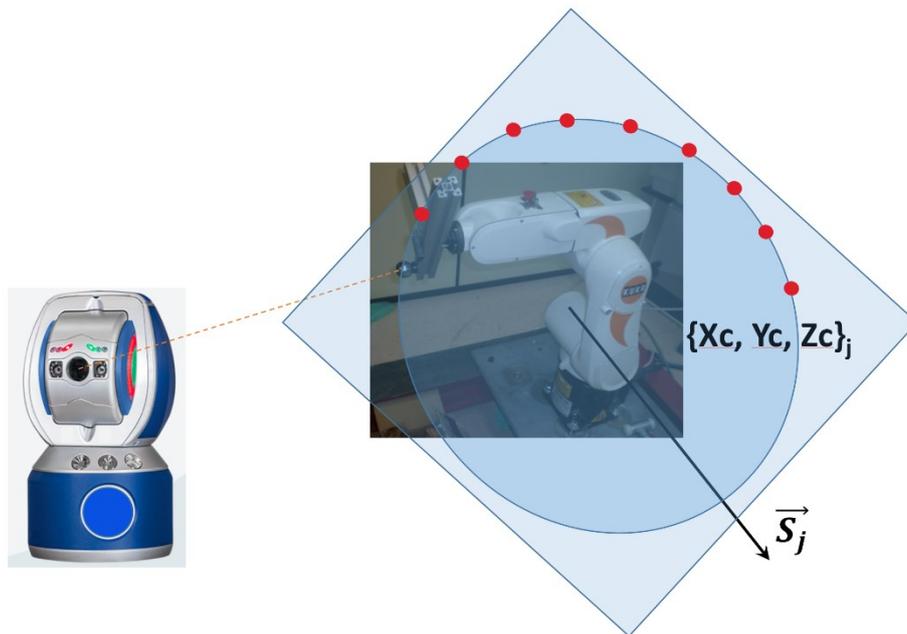


Figura 5.3. Captura de datos para la identificación de parámetros según el método CPA. Cálculo del eje de la articulación. Fuente: elaboración propia

El método propuesto genera puntos de medición sintéticos a partir de la definición de variables de entrada que influyen en el resultado. Las variables procedentes de la incertidumbre de medida del sistema de medición utilizado y de los parámetros de definición del proceso de muestreo influyen, de forma indirecta, en la incertidumbre final de calibración, ya que provocan un cambio en los resultados óptimos que se obtienen con el método CPA. Por lo tanto, mediante el simulador se van a generar, de una forma paramétrica, un conjunto de datos a partir de los cuales se obtendrán el conjunto de parámetros cinemáticos del modelo del robot. Estos datos se verán afectados por el error del sistema de medición y las condiciones de captura de los datos en la calibración. En este caso, y suponiendo que la calibración del robot se efectúe en un entorno con condiciones atmosféricas controladas, las variables de entrada consideradas e introducidas en el modelo que tienen contribuciones relevantes en la precisión de los parámetros cinemáticos calculados son las siguientes:

- a) Instrumento de medición:
  - 1. Posición del reflector en cada articulación del robot.
  - 2. Posición y orientación del instrumento de medición en sistema de referencia robot.
  - 3. Incertidumbre de medición del instrumento de medición, ya que se consideran diferentes dispositivos de medición: dos *Láser Tracker*, dos estaciones totales, un GPS interior y un *Láser Tracker* con accesorio de pruebas, que afectarán de forma diferente a la incertidumbre de medición final.
- b) Condiciones de captura de los datos para la calibración:
  - 1. Posición inicial de cada articulación (ángulo inicial de cada articulación).
  - 2. Ángulos de rotación cubiertos en cada articulación.
  - 3. Número de puntos capturados en cada articulación.
- c) Condiciones computacionales:
  - 1. Número de iteraciones realizadas en las simulaciones.

El enfoque general del método sólo tiene en cuenta las variables que influyen en el propio proceso de calibración. En caso de aplicarse particularmente a un robot concreto, es posible valorar la incorporación como fuente de error de la incertidumbre del propio mecanismo o de la incertidumbre de su fabricación y montaje, además de los factores ambientales.

La posición y la orientación del sistema de medición (*Láser Tracker*) se consideran parámetros de entrada del algoritmo y se expresan en el sistema de referencia del robot ( $SR_{robot}$ ). Estos se introducen en el modelo mediante la matriz de transformación homogénea que relaciona ambos sistemas,  $SR_{robot}$  y  $SR_{LT}$ . Debido a que la incertidumbre de medida del *Láser Tracker* se expresa como un término constante más un término lineal dependiente de la distancia de medición ( $A+BL$  en  $\mu m$ , con  $L$  en  $mm$ ), la incertidumbre se considera como un parámetro de entrada y estará influida por el reflector que se coloca en el robot. La posición del reflector en el robot determinará la distancia de medición y afectará directamente a su incertidumbre y a las coordenadas de los puntos medidos en cada articulación. Pueden existir limitaciones experimentales en la definición tanto las posiciones del reflector en cada articulación, como de los ángulos de cada articulación capturados, debido a que el robot puede ser físicamente incapaz de alcanzar cada posición, o bien que el reflector quede oculto durante la rotación de la articulación. Por lo tanto, es posible considerar estas limitaciones prácticas en el proceso de simulación, basándose en las condiciones particulares de la prueba de captura de datos.

Por otra parte, los parámetros de entrada relacionados con el ángulo de rotación, número de puntos capturados en cada articulación y la posición del robot definirán el número de puntos y sectores circulares capturados. El hecho de que el método CPA utilice un ajuste basado en los mínimos cuadrados de los puntos en un plano y la proyección de estos puntos sobre un círculo, hace que el sector circular a considerar y la incertidumbre del sistema de medición afecten directamente en la precisión de cálculo de ambas primitivas geométricas [154]. Por lo tanto, estos tres parámetros se consideran una fuente directa de incertidumbre causada por un parámetro de

entrada constante relacionado con la configuración de la prueba de captura. En la Figura 5.4 y Figura 5.5 se muestran dos conjuntos de datos generados: los valores iniciales de los parámetros de entrada para la generación se muestran en la Tabla 5.1, mientras que el parámetro modificado para cada generación de muestra se puede ver en las mismas figuras, siendo el ángulo cubierto  $\theta_i$  considerado como  $15^\circ$  para el primer caso de la Figura 5.4, y  $180^\circ$  para el segundo caso, y siendo el número de puntos considerado 100 puntos por articulación, para el primer caso de la Figura 5.5, o bien 15 puntos para el segundo caso.

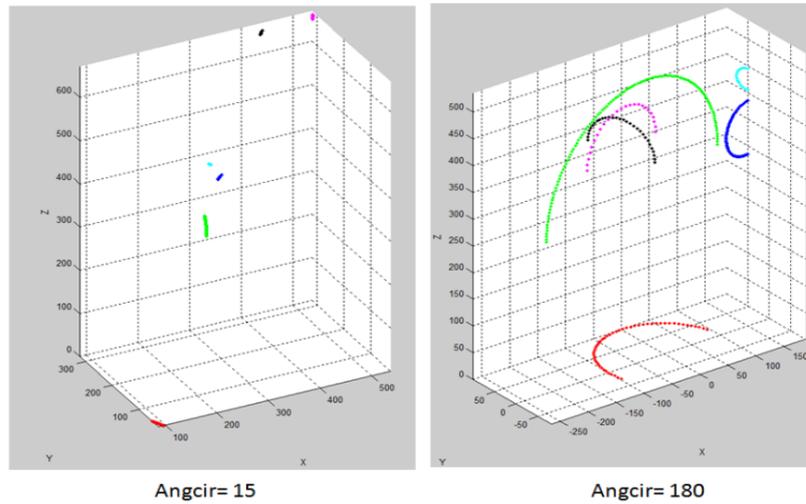


Figura 5.4. Conjunto de puntos generados por articulación, en función del ángulo cubierto por articulación. Fuente: elaboración propia

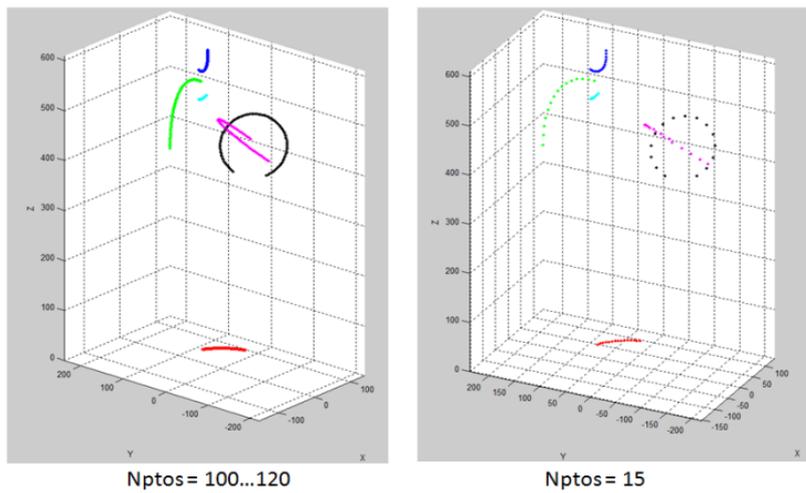


Figura 5.5. Conjunto de puntos generados por articulación, en función del número de puntos definido por articulación. Fuente: elaboración propia

Los valores iniciales que fueron los parámetros de entrada para la generación se muestran en la Tabla 5.1.

Variable	Articulaciones						
	1	2	3	4	5	6	
<i>Initpos</i>	15	0	0	0	0	0	Posición inicial del robot - vector con ángulo inicial de cada articulación
<i>Angcir</i>	45	80	100	50	200	300	Ángulo de giro que cubrirá cada articulación
<i>Nptos</i>	15	20	30	15	25	30	Número de puntos que se generarán en cada círculo
	A(μm) B(μm/m)						
<i>Ruidomed</i>	0	0	Incertidumbre de medida debida al instrumento de medida ±(A+BL)				
<i>SRLT</i>	1	0	0	0	Matriz de transformación del Sistema de Referencia del robot al sistema de referencia del instrumento de medición (Láser Tracker)		
	0	1	0	0			
	0	0	1	0			
	0	0	0	1			
<i>Preflector</i>	Artic.	X	Y	Z	Posición del reflector por articulación: Matriz 6x3 con las coordenadas X Y Z de la posición del reflector del LT (en posición inicial) expresadas en el SR de cada articulación <i>Robot</i> M <sub>LT</sub>		
	1	100	0	0			
	2	200	0	0			
	3	0	50	0			
	4	20	0	0			
	5	0	80	0			
6	0	60	0				

Tabla 5.1. Valores iniciales base considerados como parámetros de entrada.

La ecuación (5—1) muestra un ejemplo del modelo generado a partir de las coordenadas medidas nominalmente para un punto en la segunda articulación. Esta ecuación determina las coordenadas del reflector en la posición actual expresadas en el sistema de referencia de la articulación 2 (SR<sub>2</sub>), y estos puntos se definen como parámetros de entrada. G<sub>Zi</sub> representa una matriz de rotación homogénea de θ grados alrededor del eje Z<sub>i</sub>, de acuerdo con la posición inicial del robot, el ángulo de rotación y el número puntos definidos. <sup>0</sup>M<sub>1</sub> representa la matriz de transformación homogénea entre las articulaciones 2 y 1, cuando la rotación en torno a la articulación 1 es de cero grados, y <sup>LT</sup>M<sub>0</sub> es la matriz de transformación del sistema de referencia de la base del robot respecto al sistema de referencia del sistema de medición, que en este caso es un Láser Tracker. El subíndice F del ángulo de rotación θ hace referencia al punto final generado en la articulación anterior, y el subíndice i hace referencia al punto actual en la articulación 2. Este esquema de generación se generaliza para todas las articulaciones.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}_{Reflector\_SR\_LT} = {}^{LT}M_0 \times G_{Z1}(\theta_F) \times {}^0M_1 \times G_{Z2}(\theta_i) \times \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}_{Reflector\_SR2\_point\_i} \quad (5-1)$$

La Figura 5.6 muestra gráficamente el proceso de obtención de puntos medidos expresados en el sistema de referencia de la articulación 2 (SR<sub>2</sub>). Los parámetros nominales del modelo del

robot se tienen en cuenta durante la generación de puntos sintéticos, lo que permite evaluar no sólo la incertidumbre sino también del error creado al determinar cada parámetro, lo que está en consonancia con la incertidumbre asignada finalmente a cada parámetro.

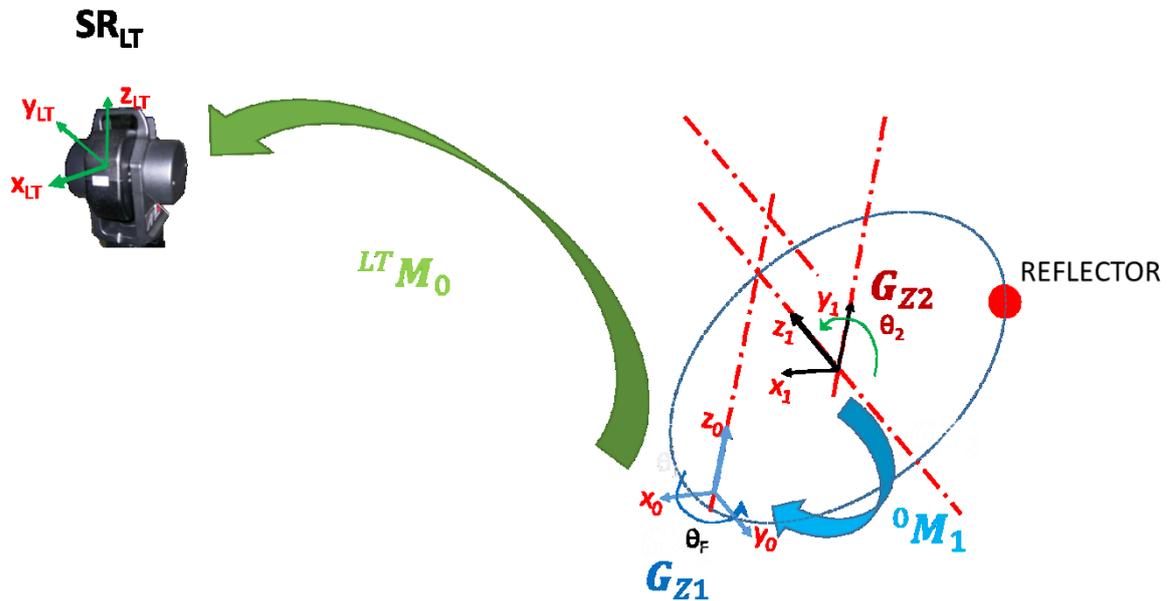


Figura 5.6. Modelo de generación de puntos para coordenadas del reflector en la articulación 2. Fuente: elaboración propia.

### 5.2.1.1 Algoritmo matemático para el Generador de puntos sintéticos

El primer algoritmo que se va a ver es el que corresponde al generador de puntos sintéticos. Una vez se han considerado las condiciones de partida y se han definido las variables de entrada, se procede a generar los puntos sintéticos, como se mostraba en la Figura 5.2. Más concretamente, el paso al que se refiere es el que viene resaltado en la Figura 5.7. Tanto este algoritmo, como todos los que se mencionan en los siguientes apartados se han realizado en MatLab©.

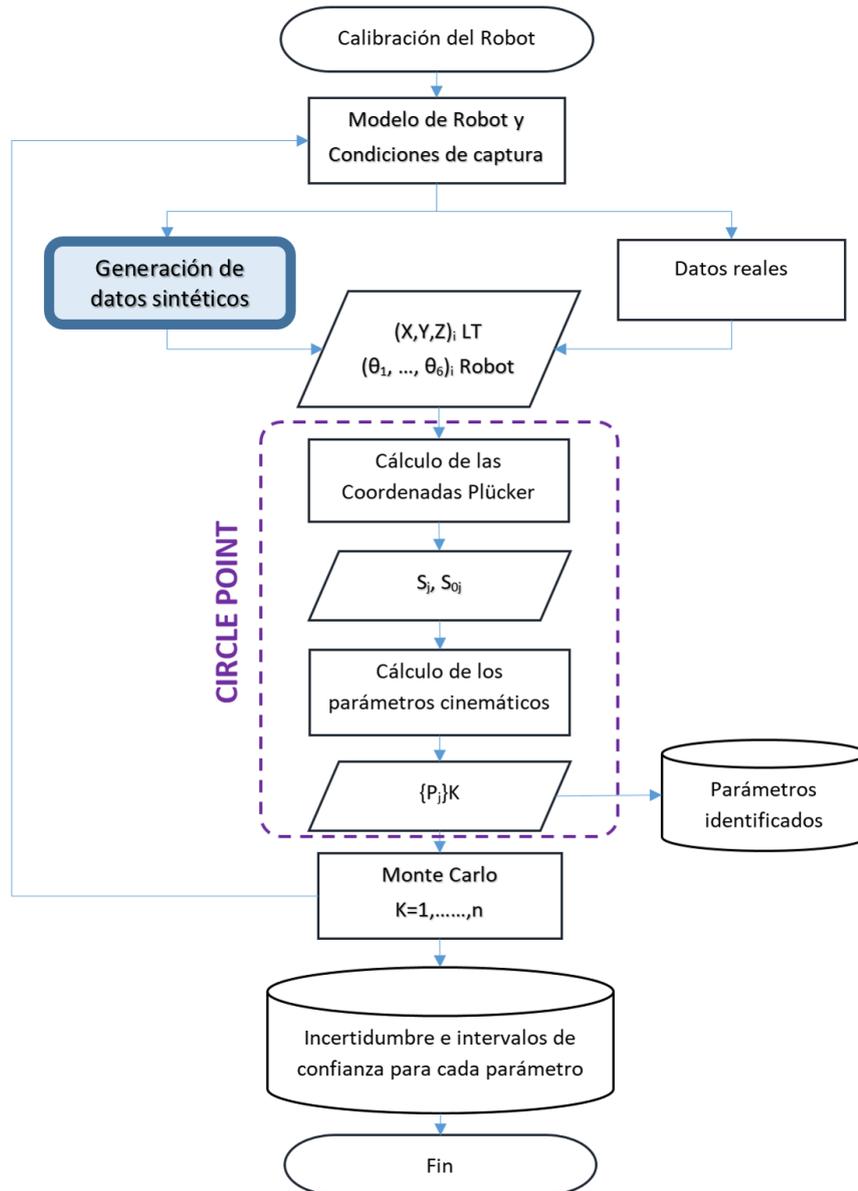


Figura 5.7. Diagrama de flujo del algoritmo - Generación de datos sintéticos. Fuente: propia

Este algoritmo tiene como variables de entrada (en el programa en MatLab©) las siguientes:

1. Initpos: Posición inicial del robot a partir de la cual se generarán los círculos. Vector 1x6, con los ángulos de las articulaciones.
2. SRLT: Matriz de transformación ( ${}^{LT}M_0$  en la Figura 5.6) que pasa puntos del Sistema de Referencia global del robot ( $SR_{ROBOT}$ ) al Sistema de referencia del sistema de medición ( $SR_{LT}$ ), que en el caso real es un *Láser Tracker*. Los puntos generados estarán expresados en el sistema de referencia del sistema de medición.

3. Preflector: Matriz 6x3 con las coordenadas X Y Z de la posición del reflector del *Láser Tracker* (en posición inicial) expresadas en el sistema de referencia de la articulación que gira (fijo) para todas las articulaciones: [X1 Y1 Z1; X2 Y2 Z2;...;X6 Y6 Z6]
4. Angcir: Vector 1x6 con el ángulo de giro que cubrirá cada articulación en el ensayo. Un ejemplo de los diferentes puntos generados al modificar este parámetro se puede ver en la Figura 5.4.
5. Nptos: Vector 1x6 con el número de puntos que se generarán en cada círculo. Un ejemplo de los diferentes puntos generados al modificar este parámetro se puede ver en la Figura 5.5.
6. Ruidomed: Desviación estándar de la distribución normal con la que se generará aleatoriamente ruido normal debido al instrumento de medida, centrado en el valor nominal en cada coordenada. Se considera con carácter general un valor de desviación tal que  $2\sigma$  sea aproximadamente el 95% del error máximo del instrumento de medida (Láser Tracker, Estación total, Indoor GPS, etc.). Este parámetro viene expresado en milímetros. Vector 1x2, que significa:  $Ruido = A + B * L$ .
7. Err: Matriz 6x20 con los errores de giro a inducir en cada una de las articulaciones. Cada fila tiene estas componentes: [dx dy dz Ex Ey T1 T2 T3 T4 T5 fi1 fi2 fi3 fi4 fi5 R1 R2 R3 R4 R5]. Son los términos correspondientes al modelado de errores en ejes giratorios. En ellos,  $d_x, d_y, d_z$  ( $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ ) son los deltas en cada uno de los ejes para la traslación respecto al sistema de referencia fijo y  $E_x, E_y$  ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ) son giros entorno a X e Y del sistema fijo.  $E_z$  no se considera porque la rotación que se va a realizar en cada articulación es en torno a Z, que será el ángulo  $\theta_z$ . Todos los errores se van a generar dependientes del valor del ángulo de giro de la articulación en cada momento, por lo que lo que se introducirá en esta matriz serán las amplitudes máximas de estos errores. Su valor final se modelará como se indica en la ecuación (5—2) y es dependiente del valor de giro en cada momento, siendo:

$$Error = A \cdot \sin\left(\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) \cdot \theta_i + \varphi_i\right) \quad (5-2)$$

- A: el valor introducido en los términos de error (amplitud). En la matriz milímetros para desplazamientos y grados para giros.
- T: Periodo de la oscilación, en radianes (normalmente consideraremos  $2\pi$ ). En la matriz se especifica uno para cada error.
- $\theta$  (thita): Será el valor de giro de la articulación en cada momento, durante la aplicación sintética del método CPA en cada articulación.
- $\phi$  (fi): desviación de fase (en radianes), una para cada articulación.

Los parámetros R1 a R5 son desviaciones estándar de la distribución normal con la que se generará aleatoriamente ruido normal al valor de cada error. Se pondrá 0 si no se desea generar ruido en la distribución normal.

Modelando este error en función de  $\theta_z$ , en cada posición de giro de una articulación, su SR estará en una posición distinta para cada  $\theta_z$ . La matriz de transformación homogénea que

permite obtener la matriz resultante de los errores tendrá la siguiente forma según la ecuación (5—3):

$$RT_{err} = MT_x \cdot MT_y \cdot MT_z \cdot MG_{\varepsilon_x} \cdot MG_{\varepsilon_y} \cdot MG_{\theta_z} \quad (5—3)$$

Teniendo en cuenta la siguiente convención en cuanto a la notación:

- $MT_k$  es la matriz de traslación, en una cantidad  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ , a lo largo de los ejes k, para k=x, y o z.
- $MG_{\theta_k}$  es la matriz de giro, en unos ángulos  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ , para los errores en los giros alrededor de los ejes k, para k=x o y, respectivamente, o el ángulo  $\theta_z$ , para el valor del ángulo cuando la articulación está rotando alrededor del eje z.

El resultado de desarrollar la matriz de la ecuación anterior se puede ver en la siguiente ecuación (5—4):

$$RT_{err} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y \cos \theta_z & -\cos \varepsilon_y \sin \theta_z & \sin \varepsilon_y & \delta_x \\ \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \cos \theta_z + \cos \varepsilon_x \sin \theta_z & \cos \varepsilon_x \cos \theta_z - \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \theta_z & -\sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_y & \delta_y \\ -\cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \cos \theta_z + \sin \varepsilon_x \sin \theta_z & \sin \varepsilon_x \cos \theta_z + \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \theta_z & \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_y & \delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5—4)$$

El valor  $\theta_z$  será el valor del ángulo de giro de la articulación que se está girando en el proceso del CPA en este generador, en cada momento, alrededor del eje z. Por tanto, se obtendrá la matriz de este sistema al SR nominal de la articulación para cada ángulo. Ésta es la matriz  $G_{Zi}(\theta_{Zi})$  que se ha referido anteriormente en la ecuación (5—1).

8. **Param5**: Vector con los parámetros cinemáticos teóricos del robot, según el modelo Denavit-Hartenberg. Para el robot que se usa en este trabajo, estos parámetros se pueden ver en la Tabla 4.7, en la columna de parámetros nominales.
9. **ShowFigure**: Variable lógica, que indica si se deben mostrar los gráficos o no, donde se muestran los puntos generados.

Estas variables de entrada, en el caso de la prueba que se verá según la Tabla 5.4. Condiciones de partida para la calibración usando un Láser Tracker, tienen los siguientes valores de entrada, según se muestran en la Tabla 5.2.

Variable	Articulaciones																			
	1	2	3	4	5	6														
Initpos	15	0	0	0	0	0	Posición inicial del robot - vector con ángulo inicial de cada articulación													
Angcir	45	80	100	50	200	300	Ángulo de giro que cubrirá cada articulación													
Nptos	15	20	30	15	25	30	Número de puntos que se generarán en cada círculo													
Incertidumbre de Medida (Ruidomed)	A(μm)		B(μm/m)				Incertidumbre de medida debida al instrumento de medida ±(A+BL)													
	10	2,5																		
Robot $M_{LT}$	SRLT						Matriz de transformación del Sistema de Referencia del robot al sistema de referencia del instrumento de medición (Láser Tracker)													
	0,0066	0,99995	0,00651	1866,9489																
	-0,99992	0,00666	-0,01008	5,0186																
	-0,01013	-0,00645	0,99992	625,5015																
	0	0	0	1																
Preflector	Artic.			X	Y	Z	Posición del reflector por articulación: Matriz 6x3 con las coordenadas XY Z de la posición del reflector del LT (en posición inicial) expresadas en el SR de cada articulación													
	1	100	0	0																
	2	200	0	0																
	3	0	50	0																
	4	20	0	0																
	5	0	80	0																
	6	0	60	0																
Err	0	0	0	0	0	0	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	6,2832	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	dx	dy	dz	Ex	Ey	T1	T2	T3	T4	T5	f1	f2	f3	f4	f5	R1	R2	R3	R4	R5
Param5	Matriz 6x20 con los errores de giro a inducir en cada una de las articulaciones																			
	335	0	75	90	0															
	0	0	270	0	0															
	0	90	90	90	0															
	295	0	0	90	0															
	0	180	0	90	0															
	80	0	0	0	0															
	Matriz con los parámetros DH nominales del robot (d, theta, a, alfa, beta)																			

Tabla 5.2. Parámetros de entrada para generar los puntos sintéticos, según la prueba de la Tabla 5.4.

Para definir y tratar de explicar el funcionamiento de cada uno de los algoritmos que se van a presentar, tanto en este apartado como en los subsiguientes, se ha optado por presentar la función en su formato de pseudocódigo. El pseudocódigo es un lenguaje de descripción de algoritmos, que está pensado para la lectura humana de forma sencilla. Aunque no existe una sintaxis estándar para el pseudocódigo, existen diversos trabajos que han tratado de estandarizar este lenguaje [155][156]. Aquí se usa un pseudocódigo no estándar, que únicamente pretende facilitar la comprensión del algoritmo presentado en cada sección. De esta forma, el pseudocódigo de esta función es el siguiente:

*Inicializa variables*

*Para cada articulación i desde 1 a 6*

*Toma el valor inicial del ángulo (Initpos<sub>i</sub>)*

*Calcula incremento del ángulo para generar el círculo en articulación i*

*Para cada punto j espaciado un ángulo Incremento\_Ángulo<sub>i</sub>*

*Calcula los errores, según la matriz de errores Err (parámetro entrada)*

*Calcula la matriz de giro GZ<sub>i</sub> para ese punto considerando los errores // Ver apartado 5.2.1, Figura 5.6, y ver ecuación (5—4)*

*Calcula el punto del círculo con errores*

*Calcula la matriz de cambio M desde el origen del robot a la articulación actual*

*Cambia el punto según matriz de cambio M y según matriz de cambio SRLT*

*Añade ruido aleatorio debido al instrumento de medida*

*Guarda ruido en Randomnoise*

*Guarda el punto con y sin ruido debido al instrumento de medida*

*Fin Para*

*Guarda puntos del círculo de la articulación actual*

*Guarda la matriz de error  $GZ_i$  de la articulación actual  $i$ , según última/actual posición*

*Fin Para*

*Si ShowFigure*

*entonces → muestra la figura con los puntos – círculos*

*Fin Si*

*Salida ← Puntos generados sintéticamente*

## 5.2.2 Coordenadas Plücker y cálculo de los parámetros cinemáticos

Una vez generados los puntos (como muestra la Figura 5.8) en función de los parámetros de entrada especificados y, en este caso, en los parámetros nominales del modelo de robot es posible completar los cálculos del método CPA. A partir de los puntos medidos, el método CPA determina la dirección del eje de cada articulación como dirección normal del plano que se ajusta de mejor forma, y el método CPA define este eje calculando un punto que pertenece al eje de la articulación. Este punto se define como el centro de la circunferencia que mejor se ajusta a los puntos proyectados en el plano calculado.

Esta es la información básica que utiliza el método para analizar un par de ejes adyacentes en la posición final del robot y obtener los parámetros que describen la transformación geométrica entre ellos. Este método tiene la característica de poder clasificar esta información geométrica y expresar cada eje de la articulación en términos de coordenadas de Plücker, lo que simplifica la evaluación algebraica de la posición relativa del eje adyacente y permite un método sencillo para seleccionar los parámetros relativos a dicha posición. En esta fase del procedimiento de evaluación, tanto el plano como los círculos que corresponden a cada articulación se consiguen determinar, lo que permite definir las coordenadas de Plücker de cada eje de articulación. Hay que tener en cuenta que la esa dirección del eje debe coincidir con la dirección del eje Z del modelo nominal. Por lo tanto, esta coincidencia se tiene que verificar y el cálculo se debe adaptar al modelo definido. La Figura 5.8 muestra los ejes determinados para los datos sintéticos generados anteriormente para para los parámetros iniciales considerados en la Tabla 5.1, donde los puntos medidos y las circunferencias de los ejes se han trazado a partir de la proyección de los puntos en sus respectivos planos de mejor ajuste.

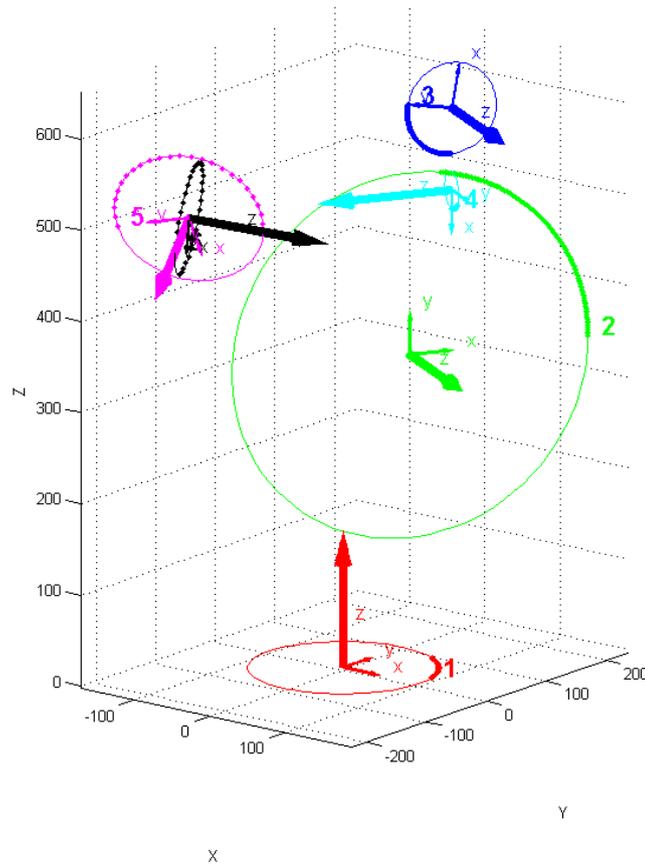


Figura 5.8. Cálculos de los ejes de las articulaciones usando el método CPA según los datos de entrada de la Tabla 5.1. Fuente: elaboración propia

Una vez calculadas las coordenadas de Plücker, los parámetros cinemáticos del modelo del robot se obtienen mediante el método CPA. En la Tabla 5.3 se muestran los resultados obtenidos para los dos casos de generación mostrados en la Figura 5.8, así como una comparación con los parámetros nominales del modelo del robot utilizados para generar los puntos sintéticos, lo que constituye una validación del algoritmo.

	Parámetros NOMINALES						Parámetros cálculo CPA					
	Articulaciones						Articulaciones					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
$d_i$ (mm)	335	0	0	295	0	80	335	0	$1,21 \cdot 10^{-13}$	295	$-6,10 \cdot 10^{-13}$	80
$\theta_i$ (°)	0	0	90	0	180	0	$2,13 \cdot 10^{-14}$	$-2,84 \cdot 10^{-14}$	90	$7,11 \cdot 10^{-15}$	180	0
$a_i$ (mm)	75	270	90	0	0	0	75	270	90	0	0	0
$\alpha_i$ (°)	90	0	90	90	90	0	90	$-9,51 \cdot 10^{-15}$	90	90	90	0
$\beta_i$ (°)		0						$5,16 \cdot 10^{-15}$				

Tabla 5.3. Parámetros cinemáticos obtenidos usando el método *Circle Point Analysis* (CPA) con los datos muestra de la Figura 5.8 generado con parámetros nominales.

5.2.2.1 Algoritmo matemático para el cálculo de coordenadas Plücker

Este algoritmo es el que corresponde a la función que calcula las coordenadas *Plücker* correspondientes a los seis ejes del robot, bien sea con los datos de entrada obtenidos de una Generación de Puntos completa del robot según el método del CPA, o bien sea con los datos de las lecturas tomadas con un instrumento de medición (por ejemplo, un *Láser Tracker*) de los puntos de cada articulación del robot. Esta función permite asimismo detectar automáticamente si las normales obtenidas están o no en la misma dirección que los ejes Z del robot. Este algoritmo es que viene resaltado en la Figura 5.9, dentro del proceso del diagrama de flujo del método de cálculo de la incertidumbre de la calibración cinemática.

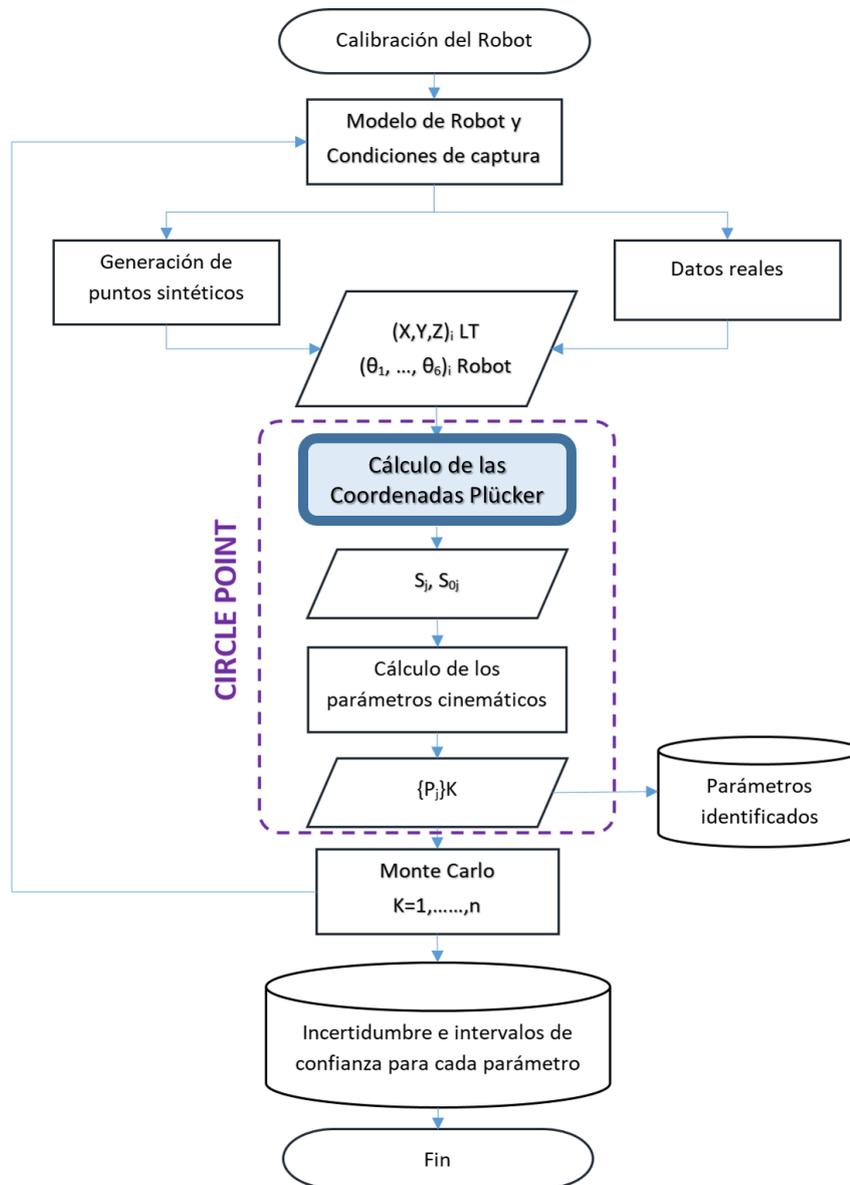


Figura 5.9. Diagrama de flujo del algoritmo - Cálculo de las Coordenadas Plücker.  
Fuente: propia

En esta función los parámetros de entrada son principalmente los puntos tomados según el método CPA, bien sean con datos sintéticos o con datos reales, así como otros parámetros de entrada, como los números de puntos en cada círculo por articulación ( $N_{ptos}$ ), los parámetros nominales del Robot según el modelo Denavit-Hartenberg, y la matriz de transformación homogénea que pasa del sistema de referencia global del robot al sistema de referencia del sistema de medición empleado. Como parámetros de salida principal se tendrán los pares de vectores  $(\vec{S}_j, \vec{S}_{0j})$ , que son los vectores de las coordenadas Plücker de cada uno de los ejes del robot.

El pseudocódigo de este algoritmo se muestra a continuación:

*Inicializa variables*

*Para cada articulación i desde 1 a 6*

*Obtiene el plano y círculo que mejor se ajusta a los puntos*

*Guarda los valores obtenidos ( $S_i, r_i, rn_i, P\_Circulos, distancias, sigmas$ )*

*Fin para*

*Comprueba si normal eje Z calculado ( $S_i$ ) coincide con normal SRLT*

*Si normal es diferente → entonces*

*cambia sentido a  $S_i$*

*Fin si*

*Guarda coordenadas Plücker y  $S_{0i}$*

*Si tiene que mostrar alguna gráfica*

*Para cada articulación i desde 1 a 6*

*Si ShPoints → muestra los puntos del círculo y el número de articulación*

*Proyecta el punto 1 del círculo en el plano XY de la articulación*

*Para cada punto m desde 1 hasta  $N_{ptos}(i)$*

*Obtiene PProy = proyección del punto sobre el plano normal a  $S_i$*

*Calcula distancia axial (excentricidad) del punto al plano – punto proyectado*

*Calcula distancia radial (excentricidad) del punto proyectado a la circunferencia*

*Fin Para*

*Si ShEx → Muestra gráfico excentricidad, y las excentricidades radial y axial*

*Si (ShBestfitCircles OR ShrefS) → entonces*

*Calcula los puntos del círculo ajustado XYZ con el radio obtenido*

*Calcula la matriz de giro MG del SR\_ articulación al SRLT*

*Gira los puntos XYZ que forman el círculo con esta matriz MG*

*Si ShBestfitCircles → representa el círculo*

*Si ShNormals → Representa las normales con dirección*

*Si (ShrefS y es articulación 1) → Pinta los sistemas de referencia, guarda SR0*

*Fin para*

*Y si no tiene que mostrar ninguna gráfica*

*Calcula SRO*

*Fin Si*

*Si Shrefs → Muestra la imagen de los ejes del robot*

*Salida ← Coordenadas Plücker ( $S_j, S_{oj}$ )*

### **5.2.2.2 Algoritmo matemático para el cálculo de los parámetros cinemáticos**

Este algoritmo se corresponde a la función que realiza el cálculo de los parámetros reales del modelo del robot, a partir principalmente de la información entregada con las coordenadas Plücker para cada articulación, que definen los ejes de cada una de ellas. Esta función, aplicando la metodología definida según el método del *Circle Point*, identifica los parámetros del modelo, y devuelve estos parámetros en una variable de salida del algoritmo ( $P_j$ ). Este algoritmo es que viene resaltado en la Figura 5.10, dentro del proceso del diagrama de flujo del método de cálculo de la incertidumbre de la calibración cinemática.

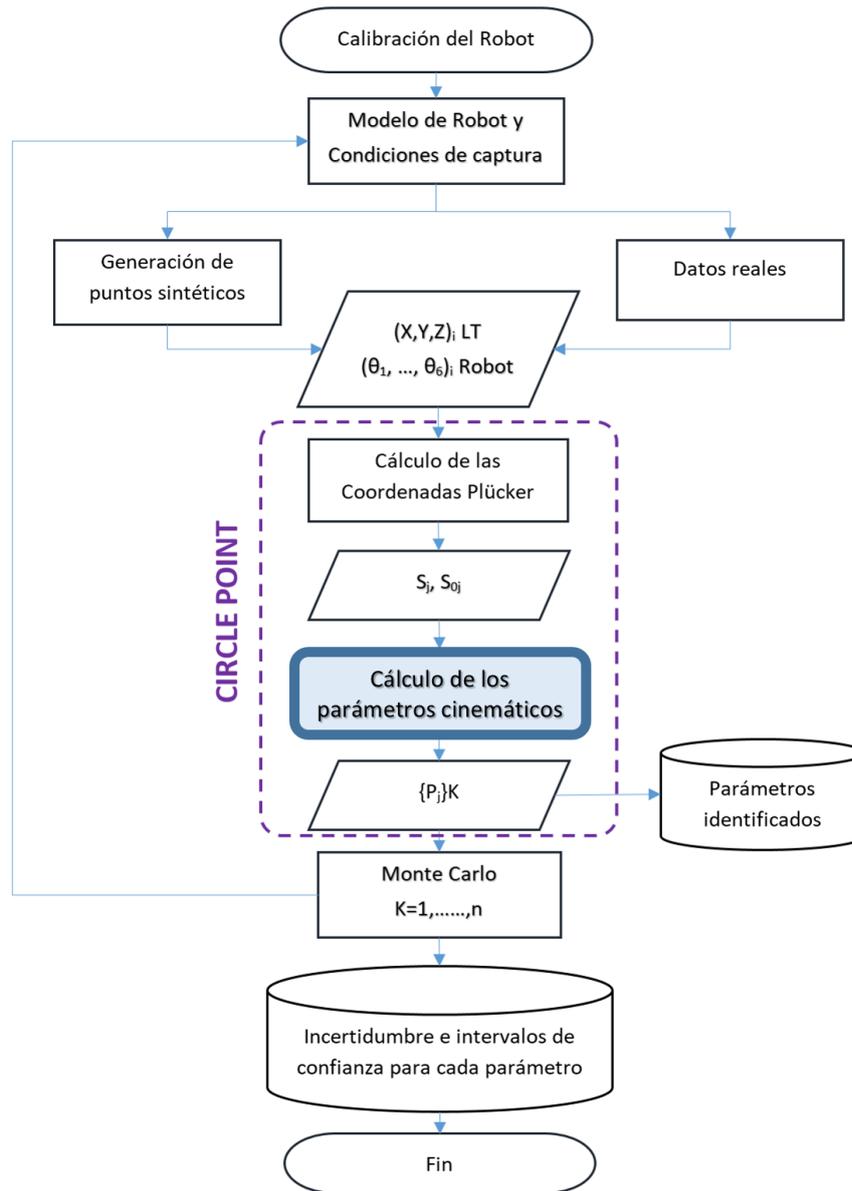


Figura 5.10. Diagrama de flujo del algoritmo - Cálculo de parámetros cinemáticos.  
Fuente: propia

En esta función los parámetros de entrada principales son los puntos tomados por el algoritmo anterior visto en el apartado 5.2.2.1, esto es, los pares de vectores  $(\vec{S}_j, \vec{S}_{0j})$ , que son los vectores de las coordenadas Plücker de cada uno de los ejes del robot que según el método *Circle Point*. Como parámetro de salida principal se tendrán los parámetros calculados de calibración cinemática del robot según el modelo D-H.

El pseudocódigo de este algoritmo se muestra a continuación:

Inicializa variables

Para cada articulación  $j$  desde 1 a 5

Toma  $S_j, S_{0j}, S_k, S_{0k}$  de las coordenadas Plücker,  $\cos(\alpha_{jk})$ , calcula matriz  $M$ , Mant

$$\cos(\alpha_{jk}) = S_j \cdot S_k$$

Si  $\cos(\alpha_{jk}) = +1$  ó  $-1$

//EJES PARALELOS

$$a_{jk} = S_j \cdot (\cos(\alpha_{jk}) \cdot S_{0k} - S_{0j}) \quad // \text{ Ver ecuación (4-82)}$$

$$\alpha_{jk} = \arccos(S_j \cdot S_k) \quad // \text{ Ver ecuación (4-83)}$$

Fin si

Si  $\cos(\alpha_{jk}) \approx -1$  ó  $+1$

//EJES CASI PARALELOS: Se soluciona según Solución 3 del método Circle Point.

Obtener puntos de intersección  $P_n$  y  $P_p$

$$P_n = P_{p\_prev} + d_j \cdot S_j \quad // \text{ Ver ecuación (4-60)}$$

$$P_p = (S_j \times S_{0k} + (P_n \cdot S_j) \cdot S_k) / (S_j \cdot S_k) \quad // \text{ Ver ecuación (4-64)}$$

$$S_{kp} = S_k - (S_k \cdot a_{jk}) \cdot a_{jk} \quad // \text{ Ver ecuación (4-76)}$$

$$\cos \beta_{jk} = \sqrt{1 - (\overline{S_k} \cdot \overline{a_{jk}^{nom}})^2} \quad // \text{ Ver ecuación (4-79)}$$

$$\cos(\alpha'_{jk}) = (S_{kp} / |S_{kp}|) \cdot S_j \quad // \text{ Ver ecuación (4-80)}$$

$$\sin(\alpha'_{jk}) = ((S_j \times S_{kp}) / |S_{kp}|) \cdot a_{jk} \quad // \text{ Ver ecuación (4-81)}$$

$$\alpha_{jk} = \arctan(\sin(\alpha'_{jk}) / \cos(\alpha'_{jk})) \quad // \text{ Ver ecuación (4-87)}$$

y si no

//EJES NO PARALELOS – Hay que calcular el momento mutuo

$$MM = S_j \cdot S_{0k} + S_k \cdot S_{0j} \quad // \text{ Ver ecuación (4-22)}$$

Si  $MM = 0$

//  $MM = 0 \rightarrow$  Las líneas se cortan  $\Rightarrow P_n = P_p$

$$a_{jk} = 0$$

$$\overline{a_{jk}} = (S_j \times S_k) / |S_j \times S_k| \quad // \text{ Ver ecuación (4-26)}$$

$$P_n = P_p = (S_{0j} \times S_{0k}) / (S_k \cdot S_{0j}) \quad // \text{ Ver ecuación (4-44)}$$

$$\sin(\alpha_{jk}) = |S_j \times S_k| \quad // \text{ Ver ecuación (4-13)}$$

$$\alpha_{jk} = \arctan(\sin(\alpha'_{jk}) / \cos(\alpha'_{jk})) \quad // \text{ Ver ecuación (4-87)}$$

y si no

//  $MM < > 0 \rightarrow$  Las líneas son oblicuas

$$\overline{a_{jk}} = -\text{signo}(MM) \cdot ((S_j \times S_k) / |S_j \times S_k|) \quad // \text{ Ver ecuación (4-27)}$$

// Comprueba que la dirección de  $\overline{a_{jk}}$  coincide con la dirección del

// eje X nominal del modelo. Se calcula ese ángulo phi

$$\cos(\phi) = Mx \cdot \overline{a_{jk}}$$

Si  $(\cos(\phi) < 0) \rightarrow$  entonces

Cambia sentido  $\overline{a_{jk}}$ , cambia sentido  $MM$ , cambia signo  $a_{jk}$

Fin si

$$P_n = (((a_{jk} \times S_k) \times S_{0j}) - (S_{0k} \cdot a_{jk}) \cdot S_j) / ((a_{jk} \times S_k) \cdot S_j) \quad // \text{ Ver ecuación (4-35)}$$

```

Pp= (((ajk x Sj) x Sok) - (Soj · ajk) * Sk) / ((ajk x Sj) · Sk) // Ver ecuación (4—36)
ajk = |Pp - Pn| * ajk_signo // Ver ecuación (4—23)
Sen(αjk) = ajk · (Sj x Sk) // Ver ecuación (4—13)
αjk = arc tan(sen(α'jk)/cos(α'jk)) // Ver ecuación (4—87)
Fin si
Fin si

Si j=1
// Para la primera articulación el cálculo es algo distinto
dj(1)=Distancia euclídea desde Pn(1) hasta Origen_robot
Si ShowFigure → muestra los vectores ajkprev, ajkactual, Sj, (ajkprev x ajkact)
Calcula θ1 con respecto al eje X (1 0 0) del SRO
Y si no
// Para el resto de articulaciones
dj(j)=Distancia euclídea desde Pn(j) hasta Pp(j-1) // Ver ecuación (4—91)
Si ShowFigure → muestra los vectores ajkprev, ajkactual, Sj, (ajkprev x ajkact)
Calcula θj // Ver ecuaciones (4—92),(4—93) y (4—94)
Fin si
Ajusta el ángulo αjk, para que coincida con el ángulo del eje Xi (matriz M)
Fin para (cada articulación j desde 1 a 5)

Ajusta ángulo θ según los ángulos finales Angfin que se tienen
Asigna parámetros al último sistema de referencia (j=6)
Salida ← Parámetros cinemáticos en variable P

```

### 5.2.3 Evaluación de la incertidumbre e intervalos de confianza de los parámetros

Para evaluar la incertidumbre de calibración de las variables de entrada consideradas, deben definirse para cada situación las variables relacionadas con la configuración del test de captura de datos. Algunas de estas variables no influirán en la determinación de los valores de salida de los parámetros, pero afectarán a la incertidumbre final porque afectan a la precisión durante las distintas etapas de los cálculos de los parámetros calibrados, en función de la forma en que se realice la prueba de captura. El diagrama de flujo de la evaluación de la incertidumbre para el método Monte Carlo se muestra en la Figura 5.2. Al definir un número de iteraciones con este método, se determinan los posibles valores de las variables de salida. En el caso de los parámetros del modelo cinemático del robot, las variables de entrada sufrieron variaciones en función de sus distribuciones de probabilidad. A partir de la distribución obtenida para cada parámetro, es posible

obtener una estimación del valor medio de la distribución  $X$ , y su incertidumbre típica, lo cual se describe como la desviación típica de la distribución. Además, se obtiene un intervalo de confianza del 95% para cada parámetro de la distribución resultante.

Una vez definidas las condiciones de prueba, las coordenadas del punto medido cambian en función de la incertidumbre del dispositivo de medición que se considere. Esta incertidumbre se aplica a cada una de las coordenadas  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  de cada punto de forma independiente y depende del valor de las coordenadas. Las coordenadas tienen un valor aleatorio en el intervalo  $\pm(A+BL)$ , definido por la incertidumbre del sistema de medición, donde  $A$  está en  $\mu m$ ,  $B$  está en  $\mu m/m$  y  $L$  está en  $m$ . Por lo tanto, la incertidumbre del sistema de medición se refleja directamente en las coordenadas medidas por el equipo.

Este método de evaluación de la incertidumbre de calibración da un resultado para una medición específica bajo unas condiciones específicas y, por lo tanto, para datos de prueba específicos capturados para la calibración mediante CPA. En la Figura 5.11 y Figura 5.12 se muestran dos casos de identificación de las incertidumbres de los parámetros del modelo cinemático utilizando dos sistemas de medición diferentes, que son en este caso un Láser Tracker (FARO Láser Tracker ION<sup>®</sup>™)[157], cuyos datos de entrada para la simulación se pueden ver en la Tabla 5.4, y un Indoor GPS (iGPS, [158]), cuyos datos de partida se muestran en la Tabla 5.5. Estas figuras muestran la distribución de cada parámetro obtenida de acuerdo a las distintas posibilidades de los parámetros cinemáticos por articulación, definidas por los intervalos de variación de las variables de entrada.

	A( $\mu m$ )	B( $\mu m/m$ )		
<i>Incertidumbre de Medida</i>	10	2,5	Incertidumbre de medida debida al instrumento de medida $\pm(A+BL)$	
<i>Robot</i> $M_{LT}$	0,0066	0,99995	0,00651	1866,949
	-0,99992	0,00666	-0,01008	5,0186
	-0,01013	-0,00645	0,99992	625,5015
	0	0	0	1

Matriz de transformación del Sistema de Referencia del robot al sistema de referencia del instrumento de medición (Láser Tracker)

Tabla 5.4. Condiciones de partida para la calibración usando un Láser Tracker

	A( $\mu m$ )	B( $\mu m/m$ )		
<i>Incertidumbre de Medida</i>	200	0	Incertidumbre de medida debida al instrumento de medida $\pm(A+BL)$	
<i>Robot</i> $M_{iGPS}$	0,0066	0,99995	0,00651	1866,949
	-0,99992	0,00666	-0,01008	5,0186
	-0,01013	-0,00645	0,99992	625,5015
	0	0	0	1

Matriz de transformación del Sistema de Referencia del robot al sistema de referencia del instrumento de medición (iGPS)

Tabla 5.5. Condiciones de partida para la calibración usando un iGPS

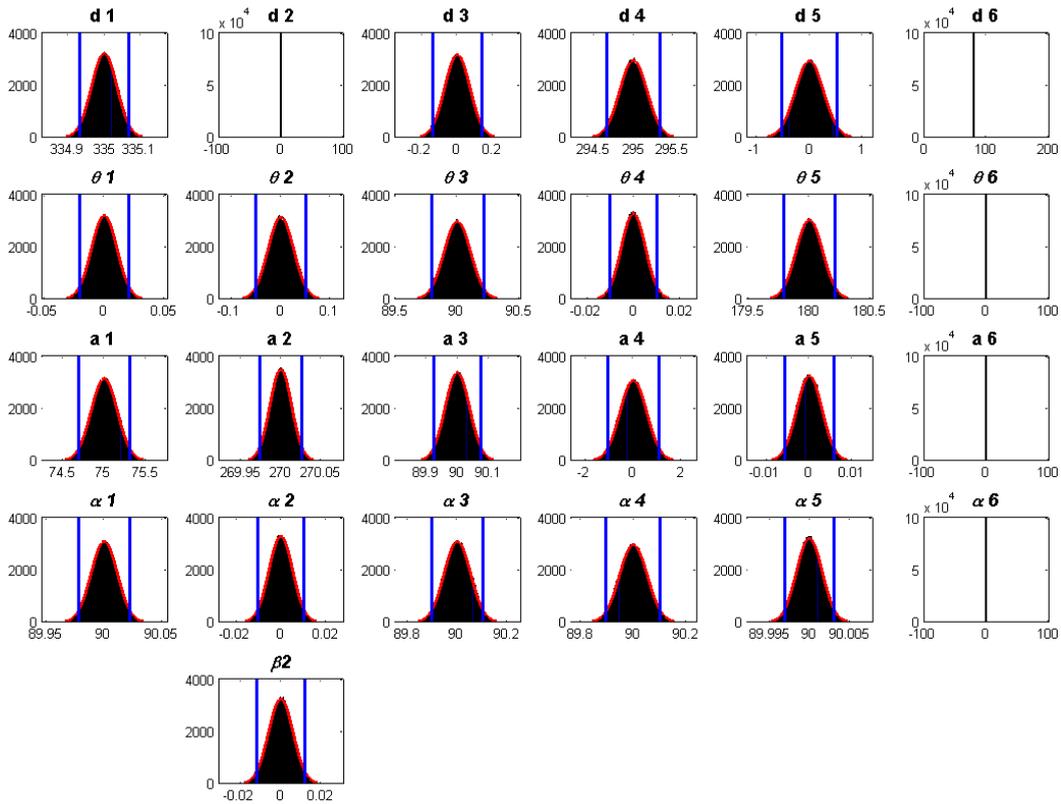


Figura 5.11. Distribución de los parámetros cinemáticos e intervalos de confianza, usando el método CPA, para el caso de un Láser Tracker Faro ION<sup>™</sup>. Fuente: elaboración propia

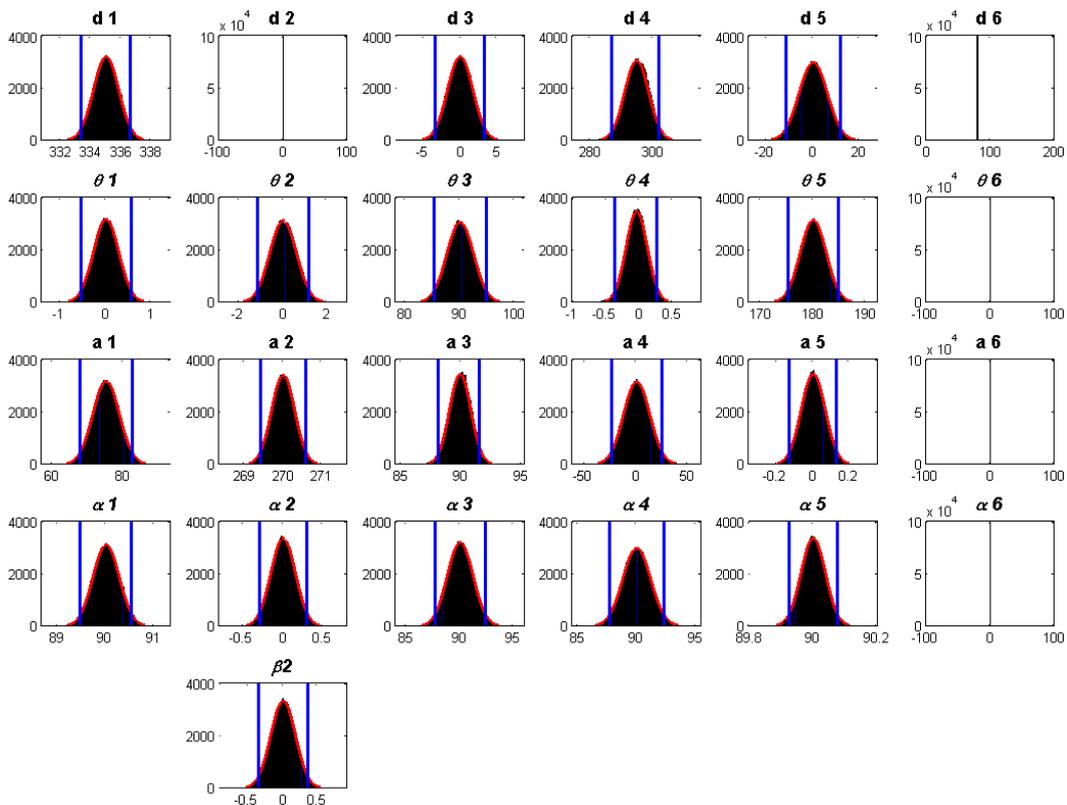


Figura 5.12. Distribución de los parámetros cinemáticos e intervalos de confianza, usando el método CPA, para el caso de un iGPS. Fuente: elaboración propia.

Cabe señalar que el método CPA original no determina los parámetros cinemáticos del marco de referencia base, ni de los sistemas de referencia, ya que sólo pueden localizarse en el espacio los ejes de las articulaciones en las que se produce el movimiento. La posición del sistema de referencia global en este caso se determina por mínimos cuadrados según el método explicado en el apartado 4.4. El último sistema de referencia de la cadena cinemática coincide con el sistema de referencia anterior en la posición inicial del modelo. Por tanto, los parámetros de la articulación 6 no cambian durante la simulación. Por otra parte, el parámetro  $d_2$  es cero en cualquier caso, ya que esta articulación se utiliza el modelo Hayati-Mirmirani. Por tanto, el valor de  $d_2$  se fuerza a cero y la transformación de la traslación en esta articulación se realiza mediante el parámetro  $a_2$ . Ambos parámetros de entrada modificados relacionados con los valores iniciales se muestran en la Tabla 5.1. Los resultados numéricos relativos a la incertidumbre, las desviaciones estándar individuales y los parámetros de desviación (*offset*) obtenidos con los parámetros nominales de generación se muestran en la Tabla 5.6 y Tabla 5.7.

	d1	d2	d3	d4	d5	d6	thita 1	thita 2	thita 3	thita 4	thita 5	thita 6
Media	334.9999	0	2.1992e-04	294.9996	-3.3398e-04	80	9.7505e-06	-1.1264e-04	90.0000	-8.9277e-05	180.0000	0
Incertidumbre	0.0351	0	0.0714	0.1698	0.2646	0	0.0106	0.0258	0.1080	0.0052	0.1080	0
Lim.Sup	335.0680	0	0.1387	295.3299	0.5143	80	0.0205	0.0499	90.2113	0.0100	180.2102	0
Lim.Inf	334.9315	0	-0.1398	294.6679	-0.5186	80	-0.0207	-0.0501	89.7895	-0.0102	179.7889	0
Maximo	335.1442	0	0.2766	295.6528	0.9811	80	0.0421	0.1012	90.4235	0.0224	180.4022	0
Minimo	334.8576	0	-0.2977	294.3806	-0.9846	80	-0.0435	-0.1046	89.6100	-0.0203	179.5721	0

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	alfa 1	alfa 2	alfa3	alfa 4	alfa 5	alfa 6
Media	75.0010	269.9999	89.9999	4.8620e-05	4.9012e-06	0	90.0000	-1.3111e-05	90.0001	89.9999	90.0000	0
Incertidumbre	0.1556	0.0135	0.0386	0.5519	0.0029	0	0.0112	0.0053	0.0522	0.0519	0.0016	0
Lim.Sup	75.3024	270.0263	90.0746	1.0737	0.0058	0	90.0217	0.0103	90.1014	90.1008	90.0031	0
Lim.Inf	74.6979	269.9735	89.9241	-1.0776	-0.0057	0	89.9782	-0.0104	89.8962	89.8984	89.9969	0
Maximo	75.6238	270.0647	90.1661	2.1280	0.0119	0	90.0448	0.0210	90.2020	90.1936	90.0065	0
Minimo	74.3806	269.9451	89.8357	-2.1666	-0.0121	0	89.9568	-0.0232	89.7923	89.8042	89.9936	0

	beta 1	beta 2	beta 3	beta 4	beta 5	beta 6
Media	0	-6.6229e-06	0	0	0	0
Incertidumbre	0	0.0062	0	0	0	0
Lim.Sup	0	0.0121	0	0	0	0
Lim.Inf	0	-0.0121	0	0	0	0
Maximo	0	0.0248	0	0	0	0
Minimo	0	-0.0262	0	0	0	0

Tabla 5.6. Incertidumbre de calibración e intervalo de confianza (Figura 5.) para las condiciones de calibración usando un Láser Tracker.

	d1	d2	d3	d4	d5	d6	thita 1	thita 2	thita 3	thita 4	thita 5	thita 6
Media	334.9838	0	-0.0820	294.7979	0.0040	80	3.1098e-04	-0.0030	90.0027	-0.0478	179.9974	0
Incertidumbre	0.8308	0	1.7290	3.8529	6.0458	0	0.2802	0.6137	2.4462	0.1619	2.4461	0
Lim.Sup	336.5580	0	3.2763	301.7374	11.8241	80	0.5436	1.1856	94.7818	0.2590	184.7419	0
Lim.Inf	333.3269	0	-3.4606	286.7699	-11.7601	80	-0.5501	-1.1931	85.2509	-0.3782	175.2184	0
Maximo	336.1888	0	6.5707	307.2700	22.9856	80	1.0713	2.3964	99.8760	0.5580	189.3335	0
Minimo	331.4509	0	-7.4472	277.5207	-22.5369	80	-1.1836	-2.4502	80.9028	-0.8627	169.8510	0

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	alfa 1	alfa 2	alfa3	alfa 4	alfa 5	alfa 6
Media	75.0295	269.9986	89.8839	0.0209	1.5472e-04	0	90.0008	-3.1092e-04	89.9994	89.9977	89.9999	0
Incertidumbre	3.7393	0.2973	0.8806	12.6076	0.0661	0	0.2686	0.1551	1.1870	1.1745	0.0381	0
Lim.Sup	82.3105	270.5792	91.4866	24.5903	0.1293	0	90.5203	0.3026	92.3008	92.2865	90.0743	0
Lim.Inf	67.7839	269.4189	88.0535	-24.4887	-0.1293	0	89.4772	-0.3027	87.6784	87.7062	89.9246	0
Maximo	90.2032	271.3748	93.0977	49.2358	0.2823	0	91.1012	0.6719	94.6464	94.3582	90.1571	0
Minimo	60.0577	268.8012	85.4102	-51.7325	-0.2956	0	88.9794	-0.6461	85.0319	85.4674	89.8319	0

	beta 1	beta 2	beta 3	beta 4	beta 5	beta 6
Media	0	-5.7402e-05	0	0	0	0
Incertidumbre	0	0.1814	0	0	0	0
Lim.Sup	0	0.3566	0	0	0	0
Lim.Inf	0	-0.3547	0	0	0	0
Maximo	0	0.7536	0	0	0	0
Minimo	0	-0.7803	0	0	0	0

Tabla 5.7. Incertidumbre de calibración e intervalo de confianza (Figura 5.12) para las condiciones de calibración usando un iGPS.

Por tanto, una vez definidas las condiciones particulares del test, es posible saber, por medio de esta herramienta de estimación de la incertidumbre, cuáles serán las mejores condiciones de prueba para la captura de datos que darán como resultado una incertidumbre de calibración lo más baja posible en la identificación de parámetros del modelo cinemático, para un robot en particular.

### 5.2.3.1 Algoritmo matemático para el cálculo de la función iterativa del cálculo de incertidumbre de la calibración cinemática según el método Monte Carlo

En la Figura 5.13 se puede ver el diagrama de flujo del método de cálculo para la estimación de la incertidumbre de la calibración cinemática según el método Monte Carlo, y resaltado el bloque del flujograma en concreto que se describe en este apartado.

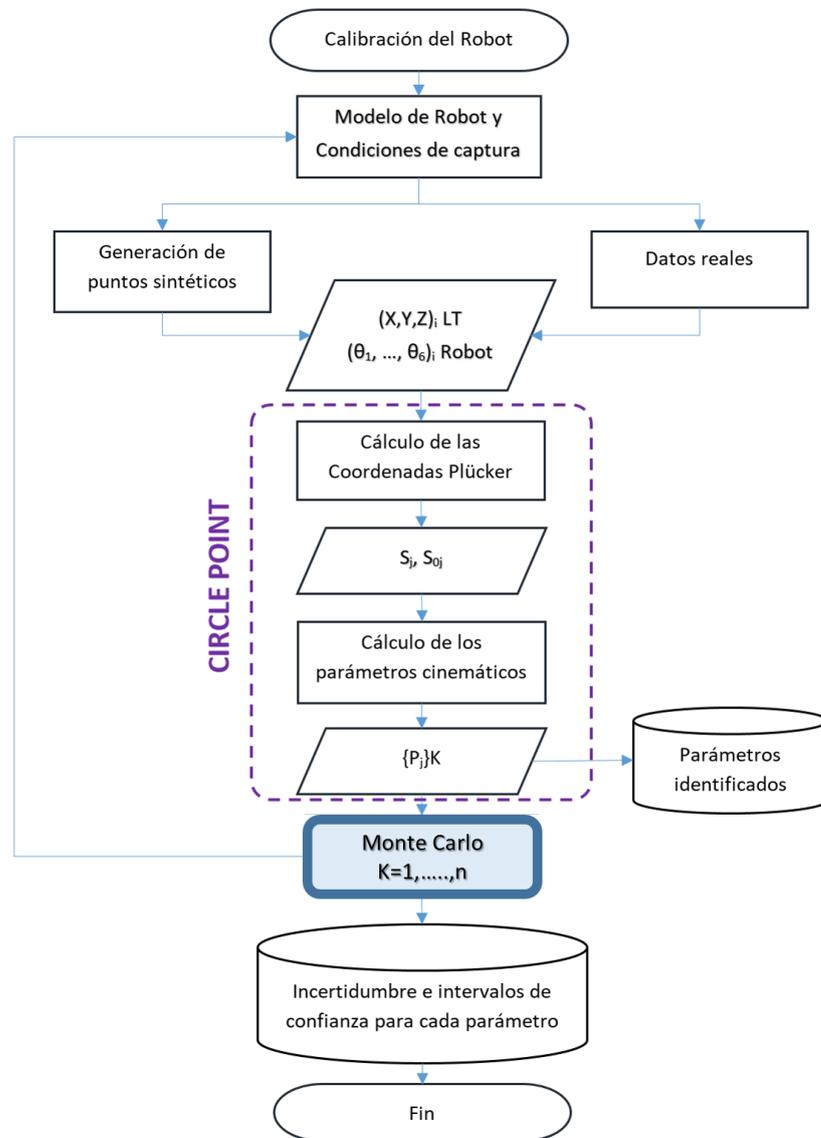


Figura 5.13. Diagrama de flujo del algoritmo - Cálculo de la incertidumbre según el método Monte Carlo. Fuente: propia

Este algoritmo es el que, con la definición de ciertos parámetros de entrada, como cantidad  $n$  de iteraciones y la incertidumbre del equipo de medida, va a realizar el proceso recursivo para el cálculo de los parámetros de calibración cinemática mediante *Circle Point* en cada iteración, permitiendo al final de este proceso recursivo el cálculo de la incertidumbre de la calibración cinemática, en base al total de  $n$  conjuntos de parámetros obtenidos.

El pseudocódigo de este algoritmo, donde se aplica el método Monte Carlo, es el siguiente:

*Inicializa variables*

*Para cada iteración n*

*Genera puntos Circle-Point* // Según apartado 5.2.1.1

*Calcula Coordenadas\_Plucker\_Ejes\_SIM* // Según apartado 5.2.2.1

*Calcula\_Parámetros\_KM* // Según apartado 5.2.2.2

*Guarda datos de parámetros*

*Fin Para*

*Obtiene datos de valor medio, incertidumbre, límite inferior y superior, valor máximo y mínimo*

*Guarda datos de salida*

*Muestra en pantalla datos de histograma de los parámetros D-H  $\rightarrow d, \theta, a, \alpha, \beta$*

*Muestra tabla de datos resumen*

*Muestra el tiempo empleado*

## 5.2.4 Evaluación de la influencia de los parámetros de entrada

Una vez se realicen la simulación de la calibración cinemática mediante el método Monte Carlo, realizando  $n$ -simulaciones, se obtendrán los parámetros cinemáticos  $n^{\text{ésimos}}$  que corresponden a cada una de dichas simulaciones. En el fondo, lo que se pretende es obtener un conjunto de parámetros cinemáticos  $n^{\text{ésimos}}$  para la simulación  $n^{\text{ésima}}$ , y una vez se hayan ejecutado las  $n$ -simulaciones, se obtendrán un conjunto de  $n$  parámetros cinemáticos, y será a partir de ese conjunto a partir del cual se podrá calcular la incertidumbre de la calibración cinemática. Estos parámetros cinemáticos, como se ha visto en el apartado 3.4.4, son  $a_i, \alpha_i, \theta_i$  y  $d_i$ , de forma y manera que tanto  $a_i$  como  $\alpha_i$  definen los parámetros del eslabón, mientras que  $\theta_i$  y  $d_i$  definen los parámetros de la articulación.

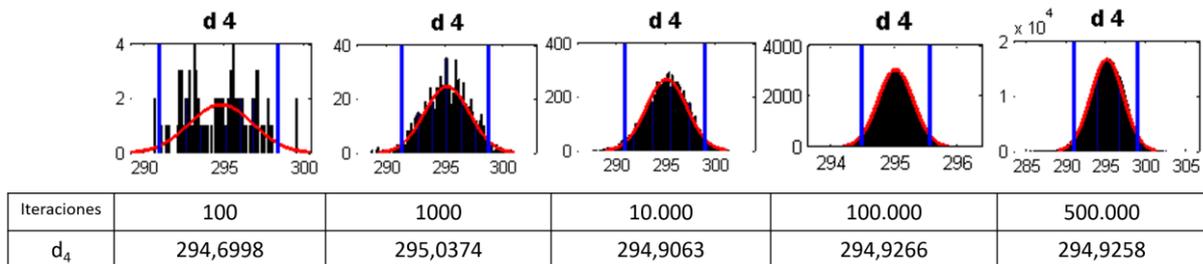
A partir de las pruebas realizadas, se muestran varios ejemplos de la influencia de los parámetros de entrada que son los siguientes: influencia de la variación del número de iteraciones, influencia del número de puntos capturados e influencia del ángulo cubierto de la articulación.

Para conseguir que las simulaciones sean comparables, la precisión de los datos obtenidos se calcula mediante el parámetro  $CpK$  (ver la ecuación (5-5)), la cual da lugar a una combinación única de la media y la incertidumbre.

$$CpK = \frac{\min(Lim_{sup} - \bar{x}, \bar{x} - Lim_{inf})}{3\sigma} \quad (5-5)$$

Los parámetros nominales del modelo se han utilizado como parámetros medios en esta evaluación, y un valor de 0,1 mm se ha definido como límite superior e inferior. Aunque este parámetro se utiliza normalmente para comprobar la estabilidad de los procesos de fabricación, en este caso es adecuado porque combina, en un solo parámetro, la media y la incertidumbre. Por lo tanto, se obtiene un valor comparable para los distintos parámetros y simulaciones considerados.

- a) Aunque esta es una herramienta offline, el número de iteraciones para obtener valores exactos de los parámetros de la simulación se ha de ajustar. Se ha comprobado experimentalmente en este caso que, al aumentar el número de iteraciones se consigue que la media de la distribución del valor del parámetro identificado se aproxima cada vez más al valor de generación utilizado, pero aumenta el tiempo computacional necesario (Figura 5.14). El número de iteraciones en las simulaciones se ha fijado en 100.000 porque las desviaciones en todos los casos son inferiores a 1  $\mu\text{m}$  para todos los parámetros.



$d_4$  Nominal = 295

Figura 5.14. Influencia del número de iteraciones Monte Carlo en el valor medio de la distribución, para el parámetro  $d_4$ . Fuente: elaboración propia.

- b) En segundo lugar, la Figura 5.15 muestra los resultados de la evaluación del ángulo de rotación obtenidos mediante la captura de datos de la articulación 4. A partir de los valores de partida de la Tabla 5.1, suponiendo que se utiliza un *Láser Tracker* como dispositivo de medición, y utilizando los datos de posición y de incertidumbre de medición y de la Tabla 5.4, se ha calculado un conjunto de parámetros y valores de incertidumbre para unos ángulos de rotación de 15°, 40°, 90° y 180°, cubiertos por las articulaciones durante la prueba de captura de datos.

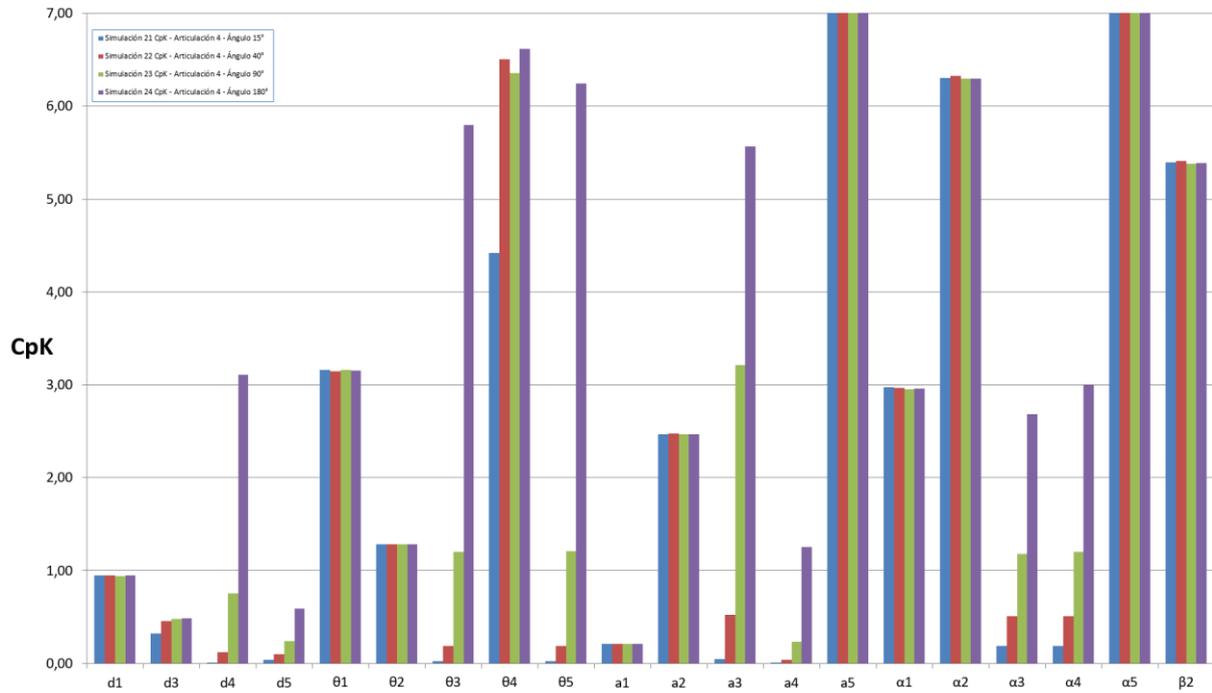


Figura 5.15. Evaluación de la identificación de parámetros e incertidumbre de calibración. Efecto del ángulo cubierto en la articulación 4 durante la captura de datos para la calibración con Láser Tracker. Fuente: elaboración propia.

La Figura 5.15 muestra el efecto de la variación del ángulo trazado por el reflector en la articulación 4 en los parámetros de la articulación, y la relación entre la articulación previa y la siguiente. Para los parámetros  $d4$ ,  $d5$ ,  $y3$ ,  $y5$ ,  $a3$ ,  $a4$ ,  $a3$ ,  $a4$ , y en menor grado,  $\theta4$ , se puede comprobar que un mayor ángulo del reflector da lugar a mayores valores de  $CpK$ . Esto era de esperar principalmente porque mayores ángulos del reflector darán como resultado una mayor precisión en el cálculo del eje de la articulación del mejor cálculo del plano, lo que reduce la incertidumbre de estos parámetros.

- c) En tercer lugar, la Figura 5.16 muestra los resultados de la evaluación de un número de puntos capturados en todas las articulaciones. En este caso, la incertidumbre de calibración de los parámetros del modelo cinemático se obtiene utilizando el mismo equipo de medición que se utilizó en el caso anterior y tomando 10, 40 y 100 puntos en cada articulación. Un mayor número de puntos capturados permite reducir los efectos de la incertidumbre del sistema de medición en el ajuste final de la circunferencia, lo que se traduce en una menor incertidumbre de calibración de todos los parámetros.

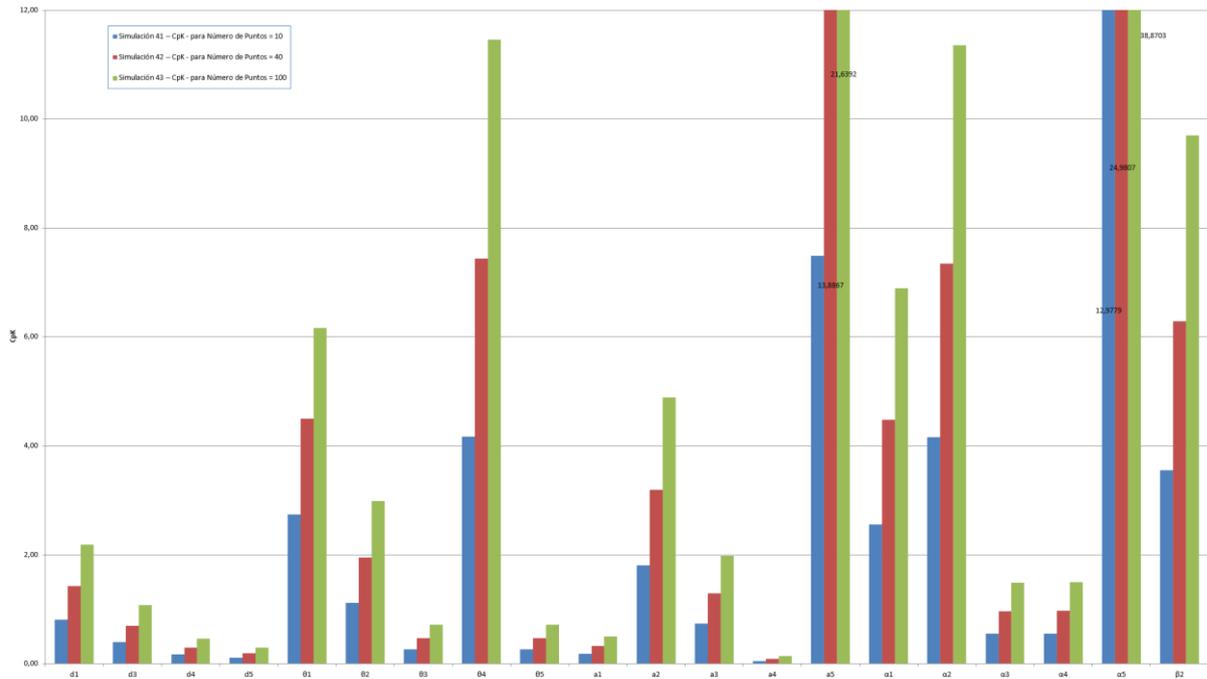


Figura 5.16. Evaluación de la identificación de parámetros e incertidumbre de calibración. Efecto del número de puntos capturados en todas las articulaciones durante la captura de datos para la calibración con Láser Tracker.

Fuente: elaboración propia.

### 5.3 Incertidumbre de posición y orientación a partir de la incertidumbre de calibración

Normalmente, una vez que se han identificado los parámetros y se ha realizado la calibración del robot, se comprueba la precisión de la posición del robot en las ubicaciones utilizadas tanto para la calibración como para la evaluación, lo que permite verificar los resultados y la capacidad de mantener la repetibilidad y la precisión obtenidos en la calibración en todo el espacio de trabajo del robot. Una vez calibrado, los errores medio o máximo de los parámetros para la posición y la orientación proporcionan una estimación aproximada del comportamiento global del robot. Opcionalmente, existen procedimientos estándar que introducen pruebas para comprobar el comportamiento del robot desde un punto de vista geométrico [1]. Sin embargo, estos test no evalúan la calibración, sino sólo el comportamiento del robot sin necesidad de conocer su modelo cinemático.

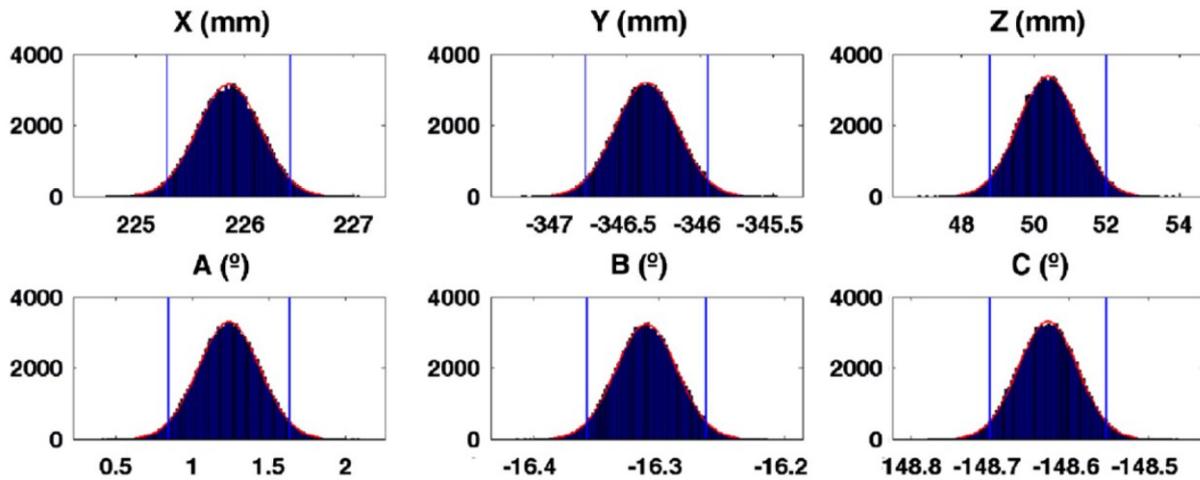


Figura 5.17. Incertidumbre de posición y orientación del Robot TCP (efector final) debido a la incertidumbre de calibración (posición del robot según Tabla 5.8). Fuente: elaboración propia.

La Figura 5.17 muestra los efectos de la incertidumbre de posicionamiento debida a la incertidumbre de calibración obtenida para la ubicación del robot que se muestra en la Figura 5.. Esta incertidumbre de posición y orientación se ha calculado para una posición ejemplo, teniendo los ángulos de las articulaciones definidos por los valores  $\theta_1=60^\circ$ ,  $\theta_2=68^\circ$ ,  $\theta_3=-45^\circ$ ,  $\theta_4=200^\circ$ ,  $\theta_5=125^\circ$ ,  $\theta_6=280^\circ$ . La incertidumbre de posición y orientación aparece en la figura para la posición final del robot o TCP del robot, en las posiciones consideradas por los ángulos de las articulaciones. Esta incertidumbre, tal y como se ha comentado anteriormente, dependerá de la posición del robot. Los datos numéricos de incertidumbre y los valores característicos de esta posición del robot son los que se muestran en la Tabla 5.8.

	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
<b>Posición del Robot</b>	60°	80°	-45°	200°	125°	280°

<b>Incertidumbre de Posición y Orientación del robot</b>						
	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	A (°)	B (°)	C (°)
Nominal	225,8555	-346,3662	50,3832	1,2386	-16,3098	-148,6273
Valor Medio	225,8536	-346,3642	50,3795	1,2375	-16,3098	-148,6270
Incertidumbre	0,2916	0,2139	0,8267	0,2028	0,0244	0,0377
Límite superior (95%)	226,4211	-345,9451	51,9982	1,6341	-16,2624	-148,5534
Límite inferior (95%)	225,2875	-346,7795	48,7765	0,8433	-16,3572	-148,6999
Máximo	227,0504	-345,4799	53,8733	2,0884	-16,2136	-148,4634
Mínimo	224,7193	-347,2127	46,8064	0,4007	-16,4133	-148,7785

Tabla 5.8. Incertidumbre de la posición del TCP Robot (efector final del robot) y de la orientación debido a la incertidumbre de calibración, para un posición definida.

Para una posición del robot en particular, es posible analizar el efecto de la incertidumbre de la calibración en la posición espacial del efector final o TCP. Para realizar este análisis, la Figura 5.18 y Figura 5.19 muestran todos los posibles valores obtenidos de orientación y posición, basados en el rango de posibles combinaciones de parámetros, y con la incertidumbre de calibración para el caso visto en la Tabla 5.4. En la Figura 5.18 se pueden ver los valores calculados para los parámetros de orientación y posición del efector final, para la posición ejemplo considerada dados por los ángulos de rotación de las articulaciones. La Figura 5.19 muestra todas las posibles posiciones del efector final basadas en la combinación de parámetros considerados en el caso de la calibración visto en la Tabla 5.4, y la posición ejemplo analizada. En estas figuras se puede ver cómo la incertidumbre de la calibración cinemática del robot se propaga a los posibles errores de posición debido a dicha incertidumbre.

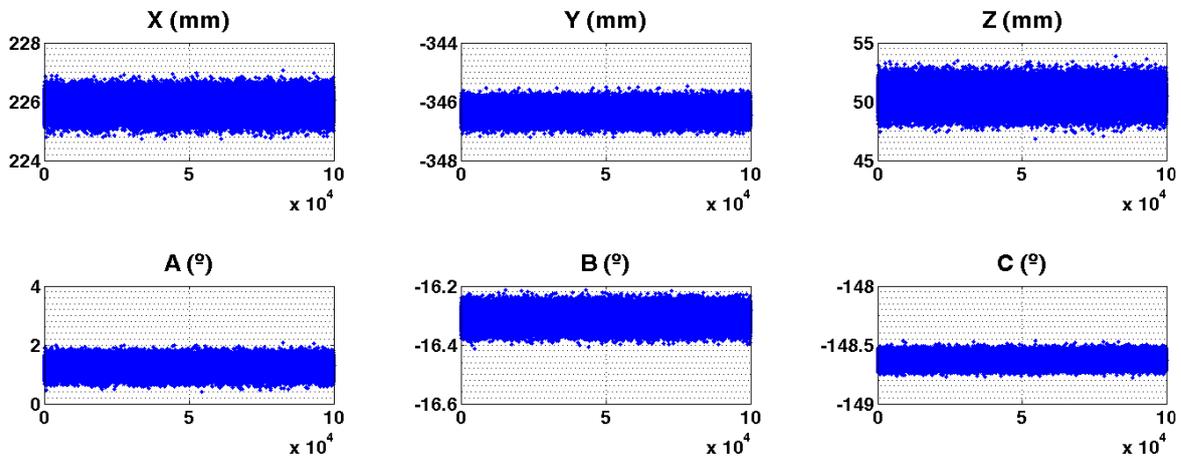


Figura 5.18. Incertidumbre de la posición y orientación del TCP del Robot debido a la incertidumbre de calibración. Posición tomada como ejemplo según Tabla 5.7. Fuente: elaboración propia.

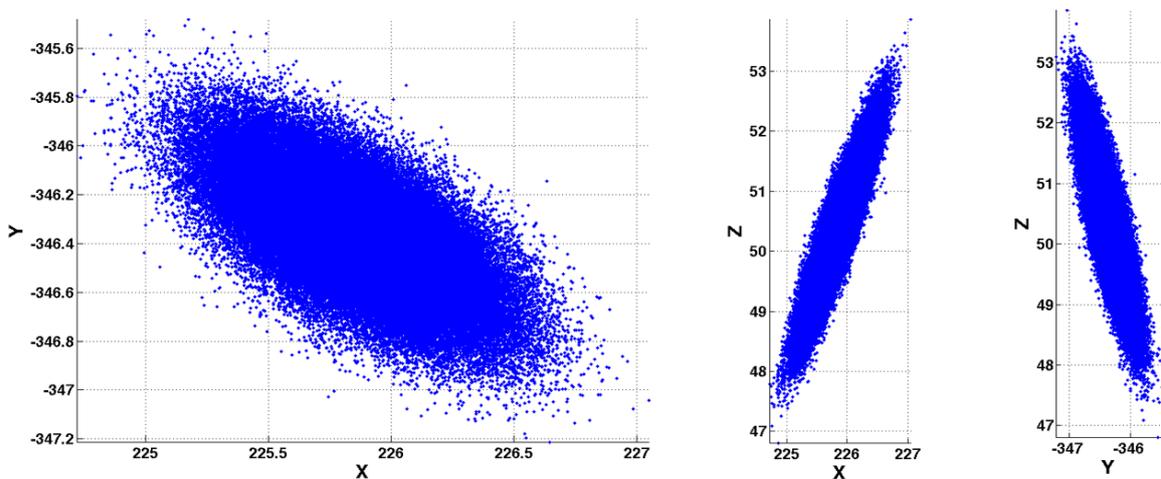


Figura 5.19. Distribución espacial de las posiciones del TCP del robot debido a la incertidumbre de calibración. Posición tomada como ejemplo según Tabla 5.7. Fuente: elaboración propia.

Asimismo, tal y como se puede observar en la Figura 5.19, la incertidumbre de la calibración genera una distribución de las posibles ubicaciones del efector final con diagramas en forma de elipsoide, observándose este comportamiento en todas las posiciones analizadas. Un análisis más profundo del modelo cinemático inverso del robot permite determinar las posibles configuraciones de las articulaciones que producen la misma posición del efector final. Para cada configuración posible, se produce una elipse similar debido a la incertidumbre de calibración. Dado que todas las configuraciones obtenidas con la cinemática inversa se relacionan con el mismo punto nominal en el espacio de trabajo del robot, es posible definir la región de incertidumbre mínima como la intersección de los elipsoides dados. De esta forma, es posible disponer de una herramienta que seleccione posibles combinaciones de parámetros que, dentro de la incertidumbre de calibración, produzcan una menor incertidumbre de posicionamiento en el espacio de trabajo global del robot.

La influencia en la precisión del robot que sigue una trayectoria puede comprobarse mediante la técnica de análisis de errores de posicionamiento. Teniendo en cuenta el caso analizado en la Tabla 5.4, la Figura 5.20 muestra una trayectoria de ejemplo realizada por el robot. Esta trayectoria se define utilizando 75 puntos. El análisis de la incertidumbre de la posición del efector final se ha realizado individualmente para cada punto, como en el caso anterior, para el punto de ejemplo. Para cada punto nominal definido por las posiciones de la articulación durante la trayectoria, se han verificado todas las combinaciones de parámetros cinemáticos obtenidas mediante la calibración cinemática. Esta figura muestra cada punto de la trayectoria nominal con un color que representa el máximo rango de distancias posibles en la posición del efector final debido a la incertidumbre de calibración, en cada una de las tres coordenadas X, Y, Z. Es posible por tanto realizar una comprobación visual de la incertidumbre del robot para una trayectoria de trabajo en particular y verificar si el posible error en un área específica de la trayectoria está dentro o fuera de la precisión de la trayectoria que se necesita para una tarea en particular. Por consiguiente, mediante este análisis, es posible cuantificar la precisión real del robot siguiendo una trayectoria basada en la incertidumbre de calibración.

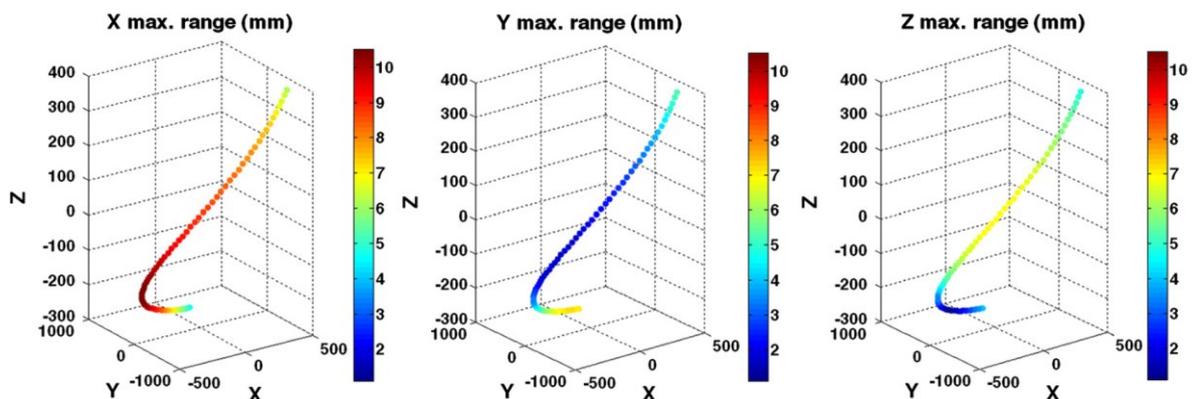


Figura 5.20. Incertidumbre de la posición y orientación del TCP del robot siguiendo una trayectoria. El rango de valores máximos por coordenada según la incertidumbre de calibración se muestra en la Tabla 5.4. Fuente: propia.

## 5.4 Conclusiones

En este capítulo se ha introducido la técnica de evaluación de la incertidumbre de calibración cinemática para robots industriales. Las técnicas de calibración de robots confirman el comportamiento del robot tras un procedimiento de calibración mediante la definición del error máximo o medio de la posición y de la orientación sobre un conjunto de puntos del espacio de trabajo del robot. Mediante la determinación de la incertidumbre de calibración, es posible conocer la incertidumbre de posicionamiento del robot, en función de su ubicación, para cualquier posición y orientación.

Mediante la aplicación de esta técnica, es posible definir las condiciones de prueba de captura de datos para la calibración que minimicen la incertidumbre de calibración, y de esta forma, minimicen (antes de realizar la prueba de captura) la incertidumbre de posicionamiento obtenida el robot. Asimismo, este método permite definir las condiciones de partida que permitan maximizar la precisión de posicionamiento obtenida tras la calibración. Se han recogido varios ejemplos de variables de entrada y se ha demostrado su influencia en la incertidumbre de calibración.

La técnica desarrollada en este capítulo utiliza el esquema de evaluación que figura en el anexo I del GUM, el cual se realizó usando una técnica de simulación Monte Carlo aplicada al análisis de la propagación de la incertidumbre de las variables de entrada. Esta simulación da como resultado la incertidumbre de calibración de los parámetros cinemáticos identificados. Desde un punto de vista práctico, se han introducido algunos cambios con respecto al método CPA original para que el modelo cinemático nominal del robot se pueda comparar con el modelo identificado. Cuando se utiliza el método CPA, no es necesario conocer de antemano el modelo cinemático nominal porque lo que se obtiene es una solución numérica válida. Sin embargo, en el modelo implementado las direcciones del eje del robot no tienen por qué coincidir con las del modelo cinemático nominal, y por tanto, el modelo puede dar valores de parámetros numéricos que sean muy diferentes de los que se consideran normales para el robot analizado en concreto. También hay que considerar que desde un punto de vista práctico esta técnica de calibración debería aplicarse a robots con un modelo previamente establecido. Sin embargo, por razones prácticas, el posicionamiento del sistema de referencia global de un robot se determina por mediciones y ajustes previos, ya que el método CPA no define la posición de este sistema de referencia.

La determinación de la incertidumbre de calibración para cada parámetro identificado permite la propagación de las fuentes de error debido al proceso de captura de datos. Por tanto, el cálculo de los parámetros se basa no sólo en el cálculo de los parámetros del modelo sino también en el error del robot. Debido a que el modelo cinemático del robot no es lineal, el error final que se tiene en función de la posición y la postura debido a la influencia de sus parámetros cinemáticos depende de la posición y orientación en cada caso. La técnica de evaluación de la incertidumbre de la calibración desarrollada aquí definirá la incertidumbre de posicionamiento para cualquier

posición definida en el robot, de forma y manera que sea posible elegir, para una tarea de precisión dada, las mejores ubicaciones del robot. Esto significa que el robot tendrá una menor incertidumbre de posicionamiento, lo que garantizará una mayor precisión en función de la incertidumbre de calibración del robot. Por lo tanto, la captura de datos de calibración y el procedimiento de cálculo están directamente relacionados con la incertidumbre de posicionamiento final del robot, la cual depende de su ubicación. Entonces, es posible conocer y mejorar la incertidumbre de posicionamiento del robot utilizando una adecuada definición del procedimiento y del test de captura de datos para la calibración.

Una vez obtenida la incertidumbre de calibración de cada parámetro cinemático, es posible evaluar el error de posicionamiento del robot a partir de su incertidumbre para determinados valores de los ángulos de rotación de las articulaciones. Así, las condiciones del procedimiento de captura de datos para la calibración del robot y las influencias consideradas están vinculadas a la incertidumbre de posicionamiento del robot y, por tanto, con el posible error máximo que se tiene en una posición en particular, provocado por esta calibración. De este modo, es posible evaluar, a priori, las condiciones de prueba de captura de datos necesarias para la identificación de los parámetros, no sólo desde el punto de vista de la incertidumbre de los parámetros, sino también desde un punto de vista que explique el efecto que dicha incertidumbre puede tener sobre el error de posicionamiento del robot para un conjunto de localizaciones planificadas.

Esta técnica puede utilizarse con cualquier modelo de robot y para cualquier cálculo directo de parámetros cinemáticos, aunque es más bien aplicable en los casos en que los parámetros se determinan mediante un procedimiento de ajuste por el método de los mínimos cuadrados de un conjunto de datos capturados o mediante la imposición de restricciones geométricas. En esta última situación, la solución no es analítica y depende significativamente de la solución inicial utilizada para resolver el método iterativo. Así, en este caso, un esquema de evaluación de la incertidumbre como el que se muestra aquí tiene un alto coste computacional, debido al hecho de que la solución inicial es un parámetro de entrada, ya que hay que tener en cuenta el efecto de las diferentes soluciones iniciales para los parámetros en la incertidumbre de calibración final.

# 6 Conclusiones

---

## 6.1 Conclusiones

En la actualidad, los resultados del procedimiento de calibración de un robot se expresan generalmente en términos del error de posición y orientación para un conjunto de ubicaciones y orientaciones, que se han obtenido a partir de los parámetros cinemáticos previamente identificados. En este trabajo de tesis se ha desarrollado un método de calibración cinemática de robots conjuntamente con una aproximación para evaluar la incertidumbre de calibración de un robot calibrado mediante el método de *Circle Point Analysis (CPA)*. El método desarrollado se basa en el cálculo de propagación de distribuciones de probabilidad recomendado por la Guía para la Expresión de la Incertidumbre de Medida y en el método Monte Carlo. Este método permite calcular la incertidumbre en la identificación de cada parámetro individual del robot y, por tanto, estimar la incertidumbre de posicionamiento del robot debida a la incertidumbre de calibración, en lugar de basarse en un único conjunto de ubicaciones y orientaciones previamente definidas para un único conjunto de parámetros identificados. Además, esta técnica permite establecer las mejores condiciones posibles para la prueba de captura de datos, que identifica los parámetros y determina cuáles de ellos tienen la menor incertidumbre de calibración posible. Esta determinación se basa en las variables que intervienen en el proceso de captura de datos mediante la propagación de su influencia hasta la precisión final del robot. Esto va a permitir que, dada una configuración de un robot industrial, y calculando la incertidumbre del procedimiento de calibración, se puedan optimizar los parámetros usados en la calibración para mejorar y reducir la incertidumbre de la misma, mejorando de esta forma el mismo proceso de calibración cinemática, siendo ésta una de las principales aportaciones del presente trabajo de tesis.

Como primera fase de este trabajo de tesis, se llevó a cabo una revisión del estado del arte de los robots, con respecto a sus características y su clasificación, refiriéndose no sólo a los robots industriales manipuladores, sino a los robots en general. Asimismo, se ha llevado a cabo una amplia revisión del estado del arte de las diferentes técnicas existentes y utilizadas para la evaluación de la precisión y repetibilidad de los robots. Tal y como se identifica en la revisión bibliográfica realizada, se considera la norma ISO 9283:1995 como el estándar activo y norma de referencia para la evaluación de las características de los robots manipuladores industriales, y en concreto, para la evaluación de la precisión y repetibilidad de éstos. Esta norma lleva en vigencia más de 20 años, y

dado el avance de la técnica, han surgido más tipos de robots, con diferentes prestaciones y tecnología asociada, para las cuales la evaluación de sus características no queda cubierta por dicha norma ISO 9283:1995. Esto ha generado numerosos estudios y trabajos que han tratado de dar respuesta a estas necesidades en estos nuevos ámbitos de la técnica. Sin embargo, y dado que el trabajo presentado en esta tesis queda circunscrito a los robots manipuladores industriales, la citada norma ISO 9283:1995 da la suficiente cobertura a las necesidades de este trabajo, tomándose como referencia. Por último, se ha revisado el estado del arte de los sistemas de evaluación y medición existentes en el campo de la calibración de robots industriales, identificándose los diferentes trabajos y usos que se han dado con los mismos. Esta revisión ha permitido analizar las diferentes características y prestaciones de los mismos, hecho que ha servido de base para la selección del sistema de medición a utilizar en el proceso de calibración cinemática mediante *Circle Point Analysis* y específicamente en el procedimiento de captura de puntos que hará posible la identificación de los parámetros cinemáticos del robot. El sistema seleccionado es un Láser Tracker API modelo 3 con un alcance de 15m y una precisión de  $\pm 15\mu\text{m}$  (ADM) o 1,5ppm conjuntamente con reflector de seguimiento activo llamado Active Target, con precisión de  $\pm 12,5\mu\text{m}$  en el centro óptico. Ambos suponen un par óptimo de dispositivos para el desarrollo de este trabajo, al aplicarse el método *Circle Point Analysis*, permitiendo tomar datos de cada una de las articulaciones, maximizando el número de puntos tomados y evitando tener que reubicar y recalibrar el sistema de medición y su marco de referencia. Esto mejora el proceso de dos formas fundamentales: la primera, el proceso de medición en continuo reduce el tiempo necesario para la captura de datos; segunda, la precisión de la medición y por tanto de la calibración se mejora sensiblemente, con lo que se reduce la incertidumbre del posicionamiento del reflector.

De manera genérica la calibración de los robots normalmente incluye las siguientes fases: (i) Determinación y construcción del modelo cinemático adecuado para la configuración del robot; (ii) Captura de datos de la posición de todos los elementos del robot mediante un instrumento de medida; (iii) Optimización o identificación de parámetros geométricos, (iv) Implementación y evaluación del modelo óptimo en posiciones distintas a las de identificación, (v) Identificación de las posibles causas y fuentes de error y modelado e implementación de modelos de corrección

De este modo y siguiendo la secuencia anteriormente definida en un proceso de calibración de robots, como siguiente paso, en el capítulo 3, se ha introducido el concepto de modelo cinemático, se han analizado diferentes modelos matemáticos para realizar la representación de la orientación y de la posición, determinando al final el uso en esta tesis de la Matriz de Transformación Homogénea, para su aplicación posterior a la calibración cinemática que se desarrollará en el siguiente capítulo. Asimismo se ha llevado a cabo una revisión bibliográfica del estado del arte con respecto a los métodos de modelo cinemático aplicables a robots manipuladores, como punto de partida para los procedimientos de calibración de éstos. Una vez realizada esta revisión y análisis del estado de arte, se ha hecho referencia y mostrado el modelo de Denavit-Hartenberg (D-H), modificado por la revisión de Hayati y Mirmirani, que es el que se ha justificado para su aplicación aquí, al contar los robots manipuladores que tienen articulaciones consecutivas con ejes casi paralelos, lo que supone una inestabilidad en el cálculo numérico para el modelo D-H original, la cual se soluciona con esta modificación del modelo. Una vez se ha definido el modelo cinemático a utilizar, se ha aplicado al caso que nos ocupa, que es un robot KUKA que es el que se ha utilizado para el desarrollo de esta tesis, y definiendo según indica al procedimiento de

D-H los sistemas de coordenadas a utilizar, obtenemos los valores iniciales de los parámetros cinemáticos necesarios y sentamos las bases para pasar al siguiente paso, en el que se tratará la calibración cinemática del robot.

En el siguiente paso, en el capítulo 4, se ha introducido el concepto de calibración cinemática de robots, se han analizado y revisado diferentes fuentes de error que pueden afectar a esta calibración y se han revisado los diferentes métodos de calibración cinemática de robots existentes. De acuerdo a la bibliografía existente, las técnicas de calibración de robots documentadas pueden clasificarse en tres grupos: a) métodos de lazo abierto (*open loop methods*), b) métodos de lazo cerrado (*closed-loop methods*) y c) métodos de medida de eje-tornillo (*screw-axis measurement methods*). En el primer grupo de técnicas de lazo abierto, las poses del robot real son capturadas usando un sistema de medición externo. El segundo grupo de técnicas se basa en la pose diferencial, donde la información del error se toma de la creación de cadenas cinemáticas cerradas que fijan una o más de las restricciones de orientación y posición del efector final. El tercer grupo de técnicas se basa en las mediciones de movimientos independientes para cada una de las articulaciones del robot. En este caso, y para el procesamiento de los datos tomados, es posible extraer los parámetros del modelo cinemático y analizar el valor medio de los ejes de las articulaciones así obtenidos. Este método mantiene un mejor enlace tanto físico como matemático entre los parámetros identificados y los parámetros reales del robot, ya que los parámetros se basan en un cálculo independiente para eje de la articulación. Un método de medida de eje-tornillo típico es el *Circle Point Analysis* (CPA), que es el que se selecciona para su aplicación modificada en este trabajo de tesis. Se describe en este capítulo tanto la base matemática del mismo como el proceso a realizar. La técnica de *Circle Point Analysis* (CPA) se basa el movimiento individual de cada una de las articulaciones del robot en un círculo mientras se mide la trayectoria de la articulación descrita por un punto alrededor de cada articulación. Se toman medidas para cada una de las seis articulaciones y se calcula el círculo que mejor se ajusta a los puntos capturados para cada eje. Por lo tanto, es posible considerar la posición del eje como un vector que pasa por el centro del círculo con una dirección normal al plano que contiene dicho círculo. Este método puede utilizarse para la programación offline de robots manipuladores presentando ventajas significativas, ya que los parámetros cinemáticos se determinan analíticamente a partir de las relaciones de distancias y ángulos entre los vectores calculados, se simplifica el método y se reduce el tiempo que requiere el proceso de optimización no lineal convencional. Además de la información sobre la posición de los ejes, este método da una idea de los errores de fabricación y montaje cometidos durante el proceso de fabricación del robot.

Por otra parte, y una vez presentadas las bases de la técnica del *Circle Point Analysis*, se ha procedido a su aplicación, realizando en primer lugar el proceso de captura de datos para el robot Kuka® KR 5 sixx. La calibración del robot requirió de una planificación cuidadosa de las trayectorias más convenientes y rangos angulares para cubrir el máximo espacio de trabajo posible. Para ello, se ha modelado el robot con los instrumentos de medición (*Láser Tracker* y *Active target*) utilizando un programa de diseño paramétrico que permite simular el movimiento del robot y determinar los mayores rangos angulares para cada eje. Para realizar un análisis preliminar de las trayectorias disponibles el robot se ha modelado de tal manera que se puede establecer un algoritmo iterativo

para maximizar los ángulos girados y mantener la línea visual entre el LT y el reflector, pudiéndose obtener las trayectorias máximas admisibles para cada una de las articulaciones del robot.

A partir de este modelo, se han realizado varias simulaciones con distintas posiciones de partida para cada eje a fin de encontrar el rango angular máximo disponible para cada eje. A continuación, se realizan los ensayos experimentales programándose seis ensayos diferentes para comprobar la precisión del método en diferentes condiciones, tales como el número de puntos capturados, el alcance angular, la velocidad del robot, puntos capturados, el rango angular y la velocidad del robot.

Tras ello, se desarrollan los algoritmos que calculan los conjuntos de vectores  $(\vec{S}_j, \vec{S}_{0j})$  de cada articulación, que son las coordenadas Plücker. Esto mejora el proceso de dos formas fundamentales: la primera, el proceso de medición en continuo reduce el tiempo necesario para la captura de datos; segunda, la precisión de la medición y por tanto de la calibración se mejora sensiblemente, con lo que se reduce la incertidumbre del posicionamiento del reflector en cada articulación y los parámetros cinemáticos del robot mediante la aplicación del CPA. Estos parámetros cinemáticos identificados son optimizados en el trabajo mediante una aproximación por mínimos cuadrados mediante el método de Levenberg-Marquardt como algoritmo de optimización usando diferentes funciones objetivo.

A continuación, se determinan los errores en ejes y articulaciones del robot. El CPA sólo proporciona información sobre la geometría real del robot, sin analizar los errores geométricos que puedan producirse en la rotación del robot. Los puntos capturados se han registrado girando el robot tanto en sentido positivo como negativo, alcanzando teóricamente posiciones teóricamente idénticas en cada dirección. Las diferencias entre las posiciones de desplazamientos positivos y negativos muestran el juego correspondiente a cada articulación del robot, mientras que la excentricidad esférica axial y radial vendrá dada por las desviaciones en la dirección del eje de la articulación como en el plano perpendicular a dicho eje, respectivamente.

Finalmente, en el capítulo 5 se ha introducido la técnica de evaluación de la incertidumbre de calibración cinemática para robots industriales. Como se ha comentado anteriormente, las técnicas de calibración de robots usualmente utilizadas confirman el comportamiento del robot tras un procedimiento de calibración mediante la definición del error máximo o medio de la posición y de la orientación sobre un conjunto de puntos del espacio de trabajo del robot. Mediante la determinación de la incertidumbre de calibración, es posible conocer la incertidumbre de posicionamiento del robot, en función de su ubicación, para cualquier posición y orientación.

Mediante la aplicación de esta técnica, y ésta es una de las principales aportaciones de este trabajo de tesis, es posible definir las condiciones de prueba de captura de datos para la calibración que minimicen la incertidumbre de calibración, y de esta forma, minimicen previamente a la captura de datos, la incertidumbre de posicionamiento obtenida el robot. Asimismo, este método permite definir las condiciones de partida que permitan maximizar la precisión de posicionamiento obtenida tras la calibración. Se han recogido varios ejemplos de variables de entrada y se ha demostrado su influencia en la incertidumbre de calibración.

Una vez identificadas las fuentes de error y seleccionadas aquellas abordables en la estimación de la incertidumbre realizada en este trabajo, se decidió aplicar el método de Monte Carlo para la estimación de incertidumbres mediante propagación de distribuciones de probabilidad.

Utilizando este enfoque, es posible saber cómo una variable de salida (la posición y orientación del robot) se ve influida por las posibles distribuciones de los valores de entrada. Por lo tanto, es posible obtener la incertidumbre de calibración como un valor característico y las incertidumbres de posición y orientación del robot para una configuración definida. El valor del error puede generalizarse y predecirse en todo el espacio de trabajo en función de la incertidumbre de calibración obtenida a partir de una pose específica del robot. El procedimiento de simulación establece las distribuciones de probabilidad de las variables de influencia, tales como el instrumento de medición utilizado y las condiciones de captura (número de puntos, posición inicial de la articulación, ángulos cubiertos por la articulación) en el proceso de captura de datos, y obtiene los posibles valores de magnitud de salida para los distintos valores de las variables de entrada. Este procedimiento se plantea como un procedimiento matemático iterativo con un número de iteraciones elevado. Debido al elevado número de iteraciones, es adecuado para procedimientos de calibración basados en el cálculo matemático individual del eje de articulación, de modo que no es necesario establecer un procedimiento de optimización para cada iteración. Por tanto, se evita un coste computacional extremadamente elevado, y es posible generar herramientas de estimación de incertidumbre útiles y válidas para procedimientos de calibración industrial, no excesivamente largos para alcanzar resultados de incertidumbre acordes con la configuración de la variable de entrada. También es posible establecer una retroalimentación en el procedimiento para conseguir la menor incertidumbre posible en los resultados de la calibración.

Esta simulación ha dado como resultado la incertidumbre de calibración de los parámetros cinemáticos identificados. Desde un punto de vista práctico, se han introducido algunos cambios con respecto al método *Circle Point Analysis* original para que el modelo cinemático nominal del robot se pueda comparar con el modelo identificado. Cuando se utiliza el método *Circle Point Analysis*, no es necesario conocer de antemano el modelo cinemático nominal porque lo que se obtiene es una solución numérica válida. Sin embargo, en el modelo implementado las direcciones del eje del robot no tienen por qué coincidir con las del modelo cinemático nominal, y por tanto, el modelo puede dar valores de parámetros numéricos que sean muy diferentes de los que se consideran normales para el robot analizado en concreto. También hay que considerar que desde un punto de vista práctico esta técnica de calibración debería aplicarse a robots con un modelo previamente establecido. Sin embargo, por razones prácticas, el posicionamiento del sistema de referencia global de un robot se determina por mediciones y ajustes previos, ya que el método *Circle Point Analysis* no define la posición de este sistema de referencia.

La determinación de la incertidumbre de calibración para cada parámetro identificado permite la propagación de las fuentes de error debido al proceso de captura de datos. Por tanto, el cálculo de los parámetros se basa no sólo en el cálculo de los parámetros del modelo sino también en el error del robot. Debido a que el modelo cinemático del robot no es lineal, el error final que se tiene en función de la posición y la postura debido a la influencia de sus parámetros cinemáticos depende de la posición y orientación que se da en cada caso. La técnica de evaluación de la

incertidumbre de la calibración desarrollada aquí ha definido la incertidumbre de posicionamiento para cualquier posición definida en el robot, de forma y manera que sea posible elegir, para una tarea de precisión dada, las mejores ubicaciones del robot. Esto significa que los robots tengan una menor incertidumbre de posicionamiento, lo que garantizará una mayor precisión en función de la incertidumbre de calibración del robot. Por lo tanto, la captura de datos de calibración y el procedimiento de cálculo están directamente relacionados con la incertidumbre de posicionamiento final del robot, la cual depende de su ubicación. Entonces, es posible conocer y mejorar la incertidumbre de posicionamiento del robot utilizando una adecuada definición del procedimiento y del test de captura de datos para la calibración.

Una vez obtenida la incertidumbre de calibración de cada parámetro cinemático, es posible evaluar el error de posicionamiento del robot a partir de su incertidumbre para determinados valores de los ángulos de rotación de las articulaciones. Así, las condiciones del procedimiento de captura de datos para la calibración del robot y las influencias consideradas están vinculadas a la incertidumbre de posicionamiento del robot y, por tanto, con el posible error máximo que se tiene en una posición en particular, provocado por esta calibración. De este modo, es posible evaluar, a priori, las condiciones de prueba de captura de datos necesarias para la identificación de los parámetros, no sólo desde el punto de vista de la incertidumbre de los parámetros, sino también desde un punto de vista que explique el efecto que dicha incertidumbre puede tener sobre el error de posicionamiento del robot para un conjunto de localizaciones planificadas.

Esta técnica puede utilizarse con cualquier modelo de robot y para cualquier cálculo directo de parámetros cinemáticos, incluso aunque es más bien aplicable en los casos en que los parámetros se determinan mediante un procedimiento de ajuste por el método de los mínimos cuadrados de un conjunto de datos capturados o mediante la imposición de restricciones geométricas. En esta última situación, la solución no es analítica y depende significativamente de la solución inicial utilizada para resolver el método iterativo. Así, en este caso, un esquema de evaluación de la incertidumbre como el que se muestra aquí tiene un alto coste computacional, debido al hecho de que la solución inicial es un parámetro de entrada, ya que hay que tener en cuenta el efecto de las diferentes soluciones iniciales para los parámetros en la incertidumbre de calibración final.

## 6.2 Líneas de trabajo futuro

A continuación se presentan futuras líneas de trabajo como pasos posteriores del trabajo realizado a lo largo de esta tesis doctoral, que dará continuidad al trabajo llevado a cabo:

- Realizar un proceso de optimización de la calibración cinemática, reduciendo la incertidumbre de este proceso, esto es: realizar el proceso de calibración cinemática de un robot dado, primeramente realizando el proceso de calibración habitual, y posteriormente realizar el cálculo de incertidumbre de calibración, tal y como se ha mostrado en este trabajo; a partir de aquí, optimizar los parámetros de calibración cinemática a usar, en función de su influencia en la incertidumbre obtenida, y con estos, realizar la calibración nuevamente, contrastando los parámetros de calibración cinemática obtenidos de esta forma con el proceso inicial, y volviendo a realizar el cálculo de la incertidumbre de calibración cinemática obtenida con este nuevo conjunto de parámetros, para confirmar que se ha conseguido la optimización del proceso.
- Modelar las variaciones de los parámetros con la temperatura, sobre todo en parámetros de distancia, para ver la influencia de éste. Debido a la dificultad que este modelado encierra, y a la gran cantidad de variables que se deberían tener en cuenta, este modelado se realiza empíricamente habitualmente.
- Identificación del mejor conjunto de parámetros que identifican de forma óptima al robot: Para realizar esta identificación, se debería hacer un análisis del error de posicionamiento del brazo robot, en su posición de la herramienta en la articulación final, en diferentes posiciones y diferentes puntos en el volumen del robot. Para cada posición se tendría una distribución normal de posicionamiento, en función de los parámetros del modelo dados, y entonces habría un conjunto de parámetros de permitiría minimizar al máximo el error del modelo. Con un análisis ulterior se podrían combinar estos conjuntos de parámetros de mínimo error, para obtener el mejor conjunto de parámetros general.
- Adicionalmente, y a partir de los datos de juego y excentricidad axial y radial obtenidos mediante el método CPA, se plantea el desarrollo de un método que, dentro la optimización y evaluación de la incertidumbre que se ha desarrollado en este trabajo de tesis, permita compensar estos errores, para aplicar esta compensación en los parámetros obtenidos en la calibración cinemática del robot.



## 7 Bibliografía

---

- [1] «International Organization for Standardization ISO 9283:1998 - Manipulating industrial robots — Performance criteria and related test methods», 1998.
- [2] J. Denavit y R. S. Hartenberg, «A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices», *J. Appl. Mech.*, vol. 22, 1955.
- [3] J. M. Hollerbach y C. W. Wampler, «The calibration index and taxonomy for robot kinematic calibration methods», *Int. J. Rob. Res.*, vol. 15, n.º 6, pp. 573-591, 1996, doi: 10.1177/027836499601500604.
- [4] H. W. Stone, «Kinematic modeling, identification, and control of robotic manipulators», p. 224, 1987.
- [5] Sklar ME, «Geometric calibration of industrial manipulators by circle point analysis», en *Proc 2nd Conf Recent Adv Robot*, 1989, pp. 178-202.
- [6] J. Committee for Guides in Metrology, «First edition 2008 Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement”- Propagation of distributions using a Monte Carlo method», 2008.
- [7] S. Y. Nof, *Handbook of industrial robotics*. John Wiley, 1999.
- [8] «Valiant TMS: Services and robot applications». [En línea]. Disponible en: <https://www.valianttms.com/#>. [Accedido: 16-abr-2023].
- [9] «KUKA: Automatización en la industria del automóvil». [En línea]. Disponible en: <https://www.kuka.com/es-es/sectores/automóvil>. [Accedido: 21-mar-2023].
- [10] G. Mosqueira, J. Apetz, K. M. Santos, E. Villani, R. Suterio, y L. G. Trabasso, «Analysis of the indoor GPS system as feedback for the robotic alignment of fuselages using laser radar measurements as comparison», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 28, n.º 6, pp. 700-709, dic. 2012, doi: 10.1016/j.rcim.2012.03.004.
- [11] «KUKA: Robots colaborativos con otras aplicaciones». [En línea]. Disponible en: <https://www.kuka.com/es-es/sectores/otros-sectores/industria-del-entretenimiento/aplicaciones-de-servicios>. [Accedido: 21-mar-2023].
- [12] S. Gadringer, H. Gatringer, y A. Mueller, «Assessment of force control for surface finishing – an experimental comparison between Universal Robots UR10e and FerRobotics active

- contact flange», *Mech. Sci.*, vol. 13, n.º 1, pp. 361-370, abr. 2022, doi: 10.5194/ms-13-361-2022.
- [13] «ISO International Organization for Standardization». [En línea]. Disponible en: <https://www.iso.org/home.html>. [Accedido: 21-may-2021].
- [14] «International Organization for Standardization ISO 8373:2012(en) - Robots and robotic devices — Vocabulary», 2012.
- [15] «IFR International Federation of Robotics». [En línea]. Disponible en: <https://ifr.org/>. [Accedido: 24-may-2021].
- [16] G. Singh y V. K. Banga, «Robots and its types for industrial applications», *Mater. Today Proc.*, vol. 60, pp. 1779-1786, ene. 2022, doi: 10.1016/j.matpr.2021.12.426.
- [17] A. Dobra, «General classification of robots. Size criteria», en *2014 23rd International Conference on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region (RAAD)*, 2014, pp. 1-6, doi: 10.1109/RAAD.2014.7002249.
- [18] «International Organization for Standardization ISO 10218-1:2011 - Robots and robotic devices — Safety requirements for industrial robots — Part 1: Robots, 2011», 2011. [En línea]. Disponible en: <https://www.iso.org/standard/51330.html>. [Accedido: 09-abr-2024].
- [19] «Robots Tedax». [En línea]. Disponible en: <https://es.wikipedia.org/wiki/TEDAX>. [Accedido: 18-abr-2023].
- [20] «Keenon: Robots en Hosteleria». [En línea]. Disponible en: <https://www.keenonrobot.com/>. [Accedido: 18-abr-2023].
- [21] P. An, «Path Optimization Method of Autonomous Intelligent Obstacle Avoidance for Multi-joint Submarine Robot», *J. Coast. Res.*, vol. 82, n.º sp1, p. 288, sep. 2018, doi: 10.2112/SI82-041.1.
- [22] «Euroinnova: robots educacionales». [En línea]. Disponible en: <https://www.euroinnova.edu.es/blog/robots-educacionales>. [Accedido: 24-may-2021].
- [23] «KUKA: Robots en tecnología médica». [En línea]. Disponible en: <https://www.kuka.com/es-es/sectores/healthcare/kuka-medical-robotics>. [Accedido: 21-mar-2023].
- [24] M. O. Shneier, E. R. Messina, C. I. Schlenoff, F. M. Proctor, T. R. Kramer, y J. A. Falco, «Measuring and Representing the Performance of Manufacturing Assembly Robots», dic. 2015, doi: 10.6028/NIST.IR.8090.
- [25] Z. Bi, «Revisiting System Paradigms from the Viewpoint of Manufacturing Sustainability», *Sustain. 2011, Vol. 3, Pages 1323-1340*, vol. 3, n.º 9, pp. 1323-1340, ago. 2011, doi: 10.3390/SU3091323.
- [26] Z. M. Bi, S. Y. T. Lang, W. Shen, y L. Wang, «Reconfigurable manufacturing systems: The state of the art», *Int. J. Prod. Res.*, vol. 46, n.º 4, pp. 967-992, feb. 2008, doi: 10.1080/00207540600905646.
- [27] X. V. Wang, L. Wang, A. Mohammed, y M. Givehchi, «Ubiquitous manufacturing system based on Cloud: A robotics application», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 45, pp. 116-125, jun. 2017, doi: 10.1016/J.RCIM.2016.01.007.

- [28] R. Madhavan, A. Del Pobil, y E. Messina, «Performance evaluation and benchmarking of robotic and automation systems», *IEEE Robot. Autom. Mag.*, vol. 17, n.º 1, pp. 120-122, mar. 2010, doi: 10.1109/MRA.2010.935811.
- [29] J. Baker, T. Kurisko, H. Li, D. Poganski, y J. Worcester, «Development of ISO Compliant Repeatability Procedures for Evaluating Collaborative Robots», 2014.
- [30] M. Hu, H. Wang, X. Pan, y Y. Tian, «Optimal synthesis of pose repeatability for collaborative robots based on the ISO 9283 standard», *Ind. Robot Int. J. Robot. Res. Appl.*, vol. 46, n.º 6, pp. 812-818, nov. 2019, doi: 10.1108/IR-03-2019-0056.
- [31] A. M. Y. Maddahi, N. Sepehri, H. Ghorabi, «Testing Robotic Manipulators: Improvement and experience», *Int. J. Syst. Appl. Eng. Dev.*, vol. 4, n.º 2, pp. 35-45, 2010.
- [32] K.-T. Park, C.-H. Park, y Y.-J. Shin, «Performance Evaluation of Industrial Dual-Arm Robot», en *2008 International Conference on Smart Manufacturing Application*, 2008, pp. 437-440, doi: 10.1109/ICSMA.2008.4505596.
- [33] J. Falco, J. Marvel, y E. Messina, «Dexterous manipulation for manufacturing applications workshop», jun. 2013, doi: 10.6028/NIST.IR.7940.
- [34] J. Falco, K. Van Wyk, S. Liu, y S. Carpin, «Grasping the Performance: Facilitating Replicable Performance Measures via Benchmarking and Standardized Methodologies», *IEEE Robot. Autom. Mag.*, vol. 22, n.º 4, pp. 125-136, dic. 2015, doi: 10.1109/MRA.2015.2460891.
- [35] L. McGarry, J. Butterfield, y A. Murphy, «Assessment of ISO Standardisation to Identify an Industrial Robot's Base Frame», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 74, abr. 2022, doi: 10.1016/J.RCIM.2021.102275.
- [36] S. Ferrarini, P. Bilancia, R. Raffaelli, M. Peruzzini, y M. Pellicciari, «A method for the assessment and compensation of positioning errors in industrial robots», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 85, p. 102622, feb. 2024, doi: 10.1016/J.RCIM.2023.102622.
- [37] R. Li, N. Ding, Y. Zhao, y H. Liu, «Real-time trajectory position error compensation technology of industrial robot», *Measurement*, vol. 208, p. 112418, feb. 2023, doi: 10.1016/J.MEASUREMENT.2022.112418.
- [38] Z. M. Bi, Z. Miao, B. Zhang, y C. W. J. Zhang, «The state of the art of testing standards for integrated robotic systems», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 63, p. 101893, jun. 2020, doi: 10.1016/j.rcim.2019.101893.
- [39] «International Federation of Robotics: Reports». [En línea]. Disponible en: <https://ifr.org/free-downloads/>. [Accedido: 24-may-2021].
- [40] «International Federation of Robotics: Executive Summary report 2023». [En línea]. Disponible en: [https://ifr.org/img/worldrobotics/Executive\\_Summary\\_WR\\_Industrial\\_Robots\\_2023.pdf](https://ifr.org/img/worldrobotics/Executive_Summary_WR_Industrial_Robots_2023.pdf). [Accedido: 19-may-2023].
- [41] H. Niu, Z. Ji, Z. Zhu, H. Yin, y J. Carrasco, «3D Vision-guided Pick-and-Place Using Kuka LBR iiwa Robot», en *2021 IEEE/SICE International Symposium on System Integration (SII)*, 2021, pp. 592-593, doi: 10.1109/IEEECONF49454.2021.9382674.
- [42] «International Organization for Standardization ISO/TR 13309:1995 Manipulating Industrial

- Robots - Informative Guide on Test Equipment and Metrology Methods of Operation for Robot Performance Evaluation in Accordance with ISO 9283, 1995». 1995.
- [43] E. R. Messina y A. M. Meystel, «Measuring the Performance and Intelligence of Systems : Proceedings of the 2001 PerMIS Workshop Edited by», 2001.
- [44] S. Balakirsky y Z. Kootbally, «An ontology based approach to action verification for agile manufacturing», *Adv. Intell. Syst. Comput.*, vol. 274, pp. 201-217, 2014, doi: 10.1007/978-3-319-05582-4\_18/COVER.
- [45] S. Balakirsky y Z. Kootbally, «USARSim/ROS: A Combined Framework for Robotic Control and Simulation», *ASME/ISCIE 2012 Int. Symp. Flex. Autom. ISFA 2012*, pp. 101-108, jul. 2013, doi: 10.1115/ISFA2012-7179.
- [46] T. Kramer *et al.*, «Analysis of Dimensional Metrology Standards», 2001.
- [47] «International Organization for Standardization ISO 3691-4:2023 – Industrial Trucks – Safety Requirements and Verification - Part 4: Driverless Industrial Trucks and Their Systems», 2023.
- [48] «Normalización Española UNE-EN 1175:2021 - Seguridad de las carretillas de manutención. Requisitos eléctricos / electrónicos. Normas AENOR». 2021.
- [49] S. Balakirsky y E. R. Messina, «A simulation framework for evaluating mobile robots», Gaithersburg, MD, 2002.
- [50] H.-M. Huang, E. Messina, y A. Jacoff, «Performance measures framework for unmanned systems (PerMFUS)», en *Proceedings of the 9th Workshop on Performance Metrics for Intelligent Systems*, 2009, pp. 65-72, doi: 10.1145/1865909.1865923.
- [51] C. Schlenoff, A. Pietromartire, Z. Kootbally, S. Balakirsky, y S. Foufou, «Inferring Intention through State Representations in Cooperative Human-Robot Environments», en *Engineering Creative Design in Robotics and Mechatronics*, IGI Global, 2013, pp. 122-151.
- [52] E. Messina, R. Madhavan, y S. Balakirsky, «The role of competitions in advancing intelligent systems», en *Proceedings of the 9th Workshop on Performance Metrics for Intelligent Systems*, 2009, pp. 105-108, doi: 10.1145/1865909.1865931.
- [53] P. Yuan, D. Chen, T. Wang, S. Cao, Y. Cai, y L. Xue, «A compensation method based on extreme learning machine to enhance absolute position accuracy for aviation drilling robot», *Adv. Mech. Eng.*, vol. 10, n.º 3, p. 168781401876341, mar. 2018, doi: 10.1177/1687814018763411.
- [54] I. A. Sultan y J. G. Wager, «Simplified theodolite calibration for robot metrology», *Adv. Robot.*, vol. 16, n.º 7, pp. 653-671, ene. 2002, doi: 10.1163/15685530260390764.
- [55] A. Nubiola, M. Slamani, A. Joubair, y I. A. Bonev, «Comparison of two calibration methods for a small industrial robot based on an optical CMM and a laser tracker», *Robotica*, vol. 32, n.º 3, pp. 447-466, 2014, doi: 10.1017/S0263574713000714.
- [56] M. Tomita y S. Ibaraki, «Measurement of 2D Positioning “Error Map” of a SCARA-Type Robot Over the Entire Workspace by Using a Laser Interferometer and a PSD Sensor», en *2020 International Symposium on Flexible Automation*, 2020, doi: 10.1115/ISFA2020-9656.
- [57] Z. Wu, P. Guo, Y. Zhang, y L. Zhu, «Kinematic Calibration for Industrial Robot Using a

- Telescoping Ballbar», *Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics)*, vol. 12595 LNAI, pp. 285-295, 2020, doi: 10.1007/978-3-030-66645-3\_24.
- [58] P. Yang, Z. Guo, y Y. Kong, «Plane kinematic calibration method for industrial robot based on dynamic measurement of double ball bar», *Precis. Eng.*, vol. 62, pp. 265-272, mar. 2020, doi: 10.1016/j.precisioneng.2019.12.010.
- [59] W. Wang, F. Liu, y C. Yun, «Calibration method of robot base frame using unit quaternion form», *Precis. Eng.*, vol. 41, pp. 47-54, jul. 2015, doi: 10.1016/j.precisioneng.2015.01.005.
- [60] A. Marwan, M. Simic, y F. Imad, «Calibration method for articulated industrial robots», *Procedia Comput. Sci.*, vol. 112, pp. 1601-1610, ene. 2017, doi: 10.1016/j.procs.2017.08.246.
- [61] G. Du, H. Shao, Y. Chen, P. Zhang, y X. Liu, «An online method for serial robot self-calibration with CMAC and UKF», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 42, pp. 39-48, dic. 2016, doi: 10.1016/j.rcim.2016.05.006.
- [62] J. M. S. T. Motta, G. C. De Carvalho, y R. S. McMaster, «Robot calibration using a 3D vision-based measurement system with a single camera», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 17, n.º 6, pp. 487-497, dic. 2001, doi: 10.1016/S0736-5845(01)00024-2.
- [63] A. Joubair y I. A. Bonev, «Kinematic calibration of a six-axis serial robot using distance and sphere constraints», *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol. 77, n.º 1-4, pp. 515-523, mar. 2015, doi: 10.1007/S00170-014-6448-5.
- [64] «Active Target for automated tracking of machines - API Metrology». [En línea]. Disponible en: <https://apimetrology.com/active-target/>. [Accedido: 24-may-2021].
- [65] «International Organization for Standardization ISO 9787:2013(en), Robots and robotic devices — Coordinate systems and motion nomenclatures 2013», 2013.
- [66] Hoang-Lan Pham, V. Perdereau, B. V. Adorno, y P. Fraise, «Position and orientation control of robot manipulators using dual quaternion feedback», en *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2010, pp. 658-663, doi: 10.1109/IROS.2010.5651097.
- [67] B. W. Mooring y G. R. Tang, «IMPROVED METHOD FOR IDENTIFYING THE KINEMATIC PARAMETERS IN A SIX AXIS ROBOT.», en *Computers in Engineering, Proceedings of the International Computers in Engineering Conference and*, 1984, pp. 79-84.
- [68] Y. Liu, Z. Xie, Y. Gu, C. Fan, X. Zhao, y H. Liu, «Trajectory planning of robot manipulators based on unit quaternion», *IEEE/ASME Int. Conf. Adv. Intell. Mechatronics, AIM*, pp. 1249-1254, 2017, doi: 10.1109/AIM.2017.8014189.
- [69] B. Palais y R. Palais, «Chasles' fixed point theorem for Euclidean motions», 2012, doi: 10.1007/s11784-012-0077-0.
- [70] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. Ed. Dover Publications.
- [71] Yang Liu, Zongwu Xie, Yikun Gu, Chunguang Fan, Xiaoyu Zhao, y Hong Liu, «Trajectory planning of robot manipulators based on unit quaternion», en *2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, 2017, pp. 1249-1254, doi:

- 10.1109/AIM.2017.8014189.
- [72] R. Campa y H. de la Torre, «Pose control of robot manipulators using different orientation representations: A comparative review», en *2009 American Control Conference*, 2009, pp. 2855-2860, doi: 10.1109/ACC.2009.5160254.
- [73] H. L. Pham, V. Perdereau, B. V. Adorno, y P. Fraitse, «Position and orientation control of robot manipulators using dual quaternion feedback», en *IEEE/RSJ 2010 International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS 2010 - Conference Proceedings*, 2010, pp. 658-663, doi: 10.1109/IROS.2010.5651097.
- [74] N. Canterakis, «Complete Moment Invariants and Pose Determination for Orthogonal Transformations of 3D Objects», Springer, Berlin, Heidelberg, 1996, pp. 339-350.
- [75] A. Ollero Baturone, *Robótica: Manipuladores y Robots Móviles*. MARCOMBO.
- [76] J. J. Legarreta Etxagibel y R. Martínez Rodríguez, «Herramientas matemáticas para la localización espacial», 2017.
- [77] L. Euler, *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*. Forgotten Books, 1765.
- [78] A. F. Cadena F., E. E. Peña P., y F. H. Martínez Sarmiento, «Desarrollo de prototipo de quadrotor con sistema de comunicación inalámbrica bidireccional», *Tekhnê*, vol. 13, n.º 1, pp. 13-30, jul. 2016.
- [79] M. Dehghani y S. A. A. Moosavian, «A new approach for orientation determination», en *2013 First RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM)*, 2013, pp. 20-25, doi: 10.1109/ICRoM.2013.6510075.
- [80] J. J. Gray, «Olinde Rodrigues' paper of 1840 on transformation groups», *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 21, n.º 4, pp. 375-385, dic. 1980, doi: 10.1007/BF00595376.
- [81] «Other representations of a rotation. Rotations», 2022. [En línea]. Disponible en: <https://rotations.berkeley.edu/other-representations-of-a-rotation/>. [Accedido: 14-ene-2021].
- [82] Clifford, «Preliminary Sketch of Biquaternions», *Proc. London Math. Soc.*, vol. s1-4, n.º 1, pp. 381-395, nov. 1871, doi: 10.1112/plms/s1-4.1.381.
- [83] M. V. G. Oramas, «Modelacion Y Analisis De La Cinematica Directa E Inversa Del Manipulador Stanford De Seis Grados De Libertad», Quito, 2014., 2014.
- [84] L. Everett, M. Driels, y B. Mooring, «Kinematic modelling for robot calibration», *Proceedings. 1987 IEEE Int. Conf. Robot. Autom.*, vol. 4, pp. 183-189, 1987, doi: 10.1109/ROBOT.1987.1087818.
- [85] D. C.-C. Lu, «Kinematic Calibration of Serial Manipulators using Relative Measurements», Carleton University (Ottawa), 2014.
- [86] D. L. Pieper, «THE KINEMATICS OF MANIPULATORS UNDER COMPUTER CONTROL», Stanford University, 1968.
- [87] R. P. Paul y B. Shimano, «KINEMATIC CONTROL EQUATIONS FOR SIMPLE MANIPULATORS.», en *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 1978, pp. 1398-1406, doi: 10.1109/cdc.1978.268148.

- [88] S. Hayati y M. Mirmirani, «Improving the absolute positioning accuracy of robot manipulators», *J. Robot. Syst.*, pp. 397-413, 1985, doi: 10.1002/rob.4620020406.
- [89] S. Hayati, K. Tso, y G. Roston, «Robot geometry calibration», *Proceedings. 1988 IEEE Int. Conf. Robot. Autom.*, pp. 947-951, 1988, doi: 10.1109/ROBOT.1988.12181.
- [90] L. J. Everett y T.-W. Hsu, «The Theory of Kinematic Parameter Identification for Industrial Robots», *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, vol. 110, n.º 1, pp. 96-100, mar. 1988, doi: 10.1115/1.3152658.
- [91] C. Veitschegger, W.K. Wu, «Robot Accuracy Analysis», en *Proceedings of the 1985 IEEE Conference on Cybernetics*, 1985, pp. 425-430.
- [92] W. Veitschegger y C.-H. W. C.-H. Wu, «Robot accuracy analysis based on kinematics», *IEEE J. Robot. Autom.*, vol. 2, n.º 3, pp. 171-179, 1986, doi: 10.1109/JRA.1986.1087054.
- [93] W. Veitschegger y C. W. C. Wu, «A method for calibrating and compensating robot kinematic errors», en *Proceedings. 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1987, vol. 4, pp. 39-44, doi: 10.1109/ROBOT.1987.1087839.
- [94] H. Stone, a. Sanderson, y C. Neuman, «Arm signature identification», en *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1986, vol. 3, pp. 41-48, doi: 10.1109/ROBOT.1986.1087664.
- [95] M. R. Driels y U. S. Pathre, «Generalized joint model for robot manipulator kinematic calibration and compensation», *J. Robot. Syst.*, vol. 4, n.º 1, pp. 77-114, feb. 1987, doi: 10.1002/rob.4620040107.
- [96] J. M. Hollerbach y C. W. Wampler, «The Calibration Index and Taxonomy for Robot Kinematic Calibration Methods», *Int. J. Rob. Res.*, vol. 15, n.º 6, pp. 573-591, dic. 1996, doi: 10.1177/027836499601500604.
- [97] H. Zhuang, Z. S. Roth, y F. Hamano, «A complete and parametrically continuous kinematic model for robotmanipulators», *IEEE Trans. Robot. Autom.*, vol. 8, n.º 4, 1992, doi: 10.1109/70.149944.
- [98] H. Zhuang y Z. S. Roth, «Robot calibration using the CPC error model», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 9, n.º 3, pp. 227-237, jun. 1992, doi: 10.1016/0736-5845(92)90027-4.
- [99] K. C. Gupta, «KINEMATIC ANALYSIS OF MANIPULATORS USING THE ZERO REFERENCE POSITION DESCRIPTION.», *Int. J. Rob. Res.*, vol. 5, n.º 2, pp. 5-13, 1986, doi: 10.1177/027836498600500202.
- [100] H. Zhuang, Z. S. Roth, y F. Hamano, «A complete and parametrically continuous kinematic model for robot manipulators», pp. 92-97, 1990, doi: 10.1109/robot.1990.125952.
- [101] K. Okamura y F. C. Park, «Kinematic calibration using the product of exponentials formula», *Robotica*, vol. 14, n.º 4, pp. 415-421, 1996, doi: 10.1017/s0263574700019810.
- [102] X.-L. Zhong, J. M. Lewis, y F. L.N.-Nagy, «Autonomous robot calibration using a trigger probe», *Rob. Auton. Syst.*, vol. 18, n.º 4, pp. 395-410, oct. 1996, doi: 10.1016/0921-8890(96)00011-5.
- [103] F. C. Park, «Computational Aspects of the Product-of-Exponentials Formula for Robot Kinematics», *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, n.º 3, pp. 643-647, 1994, doi:

- 10.1109/9.280779.
- [104] I. M. Chen y G. Yang, «Kinematic calibration of modular reconfigurable robots using product-of-exponentials formula», *J. Robot. Syst.*, vol. 14, n.º 11, pp. 807-821, 1997, doi: 10.1002/(SICI)1097-4563(199711)14:11<807::AID-ROB4>3.0.CO;2-Y.
- [105] Ruibo He, Yingjun Zhao, Shunian Yang, y Shuzi Yang, «Kinematic-Parameter Identification for Serial-Robot Calibration Based on POE Formula», *IEEE Trans. Robot.*, vol. 26, n.º 3, pp. 411-423, jun. 2010, doi: 10.1109/TRO.2010.2047529.
- [106] X. Yang, L. Wu, J. Li, y K. Chen, «A minimal kinematic model for serial robot calibration using POE formula», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 30, n.º 3, pp. 326-334, jun. 2014, doi: 10.1016/j.rcim.2013.11.002.
- [107] C. Dumas, S. Caro, S. Garnier, y B. Furet, «Joint stiffness identification of six-revolute industrial serial robots», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 27, n.º 4, pp. 881-888, ago. 2011, doi: 10.1016/j.rcim.2011.02.003.
- [108] G. Alici y B. Shirinzadeh, «Enhanced stiffness modeling, identification and characterization for robot manipulators», *IEEE Trans. Robot.*, vol. 21, n.º 4, pp. 554-564, ago. 2005, doi: 10.1109/TRO.2004.842347.
- [109] P. Y. Tao, G. Yang, Y. C. Sun, M. Tomizuka, y C. Y. Lai, «Product-of-exponential (POE) model for kinematic calibration of robots with joint compliance», en *2012 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, 2012, pp. 496-501, doi: 10.1109/AIM.2012.6266002.
- [110] T. D. Tuttle y W. P. Seering, «A nonlinear model of a harmonic drive gear transmission», *IEEE Trans. Robot. Autom.*, vol. 12, n.º 3, pp. 368-374, jun. 1996, doi: 10.1109/70.499819.
- [111] M. Zinn, O. Khatib, y B. Roth, «A new actuation approach for human friendly robot design», en *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004*, 2004, vol. 2004, n.º 1, pp. 249-254 Vol.1, doi: 10.1109/ROBOT.2004.1307159.
- [112] C. Fitzgerald, «Developing baxter», en *2013 IEEE Conference on Technologies for Practical Robot Applications (TePRA)*, 2013, pp. 1-6, doi: 10.1109/TePRA.2013.6556344.
- [113] Z. Fu, J. Pan, E. Spyrakos-Papastavridis, X. Chen, y M. Li, «A Dual Quaternion-Based Approach for Coordinate Calibration of Dual Robots in Collaborative Motion», *IEEE Robot. Autom. Lett.*, vol. 5, n.º 3, pp. 4086-4093, jul. 2020, doi: 10.1109/LRA.2020.2988407.
- [114] A. De Luca, A. Albu-Schaffer, S. Haddadin, y G. Hirzinger, «Collision Detection and Safe Reaction with the DLR-III Lightweight Manipulator Arm», en *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2006, pp. 1623-1630, doi: 10.1109/IROS.2006.282053.
- [115] J. L. Caenen y J. C. Angue, «Identification of geometric», *IEEE Int. Conf. on. IEEE, Robot. Autom.*, pp. 1032-1037, 1990.
- [116] L. J. Everett y A. H. Suryohadiprojo, «STUDY OF KINEMATIC MODELS FOR FORWARD CALIBRATION OF MANIPULATORS.», pp. 798-800, 1988, doi: 10.1109/ROBOT.1988.12156.
- [117] C.-T. Cao, V.-P. Do, y B.-R. Lee, «A Novel Indirect Calibration Approach for Robot

- Positioning Error Compensation Based on Neural Network and Hand-Eye Vision», *Appl. Sci.*, vol. 9, n.º 9, p. 1940, may 2019, doi: 10.3390/app9091940.
- [118] Y. Cho, H. M. Do, y J. Cheong, «Screw based kinematic calibration method for robot manipulators with joint compliance using circular point analysis», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 60, n.º January 2018, pp. 63-76, 2019, doi: 10.1016/j.rcim.2018.08.001.
- [119] L. Ma, P. Bazzoli, P. M. Sammons, R. G. Landers, y D. A. Bristow, «Modeling and calibration of high-order joint-dependent kinematic errors for industrial robots», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 50, pp. 153-167, 2018, doi: 10.1016/j.rcim.2017.09.006.
- [120] J. Qi, B. Chen, y D. Zhang, «A Calibration Method for Enhancing Robot Accuracy Through Integration of Kinematic Model and Spatial Interpolation Algorithm», *J. Mech. Robot.*, vol. 13, n.º 6, pp. 1-10, dic. 2021, doi: 10.1115/1.4051061.
- [121] J. Hefele y C. Brenner, «<title>Robot pose correction using photogrammetric tracking</title>», en *Machine Vision and Three-Dimensional Imaging Systems for Inspection and Metrology*, 2001, vol. 4189, pp. 170-178, doi: 10.1117/12.417194.
- [122] A. Nubiola y I. A. Bonev, «Absolute calibration of an ABB IRB 1600 robot using a laser tracker», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 29, n.º 1, pp. 236-245, feb. 2013, doi: 10.1016/J.RCIM.2012.06.004.
- [123] P. Sanz, «Robotics: Modeling, Planning, and Control», *IEEE Robot. Autom. Mag.*, vol. 16, n.º 4, p. 101, 2009, doi: 10.1109/MRA.2009.934833.
- [124] N. A. Aspragathos y J. K. Dimitros, «A comparative study of three methods for robot kinematics», *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part B*, vol. 28, n.º 2, pp. 135-145, abr. 1998, doi: 10.1109/3477.662755.
- [125] K. Ji y T. C. Yih, «Inverse kinematic control of robots by applying the C-B notation», *IECON Proc. (Industrial Electron. Conf.)*, vol. 1, pp. 98-103, 1995, doi: 10.1109/iecon.1995.483340.
- [126] B. Karan y M. Vukobratović, «Calibration and accuracy of manipulation robot models-An overview», *Mech. Mach. Theory*, vol. 29, n.º 3, pp. 479-500, 1994, doi: 10.1016/0094-114X(94)90130-9.
- [127] B. W. Mooring, Z. S. Roth, y M. R. Driels, *Fundamentals of manipulator calibration*. Pergamon, 1991.
- [128] D. J. Bennett y J. M. Hollerbach, «Autonomous calibration of single-loop closed kinematic chains formed by manipulators with passive endpoint constraints», *IEEE Trans. Robot. Autom.*, vol. 7, n.º 5, pp. 597-606, 1991, doi: 10.1109/70.97871.
- [129] A. Nubiola y I. A. Bonev, «Absolute robot calibration with a single telescoping ballbar», *Precis. Eng.*, vol. 38, n.º 3, pp. 472-480, 2014, doi: 10.1016/J.PRECISIONENG.2014.01.001.
- [130] J. Santolaria, J. Conte, M. Pueo, y C. Javierre, «ROTATION ERROR MODELING AND IDENTIFICATION FOR ROBOT KINEMATIC CALIBRATION BY CIRCLE POINT METHOD», *Metrol. Meas. Syst.*, vol. 21, n.º 1, pp. 85-98, mar. 2014, doi: 10.2478/mms-2014-0009.
- [131] J. Santolaria, J. Conte, y M. Ginés, «Laser tracker-based kinematic parameter calibration of industrial robots by improved CPA method and active retroreflector», *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol. 66, n.º 9-12, pp. 2087-2106, jun. 2013, doi: 10.1007/s00170-012-4484-6.

- [132] J. Santolaria y M. Ginés, «Uncertainty estimation in robot kinematic calibration», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 29, n.º 2, pp. 370-384, abr. 2013, doi: 10.1016/j.rcim.2012.09.007.
- [133] Z. Roth, B. Mooring, y B. Ravani, «An overview of robot calibration», *IEEE J. Robot. Autom.*, vol. 3, n.º 5, pp. 377-385, oct. 1987, doi: 10.1109/JRA.1987.1087124.
- [134] K. Young y C. G. Pickin, «Accuracy assessment of the modern industrial robot», *Ind. Rob.*, vol. 27, n.º 6, pp. 427-436, 2000, doi: 10.1108/01439910010378851.
- [135] Y. Meng y H. Zhuang, «Autonomous robot calibration using vision technology», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 23, n.º 4, pp. 436-446, ago. 2007, doi: 10.1016/J.RCIM.2006.05.002.
- [136] H. Wang, S. Shen, y X. Lu, «A screw axis identification method for serial robot calibration based on the POE model», *Ind. Rob.*, vol. 39, n.º 2, pp. 146-153, 2012, doi: 10.1108/01439911211201609/FULL/XML.
- [137] H. N. Nguyen, J. Zhou, H. J. Kang, y Y. S. Ro, «Robot Geometric Parameter Identification with Extended Kalman Filtering Algorithm», *Commun. Comput. Inf. Sci.*, vol. 375, pp. 165-170, 2013, doi: 10.1007/978-3-642-39678-6\_28.
- [138] Y. Wu, A. Klimchik, S. Caro, B. Furet, y A. Pashkevich, «Geometric calibration of industrial robots using enhanced partial pose measurements and design of experiments», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 35, pp. 151-168, oct. 2015, doi: 10.1016/j.rcim.2015.03.007.
- [139] W. Khalil y S. Besnard, «Geometric calibration of robots with flexible joints and links», *J. Intell. Robot. Syst. Theory Appl.*, vol. 34, n.º 4, pp. 357-379, 2002, doi: 10.1023/A:1019687400225.
- [140] C. Lightcap, S. Hamner, T. Schmitz, y S. Banks, «Improved Positioning Accuracy of the PA10-6CE Robot with Geometric and Flexibility Calibration», *IEEE Trans. Robot.*, vol. 24, n.º 2, pp. 452-456, abr. 2008, doi: 10.1109/TRO.2007.914003.
- [141] G. Alici y B. Shirinzadeh, «A systematic technique to estimate positioning errors for robot accuracy improvement using laser interferometry based sensing», *Mech. Mach. Theory*, vol. 40, n.º 8, pp. 879-906, ago. 2005, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2004.12.012.
- [142] C. Gong, J. Yuan, y J. Ni, «Nongeometric error identification and compensation for robotic system by inverse calibration», *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, vol. 40, n.º 14, pp. 2119-2137, nov. 2000, doi: 10.1016/S0890-6955(00)00023-7.
- [143] A. Joubair y I. A. Bonev, «Non-kinematic calibration of a six-axis serial robot using planar constraints», *Precis. Eng.*, vol. 40, pp. 325-333, abr. 2015, doi: 10.1016/J.PRECISIONENG.2014.12.002.
- [144] A. Klimchik, S. Caro, y A. Pashkevich, «Optimal pose selection for calibration of planar anthropomorphic manipulators», *Precis. Eng.*, vol. 40, pp. 214-229, abr. 2015, doi: 10.1016/J.PRECISIONENG.2014.12.001.
- [145] A. Pashkevich, A. Klimchik, y D. Chablat, «Enhanced stiffness modeling of manipulators with passive joints», *Mech. Mach. Theory*, vol. 46, n.º 5, pp. 662-679, may 2011, doi: 10.1016/J.MECHMACHTHEORY.2010.12.008.

- [146] Wei Jing, P. Y. Tao, G. Yang, y K. Shimada, «Calibration of industry robots with consideration of loading effects using Product-Of-Exponential (POE) and Gaussian Process (GP)», en *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2016, vol. 2016-June, pp. 4380-4385, doi: 10.1109/ICRA.2016.7487636.
- [147] C. Dumas, S. Caro, S. Garnier, y B. Furet, «Joint stiffness identification of six-revolute industrial serial robots», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 27, n.º 4, pp. 881-888, ago. 2011, doi: 10.1016/J.RCIM.2011.02.003.
- [148] M. A. Meggiolaro, S. Dubowsky, y C. Mavroidis, «Geometric and elastic error calibration of a high accuracy patient positioning system», *Mech. Mach. Theory*, vol. 40, n.º 4, pp. 415-427, abr. 2005, doi: 10.1016/J.MECHMACHTHEORY.2004.07.013.
- [149] Joon Hyun Jang, Soo Hyun Kim, y Yoon Keun Kwak, «Calibration of geometric and non-geometric errors of an industrial robot», *Robotica*, vol. 19, n.º 3, pp. 311-321, may 2001, doi: 10.1017/S0263574700002976.
- [150] M. Abderrahim y A. R. Whittaker, «Kinematic model identification of industrial manipulators», *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 16, n.º 1, pp. 1-8, feb. 2000, doi: 10.1016/S0736-5845(99)00038-1.
- [151] R. P. Judd y A. B. Knasinski, «A technique to calibrate industrial robots with experimental verification», *IEEE Trans. Robot. Autom.*, vol. 6, n.º 1, pp. 20-30, 1990, doi: 10.1109/70.88114.
- [152] «Robot KUKA KR 5 sixx: technical datasheet», *KUKA KR 5 sixx*. [En línea]. Disponible en: <https://www.kuka.com/>. [Accedido: 28-dic-2021].
- [153] «Api Metrology - Active Target». [En línea]. Disponible en: <https://apimetrology.com/active-target/>. [Accedido: 24-may-2021].
- [154] D. M. Mount y N. S. Netanyahu, «Efficient randomized algorithms for robust estimation of circular arcs and aligned ellipses», *Comput. Geom. Theory Appl.*, vol. 19, n.º 1, pp. 1-33, jun. 2001, doi: 10.1016/S0925-7721(01)00009-8.
- [155] Z. Wang, «Program Synthesis with Algorithm Pseudocode Guidance», en *2021 36th IEEE/ACM International Conference on Automated Software Engineering (ASE)*, 2021, pp. 1391-1393, doi: 10.1109/ASE51524.2021.9678657.
- [156] R. Aggarwal, R. Sengupta, S. Jain, S. Sachan, y N. V. Pujari, «Speak Pseudocode2c : A framework to convert customized pseudocode to c code», en *2022 3rd International Conference for Emerging Technology (INCET)*, 2022, pp. 1-7, doi: 10.1109/INCET54531.2022.9824336.
- [157] FARO, «FARO Laser Tracker ION™». [En línea]. Disponible en: [https://knowledge.faro.com/Hardware/Laser\\_Tracker/Tracker](https://knowledge.faro.com/Hardware/Laser_Tracker/Tracker). [Accedido: 18-may-2022].
- [158] 7D Kinematic Metrology, «Indoor GPS (iGPS)». [En línea]. Disponible en: <https://7dkmetrology.com/7dk-1/about>. [Accedido: 24-may-2021].