Parte II

Anexos

Anexo A

Nociones matemáticas

A.1. Nociones de topología, geometría y geometría diferencial

De manera informal, la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas. En otras palabras, bajo estas transformaciones, hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y viceversa; se asume además que la transformación hace corresponder puntos próximos a puntos próximos. Estas propiedades exigen que las transformaciones tengan inversas y que ambas sean continuas. Es decir, que las transformaciones con las que trabajemos sean homeomorfismos. Propiedades típicas de los objetos topológicos son la conectividad, compacidad, etc. es decir, las propiedades de los objetos que permanecen invariables bajo un estado de deformación constante.

Para el topólogo un círculo es equivalente a una elipse y una esfera no se distingue de un cubo: son parejas de objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible (ver Fig. A.1). Pero, por ejemplo, una circunferencia no es lo mismo que un segmento, ya que habría que partirla por algún punto.

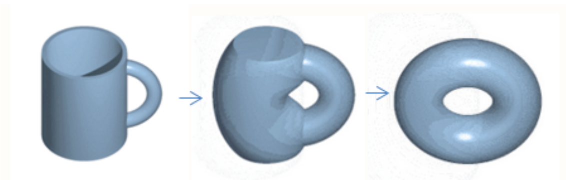

Figura A.1: Transformaciones topológicas.

Una de las ramas más interesantes de la topología se centra en el estudio de variedades. Muy básicamente, una variedad topológica de dimensión n es un objeto topológico que en cada punto posee un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Esto es, una variedad puede ser entendida por el conjunto de parches que la recubren, que denominamos cartas locales, y estas son similares a espacios vectoriales de la misma dimensión. Una variedad topológica localmente tendrá la estructura topológica de $\mathbb{R}^n$.

Definición. El espacio topológico M es una variedad topológica de dimensión n si para cada punto $x \in M$ existe un entorno de x que denominamos U, entorno de x, homeomorfo mediante $\phi : U \to V$ a un abierto V de $\mathbb{R}^n$. La familia $\{(U_x, \phi_x),\ x \in M\}$ recubre M es para todo x,

$$\bigcup_{x \in M} U_x = M$$

Definición. Un espacio topológico es metrizable o es un espacio métrico si es posible definir sobre él una función distancia $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que cumple una serie de propiedades matemáticas (es definida positiva, bilineal, simétrica, reflexiva y cumple la identidad triangular). De las propiedades de los espacios métricos se ocupa una rama de las matemáticas llamada geometría.

El topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero de modo distinto: no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera en la alineación de los puntos. La geometría dos objetos serán equivalentes mientras podamos transformar uno en otro mediante isometrías (rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc.), es decir, mediante transformaciones que conserven medidas de distancia, como ángulos, longitudes, áreas, etc.

El estudio de los objetos geométricos ha evolucionado a lo largo de la historia de las matemáticas según se iban aplicando métodos cada vez más sofisticados a su estudio. Podemos distinguir: (1) *Geometría clásica*, como la geometría euclídea (Euclides, s. V), que se centra en el estudio de las relaciones entre formas, volúmenes, áreas, distancia, ángulos,. . . . utilizando estrategias propias de la aritmética (sumas, cocientes de proporcionalidad, etc.) y la Geometría algebraica, que fusiona métodos del álgebra y la geometría, buscando soluciones de ecuaciones algebraicas a través de la forma geométrica de ciertas ecuaciones, y viceversa); (2) *Geometría moderna*, como la geometría analítica (Descartes, s. XVI), que fusiona los resultados de la geometría euclídea y algebraica, definiendo un marco de estudio de las figuras geométricas mediante técnicas básicas del análisis matemático a partir de su representación en un sistema de coordenadas cartesiano. A partir de este modo de representación, surgen la geometría diferencial (Gauss, s. XIX), que introduce en el estudio de la geometría las herramientas del cálculo diferencial, lo que permite estudiar y calcular diferencialmente curvas y superficies geométricas; y la geometría vectorial (Hamilton, s. XIX), donde se utilizan las herramientas y operaciones del cálculo vectorial (producto escalar, producto vectorial, gradiente, etc.) para representar transformaciones o movimientos geométricos. En la actualidad, las herramientas más potentes para el estudio geométrico de un objeto resultan de la combinación de métodos diferenciales sobre el mismo y de la representación de sus transformaciones en términos de campos vectoriales. De este modo, dos disciplinas con sus andamiaje matemático correspondiente se combinan para el análisis de objetos matemáticos complejos: las variedades diferenciables.

Definición. Una variedad topológica la llamamos diferenciable si cumple propiedades de suavidad y continuidad, es decir, condiciones que admiten la definición de funciones diferenciables sobre la variedad. Podemos extender, dadas estas funciones, las nociones de cálculo diferencial que normalmente usamos en $\mathbb{R}^n$ y aplicarlas sobre la variedad. El estudio de la geometría en variedades diferenciables se conoce como como geometría diferencial. Esto es, esta rama se centra en el estudio de la extensión del cálculo (diferencial) a variedades topológicas.

Definición. En una variedad diferenciable, las cartas locales en cada punto $p \in M$ se denominan espacios tangentes T_pM y, por tanto, todo vector tangente a una variedad en un punto V_p, es un punto de su espacio T_pM.

Tal como hemos dicho, las transformaciones de una variedad diferenciable pueden ser analizadas también a través del análisis de los vectores tangentes sobre su superficie, aprovechando los métodos del cálculo vectorial. Ambos mundos (cálculo diferencial y cálculo vectorial) se combinan gracias a la posibilidad de un sistema de representación en coordenadas en el entorno de cada punto sobre la superficie del objeto.

Definición. Llamamos campo de vectores X de una variedad diferenciable M a una correspondencia

$$X : M \to TM$$

que asigna a cada punto p de M un vector tangente X_p del plano T_pM.

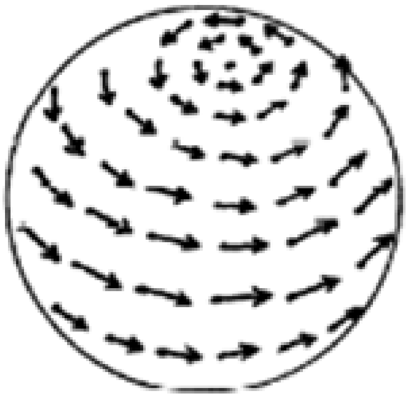

Figura A.2: Campo de vectores sobre la superficie de una esfera.

Por ejemplo, podremos aplicar transformaciones a una esfera y codificar la transformación en términos de resultados sobre el campo de vectores en su superficie (ver Fig. A.2).

Definición. Decimos que un campo de vectores X de una variedad diferenciable M es diferenciable si, para cada punto p, la aplicación entre la variedad y su espacio tangente $X : M \to TM$, es diferenciable.

Estas nociones, se completan cuando incluimos la posibilidad de expresar estos conceptos en términos de un sistema de coordenadas locales.

Sea U_p un entorno local de $p \in M$, y sea $V_p = (x_1, \ldots, x_n)$ la representación en coordenadas de un vector tangente en p en el plano tangente T_pM a la variedad. Sea X_p el campo X restringido al entorno coordenado U del punto p. Entonces podemos asegurar que:

Definición. Decimos que un campo de vectores X de una variedad diferenciable M es diferenciable si, para cada punto p, el campo tangente X puede expresarse como,

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|$$

donde a_i son funciones definidas en el entorno U_p, que cumplen la propiedad de ser diferenciables.

Concluyendo, para analizar variedades, podemos trabajar con estructuras matemáticas más sencillas como son los espacios vectoriales coordenados y las herramientas del cálculo vectorial, y siempre que se cumplan condiciones de diferenciabilidad básica, combinarlas con las herramientas del cálculo infinitesimal.

A.2. Simetrías en transformaciones geométricas, noción de grupo y representación matricial

De manera intuitiva, si tomamos un objeto geométrico, y aplicamos una operación o transformación al objeto que deje invariante cierta entidad o propiedad geométrica, a ésta se le denomina operación de simetría. El caso más sencillo es el de las isometrías.

Definición. Una isometría sobre un espacio métrico $i : M \to M$, es una isometría si conserva la distancia entre sus puntos.

Supongamos el espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea y nos preguntamos cuáles son todas las transformaciones geométricas que dejan invariante las distancias del conjunto, es decir, el conjunto de isometrías de $\mathbb{R}^n$. Estaría formado por sus: (1) traslaciones, (2) rotaciones y (3) reflexiones. El conjunto de todas las aplicaciones isométricas de un espacio métrico $\mathbb{R}^n$ (o de un conjunto contenido en él) constituye el conocido como grupo de isometría de $\mathbb{R}^n$, considerando la operación de grupo la composición de transformaciones. Introducimos a continuación unas nociones básicas sobre fundamentos de estructura de grupos para poder continuar con la explicación.

A.2.1. Estructura de grupo

En matemáticas, un grupo G es una estructura algebraica que consta de un conjunto y una operación binaria $\cdot$ que relaciona de cualquier pareja de los elementos del conjunto $a, b \in G$ con otro elemento del mismo (esto es, la operación es cerrada). Para que se pueda calificar como un grupo, el conjunto y la operación deben satisfacer algunas condiciones como tener la propiedad asociativa, tener elemento identidad y elemento inverso.

El orden en el que se hace la operación de grupo puede ser o no significativo. En otras palabras, el resultado de operar el elemento a con el elemento b no tiene que necesariamente coincidir con el resultado de operar b con a y la ecuación $a \cdot b = b \cdot a$ no ser siempre cierta.

Definición. Los grupos para los cuales la ecuación $a \cdot b = b \cdot a$ se cumple siempre se denominan abelianos o conmutativos.

La estructura de grupo conmutativo aparece de manera habitual en los elementos de la matemática cotidiana. Por ejemplo, la suma define una estructura de grupo conmutativo en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, en el de los números racionales $\mathbb{Q}$, en los números reales $\mathbb{R}$ y en los números complejos $\mathbb{C}$. Si consideramos el conjunto de los vectores libres del espacio, con la suma de vectores, también éste forma un grupo conmutativo. La suma de matrices define una estructura de grupo conmutativo en el conjunto de matrices con coeficientes reales y con un número de columnas y filas prefijado.

Ejemplos de grupo no conmutativos también existen aunque no son tan habituales en las matemáticas estándar. Por ejemplo, el conjunto de matrices cuadradas de dimensión n con coeficientes reales y determinante distinto de cero, considerando como operación el producto de matrices, constituyen un grupo que no cumple la propiedad conmutativa.

Otro ejemplo, relacionado con el inicio de esta sección, de grupo no conmutativo es el grupo de transformaciones isométricas del espacio euclídeo, considerando como operación en el grupo la composición de transformaciones. Para formalizar las ideas vistas hasta ahora, necesitamos introducir unas nuevas definiciones.

Definición. Dado un espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea, el conjunto de todas las rotaciones y reflexiones en el espacio (o en un tiene estructura de grupo denominado grupo ortonormal y designado como $O(n)$.

Definición. Dado un espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea, denominamos grupo de isometría G_{iso}, al conjunto de transformaciones con estructuras de grupo, que se obtiene a partir del producto del grupo ortogonal y el grupo de traslaciones,

$$G_{iso} \subseteq O(n) \times \mathbb{R}^n$$

En un grupo de isometría, la operación de grupo viene dada por la composición de isometrías, y el inverso de una operación de simetría es precisamente la operación que permite deshacer dicha transformación.

A.2.2. Representación matricial

Sean E y E' espacios vectoriales de dimensión n y sean dos bases $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $E' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Sea un vector e representado en coordenadas $e = \{x, \ldots, x_n\}$, entonces cualquier morfismo definido en el espacio

$$T : E \to E'$$
$$e \to e' = T(e)$$

puede expresarse en forma de matriz A donde la columna j de la matriz representa cómo actúa el morfismo T sobre la coordenada j de e, $T(x_j)$, representada en la base de $E' = \{e, \ldots, e'_n\}$.

Por ejemplo, sea un vector $e = \{x, x_2\}$ en $\mathbb{R}^2$, con una base en $E = \{e_1, e_2\} = \{(1,1), (0,1)\}$, y otra en $E' = \{e'_1, e'_2\} = \{(1,0), (0,-1)\}$. Sea un morfismo $T : E \to E'$, actuando sobre e, de modo $T(e) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$. Si calculamos $T(e_1)$, $T(e_2)$ y lo expresamos en términos de $\{e'_1, e'_2\}$ tendremos:

$$e_1 = (1,1) \to T(e_1) = (2,0) \; \textit{en la base de } E'$$
$$e_2 = (0,1) \to T(e_2) = (1,1) \; \textit{en la base de } E'$$

que expresado en columnas y en forma de matriz, quedaría:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que la transformación $e = (x_1, x_2) \to T(e) = (x'_1, x'_2)$ se expresa mediante la relación:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, cualquier transformación sobre un espacio vectorial de dimensión n puede ser entendida como la matriz que los representa. En particular, si consideramos el conjunto de trasformaciones que constituyen el grupo ortogonal de grado n (rotaciones y reflexiones) con la operación de composición , puede identificarse con el grupo de matrices n por n más la operación de grupo dada por la multiplicación de matrices, que dejan el origen fijo (esto es con determinante 1 o -1). A este grupo se le conoce como grupo de matrices ortonormales de dimensión n. Las transformaciones con determinante 1 se corresponderán con las rotaciones y las que tienen determinante -1 con las reflexiones.

Definición. Dado un espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea, el conjunto de todas las rotaciones y reflexiones en el espacio, esto es, el grupo ortonormal $O(n)$ es equivalente como grupo al conjunto de matrices ortonormales.

Definición. Las matrices n por n ortogonales con determinante 1 (que se corresponden con las rotaciones) forman un subgrupo de $O(n)$ conocido como el grupo ortogonal especial $SO(n)$.

En términos matemáticos, y por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, esto implica que existe una representación lineal (en forma de matriz) de cualquier rotación del grupo $SO(2)$

$$\textit{Rotación}(\varphi) \in SO(2) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Definición. En general, el grupo ortogonal especial $SO(n)$ no es conmutativo, salvo en el caso de dimensión 2, $SO(2)$, en el que, en composición de rotaciones, no importa el orden en que se realicen.

A.3. Nociones de Grupo de Lie y álgebra de Lie

En matemática, en un grupo de Lie (nombrado así por Sophus Lie) están presentes dos estructuras: una algebraica (determinada por las propiedades de la operación del grupo G) y otra diferenciable, la cual dota a la estructura anterior de estructura de variedad diferenciable G. Para que ambas estructuras sean compatibles simultáneamente, es necesario que la función que define la operación en el grupo cumpla ciertas propiedades.

Definición. Decimos que un grupo G es un grupo de Lie si la función que define la operación en el grupo (y, a partir de ella, la función asignación de inverso para cada elemento del grupo) sea diferenciable como función entre variedades.

$$\begin{aligned} \phi : G \times G &\to G \\ (g, g') &\to \phi(g, g') \end{aligned}$$

Algunos ejemplo de grupos de Lie son: $\mathbb{R}$ con la suma usual de reales, o el grupo $SO(n)$ si las rotaciones son continuas (esto es, los parámetros de rotación $\in \mathbb{R}$). Las propiedades de un grupo de Lie pueden quedar codificadas en términos de, lo que se conoce como, su álgebra de Lie asociada. Introduciremos a continuación el concepto de álgebra de Lie y su relación con el grupo de Lie asociado.

Definición. Decimos que un espacio vectorial V tiene estructura de álgebra de Lie, si además de las operaciones que lo definen como espacio (operación suma y operación producto por escalar, que cumplen la propiedad asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de nuestro y de inverso) posee otra operación que llamaremos operación producto (o corchete de Lie y que denotaremos $[\cdot, \cdot]$) que en lugar de cumplir la asociatividad usual verifica una relación llamada identidad de Jacobi. Matemáticamente, existe

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : V \times V &\to V \\ (v_!, v_1) &\to [v_1, v_2] \end{aligned}$$

tal que,

- $[v, v] = 0$, para todo v en V.
- $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$, para todo u, v, w en V (identidad de Jacobi).

La identidad de Jacobi muestra que, en general, un álgebra de Lie no cumple la propiedad asociativa. Combinando ambas condiciones, pueden reducirse a una única condición de "antisimetría", o anticonmutatividad, es decir que,

$$[v, w] = -[w, v]$$

Definición. En general, un álgebra es no asociativa, esto es,

$$[[A, B], C] \neq [A, [B, C]]$$

porque aplicando la identidad de Jacobi, se tiene que

$$[[A, B], C] = [A, [B, C]] - [B, [C, A]]$$

donde $[B, [C, A]]$ cuantifica lo que se separa de la asociatividad.

Definición. En general, un álgebra no es conmutativa, pues $[A, B] = -[A, B]$ donde $AB - BA$ cuantifica lo que la estructura se separa de ser conmutativa.

Veamos algunos ejemplos: un ejemplo sencillo de álgebra de Lie es el espacio vectorial $\mathbb{R}(n)$ de las matrices reales $n \times n$, $M(\mathbb{R}, n)$, con el producto estándar de matrices cumple la propiedad asociativa pero no conmutativa, es decir, que en general,

1. asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. no conmutativa: $(A \cdot B) \neq (B \cdot A)$, con $A, B \in M(\mathbb{R}, n)$

Otro ejemplo de estructura de álgebra de Lie, es el conjunto de vectores del espacio vectorial euclídeo en tres dimensiones con el producto vectorial $(\mathbb{R}_3, \times)$ puesto que la operación cumple:

- $a \times a = 0$
- $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c + b \times (a \times c)$

o de otro modo;

- $a \times b = -b \times a$

es un producto no conmutativo ni asociativo.

A.4. Algebra de Lie asociada a un grupo de Lie

Nos interesa estudiar un caso donde convergen las diferentes estructuras que hemos visto en este Anexo.

Dado un grupo de Lie G (que recordemos tiene estructura de variedad diferenciable W) y para cada punto $p \in W$, queremos analizar la relación que tiene con la estructura de álgebra de Lie en los espacios tangentes T_pW de la variedad W en cada punto p. Nos interesa conocer qué podemos obtener de una estructura (grupo de Lie) conociendo las propiedades de la otra (álgebra de Lie).

A cada grupo de Lie G (con estructura de variedad diferencial V), podemos asociar de manera natural un álgebra de Lie que captura totalmente la estructura local del grupo a partir de la definición de un campo de vectores fundamentales X en la variedad V. Veamos:

Definición. Dado un campo de vectores X de un grupo de Lie, el conjunto de vectores del campo X_p en un punto p constituyen un espacio vectorial T_pV.

Definición. El espacio vectorial T_pV para todo p de V, tiene estructura de álgebra de Lie con la operación corchete de Lie, definida como

$$[v1, v2] = v1v2 - v2v1$$

que se puede calcular a partir de las matrices de las trasnformaciones asociadas.

Definición. Para un entorno $U(p)$ en V y el espacio T_pV puede definirse un difeomorfismo (esto es una aplicación biyectiva diferenciable) que relaciona cada transformación sobre V en un vector de T_pV. Esta aplicación se conoce como mapeo exponencial $exp : T_pV \to V$, y es una generalización de la función exponencial para los números reales que puede expresarse en términos de matrices (recordemos que $M(\mathbb{R}, n)$ es homomorfo a un espacio vectorial de dimensión n).

Definición. Puede probarse que el mapeo exponencial preserva la estructura entre el grupo de Lie y su álgebra de Lie. Esto es, si consideramos una trasnformación en un grupo que mantengan su estructura invariante (es decir, asumimos transformaciones homomorficas que preserven su operación)

$$\begin{aligned} F : G &\to G' \\ g_1 &\to F(g_1) \\ g_2 &\to F(g_2) \end{aligned}$$

que preserve el producto es que cumple que:

$$F(g_1 g_2) = F(g_1)F(g_2)$$

En el caso de grupos de Lie consideraremos sólo aquellos homomorfismos "suaves" (diferenciables).

Para cualquier homomorfismo $F : G \to G'$ entre grupos de Lie (que preserve el producto), y si denominamos a sus correspondientes álgebras $T(G), T(G')$ (espacios tangentes alrededor de la identidad) existe un homomorfismo inducido $\phi : T(G) \to T(G')$ entre sus álgebras que preserva el corchete de Lie. La relación entre ambos (ϕ, F) viene dada por el mapeo exponencial, construido del siguiente modo:

Dado un camino cualquiera sobre la variedad V denotada $A(t)$, se le asocia el vector velocidad inicial, $A'(t = 0)$ que pertenece al espacio tangente T_pV.

$$A(t) = exp(t \cdot A'(t))|_{t=0}$$

Esta es la gran aportación de Sophus Lie, relacionar el vector tangente a un piunto con el vectr velocidad del movimiento generado por una transformación sobre la variedad. De este modo, mirando comportamientos sobre elementos infinitamente cercanos a las trasnformaciones identidad, podemos inferir el comportamiento de elementos ordinarios. Es decir, podemos inferir propiedades del grupo de Lie a partir de las propiedades de sus espacios tangentes.

A.4.1. Método operativo entre álgebras y grupos de Lie

Dada una acción φ de un grupo de transformaciones G sobre una variedad S, esencialmente cuantifica cómo actúa esa operación sobre una variedad ("cuantifica" si la deja idéntica o la cambia y cuánto).

$$\begin{aligned} \varphi : G \times S &\to S \\ (g, s) &\to \varphi_g(s) = s' \quad \forall s, s' \in S \end{aligned}$$

La acción del grupo sobre una variedad es un modo de medir "lo que la aplicación de una función de ese grupo aleja de dejar completamente invariante una variedad". ¿Y cómo se mide si la variedad ha cambiado mucho o poco?, ¿cómo se mide el cambio? La forma de hacerlo será a través de la definición de su derivada de la variedad. Si construyo un campo de vectores X^S que se esencialmente codifica la variación de la variedad, calcular qué valores toman estos vectores es conocer la variación. Que podamos en cierta manera "identificar X^S con S" es asumir que la variación ("infinitesimal") en la posición de un punto p cualquiera de la superficie de la variedad ("la unidad de cambio sobre la curva exponencial en la superficie) pueda ser sustituida por el efecto de aplicarle al punto p su vector tangente (unitario) V_p. Por tanto, se representa una transformación mediante el efecto que sufren los elementos de esa variedad al aplicarles dicha transformación.

Inspirados en la noción anterior, se define la acción π de un el álgebra L definida sobre un espacio vectorial TX como una forma de cuantificar cómo actúa la estructura de álgebra (esencialmente el corchete) sobre los vectores del espacio tangente en el que está definida.

$$\begin{aligned} \pi : L \times TX &\to TX \\ (a, v) &\to \pi_A(v) = [a, v] = v' \quad \forall v, v', a \in L(TX) \end{aligned}$$

Una forma de representar la acción de este álgebra en el espacio vectorial es mediante el efecto que tiene conmutar cualquier vector.

El resultado fundamental para poder utilizar la maquinaria matemática de las álgebras de Lie es que se cumpla la igualdad,

$$[X^S, Y^S] = [X, Y]$$

Según sea el valor del corchete, además el álgebra de Lie nos proporcionará un valor que "codifica" lo lejos o cerca que están de la conmutatividad.

A.5. Estructura de un grupo de Lie capturada a través de su álgebra

La estructura global de un grupo de Lie no está totalmente determinada, en general, por su álgebra de Lie (diferentes grupos de Lie comparten la misma álgebra de Lie).

Pero si requerimos que el grupo de Lie sea simplemente conexo, entonces la estructura global sí está determinada por su álgebra de Lie: para cada álgebra de Lie L hay un único grupo de Lie G simplemente conexo con L como álgebra de Lie. En estas condiciones, cada homomorfismo entre las álgebras de Lie se eleva a un homomorfismo único entre los correspondientes grupos de Lie simplemente conexos. Por ejemplo, El álgebra de Lie asociada a los grupos de Lie $O(n)$ y $SO(n)$ consiste en las matrices anti-simétricas reales n por n, con el corchete de Lie definido por el producto de matrices.

La información que no puede recuperarse de un grupo de Lie desde el álgebra de Lie es la información topológica, porque desde la información que revela un plano tangente no puede inferirse cómo los espacios tangentes "cubren", "envuelven" lejos del elemento identidad.

Veamos el siguiente ejemplo. El grupo $SO(2)$ de las rotaciones en el plano tiene la misma estructura que el grupo de los complejos de módulo fijo.

$$Rot(\theta) \leftrightarrow Z_{a+ib} = re^{-i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

Euler representó los números complejos en el plano y destacó el carácter geométrico de sus operaciones representados como rotaciones de radio unidad, en el plano (x, i). Si representamos los complejos geométricamente de mudulo fijo, e.g., $|z| = 1$, tenemos una estructura algebraica (un grupo bajo la operación multiplicación), dado que se cumplen las propiedades,

$$e^{-i\theta_1} e^{-i\theta_2} = e^{-i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$(e^{i\theta})^{-1} = (e^{-i\theta})$$

Consideremos ahora el conjunto

$$iR = \{ix : x \,\text{pertenece a}\, R, i \,\text{es la unidad imaginaria}\}$$

Si definimos la función exponencial entre

$$\begin{aligned} exp : iR &\to S^1 \\ ix &\to exp(ix) = \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

podemos interpretar que la recta iR es la tangente a S^1 en su elemento identidad (ver Fig. A.3).

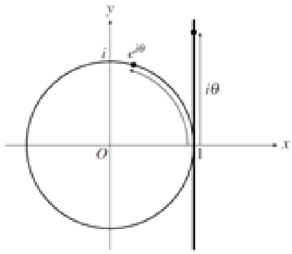

Figura A.3: Ejemplo de función exponencial.

Puede verse que cualquier punto ix con diferentes valores de x queda mapeado al punto $\cos x + i \sin x$ mediante la longitud de arco x. La función, por tanto, preserva las longitudes de arcos suficientemente pequeños.

La relación entre la exponencial y las rotaciones (vía los números complejos) es la razón de que podamos mediante esta función vincular líneas rectas a líneas curvas. Esto muestra que el grupo$SO(2)$ y sus propiedades (esencialmente, la combinación de rotaciones $e^{-i\theta_1}e^{-i\theta_2} = e^{-i(\theta_1+\theta_2)}$) queda completamente capturado por la operación suma del espacio tangente $x + y$, a través de la función exponencial $e^x e^y = e^{(x+y)}$.

Lo interesante es que este espacio tangente tiene una operación extra llamada corchete de Lie que es capaz de medir, de extraer, el contenido no-conmutativo de la operación de grupo: como $SO(2)$ es conmutativo, el corchete de Lie asociado a su espacio tangente es nulo. Si no lo fuera, saldría un valor no nulo.

La pérdida de información se puede ver en los casos de $\mathbb{R}$, $O(2)$, $SO(2)$, ya que todos tienen el mismo espacio tangente (una línea recta) (ver Fig. A.4).

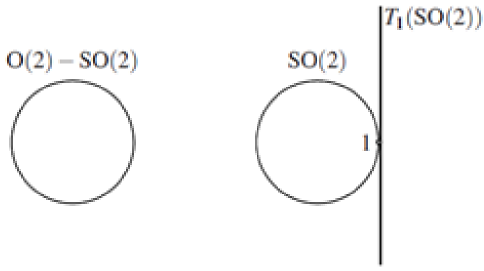

Figura A.4: Espacios tangentes de O(2) y SO(2).

Es interesante saber por qué tienen el mismo espacio tangente: aquellos elementos de$O(2)$ que no están en SO(2)

- O(n) es isomorfo al grupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$ que dejan el origen fijo (rotaciones y reflexiones) .
- SO(n) es isomorfo al grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^n$ que deja el origen fijo (rotaciones).

Estos elementos (reflexiones) están lejos de la identidad y por tanto no influyen a la hora de calcular el espacio tangente (sólo las rotaciones).

El espacio tangente (considerado como un espacio vectorial) tiene la misma estructura que R: la suma de vectores tangentes es la suma de números, y el producto por escalares es la multiplicación real).

El espacio tangente tiene también una operación (corchete de Lie) pero no es interesante porque para cualquier pareja, x, y perteneciente a $\mathbb{R}$, $[x, y] = 0$.

Por tanto, tenemos varios grupos de Lie, $\mathbb{R}$, $O(2)$, $SO(2)$, con el mismo ágebra, pero ni $O(2)$ ni $SO(2)$ son simplemente conexos mientras que $\mathbb{R}$ sí o es. Y estas propiedades topológicas se diluyen cuando de un grupo de Lie generamos un álgebra de Lie.

¿Cómo obtenerla al reconstituir el grupo desde el álgebra? Sólo será posible si G es simplemente conexo (Fijémonos que antes sólo R queda completamente identificado por su espacio tangente). Sólo, existe un homeomorfismo (isomorfismo diferenciable) entre grupos de Lie "simplemente conexos" que induzca otro entre sus correspondientes álgebras que conserve las estructuras correspondientes.

A.5.1. Algebras de Lie asociativas y métricas sobre un álgebra

Aunque, en general, todo Álgebra de Lie es no-conmutativa y no-asociativa puede probarse que dada cualquier álgebra de Lie sobre una variedad de dimensión n, existe un isomorfismo entre una subálgebra asociativa de Lie y el álgebra de matrices $M(E)_{n\times n}$.

Matemáticamente, sea un álgebra de Lie a $(AL, [\cdot,\cdot])$ a la que hacemos cociente con su parte no asociativa, lo que puede considerarse un álgebra asociativa

$$AL \,/\, \text{no-asociativa} \leftrightarrow \text{Álgebra asociativa } (A, [\cdot,\cdot])$$

en estas condiciones puede asegurarse que todo álgebra asociativa es isomorfa al álgebra de las transformaciones lineales y podemos hacer la siguiente equivalencia,

Definición. Dada un álgebra asociativa $(AL, [\cdot,\cdot])$ $\forall a \in A$ (esto es, la parte asociativa de cualquier AL) se le puede asociar un morfismo φ_a definido del siguiente modo,

$$\begin{aligned} \varphi_a : A &\to a \\ x &\to [x, a] \end{aligned}$$

que se denomina "morfismo adjunto de a". Como para cualquier espacio vectorial E dado, su espacio de endomorfismos sobre E

$$L(E) = \{\varphi : E \to E \text{ lineales}\}$$

es equivalente al espacio de las matrices $M(E)_{n\times n}$

$$M(E)_{n\times n} = \{M(E) \text{ asociadas a } \varphi : E \to E \text{ lineales}\}$$

tenemos un modo isomórfico de tratar con elementos $a \in AL$ sobre un espacio de dimensión n como si fuesen matrices $M(E)_{n\times n}$.

Para ello necesitamos introducir dos conceptos adicionales:

1) Métrica natural en el espacio de matrices $M(E)_n$

Además de la métrica más conocida (producto escalar en $\mathbb{R}^n = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ donde $g(e, e') = (x_1 \cdot x'_1 + x_2 \cdot x'_2 + \cdots + x_n \cdot x'_n)$ otra de las métricas más importantes es la que se define sobre el "espacio de las matrices cuadradas de dimensión n", que denotamos como $M(E)_n$.

$M(E)_n$ es un espacio vectorial, tendremos modo de construir una base $M(E)_n = \langle M_1, M_2, \ldots, M_n\rangle$, y queremos definir una métrica de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} g : M(E)_n \times M(E)_n &\to \mathbb{R} \\ (A, B) &\to Tr[A^T \cdot B] = Tr(A \cdot B) \end{aligned}$$

$A^T = A$, si A es una matriz ortogonal.

Puede probarse que:

- g cumple las condiciones de métrica

- respeta la estructura de espacio vectorial, esto es, $g(aA + bB, C) = a \cdot g(A, C) + b \cdot g(B, C)$
- respeta la propiedad asociativa $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, puesto que

$$Tr[(A \cdot B), C)] = Tr[A, (B \cdot C)]$$

  aunque, en particular, no la conmutativa $A \cdot B \neq B \cdot A$

2) Espacio dual y representación adjunta

Dado un espacio vectorial $E = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$se puede definir un espacio dual asociado de la misma dimensión $E^\star$ formado por enfomorfismos lineales de modo,

$$\begin{aligned} e^\star : E &\to \mathbb{R} \\ e &\to e^\star(e) = \lambda \end{aligned}$$

en particular se define una base de $E^\star = \langle e_1^\star, \dots, e_n^\star \rangle$ de modo que la base se obtenga a partir de la base original como

$$\begin{aligned} e_j^\star : E &\to \mathbb{R} \\ e_i &\to e_j^\star(e_i) = 1 \quad \text{si } i = j, 0 \text{ en caso contrario} \end{aligned}$$

Ambos espacios (E y su dual $E^\star$) son isomorfos.

Puede probarse que todo espacio vectorial tiene una métrica definida a partir de su espacio dual del siguiente modo, si dados $E, E^\star$ definimos el morfismo que asocia

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \to & E^\star \\ e & \to & \varphi_e : E \to \mathbb{R} \\ & & \quad e' \to \varphi_e(e') \end{array}$$

el valor concreto vendrá en términos de la expresión de sus coordenadas, esto es

$$\varphi_e(e') = e(e')$$

donde donde $e = \{x_1, \dots, x_n\}$, $e' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ en la base $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Es decir, podemos definir de manera natural una forma bilineal en un espacio E, de modo

$$\begin{aligned} g : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (e, e') &\to g(e, e') = \varphi_e(e') \end{aligned}$$

Definición. Dado un vector e, el morfismo $\varphi e(\cdot)$ se denomina su representación adjunta.

A partir de las nociones anteriores, podemos construir el grafo siguiente,

$$\begin{array}{rcl} g : M(E)_n \times M(E)_n & \to & \mathbb{R} \\ (A, B) & \to & g(A, B) = Tr(A \cdot B) \\ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \\ g^\star : AL \times AL & \to & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \to & g^\star(X, Y) = Tr(M_{\varphi_X}, M_\varphi) \end{array}$$

a partir de la identificación $X \leftrightarrow \varphi_X$, $Y \leftrightarrow \varphi_Y$, donde, según la representación dual,

$$\begin{aligned} \varphi_X : AL &\to AL \\ Z &\to [X, Z] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_Y : AL &\to AL \\ Z &\to [Y, Z] \end{aligned}$$

llevan asociadas sendas matrices M_{φ_X} , M_{φ_Y}.

¿Qué interés tiene esta métrica en un álgebra de Lie? Recordemos a la propiedad de permutación cíclica de la traza

$$Tr[(A \cdot B, C)] = Tr[C, (A \cdot B)] = Tr[B \cdot (C \cdot A)]$$

puede demostrarse que, si las matrices se corresponden con elementos de un álgebra de Lie, es lo mismo que decir que la métrica $g^\star$ cumple

$$g^\star([X, Y], Z) = g^\star(X, [Y, Z])$$

es decir, la métrica respeta las propiedades del álgebra (respeta la propiedad asociativa).

Tenemos una métrica bien definida (a partir de la representación adjunta de un álgebra) que respeta las propiedades del corchete. Esta métrica se denomina la forma de Killing K del álgebra (veáse siguiente sección).

A.6. Ortonormalidad de una base en un álgebra de Lie

Hasta el momento, hemos logrado obtener una base de generadores del espacio tangente intersección,

$$T\varphi(M_0, E) \cap T\varphi(M, E_0)$$

que sea una base es que tenemos $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ n vectores linealmente independientes siendo la n la dimensión del espacio.

Nuestro objetivo ahora es encontrar una nueva base que sea ortonormal, esto es

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u \rangle \text{ tal que } u_1 \perp u_2 \perp \cdots \perp u_n$$

Esto exige

1. tener una métrica en el espacio vectorial del álgebra
2. definir qué significa la ortonormalidad dada esa métrica: se define en un espacio vectorial que es también un álgebra de Lie y debe respetar la estructura de álgebra (esto es, la ortonormalidad debe preservar el corchete).

Por esta razón, cuando decimos en general que una métrica $g(u_1, u_2)$ en un espacio vectorial, cumple, permite saber cuando $u_1 \perp u_2 = 0$, es porque sabemos qué operaciones hacen que $g(u_1, u_2) = 0$.

A.6.1. Propiedades de las métricas

En general, una forma bilineal en un espacio vectorial es una aplicación que asocia a dos vectores un escalar (supongamos en R), por ejemplo:

$$\begin{aligned} g : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (e, e') &\to f(e, e') = r \end{aligned}$$

Las formas lineales más comunes sirven para definir una métrica en un espacio (el valor $g(e, e')$ en $\mathbb{R}$ es la "distancia" entre esos dos vectores e y e').

Definición. Para que una forma bilineal pueda denominarse métrica deben cumplirse algunas propiedades intuitivas y elementales como que,

- sea simétrica: $g(e,e')$=$g(e',e)$
- sea definida positiva $g(e,e') > 0$
- cumpla la desigualdad triangular $g(e,e') \leq g(e,e'') + g(e'',e')$ para todos $e, e', e'' \in E$

Si tomamos una base en $E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$, la forma bilineal puede quedar caracterizada en forma de matriz B,

$$\begin{pmatrix} g(e_1,e_1) & \cdots & g(e_1,e_n) \\ g(e_2,e_1) & \cdots & g(e_2,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(e_n,e_1) & \cdots & g(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Obviamente esta matriz no tiene el mismo significado que una matriz A de un morfismo en un espacio vectorial que nos habla de " cómo actúa esa operación sobre los elementos del espacio", $f : E \to E$.

Definición. Dado un espacio $E = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ con una métrica (E, g), diremos que dos vectores son ortogonales (en esa base), si se cumple que

$$g(e', e) = 0$$

En espacios métricos, se tienen algunas propiedades que resumimos a continuación:

- La matriz de una métrica siempre admite diagonalización
- Por el punto anterior, todo espacio métrico admite una base ortonormal en la que expresar la métrica
- En este caso, la expresión diagonal de la matriz de una métrica nos dice que en la base encontrada, cada vector es ortogonal con todos los restantes menos con él mismo. Los autovalores son distintos pero puede normalizarse la base para que se obtenga unitaria

$$\begin{pmatrix} g(e_1,e_1) & \cdots & g(e_1,e_n) \\ g(e_2,e_1) & \cdots & g(e_2,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(e_n,e_1) & \cdots & g(e_n,e_n) \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 11 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Definición. Extendiendo el punto anterior, dado un (E, g) y un dado un subespacio $E' \subset E$, diremos que este subespacio es ortogonal a E si todos sus vectores son ortogonales al conjunto completo de vectores de E, es decir,

$$E' = \{x \in E' \ / \ g(x, y) = 0 \quad \forall y \in E\}$$

Ejemplo: es difícil de visualizar porque en $\mathbb{R}^3$,$\mathbb{R}^2$,... el único subespacio ortonormal está formado por el vector nulo, $E' = \{0\} = (0, 0)$. Pero podríamos definir métricas donde esto no sucediese, por ejemplo: $\mathbb{R}^2$ con la métrica $g(e, e') = x \cdot x'$ (obsérvese que la métrica estándar sería el producto escalar que consiste en $g(e, e') = x \cdot x' + y \cdot y'$). En este caso, existe un espacio E'no nulo, puesto que $E' = \langle 0, 1 \rangle$.

En torno al subespacio ortogonal de un espacio métrico existen algunas propiedades y definiciones importantes:

- **Todo espacio métrico puede descomponerse en un subespacio y en su ortogonal.** Dado (E, g) y dado un subespacio cualquiera $E' \subset E$, se cumple que

$$E = E' \oplus E'^{\perp}$$

donde $E'^{\perp}$ es el espacio ortogonal de E'.

- **El radical de una métrica es como se conoce al subespacio ortonormal de la misma.** A su dimensión se le conoce como la nulidad de la métrica.

$$rad(g) = \{x \in E \,/\, g(x, y) = 0 \quad \forall y \in E\}$$

$$nulidad = dim(rad(g))$$

Por todo lo anterior, dado un espacio métrico, se puede asegurar que

$$dim(rad(g)) = dim(E) - rango(B)$$

siendo B la matriz de la métrica.

Si es en forma de matriz diagonalizada en una base ortogonal, se tendrá (en un caso concreto):

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se ve que $dim(E) = 5$, $rango(B) = 3$ y $dim(rad(g)) = 2$ se refiere a la dimensión del espacio cuyos vectores, con respecto a cualquier vector de E, tiene distancia nula (como se ve, todos los de la base y ellos mismos, y por la linealidad de los espacios vectoriales, cualquier otro).

Kernel de un morfismo

Si recordamos la esencia del proceso de diagonalización de una matriz $B_{n\times n}$ (imaginemos $n = 3$ en $\mathbb{R}^3$), el proceso obtiene una nueva base en la que la matriz sólo presenta autovalores (valores en la diagonal).

Cada autovalor λ tiene asociado un autovector $u = (x, y, z)$ cuyas coordenadas se obtienen resolviendo la ecuación,

$$(x, y, z) \cdot B = \lambda \cdot Id \leftrightarrow (x, y, z) \cdot (B - \lambda \cdot Id) = 0$$

Es decir, los autovectores$u = (x, y, z)$ son los que "se anulan" mediante el morfismo $(B - \lambda \cdot Id)$.

Definición. Llamamos Kernel de un morfismo $\varphi : E \to E$, y denotamos $Ker(\varphi)$ a,

$$Ker(\varphi) = \{\varphi(e) = 0 \,/\, \forall e \in E\}$$

por tanto, podemos ver cada autovector como el generador del espacio Kernel del morfismo menos el correspondiente autovalor. Veámoslo con un ejemplo, si diagonalizamos la matriz A asociada a un morfismo $\varphi : E \to E$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cada autovector se obtiene,

$$\begin{aligned}(x,y,z)(A-4Id)=0 &\leftrightarrow Ker(\varphi-4)\\(x,y,z)(A-9Id)=0 &\leftrightarrow Ker(\varphi-9)\\(x,y,z)(A-0Id)=0 &\leftrightarrow Ker(\varphi)\end{aligned}$$

Conclusión: Una base del kernel de un morfismo se obtiene como los autovectores del espacio nulo de la matriz (que se obtiene a partir de la parte de la matriz diagonalizada que presente autovalores nulos).

Kernel de una métrica y base del kernel

Podemos extender el concepto anterior a la matriz de una métrica. Recuperamos el ejemplo anterior donde teníamos un espacio métrico (E,g) con una base ortogonal en la que la matriz B de la métrica se expresaba

$$\begin{pmatrix}3&0&0&0&0\\0&7&0&0&0\\0&0&6&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

y donde se conocía que $dim(E)=5$, $rango(B)=3$ y $dim(rad(g))=2$.

Por extensión y abuso de lenguaje podemos denominar al radical de la métrica

$$rad(g)=\{x\in E\ /\ g(x,y)=0 \quad \forall y\in E\}$$

como el Kernel de la misma, ya que consiste en un conjunto de vectores tales que vía la matriz métrica anulan a cualquier otro del espacio,

$$Ker(g)=\{x\in E\ /\ (x^T\cdot B\cdot y)=0 \quad \forall y\in E\}$$

En ocasiones le llamaremos el nullspace

$$Nullspace(g)=\{x\in E\ /\ (x^T\cdot B\cdot y)=0 \quad \forall y\in E\}$$

Definición. El subconjunto de autovectores asociados a los autovalores nulos constituyen una base del Kernel de la métrica. Si $\{e_1,\ldots,e_5\}$ son los autovectores de la matriz diagonalizada, el subconjunto $\{e_4,e_5\}$ es una base del kernel.

$$\begin{pmatrix}3&0&0&0&0\\0&7&0&0&0\\0&0&6&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\\e_4\\e_5\end{pmatrix}$$

No debe confundirse entre:

- por un lado tenemos una base ortogonal/ortonormal en el espacio (E,g) que es aquella en la que la matriz asociada a g es diagonal.
- por otro lado tenemos una base (subconjunto de la anterior) del espacio nulo de la métrica, que es el espacio ortonormal a cualquier elemento del espacio.

Normalmente el único vector del espacio ortonormal es el neutro, pero si no es éste el caso, tenemos una "base ortogonal del espacio ortogonal de la métrica".

¿Qué significado tiene el espacio nulo de una métrica?

Para tener una intuición vamos a relacionar el espacio nulo de una métrica con las proyecciones isométricas. Esto es, imaginemos un espacio $\mathbb{R}^3$ con un cilindro que se proyecta sobre $\mathbb{R}^2$ (ver Fig. A.5).

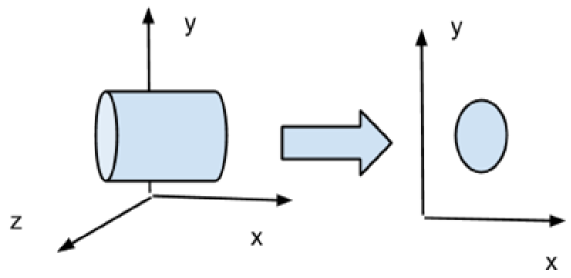

Figura A.5: Proyección de un cilindro en $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Denominamos isometría a una "proyección", esto es un morfismo entre los espacios

$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \to (x, y)$$

que "conserva la métrica", esto es,

$$\forall e, e' \in \mathbb{R}^3 \text{ se cumple que } p(g(e, e')) = g(p(e), p(e'))$$

Obsérvese que esta proyección isométrica puede entenderse como el paso al espacio cociente por el kernel (todo el espacio generado por el eje z queda reducido al valor nulo).

$$(E, g) \to (E\,/Ker(E)\;, g)$$

A.6.2. Métrica en un álgebra de Lie

Definición. Consideremos A un álgebra de Lie sobre un espacio E. Cada elemento X de A define un endomorfismo adjunto, que denotamos $ad(X)$ ó adX) del siguiente modo,

$$adX(Y) = [X, Y]$$

En esta estructura, la traza de la composición de dos endomorfismos define una forma bilineal,

$$K(X, Y) = Tr(ad(X)ad(Y)) = Tr([X, \cdot], [Y, \cdot])$$

que denominamos forma de Killing del álgebra.

Puede probarse que:

- La forma de Killing K es una métrica de E

- La forma de Killing conserva la propiedad asociativa del álgebra, por lo tanto es una métrica en A

$$K([x, y], z) = K(x, [y, z])$$

Espacio nulo de una métrica en un álgebra de Lie

Recordemos que la nulidad de una métrica g en (E, g) se definía como

$$rad(g) = \{x \in E \,/\, g(x, y) = 0 \quad \forall y \in E\}$$

que expresada en términos de matrices

$$Ker(g) = \{x \in E \,/\, (x^T \cdot B \cdot y) = 0 \quad \forall y \in E\}$$

Si diagonalizamos la matriz B de g, el subconjunto de autovectores asociados a los autovalores nulos constituyen una base del espacio nulo de la métrica.

Si $\{e_1, \ldots, e_5\}$ son los autovectores de la matriz diagonalizada del ejemplo anterior, el subconjunto $\{e_4, e_5\}$ es una base del espacio nulo.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{pmatrix}$$

¿Qué interés tiene esto si la métrica es la forma de Killing de un álgebra de Lie?

Puede probarse que el espacio nulo de la forma de Killing está relacionada con el subconjunto de elementos del álgebra que cumplen la regla de conmutatividad, por el siguiente teorema:

Teorema. Aunque en general, $\forall X, Y \in L$ no es cierto que $[X, Y] = XY - YX = 0$. Si existe un subálgebra $A \subset L$ conmutativa, es decir

$$\forall X \in A, \forall Y \in L \text{ se cumple que } [X, Y] = 0$$

sentonces este elemento $X \in A$ pertenece al espacio nulo de g

$$K(X, \cdot) = 0$$

Es decir, existe una equivalencia entre el subconjunto conmutativo de un álgebra y la nulidad de la forma de Killing sobre ese subconjunto de elementos.

Por ejemplo, el grupo $O(2)$, esto es, el conjunto de rotaciones y reflexiones en $\mathbb{R}^2$. Sabemos que las rotaciones conmutan (con ellas mismas y con las reflexiones) pero las reflexiones no. El espacio nulo de la forma de Killing estaría formado solamente por los vectores generadores de las rotaciones de $O(2)$.

Concluyendo: la base del espacio ortonormal (el espacio nulo de la forma de Killing) nos permite obtener generadores ortonormales con respecto a cualquier otro generador. Si lo vemos de nuevo en términos de una métrica,

$$\forall X \text{ tal que } K(X, \cdot 0), \text{ en particular al calcular su "distancia" frente a otro } Y \in L$$

$$g(X, Y) = K(X, Y)$$

lo que está midiendo es lo lejos que está X en su acción de conmutar completamente con Y. Es decir si $g(X, Y) = 0$, nos dice que su acción es completamente conmutativa.

Anexo B

Algoritmo

A continuación se muestra un esquema del código que se utiliza en esta memoria

B.1. Implementación del algoritmo [11]

Algoritmos	Utilidad	Funcionamiento general
1. differential	Algoritmo de cálculo del espacio tangente	Calcula una base del espacio tangente a través la ley sensomotora, viendo cómo varía S en su espacio tangente cuando nos movemos en entornos locales a un punto en el espacio tangente de M o E.
2. svd_differential	Algoritmo de bootstraping diferencial	Extrae unas bases de M y S según las cuales la acción de la ley sensomotora tangente actúa de forma diagonal. Al calcular la base del espacio tangente mediante el algoritmo *differential,* esta base (representada por una matriz) es lo más diagonal posible para facilitar cálculos posteriores que requieren de diagonalizaciones precisas. Para ello se utiliza un método de bootstraping que consiste en un refinamiento por iteración en la elección de las bases de M y S permitiend a la función *differential* devolver como resultado bases del espacio tangentes cada vez más diagonales en cada iteración.

Tabla B.1: Algoritmos implementados por [11].

B.1.1. Differential - Algoritmo de cálculo del espacio tangente

<table>
<tr>
<td>Parámetros de entrada (f, x, basis)</td>
<td>1. f: Función que simula la respuesta física sensomotora
2. x: Punto concreto de la variedad de partida (en torno al que nos moveremos localmente)
3. basis: Base sobre la que nos movemos localmente en esa variedad</td>
<td>Ejemplo: En el caso concreto de movernos en M, $S = \varphi(M, E_0)$
1. Es la función que simula las leyes psicofísicas que conectan los sensores con el mundo.
2. M_0de la variedad M
3. Base de dimensión arbitraria que genera los movimientos en torno a M_0</td>
</tr>
<tr>
<td>Proceso</td>
<td>1. Aplicación de la ley psicofísica en entornos locales del punto x para obtener variaciones diferenciales de S.
2. Estimación de la base del espacio tangente de la variedad de llegada (Dy) a partir de las variaciones diferenciales de S</td>
<td>En nuestro ejemplo:
1. Nos movemos diferencialmente en entornos locales de M_0 (es como movernos en el espacio tangente de M en M_0) y obtenemos pequeñas variaciones de S (como calcular las diferenciales de S en su espacio tangente en puntos muy próximos a S_0).
$$S_0 + dS = \varphi(M_0 + dM, E_0)$$
2. Utilizamos las pequeñas variaciones de S para estimar por regresión una base del espacio tangente de S.</td>
</tr>
<tr>
<td>Parámetros de salida (Dy,Dx)</td>
<td>1. Dy: Base del espacio tangente en la variedad de llegada en S_0
2. Dx: basis</td>
<td>$D_y \in \mathcal{M}_{90 \times dim(basis)}(\mathbb{R})$</td>
</tr>
</table>

Tabla B.2: Descripción del algoritmo *differential.*

B.1.2. Svd_differential - Algoritmo de bootstraping diferencial

Parámetros de entrada (f, x)	1. **f**: Función que simula la respuesta física sensomotora 2. **x**: Punto concreto de la variedad de partida (en torno al que nos moveremos localmente)	Ejemplo: en el caso concreto de movernos en M, $S = \varphi(M, E_0)$ 1. Es la función que simula las leyes psicofísicas que conectan los sensores con el mundo. 2. M_0de la variedad M
Proceso	8 iteraciones del siguiente proceso: 1. Cálculo del espacio tangente diferencial (mediante el algoritmo *differential*) 2. Diagonalización del espacio tangente mediante *SVD* 3. Actualización de base motora (P_x) y base motora base sensora (P_y) Al final se muestra un gráfico de barras con el resultado de cada iteración.	En nuestro ejemplo, queremos encontrar bases de M y S, tales que aplicadas al algoritmo differential den como resultado una base de $T\varphi(M, E_0)$ cada vez más diagonal. Se parte de bases P_x, P_y (de M y S) canónicas 1. Se aplica el algoritmo *differential* en las bases P_x (para moverse en torno a x) y P_y (para obtener las $S_0 + dS$ que utiliza el algoritmo *differential*) y se obtiene la base del espacio tangente (*df*). 2. Se diagonaliza *df* mediante SVD: $df = UMV^T$ 3. Se utilizan las matrices unitarias U y V para actualizar las bases P_xy P_y $P'_y = U^T \cdot P_y \quad P'_x = P_x \cdot V$ En cada iteración, la aplicación del algoritmo *differential* con estas nuevas bases, hace que el resultado *df* sea cada vez más próximo a M ($df = UMV^T$) que es diagonal.
Parámetros de salida (dy, df, dx)	1. dy: matriz de cambio de base sensora que permite a la ley sensomotora tangente actuar diagonalmente 2. df: Base del espacio tangente en la variedad S en S_0 3. dx: base generadora de movimientos en M que permiten que la ley sensomotora tangente actúe diagonalmente	1. 1. dy es la “buena” base sensora obtenida en la última iteración (P_y), es decir, la que produce una base del espacio tangente más diagonal al aplicar la ley sensomotora. 2. 2. df es la base del espacio tangente en la variedad S en S_0 obtenida por el algoritmo *differential* utilizando las bases dx de M y dy de S más refinadas (es decir, las obtenidas en la última iteración, P_x y P_y). 3. 3. dx es la “buena” base motora obtenida en la última iteración (P_x), es decir, la que produce una base del espacio tangente más diagonal al aplicar la ley sensomotora.

Tabla B.3: Descripción del algoritmo *svd_differential.*

B.2. Resumen de los detalles de implementación del entorno virtual

B.2.1. Estructuras matriciales

Estructuras matriciales	Notación matemática	Detalles
$W_M \in \mathcal{M}_{16\times 40}(\mathbb{R})$	$P = \boldsymbol{\varphi}_b(M)$ $\varphi_b : \mathbb{R}^{40} \to \mathbb{R}^{16}$	Representa la acción de las 40 neuronas motoras sobre los 16 parámetros del sistema motor del agente.: 5 por ojo (ángulos de rotación y dos obturadores) y ángulos de rotación y coordenadas de posición del cuerpo
$W_S \in \mathcal{M}_{90\times 90}(\mathbb{R})$	Morfismo de cambio de base T $T : \mathbb{R}^{90} \to \mathbb{R}^{90}$	Representa el sistema nervioso sensor y simula la conexión entre las 90 neuronas sensoras y los 90 sensores del organismo. Inicialmente será una matriz identidad (recordemos que el estado inicial del proceso de autoorganización sensorial considera una correspondencia biyectiva) de tamaño 90x90
$Conos \in \mathcal{M}_{2\times 40}(\mathbb{R})$	Matriz con coordenadas (x, y) de los 40 sensores de cada retina	Simula la posición aleatoria de los fotorreceptores de cada retina
$L \in \mathcal{M}_{3\times 6}(\mathbb{R})$	Coordenadas (x, y, z) de los 6 elementos del entorno	Representa las tres coordenadas de posición de cada uno de los 6 emisores de estímulos sensoriales del entorno. Los 4 primeros proporcionan estímulos de tipo visual y sonoro, y los 2 últimos proporcionan estímuilos de tipo visual y táctil (en forma de perturbaciones).
$P_0 \in \mathcal{M}_{16\times 1}(\mathbb{R})$	$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\varphi}_b(M)$	Representa la configuración corporal inicial.

Tabla B.4: Descripción de las estructuras matriciales utilizadas en la simulación.

B.2.2. Resumen de las leyes psicofísicas asociadas a los dispositivos sensores

Ley psicofísica	Notación matemática	Detalles
Ley psicofísica visual	La intensidad lumisosa total I^{lum} se calcula: $$I_i^{lum} = e^{-\frac{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2}{dist}}$$ $$I^{lum} = (d_1 + d_2) \cdot (I_1^{lum} + I_2^{lum} + \cdots + I_n^{lum})$$ Siendo I_i^{lum}la intensidad recibida cada el sensor de coordenadas sobre la retina (x, y) por parte de la fuente i, n el número total de fuentes, d_1 y d_2 las aperturas de los dos mecanismos obturadores, (x_0, y_0) las coordenadas de proyección de la fuente sobre la retina y $dist$ la distancia de la proyeción a la fuente	Simula la acción de los emisores lumínicos sobre la retina. Se calcula la proyección de cada fuente luminosa sobre la retina siguiendo el modelo de la cámara estenopeica suponiendo una distancia focal unitaria. La estimulación total que recibe cada sensor de la retina es la suma de las intensidad lumínicas de cada fuente reguladas por la acción de los “obturadores” que actúan de filtro del flujo luminoso.
Ley psicofísica auditivo	La intensidad total sonora I^{son} que recibirá cada antena será: $$I_i^{son} = \frac{1}{d} \cdot \frac{(z - z_i)}{\sqrt{(y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \cdot \frac{(z - z_i)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2}}$$ $$I^{son} = I_1^{son} + I_2^{son} + \cdots + I_n^{son}$$ siendo (x, y, z) las coordenadas de la antena, (x_i, y_i, z_i) las coordenadas de la fuente sonora i, siendo d la distancia de la fuente i a la antena y siendo I_i^{son} la intensidad recibida por la antena por parte de la fuente i y n el número total de fuentes sonoras.	Simula la acción de los emisores sonoros sobre las ”antenas” con un perfil de sensibilidad que favorece a las fuentes auditivas situadas frente a los dispositivos sensoriales (penalizando los cambios de orientación entre fuente y receptores).
Ley psicofísica táctil	La intensidad total táctil I^{tac} que recibirá cada flagelo será la suma de las intensidades proporcionadas por cada fuente generadora de perturbaciones: $$I^{tac} = \sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} + \cdots + \sqrt{d_n}$$ siendo d_i la distacia del flagelo a la fuente i y n el número total de fuentes generadoras de perturbaciones.	Simula el modo en que los ”flagelos” se ven afectados por perturbaciones del medio (debidas a la acción de los 2 emisores de perturbaciones del entorno), mediante el desplazamiento relativo a su posición de reposo. Ese desplazamiento es dependiente de la distancia del dispositivo con respecto a la fuente generadora de la perturbación a la que el sistema es sensible.

Tabla B.5: Descripción de las leyes psicofísicas asociadas a los dispositivos sensores.

B.3. Detalle de las etapas del algoritmo

B.3.1. Etapa 1: Condiciones iniciales

Subetapas	Notación matemática
1. Inicialización de estructuras matriciales	$W_M \in \mathcal{M}_{16\times 40}(\mathbb{R}),\ donde\ cada\ w_m \in [-1,1]$ $W_S \in \mathcal{M}_{90\times 90}(\mathbb{R}),\ donde\ W_S = I_{90}$ $Conos \in \mathcal{M}_{1\times 40}(\mathbb{R}),\ donde\ cada\ c_{ij} \in [-1,1]$ $L \in \mathcal{M}_{3\times 6}(\mathbb{R}),\ donde\ cada\ l_{1j}, l_{2j} \in [0,50],\ ycada\ l_{3j} \in [100,101]$ $P_0 \in \mathcal{M}_{16\times 1}(\mathbb{R})\ donde\ cada\ p_{ij}\ con\ valores\ predeterminados$
2. Definición de estructura neuronal motora inicial $M_0 \in \mathcal{M}_{40\times 1}(\mathbb{R})$	$M_0 = W_M^+ \cdot P_0$ donde W_M^+es la pseudoinversa de Moore–Penrose de W_M

Tabla B.6: Descripción de la etapa 1 del algoritmo.

B.3.2. Etapa 2: Obtención de una base de $T\varphi(M, E_0)$

Subetapas	Notación matemática	Detalles
1. Cálculo de un sistema generador de $T\varphi(M, E_0)$	$dS = T\varphi(M, E_0) \cdot dM_{M_0}$ El sistema generador se representa por una matriz *df* que es diagonal, por el refinamiento del algoritmo. Se generan nuevas matrices dS y dM, bases de S y M que hacen que la matriz df sea diagonal.	Se mueve el cuerpo dejando el entorno fijo, y asumiendo cambios locales lineales se calcula un sistema generador del espacio tangente $T\varphi(M, E_0)$ en forma diagonal. Además, se obtienen bases de M y S que usadas al aplicar la ley sensomotora permiten obtener un sistema generador del espacio tangente diagonal.
2. Diagonalización del espacio tangente y cálculo de su dimensión	$dim_m = dim(T\varphi(M, E_0)) = rango(df)$	Se calcula la dimensión de la base del espacio tangente contando los valores singulares no nulos de la matriz df. Para discriminar entre los valores nulos y no nulos de la matriz, se ordenan los valores propios de mayor a menor y se calcula el ratio entre dos valores propios sucesivos. El máximo de ese ratio muestra la frontera entre los valores singulares nulos y no nulos de la matriz.
3. Proceso de autoorganización sensomotora	$W'_S = dS^T \cdot W_S$	Se actualiza el morfismo de cambio de base sensora (W_S), que representa la autoorganización sensomotora que hace que la ley sensomotora actúe de manera diagonal.

Subetapas	Notación matemática	Detalles
4. Cálculo de de la base del espacio tangente $T\varphi(M, E_0)$	$dS' = T\varphi(M, E_0) \cdot dM'_{M_0}$ Siendo dM' un subespacio del dM obtenido por el algoritmo *svd_differential* pero de dimensión dim_m. Se obtiene la base del espacio tangente $T\varphi(M, E_0)$ serepresenta por una matriz	Ahora se reduce la dimensión del sistema generador para obtener una base del espacio tangente $T\varphi(M, E_0)$ de dimensión dim_m. Para ello se ejecuta el algoritmo *differential* para moverse solo en el espacio de los movimientos que son significativos sensorialmente. Se podría calcular la base de $T\varphi(M, E_0)$ sin la necesidad de volver a ejecutar el algoritmo *differential* (tal como se hace en la etapa 3.3) pero de esta forma se obtiene una base mucho más diagonal que será de utilidad a la hora de calcular su pseudoinversa en la etapa 5

Tabla B.7: Descripción de la etapa 2 del algoritmo.

B.3.3. Etapa 3: Obtención de una base de $T\varphi(M_0, E)$

Subetapas	Notación matemática	Detalles
1. Cálculo de un sistema generador de $T\varphi(M_0, E)$	$dS = T\varphi(M_0, E) \cdot dE_{E_0}$ El sistema generador se representa por una matriz *df* que es diagonal, por el refinamiento del algoritmo.	Se mueve el entorno dejando el cuerpo fijo, y asumiendo cambios locales lineales se calcula un sistema generador del espacio tangente $T\varphi(M_0, E)$ en forma diagonal (gracias a la reorganización sensomotora de la etapa 2.3) .
2. Diagonalización del espacio tangente y cálculo de su dimensión	$dim_e = dim(T\varphi(M_0, E)) = rango(df)$	Se calcula la dimensión de la base del espacio tangente contando los valores singulares no nulos de la matriz *df*..
3. Cálculo de de la base del espacio tangente $T\varphi(M_0, E)$	Por el SVD utilizado para obtener $rango(df)$ se tiene que $dS = UMV^T$. Por las propiedades de las matrices del SVD, las primerasdim_e columnas de U son una base de la imagen de df, es decir son la base del espacio tangente $T\varphi(M_0, E)$	Se reduce la dimensión del sistema de generadores de $T\varphi(M_0, E)$ para obtener su base. Por las propiedades del SVD ($df = UMV^T$) que las columnas de matriz U son una base del espacio de llegada de df. Como la dimensión del espacio tangente es dim_e, las primeras dim_e columnas de U son las que conforman una base de $T\varphi(M_0, E)$ definida en el mínimo número (dim_e) de variables del entorno significativas sensorialmente.

Tabla B.8: Descripción de la etapa 3 del algoritmo.

B.3.4. Etapa 4: Obtención de una base de $T\varphi(M_0, E) \cap T\varphi(M, E_0)$

Subetapas	Notación matemática	Detalles
1. Descomposición en valores singulares de la concatenación de las bases de los espacios tangentes $T\varphi(M_0, E)$ **y** $T\varphi(M, E_0)$	$A = [T\varphi(M_0, E) \mid T\varphi(M, E_0)]$ $A = UMV^T$	Se concatenan las bases de los dos espacios tangentes obtenidos hasta ahora y se realiza la descomposición en valores singulares.
2. Cálculo de la dimensión del espacio tangente suma	$dim_{suma} = dim(T\varphi(M_0, E) + T\varphi(M, E_0)) = rango(A)$	Se calcula la dimensión del espacio tangente suma, que es el espacio tangente asociado a la variedad S cuando tanto el entorno como el cuerpo se mueven.
3. Cálculo del espacio tangente intersección $T\varphi(M_0, E) \cap T\varphi(M, E_0)$	$dim_{int} = dim_m + dim_e - dim_{suma}$ $T\varphi(M_0, E) \cap T\varphi(M, E_0) = T\varphi(M_0, E) \cdot V_E$ Siendo V_E la matriz formada por las dim_e primeras filas de las últimas dim_{int} columnas de V.	Se obtiene la base del espacio tangente intersección $T\varphi(M_0, E) \cap T\varphi(M, E_0)$ a través del espacio nulo del espacio suma $T\varphi(M_0, E) + T\varphi(M, E_0)$, pues en las últimas dim_e primeras filas de las últimas dim_{int} columnas de V, están "apuntadas" las transformaciones necesarias para convertir el espacio $T\varphi(M_0, E)$ en el espacio nulo.

Tabla B.9: Descripción de la etapa 4 del algoritmo.

B.3.5. Etapa 5: Obtención de una base de vectores generadores de X^S

Subetapas	Notación matemática	Detalles
1. Extracción de una base generatriz del campo vectorial fundamental de S	$\{Vm\} = dM' \cdot T\varphi^{-1}(M, E_0) \cdot [T\varphi(M_0, E) \cap T\varphi(M, E_0)]$	Toda orden motora $M(t)$ que tenga consecuencias sensoriales en la intersección $T\varphi(M_0, E) \cap T\varphi(M, E_0)$ es una generador del campo X^S, es decir, si $\frac{d}{dt}\varphi(M(t), V) \in T\varphi(M_0, E) \cap T\varphi(M, E_0)$, entonces $M(t)$ es una orden motora generadora de X^S. Es posible recorrer el camino inverso porque tanto $T\varphi(M_0, E) \cap T\varphi(M, E_0)$ como $T\varphi(M, E_0)$ como dM' (obtenido en la etapa 2.4) se representan en forma de matriz. Se utiliza la pseudoinversa de la base de $T\varphi(M, E_0)$ para calcular su inversa $T\varphi^{-1}(M, E_0)$.

Tabla B.10: Descripción de la etapa 5 del algoritmo.

Bibliografía

[1] Bach-y-Rita P. (2004). ”Tactile sensory substitution studies.”. Annals of New York Academic Sciences, 1013:83–91.

[2] Beer, R. D. (2003). The dynamics of active categorical perception in an evolved model agent. Adaptive Behavior 11(4):209-243.

[3] Braitenberg, V. (1986). Vehicles: Experiments in Synthetic Psychology. Bradford Book; First Edition edition (February 7, 1986) ISBN-10: 0262521121

[4] Chaitin, G. J. (2002). The Limits of Mathematics: Springer, ISBN-10: 1852336684

[5] Engel, A. K., Maye, A., Kurthen, M., & König, P. (2013). The pragmatic turn in cognitive science. Trends in Cognitive Sciences, 17(5), 202–209.

[6] Held, R., & Hein, A. (1963) Movement-produced stimulation in the development of visually guided behaviour.Journal of Comparative and Physiological Psychology, 1963, Vol. 56, No. 5, 872-876

[7] Moreno, M., Aznar-Casanova, M. J.A. (2011). Neurocomputacion en el Sistema Visual Humano: Introducción al procesamiento de bajo nivel. Editorial Eae, ISBN-10: 3844338799, 2011

[8] Noë, A. (2004). Action in Perception. The MIT Press.

[9] O'Regan, J. K., & Noë, A. (2001). A Sensorimotor Theory of Perceptual Experience. Synthese, 129, 79–103.

[10] Philipona, D., O'Regan, J. K., & Nadal, J.-P. (2003). Is there something out there? Inferring space from sensorimotor dependencies. Neural Computation, 15(9), 2003.

[11] Philipona, D., O'Regan, J. K., Nadal, J.-P., & Coenen, O. J.-M. D. (2004). Perception of the structure of the physical world using unknown sensors and effectors. Advances in Neural Information Processing Systems, 15, 2004.

[12] Piaget, J. (2012). La equilibración de las estructuras cognitivas: problema central del desarrollo (primera edición 1978). Siglo XXI editores, ISBN 978-84-323-1625-8.

[13] Rohde, M. (2010) Enaction, Embodiment, Evolutionary Robotics. Simulation Models in the Study of Human Cognition. Atlantis Press, Amsterdam, Series: Thinking Machines.

[14] Vaina, L., (1990). From the retina to the neocortex: selected papers of David Marr. Boston: Birkhauser.

[15] Van Duijn, M., Keijzer, F., & Franken, D. (2006). Principles of Minimal Cognition: Casting Cognition as Sensorimotor Coordination. Adaptive Behavior 2006; 14; 157

[16] Von Uexküll, J. (2010). A Foray Into the Worlds of Animals and Humans: With a Theory of Meaning. University of Minnesota Press, 2010, ISBN-10: 0816659001

[17] Wagensberg, J. (1998). Ideas para la imaginación impura.Metatemas MT 54, Tusquets, ISBN: 978-84-8310-595-5.