



Universidad  
Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

**Introducción al concepto de derivada y su  
aplicación a la representación de  
funciones. Una propuesta para alumnos de  
1º de Bachillerato**

**Introduction to the concept of derivative  
and its application to function  
representation. A proposal for students of  
1º Bachillerato.**

Autor: Alberto Valtueña Pérez

Directora: Elena Gil Clemente

Facultad de Educación

Año 2022/2023

## Índice

1. Definición de derivada e interpretación geométrica .....	(3)
2. Estado de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de derivada .....	(5)
3. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se proponen .....	(18)
4. Razones de ser del concepto de derivada y problemas propuestos para su introducción	(20)
5. Conocimientos previos del alumno.....	(26)
6. Campo de problemas.....	(28)
7. Técnicas para el desarrollo de los campos de problemas.....	(44)
8. Tecnologías de las derivadas.....	(47)
9. Metodología de la propuesta.....	(50)
10. Secuencia didáctica y cronograma de sesiones.....	(51)
11. Evaluación.....	(54)
12. Conclusiones.....	(58)
13. Referencias.....	(59)
14. Anexos.....	(60)

### 1. Definición de derivada e interpretación geométrica

En este Trabajo de Fin de Máster abordaremos la introducción del concepto de derivada de una función en un punto, y su aplicación a la representación gráfica de esta función.

Para comenzar, definimos la derivada de una función  $f$  en un punto como:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

Este número mide lo que llamamos razón de cambio instantáneo de la función en este punto. Entendemos esto como la variación de  $f$  en los intervalos  $[a, a+h]$  cuando la amplitud del intervalo  $h \rightarrow 0$ .

La razón de cambio medio en un intervalo  $[a, a+h]$  tiene una clara interpretación geométrica, de tal manera que el cambio en dicho intervalo representa la pendiente de una recta secante a la curva y que pasa por  $((a, f(a))$  y  $(a+h, f(a+h))$

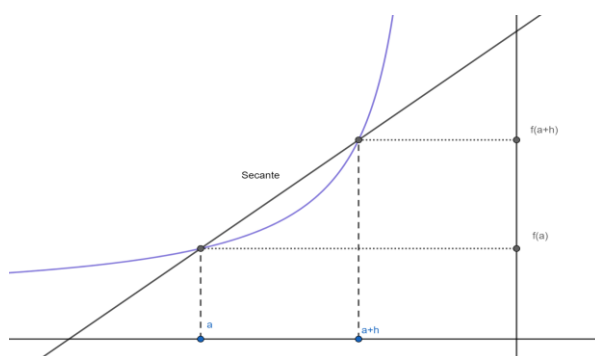


Figura 1: Recta secante a la función  $f$  en  $(a, f(a))$ ,  $(a+h, f(a+h))$

La razón de cambio instantáneo o derivada se puede interpretar como la pendiente de una recta tangente a  $f$  en  $x = a$ . Entendiendo esto como la posición límite de las rectas secantes anteriores:

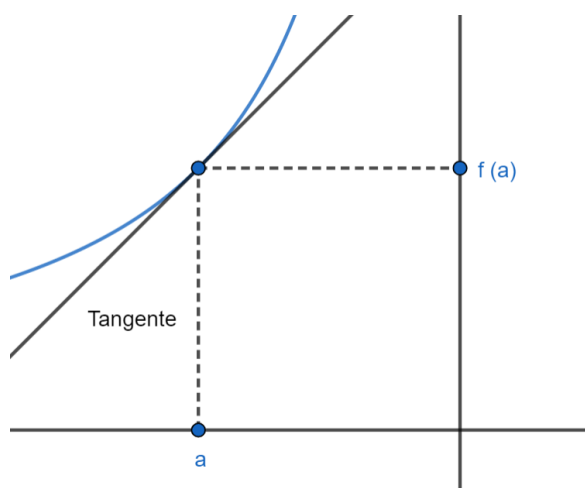


Figura 2: Recta tangente a una función en un punto  $(a, f(a))$ .

Esta definición de derivada y su interpretación geométrica tiene implicaciones para el estudio de la gráfica de la función. Se puede intuir que funciones crecientes en un intervalo tendrán razones de cambio positivas y que funciones decrecientes tendrán razones de cambio negativas. En este T.F.M. pretendemos profundizar en estas relaciones.

## **2. Estado de la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada**

La introducción de la derivada es fundamental en la enseñanza de las matemáticas, no solo por su utilidad, sino por su aplicación tanto en el entorno de nuestra asignatura, como para otras disciplinas, tales como física, química, tecnología, economía... El estudio de crecimiento y decrecimiento de las funciones es determinante en según qué ámbitos, y para hacerlo correctamente hemos de utilizar las derivadas, tal y como hemos introducido previamente. En este epígrafe estudiamos tanto como se propone el estudio de este concepto en el currículo LOMLOE vigente como en algunos libros de texto.

### **Análisis del currículo**

Para comenzar, veremos lo que el currículo actual (LOMLOE) dice acerca de la enseñanza de las derivadas. La derivada se presenta como una herramienta en el curso de 1º de bachillerato, tanto en la rama científica como social.

Comenzaremos por la opción científica. El primer momento en el que el currículo destaca el concepto de derivada es en el sentido de la medida. Como es comprensible, el fundamento del uso de las derivadas se basa en la medición de los cambios de magnitudes, factor que estudiaremos más adelante en las razones de ser.

De esta manera, se pretende utilizar la derivada como herramienta para estudiar la covariación entre dos magnitudes, apoyándose en nociones previas del curso anterior, como la continuidad y discontinuidad de una gráfica, la tasa de variación media y la pendiente de la recta tangente.<sup>1</sup>

a las nociones para el estudio del cambio en magnitudes asociados al sentido de la medida, aparecen el concepto de límite asociados a las ideas de aproximación y de tendencia (entendida como aproximación que mejora cualquier otra) y la continuidad y la derivada de una función en un punto, para estudiar cómo es la covariación entre dos magnitudes. Para ello, se apoyan en nociones ya presentadas en las asignaturas de 4º de ESO (como continuidad y discontinuidad de una gráfica, tasa de variación media y pendiente).

(pág. 21 )

Hay que tener en cuenta que la idea de derivada está estrechamente ligada al concepto de límite históricamente, ya que el cálculo de derivadas está en el origen del mismo. Se fomenta un acercamiento a la derivada con el concepto de velocidad como razón de cambio, utilizando la tasa de variación media y acotándola lo máximo posible hasta llegar a la tasa de variación instantánea. Visto de otra manera, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

---

<sup>1</sup> Los fragmentos que se extractan a continuación en este epígrafe provienen del *Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas del bachillerato. Indicaremos en cada extracto las páginas de que provienen.*

Debemos también tener en cuenta que el acercamiento que el alumno ha hecho a la recta tangente suele ser el geométrico en el que dicha recta es la que solo toca a la función en un punto, mientras que ahora se busca como el límite de la recta secante a la curva según los puntos secantes se aproximan infinitesimalmente.

Se recomienda utilizar programas de representación interactivos (como puede ser GeoGebra) para que los alumnos puedan manipular digitalmente las funciones con sus rectas asociadas y vean cómo varía en funcionamiento de las mismas según los puntos de tangencia se modifican y se aproximan.

La derivada también está estrechamente ligada a la idea de límite ya que la historia muestra que los fenómenos asociados al cálculo de derivadas (obtener tangentes, máximos y mínimos, etc.) fueron los que condujeron a la aparición del límite. Un primer acercamiento a la derivada puede realizarse a través del contexto físico de velocidad y tratar la pendiente de una recta, la velocidad media y la tasa de variación media (ya conocidos por el alumnado) hasta llegar a la velocidad instantánea, donde aparece la idea de proceso infinito y límite al calcular velocidades medias en intervalos (o, gráficamente, pendientes de rectas secantes) cada vez más pequeños (Azcárate et al., 1996). La recta tangente es un concepto ligado a la introducción de la derivada, hay que ser conscientes que las concepciones previas del alumnado sobre recta tangente suelen estar ligadas a la geometría sintética como recta que solo toca a la curva en un punto, mientras que la aproximación que se realiza ahora mediante la derivada la recta tangente aparece como límite de las rectas secantes a una curva. El empleo de software de representación de funciones como GeoGebra o Derive, mediante zooms, puede permitir articular las dos concepciones anteriores. Este tipo de software también puede permitir que el alumnado pueda visualizar la construcción de la función derivada de una función elemental dada, distinguiendo, de esta manera, la derivada en un punto y la función derivada

(pág. 22)

Además, se pretende alejar al alumno, al menos parcialmente, del estudio analítico de la derivada y queremos que se centre en su significado, mayormente geométrico. Para ello se recomienda incluir tareas de representación numérica, tabular o gráfica de las funciones, relacionándolas directamente con sus rectas tangentes en diversos puntos.

se recomienda para desarrollar una comprensión más completa de este saber, incluir en las secuencias de enseñanza tareas con representaciones numéricas o gráficas (sin expresiones analíticas), o tareas en las que se necesite coordinar informaciones proporcionadas en diferentes contextos o representaciones. Por ejemplo, dadas gráficamente dos funciones,  $f$  y  $g$ , preguntarse si existe alguna relación entre ambas o si una es derivada de la otra, explicando el por qué.

(pág. 22-23)

La derivada también se encuentra presente en el sentido algebraico. Se propone trabajar con distintas funciones, lo que permite a los alumnos ver la variada tipología a la que se pueden enfrentar. De la misma manera, las derivadas nos pueden ayudar en el trabajo de la tendencia de las funciones, utilizando representaciones tabulares y gráficas.

Se busca encontrar una relación directa de las funciones con sus derivadas, no sólo de manera analítica, sino principalmente de manera geométrica, para que se puedan comprender el verdadero significado de la herramienta que estamos utilizando. Proponemos introducirles situaciones reales con las que puedan sentirse identificados, como la relación velocidad - posición que ya habrán estudiado en física. [1]

Relacionar con estas funciones lo trabajado en el sentido de la medida de la variación absoluta, tasa de variación media y pendiente de una recta, llegando a relacionar en funciones sencillas una función con su derivada tanto de forma gráfica como algebraica (una cuadrática con su derivada, una lineal con la función constante) y siempre que sea posible en situaciones de contexto que se presten para hablar de variación y cambio y se le pueda dar un sentido a los resultados obtenidos como situaciones en las que se relacionen tiempo-velocidad, tiempo-consumo, cantidad de líquido-volumen que ocupa, cantidad fabricada de producto-coste total de la producción. Trabajar con suma, producto,

( pág. 26)

En la asignatura Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, el acercamiento que se propone es relativamente semejante. Por una parte, el sentido de la medida se aproxima de la misma manera a las derivadas en relación a su homólogo científico. Se busca relacionarla directamente con el concepto de límite del intervalo de la recta secante en dos puntos, con su acercamiento infinitesimal.

También se recomienda una aproximación desde el punto de vista físico, independientemente de que no sea una materia con la que estos alumnos estén familiarizados.

Tener en cuenta que el uso de ejercicios y problemas manipulativos, tabulares y gráficos puede resultar muy útil, desligándose de las fuertes ataduras analíticas a la que se tiene acostumbrado a los alumnos. Esto no significa renegar de las fórmulas algebraicas que determinan las funciones, sino utilizar otro tipo de representaciones más intuitivas para que puedan entender el verdadero significado de la derivada.

Además de tareas donde se proporcione la expresión analítica de la función y se pide calcular su derivada o representarla gráficamente tras estudiar sus propiedades (como monotonía o extremos), se recomienda para desarrollar una comprensión más completa de este saber, incluir en las secuencias de enseñanza tareas con representaciones numéricas o gráficas (sin expresiones analíticas), o tareas en las que se necesite coordinar informaciones proporcionadas en diferentes contextos o representaciones. Por ejemplo, dadas gráficamente dos funciones,  $f$  y  $g$ , preguntarse si existe alguna relación entre ambas o si una es derivada de la otra, explicando el por qué.

( pág. 21)

Por último, resaltar que en el sentido algebraico no hace mención alguna al uso de las derivadas, siendo esta la mayor diferencia en el enfoque entre ambas disciplinas, científica y social. [2]

## Análisis de libros de texto

Vamos a ver ahora cómo justifican tres libros de texto la introducción de la derivada y su uso, ejemplificando con algunas actividades. Para que se pueda apreciar con mayor claridad, iremos abordando todos los puntos de interés, de tal modo que podamos comparar cada uno de ellos con el otro. Compararemos las dos unidades en las editoriales Edebé y Anaya, utilizando versiones relativas a la tres últimas leyes: LOE, LOMCE y LOMLOE.

Título	Editorial	Año	Ley educativa
Matemáticas I	Anaya	2006	LOE
Matemáticas I aplicadas a las ciencias sociales	Edebé	2015	LOMCE
Matemáticas 1 aplicadas a las ciencias sociales <i>de otra manera</i>	Edebé	2022	LOMLOE

Para comenzar, ambas editoriales introducen el concepto de tasa de variación media como el cociente entre los cambios en la función frente a los cambios en la variable independiente, entre dos puntos:

$$T.V.M._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esto lo utilizan como instrumento para analizar el crecimiento de una función, el cual lo relacionan directamente con su representación gráfica:

### Tasa de variación media

Se llama **tasa de variación media (T.V.M.)** de una función,  $y = f(x)$ , en un intervalo  $[a, b]$  al cociente:

$$\frac{\text{variación de } f(x)}{\text{variación de } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{T.V.M. } [a, b]$$

La T.V.M. de  $f(x)$  en  $[a, b]$  es la **pendiente** del segmento que une los puntos  $A(a, f(a))$  y  $B(b, f(b))$ :

$$\text{T.V.M. } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Anaya

### Tasa de variación media

Un primer paso en el estudio de cómo crece o decrece una función es analizar su comportamiento entre dos puntos. La **tasa de variación media** relaciona la variación de una función en un intervalo con la amplitud de dicho intervalo.

Si la función  $f$  está definida en un intervalo  $[a, b]$ , la tasa de variación media de  $f$  en  $[a, b]$  es el cociente entre la variación de la función y la longitud del intervalo:

$$\text{TVM}_{[a,b]} f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Edebé LOMCE

### Tasa de variación media

Un primer paso en el estudio de cómo crece o decrece una función es analizar su comportamiento entre dos puntos. La **tasa de variación media** relaciona la variación de una función en un intervalo con la amplitud de dicho intervalo.

Si la función  $f$  está definida en un intervalo  $[a, b]$ , la tasa de variación media de  $f$  en  $[a, b]$  es el cociente entre la variación de la función y la longitud del intervalo:

$$TVM_{[a, b]} f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Edebé LOMLOE

Figura 3: Tasas de variación media.

Con esto, Anaya se permite introducir el concepto de pendiente del segmento que une los puntos, de tal modo que va induciendo al futuro significado de la derivada. Por otra parte, Edebé introduce un significado adicional de la tasa de variación media, de tal modo que si la función es creciente en un intervalo  $[a, b]$ , la tasa de variación media será positiva; al contrario, si es decreciente en el mismo intervalo, su T.V.M. será negativa.

Después, Edebé introduce directamente la tasa de variación instantánea como el límite cuando el intervalo se va haciendo cada vez más pequeño:

$$T.V.I._a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

#### Tasa de variación instantánea

La TVM no deja de ser un promedio y, por lo tanto, interesa que los intervalos escogidos sean lo más pequeños posibles para conocer de forma precisa cómo se comporta la función cerca de cualquier punto. El límite en que los extremos de los intervalos de la TVM son infinitamente próximos se conoce como **tasa de variación instantánea**.

La tasa de variación instantánea de una función  $f$  en  $x = a$  es el valor, en caso de que exista, al que tiende la tasa de variación media en los intervalos  $[a, x]$  cuando  $x \rightarrow a$ . Es decir:

$$TVI_a f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Una forma equivalente de expresar la TVI de  $f(x)$  en  $x = a$  es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Esta expresión puede resultar muy útil para realizar cálculos.

Edebé LOMCE

#### Tasa de variación instantánea

La TVM no deja de ser un promedio y, por lo tanto, interesa que los intervalos escogidos sean lo más pequeños posibles para conocer de forma precisa cómo se comporta la función cerca de cualquier punto. El límite en que los extremos de los intervalos de la TVM son infinitamente próximos se conoce como **tasa de variación instantánea**.

La tasa de variación instantánea de una función  $f$  en  $x = a$  es el valor, en caso de que exista, al que tiende la tasa de variación media en los intervalos  $[a, x]$  cuando  $x \rightarrow a$ . Es decir:

$$TVI_a f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Una forma equivalente de expresar la TVI de  $f(x)$  en  $x = a$  es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Esta expresión puede resultar muy útil para realizar cálculos.

Edebé LOMLOE

Figura 4: Tasa de variación instantánea.

Sin embargo, en el caso de Anaya no hace mención alguna a la tasa de variación instantánea, sino que, tras la aplicación a varios ejemplos de  $f$  de la T.V.M., introduce directamente la definición de derivada de una función en un punto. Eso sí, muestra la misma definición que acabamos de nombrar. Esto lo justifica con la medición del crecimiento de una

función en un punto, aplicando la pendiente de la recta tangente como la derivada en dicho punto. Aparentemente liga la definición a su interpretación geométrica:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

### Derivada de una función en un punto

El crecimiento de una función en un punto se mide por la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función en ese punto. Se obtiene mediante el siguiente límite:

CRECIMIENTO PUNTUAL DE  $f$  en  $a = \lim_{x \rightarrow a} \text{T.V.M. } [a, x] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$   
 A este valor se le llama **derivada de  $f$  en  $a$** , se designa por  $f'(a)$  y se lee *f prima* de  $a$ .

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Figura 5: Derivada de la función en un punto. Anaya

De manera equivalente, Edebé muestra posteriormente a la T.V.I. que la definición de derivada de una función en un punto es análoga a lo previamente mencionado:

#### 2.1. Derivada de una función en un punto

La tasa de variación instantánea de una función en un punto es el concepto básico a partir del cual se desarrolla toda la teoría del cálculo diferencial, y se conoce con el nombre de **derivada de una función en un punto**.

Se denomina derivada de la función  $f$  en  $x = a$ , y se representa por  $f'(a)$  al valor, en caso de que exista y sea finito:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En este caso, decimos que  $f$  es **derivable** en  $x = a$ .

Edebé LOMCE

#### 2.1. Derivada de una función en un punto

La tasa de variación instantánea de una función en un punto es el concepto básico a partir del cual se desarrolla toda la teoría del cálculo diferencial, y se conoce con el nombre de **derivada de una función en un punto**.

Se denomina derivada de la función  $f$  en  $x = a$ , y se representa por  $f'(a)$  al valor, en caso de que exista y sea finito:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En este caso, decimos que  $f$  es **derivable** en  $x = a$ .

Edebé LOMLOE

Figura 6: Derivada de una función en un punto.

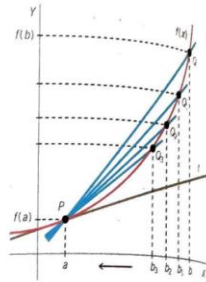
Para completar la definición geoméricamente, Edebé introduce posteriormente una interpretación geométrica de la derivada, donde va acortando los intervalos en el eje OX hasta que consigue una recta tangente cuando el intervalo tiende a ser nulo:

## 2.2. Interpretación geométrica de la derivada

Hemos visto que la tasa de variación media de una función  $f$ , en el intervalo  $[a, b]$ , es la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función por los puntos  $P(a, f(a))$  y  $Q(b, f(b))$ .

Al tomar valores  $b_1, b_2, b_3, \dots$  cada vez más próximos a  $a$ , las correspondientes rectas secantes  $PQ_1, PQ_2, PQ_3, \dots$  se van aproximando a una recta  $t$ , a la que llamamos recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa  $a$ .

La pendiente de esta recta será el límite de las pendientes de las rectas secantes  $PQ_n$ , es decir, el límite de las TVM de  $f$  en los intervalos  $[a, b_n]$ . Pero este límite es lo que hemos definido como  $f'(a)$ .



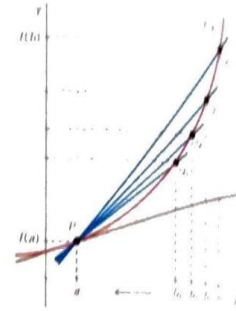
Edebé LOMCE

## 2.2. Interpretación geométrica de la derivada

Hemos visto que la tasa de variación media de una función  $f$ , en el intervalo  $[a, b]$ , es la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función por los puntos  $P(a, f(a))$  y  $Q(b, f(b))$ .

Al tomar valores  $b_1, b_2, b_3, \dots$  cada vez más próximos a  $a$ , las correspondientes rectas secantes  $PQ_1, PQ_2, PQ_3, \dots$  se van aproximando a una recta  $t$ , a la que llamamos recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa  $a$ .

La pendiente de esta recta será el límite de las pendientes de las rectas secantes  $PQ_n$ , es decir, el límite de las TVM de  $f$  en los intervalos  $[a, b_n]$ . Pero este límite es lo que hemos definido como  $f'(a)$ .



Edebé LOMLOE

Figura 7: Interpretación geométrica de la derivada.

Para terminar de completarlo, expresa una ecuación que permite determinar la recta tangente a una función en un punto a través de la derivada:

### Ecuación de la recta tangente

Recuerda que la ecuación punto-pendiente de una recta es:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

donde  $(x_0, y_0)$  es un punto de la recta y  $m$ , su pendiente. Puesto que  $f'(a)$  nos da la pendiente de la recta tangente a  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ , se tiene:

La ecuación de la recta tangente en el punto  $(a, f(a))$  es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Edebé LOMCE

### Ecuación de la recta tangente

Recuerda que la ecuación punto-pendiente de una recta es:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

donde  $(x_0, y_0)$  es un punto de la recta y  $m$ , su pendiente. Puesto que  $f'(a)$  nos da la pendiente de la recta tangente a  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ , se tiene:

La ecuación de la recta tangente en el punto  $(a, f(a))$  es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Edebé LOMLOE

Figura 8: Ecuación de la recta tangente.

Por lo tanto, la editorial Edebé explica en mayor profundidad la interpretación geométrica. A partir de aquí, ambas editoriales introducen la función derivada de una función de una forma muy similar:

Se llama **función derivada de  $f$**  (o simplemente **derivada de  $f$** ) a una función  $f'$  que asocia a cada abscisa,  $x$ , la derivada de  $f$  en ese punto,  $f'(x)$ , es decir, la pendiente de la curva  $y = f(x)$  en ese punto. A la derivada de  $f$  la llamaremos  $f'$  o bien  $Df$ .

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Anaya

### 2.3. Función derivada

Hemos visto que si una función  $f$  es derivable en  $x = a$ , el valor de la derivada  $f'(a)$  es un número real. De esta forma, podemos definir una nueva función  $f'$  que asigne a cada punto de abscisa  $x$  el valor de la derivada de  $f$  en este punto.

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La función así definida recibe el nombre de **función derivada** de  $f$ , simplemente, **derivada**.

El cálculo de la función derivada simplifica el proceso del cálculo del valor de la derivada de  $f$  en diferentes puntos.

Edebé LOMCE

## 2.3. Función derivada

Hemos visto que si una función  $f$  es derivable en  $x = a$ , el valor de la derivada  $f'(a)$  es un número real. De esta forma, podemos definir una nueva función  $f'$  que asigne a cada punto de abscisa  $x$  el valor de la derivada de  $f$  en este punto.

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La función así definida recibe el nombre de **función derivada** de  $f$  o, simplemente, **derivada**.

El cálculo de la función derivada simplifica el proceso del cálculo del valor de la derivada de  $f$  en diferentes puntos.

Edebé LOMLOE

Figura 9: Definición de derivada.

A partir de este momento, Edebé introduce una tabla donde representa alguna de las funciones derivadas más frecuentes. Anaya lo hace de manera similar, a diferencia de utilizar varios textos en vez del modelo tabular. Teniendo en cuenta que previamente se ha introducido el cálculo de derivada a través de la definición con el límite para cualquier función, no se especifica explícitamente cómo se calcula cada una de las derivadas, sino que simplemente se plasman en la tabla.

Edebé introduce el concepto de derivadas sucesivas por definición, cosa que Anaya no:

### Derivadas sucesivas

La función derivada  $f'$  es una herramienta muy útil para estudiar la función  $f$ , pero, además, al ser a su vez una función, puede resultar útil también su estudio. Repitiendo el proceso desarrollado a partir de la función  $f$ , podemos definir la **derivada segunda** de  $f$ :

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Análogamente podemos definir las funciones  $f''', f^{(4)}, f^{(5)}$ ..., denominadas derivadas tercera, cuarta, quinta...

Edebé LOMCE

### Derivadas sucesivas

La función derivada  $f'$  es una herramienta muy útil para estudiar la función  $f$ , pero, además, al ser a su vez una función, puede resultar útil también su estudio. Repitiendo el proceso desarrollado a partir de la función  $f$ , podemos definir la **derivada segunda** de  $f$ :

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Análogamente podemos definir las funciones  $f''', f^{(4)}, f^{(5)}$ ..., denominadas derivadas tercera, cuarta, quinta...

Edebé LOMLOE

Figura 10: Definición de derivada sucesiva.

De la misma manera, ambas editoriales introducen las propiedades de las derivadas, tales como la derivada de la suma, derivada de una función por una constante y derivada del producto o cociente, sin justificación aparente:

### Derivada del cociente de dos funciones

$$D \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Anaya

### Derivada del cociente de dos funciones

La derivada del cociente de dos funciones viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Edebé LOMCE

## Derivada del cociente de dos funciones

La derivada del cociente de dos funciones viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Edebé LOMLOE

Figura 11: Derivada de un cociente.

Ambas introducen el concepto de derivadas de funciones compuestas a través de la regla de la cadena:

### Derivada de una función compuesta. Regla de la cadena

$$D[(g \circ f)(x)] = Dg[f(x)] = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Por ejemplo:  $D\sqrt{3x+1} = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3$ , pues  $\begin{cases} D\sqrt{\quad} = 1/2\sqrt{\quad} \\ D(3x+1) = 3 \end{cases}$

Para derivar funciones compuestas, utilizamos la llamada **regla de la cadena**:

$$f(x) = (g \circ h)(x) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

En este caso, para que  $f(x)$  sea derivable,  $h(x)$  también debe serlo y  $g(x)$  tiene que serlo en la imagen de  $h$ .

Anaya

Edebé LOMCE

Para derivar funciones compuestas, utilizamos la llamada **regla de la cadena**:

$$f(x) = (g \circ h)(x) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

En este caso, para que  $f(x)$  sea derivable,  $h(x)$  también debe serlo y  $g(x)$  tiene que serlo en la imagen de  $h$ .

Edebé LOMLOE

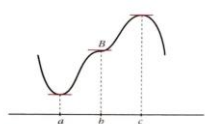
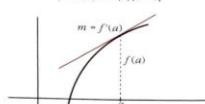
Figura 12: Regla de la cadena.

Es cierto que, en general, Edebé introduce muchas explicaciones textuales para complementar las expresiones, frente a la aplicación de las fórmulas por parte de Anaya. Sin embargo, esta última utiliza más ejemplos resueltos, de tal modo que termina aclarando cómo realizar los procedimientos, sin dejar del todo claro el significado y el origen de las expresiones.

Para finalizar, ambas editoriales muestran aplicaciones de las derivadas al estudio de algunas características de las funciones: monotonía, extremos y asíntotas:

### 12.5 UTILIDAD DE LA FUNCIÓN DERIVADA

La recta tangente a  $y = f(x)$  en el punto de abscisa  $a$  y ordenada  $f(a)$  es:  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$



El punto B es singular, pero no es máximo ni mínimo relativo.

Cuando una función nos viene dada por su expresión analítica,  $y = f(x)$ , su derivada,  $f'(x)$ , nos da la inclinación (la pendiente) de la curva en cada punto. Veamos, en concreto, algunas de sus aplicaciones.

#### ■ Cálculo de la derivada de una función en varios puntos

Para hallar  $f'(a)$ ,  $f'(b)$ ,  $f'(c)$ , ..., se procede así:

- Se obtiene la expresión general de  $f'(x)$ .
- Se sustituye en  $f'(x)$  la  $x$  por  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ...

#### ■ Obtención de las abscisas en las cuales la derivada tiene un cierto valor

Para averiguar los valores de  $x$  tales que  $f'(x) = k$ , se procede así:

- Se obtiene la expresión general de  $f'(x)$ .
- Se resuelve la ecuación  $f'(x) = k$ .

#### ■ Obtención de las abscisas de los puntos singulares

Se llaman **puntos singulares** a los puntos de tangente horizontal, es decir, a los puntos en los que la derivada es cero. Entre ellos están los máximos y mínimos relativos, pero puede haber otros. Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de  $f'(x) = 0$ .

#### ■ Obtención de tramos en donde la curva crece o decrece

Si  $f'(x) > 0$ , la función es creciente, y si  $f'(x) < 0$ , la curva es decreciente. Por tanto, resolviendo tales inecuaciones se obtienen los intervalos donde la curva crece o decrece.

Anaya

### 4.1. Monotonía de una función

El uso de derivadas puede ayudarnos a determinar el crecimiento o decrecimiento de una función a partir del signo de la derivada.

Recuerda la definición de derivada de una función  $f$  en un punto  $x = a$ .

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Supongamos que  $f'(a) > 0$ . Por la definición de límite, para valores de  $x$  suficientemente próximos a  $a$ , se cumple que  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ , lo que significa que:

$$\begin{cases} x - a > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0 \\ x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \end{cases}$$

O equivalentemente:

$$\begin{cases} x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \\ x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \end{cases}$$

Entonces, podemos afirmar que existe un entorno de  $a$  en el que la función es creciente. Decimos que  $f$  es creciente en  $x = a$ .

Análogamente, si  $f'(a) < 0$  obtenemos que la función es decreciente en  $x = a$ .

Edebé LOMCE

## 4.1. Monotonía de una función

El uso de derivadas puede ayudarnos a determinar el crecimiento o decrecimiento de una función a partir del signo de la derivada.

Recuerda la definición de derivada de una función  $f$  en un punto  $x = a$ .

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Supongamos que  $f'(a) > 0$ . Por la definición de límite, para valores de  $x$  suficientemente próximos a  $a$ , se cumple que  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ , lo que significa que:

$$\begin{cases} x - a > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0 \\ x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \end{cases}$$

O equivalentemente:

$$\begin{cases} x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \\ x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \end{cases}$$

Entonces, podemos afirmar que existe un entorno de  $a$  en el que la función es creciente. Decimos que  $f$  es creciente en  $x = a$ .

Análogamente, si  $f'(a) < 0$  obtenemos que la función es decreciente en  $x = a$ .

Si  $f'(a) > 0$ ,  $f$  es **creciente** en  $x = a$  y si  $f'(a) < 0$ ,  $f$  es **decreciente** en  $x = a$ .

Edebé LOMLOE

Figura 13: Aplicaciones de las derivadas.

Para el cálculo de los extremos relativos, Edebé hace una aproximación geométrica utilizando la monotonía de las funciones como nexo, de tal manera que deduce que los puntos donde la función ni crece ni decrece son máximos o mínimos:

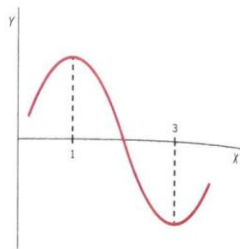
### Extremos de una función

La función representada en la figura tiene dos extremos relativos: un máximo en  $x = 1$  y un mínimo en  $x = 3$ .

En estos puntos la función no es ni creciente ni decreciente.

Entonces en ellos la derivada es cero, ya que no puede ser ni positiva ni negativa.

Así, podemos afirmar que:



Si una función derivable tiene un extremo relativo en el punto  $x = a$ , entonces  $f'(a) = 0$ .

Edebé LOMCE

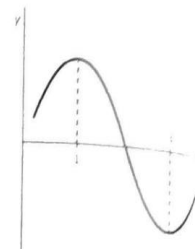
### Extremos de una función

La función representada en la figura tiene dos extremos relativos: un máximo en  $x = 1$  y un mínimo en  $x = 3$ .

En estos puntos la función no es ni creciente ni decreciente.

Entonces en ellos la derivada es cero, ya que no puede ser ni positiva ni negativa.

Así, podemos afirmar que:



Si una función derivable tiene un extremo relativo en el punto  $x = a$ , entonces  $f'(a) = 0$ .

Edebé LOMLOE

Figura 14: Cálculo de los extremos relativos.

Para relacionar la existencia de máximos o mínimos con la derivada, utiliza el signo de la pendiente de la recta tangente a izquierda y derecha del punto, cosa que ayuda a entenderlo:

Un método para determinar si el extremo relativo es **máximo** o **mínimo** consiste en determinar el comportamiento de la función a ambos lados del punto.

Si  $f(a)$  es un máximo relativo, la derivada pasará de ser **positiva** para valores de  $x$  situados a la izquierda de  $x = a$ , a ser **negativa** para valores de  $x$  situados a la derecha del punto  $x = a$ .

Si, por el contrario,  $f(a)$  es un mínimo relativo, la derivada pasará de ser negativa a positiva para puntos situados a la izquierda y a la derecha respectivamente de  $x = a$ .

Así, el comportamiento que presentaría la derivada de una función  $f$  derivable con un máximo relativo en  $x = a$  y un mínimo relativo en  $x = b$  sería:

	$x < a$	$a$	$x > a$	$x < b$	$b$	$x > b$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	máximo	↘	↘	mínimo	↗

Edebé LOMCE

Un método para determinar si el extremo relativo es **máximo** o **mínimo** consiste en determinar el comportamiento de la función a ambos lados del punto.

Si  $f(a)$  es un máximo relativo, la derivada pasará de ser **positiva** para valores de  $x$  situados a la izquierda de  $x = a$ , a ser **negativa** para valores de  $x$  situados a la derecha del punto  $x = a$ .

Si, por el contrario,  $f(a)$  es un mínimo relativo, la derivada pasará de ser negativa a positiva para puntos situados a la izquierda y a la derecha, respectivamente, de  $x = a$ .

Así, el comportamiento que presentaría la derivada de una función  $f$  derivable con un máximo relativo en  $x = a$  y un mínimo relativo en  $x = b$  sería:

	$x < a$	$a$	$x > a$	$x < b$	$b$	$x > b$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	máximo	↘	↘	mínimo	↗

Edebé LOMLOE

Figura 15: Determinación de máximos y mínimos.

Hay una gran diferencia entre ambas editoriales, y es que Anaya no presenta los problemas de optimización, sino que continúa directamente con la representación de funciones a través del uso de derivadas, mientras que Edebé se detiene a explicar este tipo de ejercicios, y propone- un procedimiento bastante intuitivo de cómo resolverlos:

#### 4.2. Problemas de optimización

Ya tenemos las herramientas para buscar los máximos y mínimos de una función a partir de su derivada. De esta forma, estamos en disposición de solucionar una de las clases de problemas que más aplicaciones tienen en contextos reales: los problemas de optimización.

Cuando al ir de rebajas, tratamos de comprar el mayor número de objetos con el **mínimo coste**, o cuando una fábrica de tetrabrics de leche procura obtener el **máximo beneficio** empleando la mínima cantidad de cartón para elaborar los envases, nos encontramos ante problemas de optimización.

Optimizar consiste en buscar los máximos o mínimos de una función que define un fenómeno.

Para resolver un problema de optimización, es aconsejable seguir estos pasos:

1. Relacionar las diferentes variables y plantear la función que tenemos que optimizar.
2. Derivar la función y encontrar los valores en los que la derivada se anula.
3. Determinar si estos valores son máximos o mínimos y calcular su imagen.
4. Comprobar si los resultados obtenidos son compatibles con el enunciado del problema.

#### 4.2. Problemas de optimización

Ya tenemos las herramientas para buscar los máximos y mínimos de una función a partir de su derivada. De esta forma, estamos en disposición de solucionar una de las clases de problemas que más aplicaciones tiene en contextos reales: los problemas de optimización.

Cuando al ir de rebajas, tratamos de comprar el mayor número de objetos con el **mínimo coste**, o cuando una fábrica de tetrabrics de leche procura obtener el **máximo beneficio** empleando la mínima cantidad de cartón para elaborar los envases, nos encontramos ante problemas de optimización.

Optimizar consiste en buscar los máximos o mínimos de una función que define un fenómeno.

Para resolver un problema de optimización, es aconsejable seguir estos pasos:

1. Relacionar las diferentes variables y plantear la función que tenemos que optimizar.
2. Derivar la función y encontrar los valores en los que la derivada se anula.
3. Determinar si estos valores son máximos o mínimos y calcular su imagen.
4. Comprobar si los resultados obtenidos son compatibles con el enunciado del problema.

Figura 16: Problemas de optimización. Edebé.

Aún así, hay que tener en cuenta que esta explicación es sustancialmente más escueta de lo que debería. Tenemos que considerar que los problemas de optimización no solo buscan resolver los puntos en los que la función es máxima o mínima, sino encontrar aquel que tiene mayor o menor valor dentro de varios extremos relativos. Además, no especifica cómo comprobar cual de los valores cumple la condición de maximización ni minimización, y tampoco cómo asegurarnos que los valores obtenidos son coherentes con el enunciado.

Como comentario final, es necesario resaltar que los libros de texto de Edebé, perteneciendo a leyes educativas distintas, siendo el primero LOMCE y el segundo LOMLOE, habiendo transcurrido siete años entre la redacción de cada uno de ellos y considerando la innovación y vanguardia que se presenta en la ley educativa más moderna, son idénticos en absolutamente todos los aspectos. Tanto en el orden de presentación de las tecnologías, como

en el formato del libro, en los ejemplos utilizados, los ejercicios propuestos y las gráficas utilizadas.

La única diferencia apreciable es al final de la unidad, cuando ya se han superado todos los ejercicios propuestos en las últimas hojas y un resumen en forma de esquema, se presenta una página con “actividades alternativas”. En el caso de la LOMCE, se muestran tres casos donde la aplicación de las derivadas tiene sentido en un contexto real: deporte, economía y arquitectura. Esta actividad se ve sustituida en el libro LOMLOE por una práctica de recogida selectiva de residuos: producción y consumo responsable, fomentando los ODS.

Como resumen del análisis de los libros, ambas editoriales presentan la estructura esencial de la introducción a las derivadas y su estudio: tasa de variación media, derivada por definición, expresiones de derivadas de funciones comunes, propiedades de las derivadas, regla de la cadena y aplicaciones de las derivadas. En contraposición, las justificaciones que incluyen los libros son muy reducidas, siendo en algunos apartados inexistentes. En muchos casos se genera una estructura de pasos que el alumno debería seguir para resolver el problema, lo cual evoca a la mecanización de los problemas sin comprensión conceptual, cosa que no es nuestro objetivo sino todo lo contrario.

Sin embargo, cada una de las editoriales tiene ventajas frente a la otra. Por una parte, Edebé explica textualmente todos los elementos que introduce de manera más clara, intentando dar un complemento a la explicación esperada por el profesor, y que puede servir de apoyo a la hora del estudio personal del alumno. Además, introduce elementos que Anaya no considera, como la tasa de variación instantánea como nexa a la definición de derivada, las derivadas sucesivas y, sobre todo, los problemas de optimización, aunque de manera muy superficial.

Por otra parte, para mí Anaya tiene un punto a favor muy reseñable. Cómo considera que las explicaciones analíticas no son pertinentes y por tanto no las incluye, utiliza su significado geométrico como razonamiento para la introducción de los conceptos. Esto es una posición bajo mi punto de vista muy correcta, porque el verdadero objetivo que perseguimos es que los alumnos comprendan la utilidad de las derivadas a la hora de su aplicación, más allá de que sepan calcularlas para algunas funciones en concreto.

Creo que los tres libros aportan factores importantes que debemos tener en cuenta la hora de la enseñanza de la derivadas. Considero que, como he comentado antes, pero creo importante incidir, nuestro objetivo es que los alumnos comprendan el significado de las derivadas en el plano geométrico, a la hora de su aplicación en problemas reales. Las representaciones en forma de dibujos o gráficas son muy interesantes para profundizar en este aspecto.

Por el contrario, los procesos que pueda representar mecanización sin un razonamiento lógico detrás no son tan interesantes. Si enfocamos al alumno a que aprenda a calcular las derivadas sin que realice un análisis previo de la función a la que se enfrenta o comprenda lo que está haciendo, habremos inducido a que domine los mecanismos de derivación, pero no sea conocedor del concepto que está manejando. Por tanto, cuando llegue el momento de su aplicación será incapaz de utilizarlo correctamente porque desconocerá su utilidad.

En el siguiente apartado expondremos una propuesta didáctica para la introducción del concepto de derivada, que prima la comprensión sobre el cálculo analítico. Pretendemos así ser fieles al espíritu del nuevo currículo LOMLOE.

### **3. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se proponen**

En este apartado pretendemos hacer una primera introducción de los campos de problemas, técnicas y tecnologías que vamos a implementar a lo largo de la unidad didáctica.

Comenzando por los campos de problemas, hemos dividido todos los campos pertinentes que engloban a la derivada en siete campos, los cuales abarcan de la manera más precisa todo aquello que los alumnos deben saber acerca de los distintos problemas a los que se van a enfrentar:

1. Tasa de variación media.
2. Tasa de variación instantánea
3. Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.
4. Cálculo de derivadas en un punto aplicando la definición.
5. Función derivada
6. Aplicaciones de las derivadas al estudio de la monotonía de una función.
7. Optimización.

En la sección de las técnicas se proponen ejercicios de modelización de los procesos analíticos que los alumnos deben conocer y manejar a la perfección para el correcto tratamiento de las derivadas en todos sus registros:

1. Cálculo de la tasa de variación media de una función en un intervalo.
2. Cálculo de la tasa de variación instantánea de una función en un intervalo.
3. Cálculo de una recta dados dos puntos o un punto y su vector director.
4. Derivada de una función en un punto a partir de su definición.
5. Cálculo de la función derivada.
6. Estudio de la monotonía de una función
7. Estudio de los extremos relativos de una función.
8. Determinación de máximos y mínimos absolutos de una función en un intervalo.

Por otra parte, las tecnologías determinan los conceptos teóricos que los alumnos han de conocer para que de esa manera sean conscientes qué herramientas están utilizando en cada momento, su origen matemáticas y por qué su aplicabilidad tiene un sentido lógico:

1. Tasa de variación media.
2. Tasa de variación instantánea.
3. Derivada de una función en un punto.
4. Ecuación de la recta tangente.
5. Función derivada.
6. Derivadas n-ésimas.

7. Propiedades de las funciones.
8. Regla de la cadena.
9. Aplicaciones de las derivadas.

En los siguientes apartados, donde se ha destinado uno específico para cada uno de los campos previamente mencionados, se desarrolla con mucho más detalles todos estos, incidiendo en las cuestiones más relevantes de los mismos y proponiendo ejemplos muy ilustrativos que determinan perfectamente la naturaleza de cada uno de los mismos.

#### **4. Razones de ser del concepto de derivada y problemas propuestos para su introducción**

Uno de los motivos de introducción de la derivada es la aplicación de la misma en contextos reales aplicables a otras materias. Históricamente, a mediados de la edad moderna, surgió la necesidad de explicar las variaciones de magnitudes a lo largo del tiempo o del espacio. Por poner un ejemplo, en las cuestiones de cinemática en física, el concepto de velocidad se muestra como el cambio de la distancia con respecto al tiempo, la aceleración como el cambio de la velocidad respecto al tiempo y el campo eléctrico y gravitatorio como el gradiente (o la derivada respecto a las variables espaciales) de los potenciales eléctrico y gravitatorio.

Esto dio origen a la aparición del cálculo diferencial, que intentó la resolución de cuatro problemas: El problema de la tangente, el problema de la aceleración, el problema de máximos y mínimos y el problema del área. Estos problemas involucran la noción de límite, y los orígenes del cálculo se motivan por el deseo de resolver problemas vinculados al movimiento de los cuerpos y de índole geométrico que involucran la óptica.

En estos casos se pretende controlar la medida en la cual la variable dependiente se modifica con respecto a la variable independiente. Es decir, el objetivo es hacer una cuantificación relativa del cambio de una función.[7] Para ello, se pueden determinar dos tipos de variaciones en este caso: la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea. En el primero de los casos, ponderamos todas las variaciones que ocurren en un intervalo [a,b]:

$$T.V.M._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sin embargo, cuando queremos definir la tasa de variación instantánea, es decir, el cambio que realiza la variable en un intervalo muy pequeño, debemos aproximar los límites del intervalo a un punto:

$$T.V.I._a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Como ya mencionamos en apartados anteriores, la derivada representa la pendiente de la recta tangente a la función, lo que a su vez está determinando el cambio de la función según modificamos la variable independiente. Es decir, de la misma manera la derivada nos puede medir la velocidad del cambio, basada en el conocimiento de la razón entre el incremento de y la relación al de x.[5]

Debemos considerar que el enfoque tradicionalista se basa en la utilización de expresiones algebraicas para el cálculo de derivadas, lo cual puede desembocar en la mecanización de las mismas, sin mayor uso de razón del verdadero significado de estas.

Hay que considerar que los alumnos encuentran tres grupos de problemáticas por los que les resulta complejo progresar en el concepto: la complejidad de los objetos básicos del cálculo (sucesiones, funciones, etc.), el concepto y formalización de límite y la ruptura con el concepto puramente algebraico en el estudio del cálculo.[6]

Es bastante común que los alumnos no sean conocedores del concepto realista de función como herramienta que asigna unos valores a otros, sino una expresión analítica meramente descriptiva. Es interesante que conozcan su significado y la representación gráfica que lleva asociada.

De la misma manera, en algunos casos los alumnos no conciben el concepto de límite como condición de proximidad por una función hacia un valor, elemento que es necesario a la hora de afrontar la aproximación de las derivadas a través de la tasa de variación instantánea.

Para intentar abordar esa primera aproximación al cálculo, es recomendable hacerlo de manera menos algebraica y algorítmica, para que de esa manera les permita a los estudiantes dar mayor significado a las nociones que van a manipular. Una vez los alumnos sean conscientes del concepto con el que están trabajando y de su significado real, se pueden implementar definiciones más precisas, ligadas a demostraciones y plantear una serie de problemas más generales. [6]

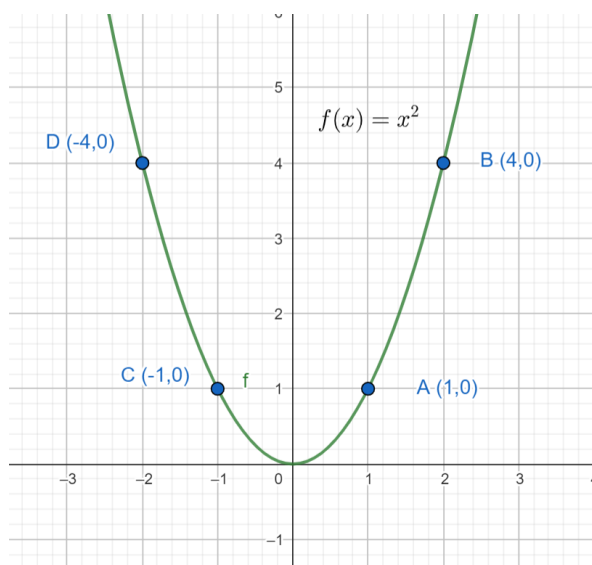
Para la introducción a los estudiantes en el concepto de la derivada, vamos a diseñar tres problemas que intenten resolver las preguntas que hemos comentado previamente. Vamos a hacer comparaciones geométricas y analíticas dentro de los problemas diseñados, de tal manera que los alumnos vean el significado real e histórico de la derivada. Lo que pretendemos con este tipo de problemas es enfrentar a los alumnos a tareas que serían fácilmente desempeñadas utilizando las derivadas, pero privándoles de las mismas. Así, cuando posteriormente conozcan estas herramientas, se darán cuenta de la verdadera utilidad que tienen cuando se aplican en el contexto adecuado:

Comenzaremos tratando el problema de la *tangente*. Para ello, pediremos a los alumnos que representen la recta tangente a una gráfica en diferentes puntos, utilizando un papel cuadrado. Para que esto sea sencillo, se pueden utilizar funciones elementales, tales como rectas o parábolas. Por otra parte, calcularán la pendiente de la recta dibujada como la variación de la altura frente al avance.

### **Problema 1**

En la siguiente gráfica, dibuja con regla la recta tangente a la curva en los puntos que se señalan. Después, utilizando la cuadrícula como guía, averigua la expresión de la recta tangente en cada uno de los puntos. Por último, calcula la pendiente de la recta tangente en

cada uno de los puntos. ¿Observas alguna relación entre los puntos y la pendiente de la recta tangente?



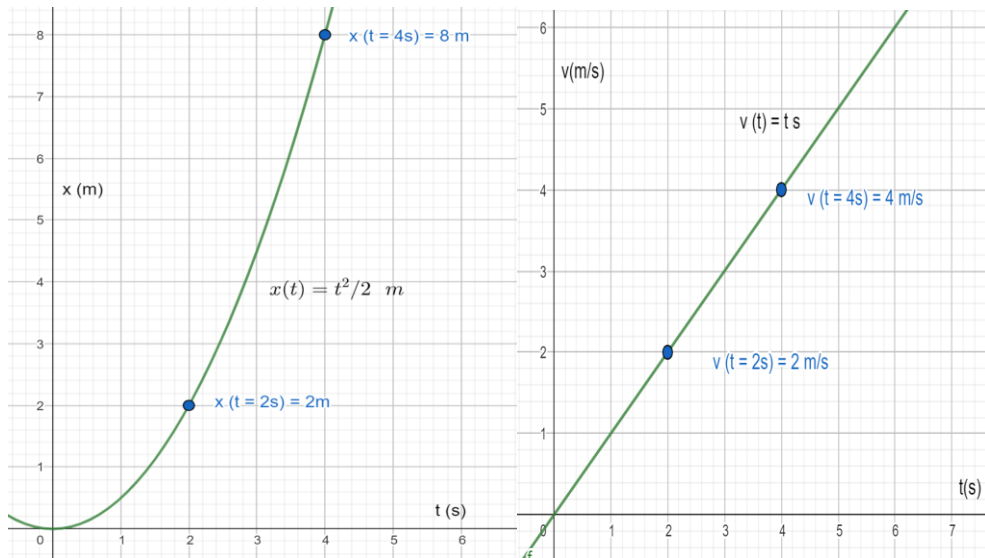
Una vez conozcan las reglas de derivación, repetirán el ejercicio y la compararán con el valor obtenido derivando la función en dicho punto para verificar que ambas pendientes deben ser iguales. Además, averiguarán analíticamente la recta tangente sin utilizar la representación gráfica. De esa manera, pueden verificar que la recta obtenida a través del dibujo debería ser equivalente a la recta obtenida con la derivada analítica.

2. Para resolver el problema de la *aceleración* sería de gran utilidad hacer una analogía a un problema de la física directamente. Se pueden proporcionar gráficas relativas a la posición, velocidad y aceleración de un movimiento, de tal modo que se pretende buscar la relación directa entre las tres magnitudes.

Para ello, teniendo en cuenta que la velocidad es la razón de cambio de la posición con el tiempo y la aceleración es la razón de cambio de la velocidad con el tiempo, pedimos a los alumnos que busquen la correlación  $x - v$  y  $v - a$ . Es decir, las gráficas de las que los alumnos conocerán las ecuaciones (por ejemplo, un movimiento parabólico, que tendría una velocidad lineal y aceleración constante), los alumnos deberán calcular las distintas aceleraciones en la gráfica como la razón de cambio de la velocidad, es decir, la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica en los puntos pertinentes.

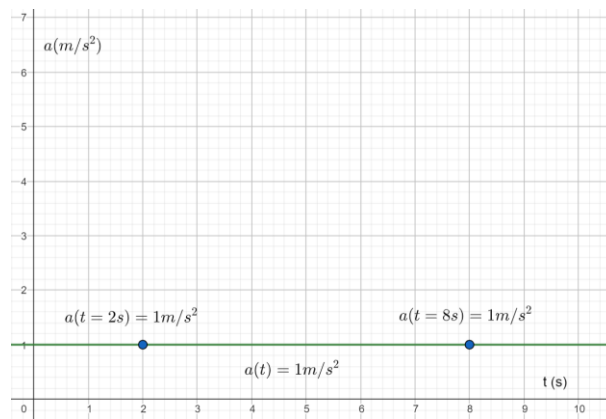
### **Problema 2**

Las siguientes gráficas muestran la posición, velocidad y aceleración de una pelota que se deja caer en la Luna desde una altura de 10 metros. Para simplificación de los cálculos, supondremos que la gravedad es  $1m/s^2$ . Las magnitudes se consideran positivas hacia abajo.



$x(t)$

$v(t)$



$a(t)$

Vamos a estudiar como cambia la posición, la velocidad y la aceleración en los puntos  $t = 2$  s y  $t = 4$  s. Para ello, se muestran los valores de las tres magnitudes en ambos intervalos temporales, los cuales los alumnos pueden rellenar obteniendo la información de la gráfica:

	Posición (m)	Velocidad (m/s)	Aceleración ( $m/s^2$ )
$t = 2$ s			
$t = 4$ s			

- Explica, con tus propias palabras, qué relación existe entre la aceleración y la velocidad, y entre la velocidad y la posición.
- Teniendo en cuenta las expresiones analíticas de cada una de estas parejas, ¿eres capaz de encontrar alguna nueva relación?

- c. Ahora, calcula la pendiente de la recta tangente a los puntos en la gráfica de la posición.  
¿Cómo se relaciona con la velocidad?

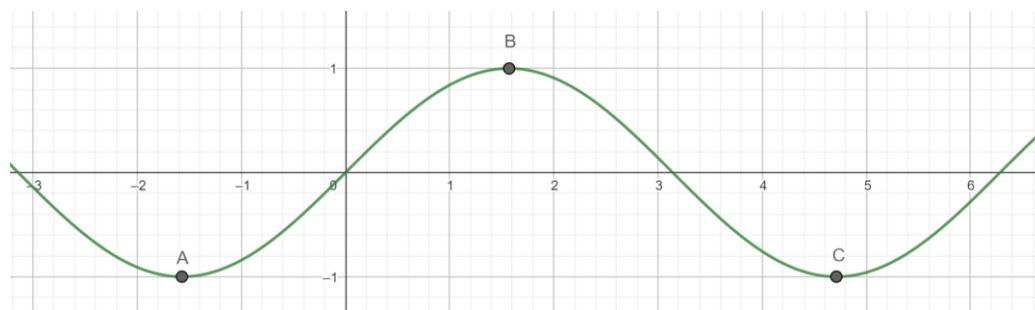
Una vez hecho, se les pedirá que lo hagan de forma analítica, y que corroboren si ambos resultados son idénticos, que deberían serlo si el problema ha sido realizado correctamente.

3. En el caso del problema de *máximos* y *mínimos*, nos centraremos en un caso clásico de cálculo de valores máximos y mínimos de una función. Para ello, los alumnos dispondrán de la función, tanto gráfica como analíticamente. De esa manera podrán localizar con gran facilidad los puntos máximos y mínimos de dicha gráfica (por ejemplo, en una función seno).

También deberán comprender que la pendiente de la recta tangente en todos los puntos máximos y mínimos es nula, características que se puede apreciar claramente a la hora de dibujar la gráfica. Para ello, les presentamos la gráfica con las rectas tangente que pasen por varios máximos o mínimos, de tal modo que puedan apreciar claramente que son funciones constantes:

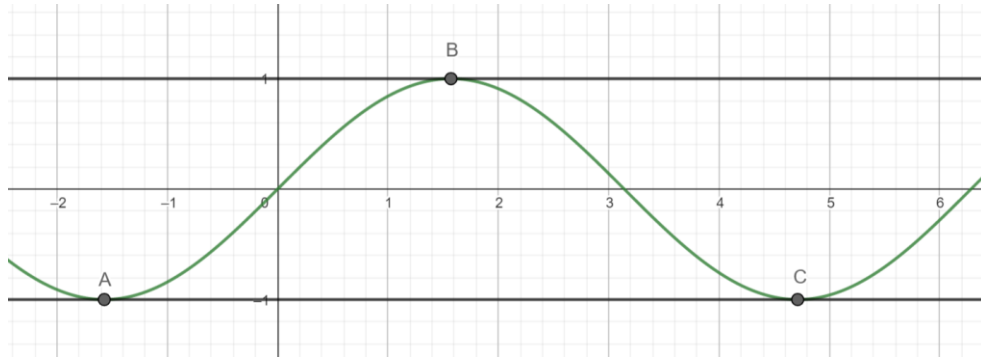
### **Problema 3**

Se presenta ahora la gráfica de la función  $f(x) = \text{sen}(x)$ :



Hemos resaltado tres puntos: A, B y C:

- Si seleccionamos el punto B y comparamos su imagen con cualquier otro de la función en su entorno, ¿tiene mayor, igual o menor imagen?
- Si seleccionamos cualquiera de los otros dos puntos, A y C, y de nuevo comparamos su imagen con el resto de los puntos que los rodean, ¿tienen mayor, igual o menor imagen?
- Presentamos ahora la misma gráfica de antes, pero de tal modo que hemos dibujado las rectas tangente a la gráfica que pasan por nuestros puntos:



¿Podemos determinar de qué rectas se tratan? ¿Qué pendiente tienen?

Una vez sean capaces de localizar todos ellos (o su recurrencia en caso de la función seno) y posean las herramientas necesarias de derivación, deberán acceder a dicha información a través de la expresión algebraica, obteniendo los máximos y mínimos de manera analítica, igualando la derivada de la función a cero. De esa manera podrán corroborar que la solución es la misma.

Aplicando la expresión de una recta conociendo su tangente y un punto, deberían ser capaces de dibujar todas las tangentes en los máximos y los mínimos, lo cual desembocará en rectas paralelas al eje de abscisas. De este modo, podrán comprobar que lo realizado en la primera parte del ejercicio, antes de saber derivar, era completamente correcto.

## 5. Conocimientos previos del alumno

Está claro que el alumno requiere de unos conocimientos previos para poder llegar a la comprensión total del objeto en estudio, en este caso la derivada. Para comenzar, supondremos que posee las nociones necesarias matemáticas:

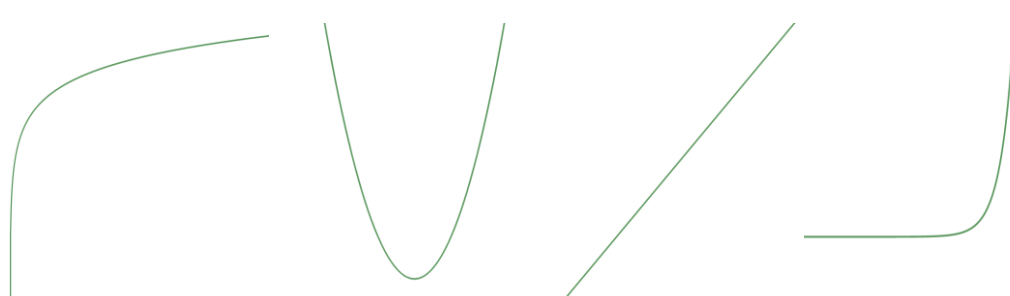
1. Conocimiento de la expresión analítica, gráfica y características de las funciones elementales polinómicas de 1er y 2do grado: rectas y parábolas.
2. Conocimiento de la expresión analítica, gráfica y características de las funciones elementales de proporcionalidad inversa ( $y = \frac{k}{x}$ ), exponenciales ( $y = a^x$ ), radicales ( $y = \sqrt{x}$ ) y logarítmicas ( $y = \log(x)$ ).
3. Conocimiento del concepto de límite y cálculo de los mismos en relación a las funciones previamente mencionadas.
4. Manejo de cálculos algebraicos con polinomios y fracciones algebraicas: sumas, productos, cálculo de raíces, etc.

Para ser conscientes de que el alumno ha adquirido estos conocimientos, es necesario realizar una prueba previa de tal modo que podamos evaluar que es capaz de dominar todos los conceptos previamente mencionados. En caso de que seamos nosotros mismos los que se los enseñemos no es necesario, ya que estamos al tanto del progreso de cada uno de ellos. Sin embargo, en caso de que sea algún otro docente el que lo imparta, deberemos cerciorarnos, ya que sin estas herramientas el estudio de las derivadas sería imposible.

Dicha prueba sería la siguiente:

1. Determina a cuál de estas gráficas corresponde cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

- a.  $f(x) = x + 2$
- b.  $f(x) = x^2 - 3$
- c.  $f(x) = e^x + 1$
- d.  $f(x) = \ln(2x - 4)$



2. En el papel cuadriculado que se te ha proporcionado, dibuja las gráficas de las siguientes funciones lo más aproximadamente posible:

a.  $f(x) = 2x + 1$

b.  $f(x) = x^2 - 2$

c.  $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

3. Determina los siguientes límites:

a.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x^3 + 2}$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} x^4 + 2$

c.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-4)}$

4. Utilizando Geogebra, dibuja la función  $f(x) = \frac{3}{x^2+2}$ , encuentra su valor gráficamente en  $x = 2$  y traza la recta tangente a dicha curva por ese punto. Determina la pendiente de dicha recta.

De la misma manera, las editoriales han de ofrecer unos modelos que sean coherentes con los elementos básicos que hemos mencionado anteriormente. Tanto Edebé como Anaya presentan unidades didácticas específicas en las que se centran en la introducción de todos los tipos de funciones, junto con algunas de sus características más relevantes de las mismas, como el dominio, la tendencia en el infinito y los puntos de interés. Igualmente, en otra unidad didáctica se enseña el concepto de límite, los distintos tipos de límites y todas las indeterminaciones más relevantes y frecuentes a las que los alumnos se van a enfrentar, junto con los mecanismos más apropiados para su resolución.

Utilizando toda esta información concluyo que ambos libros preparan de manera muy adecuada a los alumnos con las herramientas necesarias para afrontar cómodamente la idea de derivada y su posterior uso en el análisis de funciones.

## 6. Campos de problemas

Presentamos ahora los distintos campos de problemas: aquellos aspectos que debemos trabajar con los alumnos, que serán necesarios para la correcta comprensión del significado del concepto de derivada, no solo de su cálculo algebraico.

Es importante el acercamiento a los problemas desde el ámbito geométrico-gráfico, el cual nos permite ver la verdadera naturaleza del problema y que los alumnos comprendan qué significa y por qué se trabaja. De la misma manera, también es importante trabajar su aspecto analítico, ya que los alumnos deberán enfrentarse a funciones según su expresión, la cual tendrán que analizar para aplicar la TVM.

Trabajaremos también algunas funciones que vienen dadas por tablas de valores, que son de sencilla comprensión para los estudiantes. De esta manera somos capaces de implementar a los alumnos todos los registros en los cuales se les puede presentar la información, para que de esa manera estén familiarizados y sepan trabajar con todos ellos.

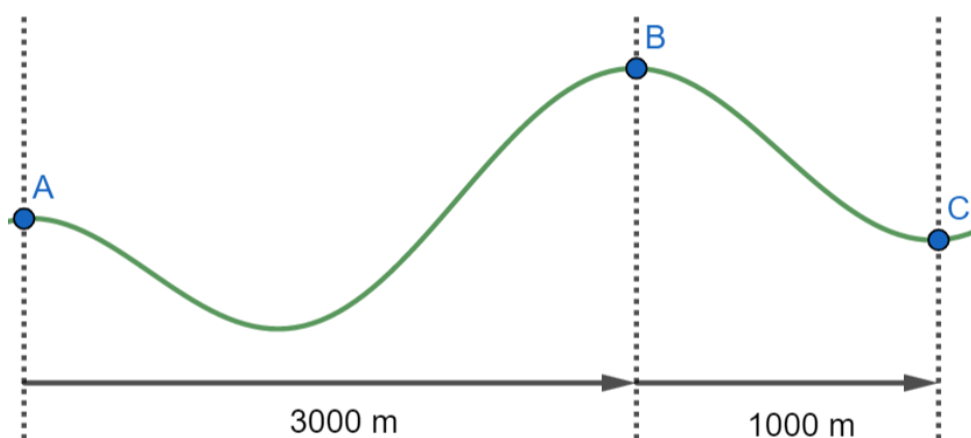
Por otra parte, también introduciremos una variedad de contextos, donde presentaremos problemas basados en situaciones cotidianas, que expresen velocidades medias, instantáneas, cálculo de rectas tangentes y otras situaciones.

### ***CP 1: Tasa de variación media***

En este caso, nos enfocaremos en problemas que deban trabajar la tasa de variación media en un intervalo  $[a, b]$ .

#### **Problema 1.1**

Claudia, una alpinista amateur, pretende determinar cuánto ha subido o bajado en total a lo largo de un camino. El perfil del camino se representa a través de la siguiente gráfica:



Donde A es la salida de la excursión, B es un punto de descanso intermedio y C es el valle donde pararán a comer y los recogerá el autobús. Cuando Claudia empieza la excursión,

se encuentran a 700 m de altitud. Cuando llega al descanso, se encuentra a 850 m de altitud, y cuando llega a la comida, a 680 m de altitud.

- ¿Podrías ayudarle a Claudia a averiguar lo que ha ascendido o descendido entre cada uno de los tramos (AB, AC, BC)?
- Una vez calculado, Claudia pretende determinar cuánto ha ascendido o descendido en relación a la distancia que ha recorrido. Teniendo en cuenta la distancia que separa los puntos, ¿podrías calcular el ascenso o descenso por cada metro avanzado?
- ¿Cómo podemos saber si entre cada uno de los puntos Claudia ha subido o bajado?

### **Problema 1.2**

Cuando Claudia llega a casa y ve el recorrido que ha hecho en su excursión, se imagina qué ocurriría si intentara unir los puntos con puentes que fueran completamente rectos. De esa manera, utilizaría una pasarela que conectara directamente cada uno de los puntos (AB, BC).

- ¿Eres capaz de determinar la pendiente que tendría cada uno de los puentes?
- Si dejáramos una pelota en cada uno de ellos, ¿se caería hacia delante o hacia atrás?

### **Problema 1.3**

En una carrera de Fórmula 1 se toma la velocidad de un coche en cinco puntos distintos, dando una vuelta completa al circuito, que se presentan en la siguiente tabla:

Posición (km)	Velocidad (km/h)
0	180
1	235
2	286
3	87
4	301

- Calcula la variación de velocidad entre el inicio y el final de la carrera.
- Repite el proceso entre el primer kilómetro y el tercero

### **Problema 1.4**

El consumo eléctrico de una máquina viene determinado por la siguiente expresión:

$$C(V) = V^2 + 1$$

Donde  $C(V)$  es el consumo y  $V$  es el voltaje aplicado a la máquina, expresado en voltios.

- Para fabricar una pieza debemos aplicar tres voltajes distintos: 1V, 3V y 6V. Calcula la variación de consumo respecto a cada uno de las distintas parejas de voltajes.

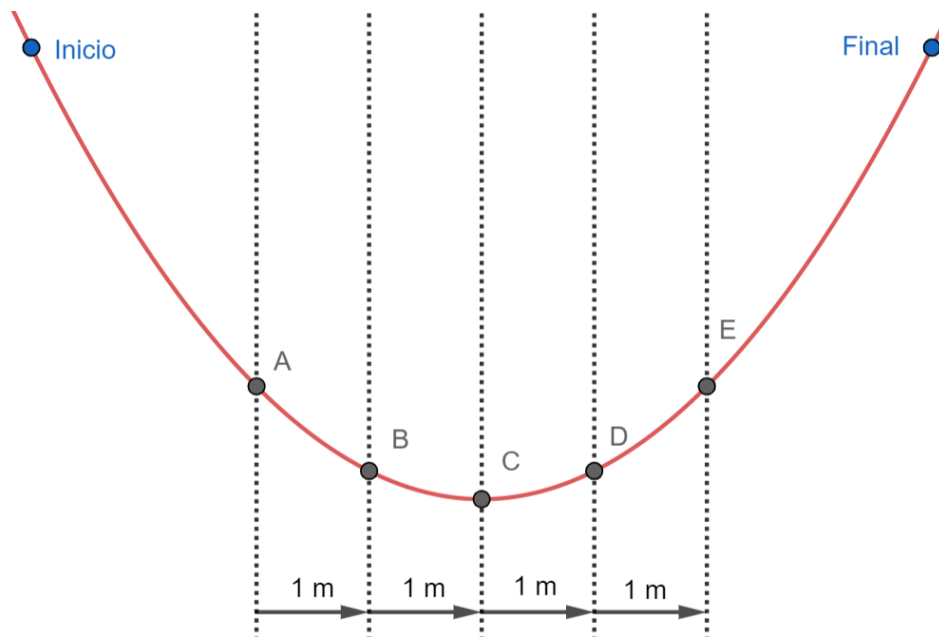
b. Para templar la pieza hay que aplicar los voltajes a la inversa: 6V, 3V y 1V. De nuevo, calcula las variaciones de consumo, en este caso en sentido inverso al apartado anterior. ¿Encuentras alguna relación entre las primeras relaciones y las segundas?

**CP 2: Tasa de variación instantánea**

En relación al apartado anterior, según vamos reduciendo la longitud del intervalo en el que se aplica la tasa de variación media, nos encontramos con la tasa de variación instantánea cuando la longitud de este intervalo tiende a ser nula.

**Problema 2.1**

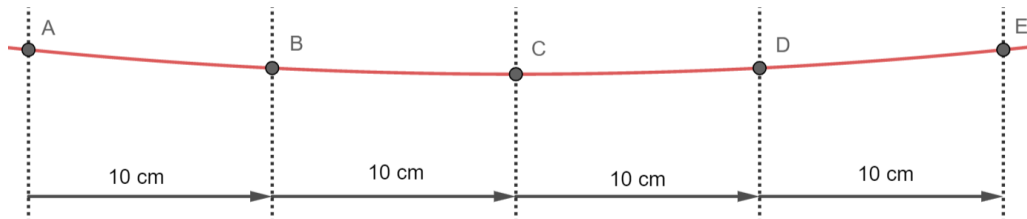
Claudia, nuestra excursionista, ha decidido comprarse un podómetro de última generación. Tiene funciones tan curiosas como calcular la altura sobre el nivel del mar a tiempo real y al instante. Para probarlo, Claudia decide hacer otra excursión, que tiene el siguiente perfil:



En una parte de la excursión se encuentran en un pequeño valle que les conduce a la playa (C), de tal manera que los puntos B y D tienen una altitud de 7 cm y los puntos A y E 15 cm.

a. De manera semejante al caso anterior, ¿puedes ayudarle a Claudia a determinar entre cada uno de los puntos (AB, BC, CD, DE) cuánto ha ascendido o descendido respecto a lo que ha avanzado?

Al terminar la excursión, Claudia se da cuenta de que su podómetro es más preciso de lo que pensaba, de tal manera que puede calcular la altitud incluso cada 10 cm, y le puede mostrar el perfil de su caminata, el cual se refleja así:



b. Sabiendo que la altitud de los puntos B y C son 3 mm y la de los puntos A y E 7 mm, ayúdale a Claudia a determinar de nuevo el ascenso o descenso que ha ocurrido entre cada uno de los puntos consecutivos respecto a lo que ha avanzado.

**Problema 2.2**

Vamos a analizar como varía la altura de un río según va avanzando, centrándonos en un punto del valle. Para ello, se miden las alturas en diferentes puntos y se presentan en la siguiente tabla:

Posición (m)	Altura (m)
10	2
10.1	1.9
10.15	1.85
10.2	1.9
11	2

Nos gustaría saber cómo cambia la altura entre cada uno de los puntos analizados. Para ello, es necesario calcular la variación de la altura frente a la variación de la posición entre cada uno de los puntos. ¿Cómo podemos ver si entre cada punto estamos subiendo o descendiendo?

**Problema 2.3**

Si colocamos la bola en un carril rectilíneo de 10 cm de longitud, considerando el centro del carril como origen de coordenadas y medimos la posición, esta se rige por la siguiente expresión:

$$x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t$$

Donde  $x(t)$  es la posición que depende del tiempo  $t$ .

Si trazamos dos puntos a través de la posición y los unimos, podremos obtener la recta que determina la tasa de variación media entre dichos puntos. Sin embargo, si aproximamos los puntos lo máximo posible, la pendiente de dicha recta tenderá a la tasa de variación instantánea. Véase el siguiente ejemplo en [Geogebra](#).<sup>2</sup>

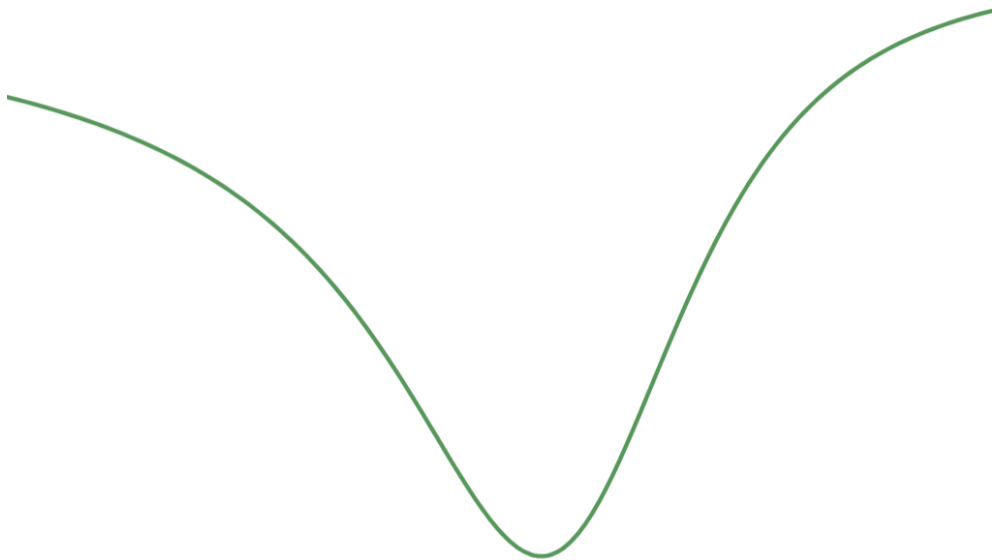
Una vez aplicado este principio, utiliza la aplicación para manipular la posición de los puntos y ver como varía la velocidad instantánea según se modifica el tiempo.

### ***CP 3: Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.***

En este punto es donde relacionamos la tasa de variación instantánea de una función en un punto con la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica en ese punto. Considero que es un apartado lo suficientemente relevante para dedicarle un campo de problemas específico, ya que nos permite relacionar directamente el significado analítico y geométrico de la tasa de variación instantánea.

#### **Problema 3.1**

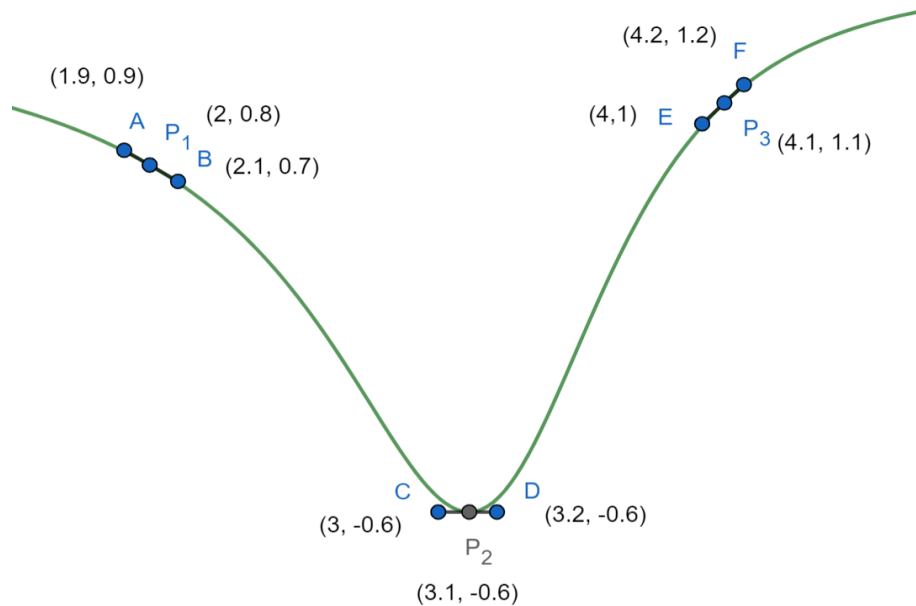
Pedro es un albañil que está trabajando en una obra pavimentando un camino. Uno de los que tiene que asfaltar es un tanto tortuoso, te lo enseñamos en el siguiente dibujo:



Para hacerlo más transitable, su oficial le ha ordenado que introduzca varias tablillas en el suelo en distintos puntos de la calzada, que señalaremos como  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ . El inicio y el final de cada una de las tablas está determinado por un punto, y se presentan las coordenadas de cada uno de los puntos con respecto al comienzo de la carretera:

---

<sup>2</sup> Los Applets son de creación propia, a no ser que se exponga lo contrario.

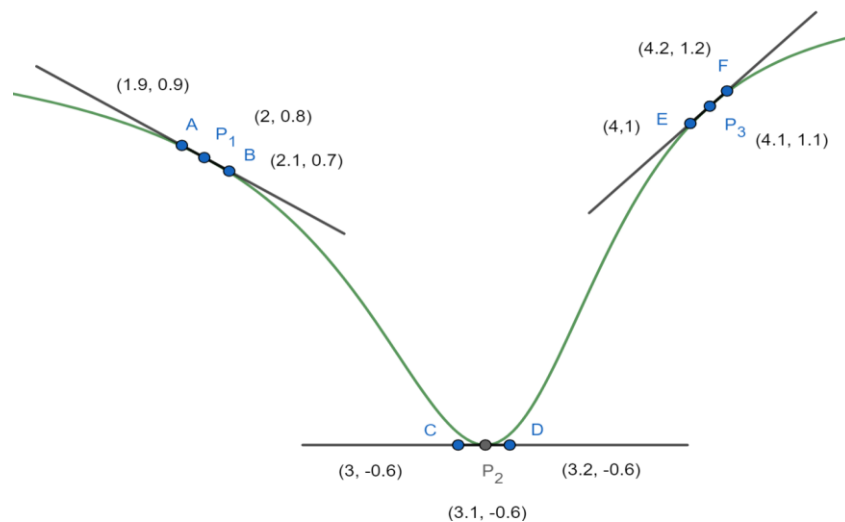


Para colocarlas correctamente, Pedro tiene que determinar si la tabla mirará hacia abajo, hacia arriba o estará plana, o lo que es lo mismo, la pendiente con la que tiene que colocar la tabla para que se adapte lo mejor posible al camino. Calcula dicha pendiente para cada una de las tablas.

Introduciremos ahora la recta tangente, elemento fundamental en nuestro análisis de las derivadas. Para ello, veremos cómo su representación gráfica corta a la función en un punto (cuando estudiamos el entorno de ese punto) y su pendiente es la tasa de variación instantánea determinada en ese punto.

**Problema 3.2**

Pedro debe continuar con sus labores de pavimentación. Sin embargo, su oficial al mando ha estado revisando su tarea y le ha aconsejado que comience colocando tablas más largas que se adapten al camino y después que recorte solamente el trozo que le sea necesario:

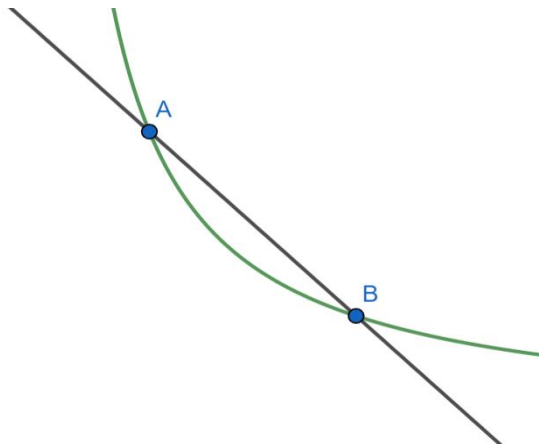


El problema está en que, al ser tan larga la tabla, no la puede manejar solo, sino que tiene que utilizar una grúa para colocarla. Esta grúa posee un novedoso sistema, de tal manera que, si se le proporciona la dirección y algún punto, puede colocar la tabla con mucha precisión. Por eso es necesario que Pedro calcule la recta en la que debe colocar cada una de las tablas.

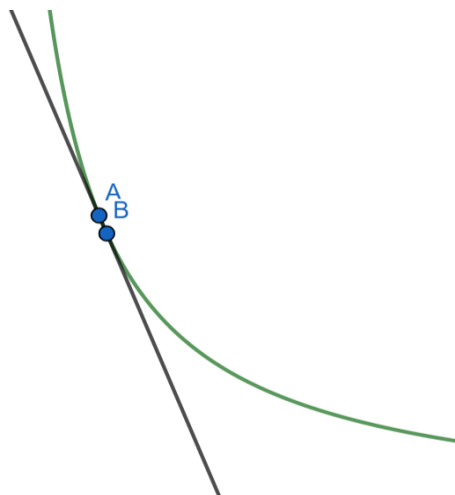
Utilizando los puntos de las tablillas, contenidos en la tabla grande, determina la recta que contiene cada una de las tablas grandes.

### **Problema 3.3**

Vamos a estudiar cómo varían las rectas secantes a una curva entre dos puntos. Para ello, utilizaremos la herramienta [Geogebra](#), que nos permite graficar diferentes funciones y seleccionar los puntos que consideremos de interés. En este caso, lo aplicaremos sobre la función  $f(x) = 1/x$ . Seleccionaremos dos puntos de la función y los uniremos mediante una recta, de tal modo que esta sea secante a la curva:



Ahora, vamos a intentar que la recta sea tangente, es decir, que solamente corte a la curva en un punto en su entorno. Para ello, iremos aproximando los puntos el uno al otro, y de nuevo veremos qué ocurre con la recta:

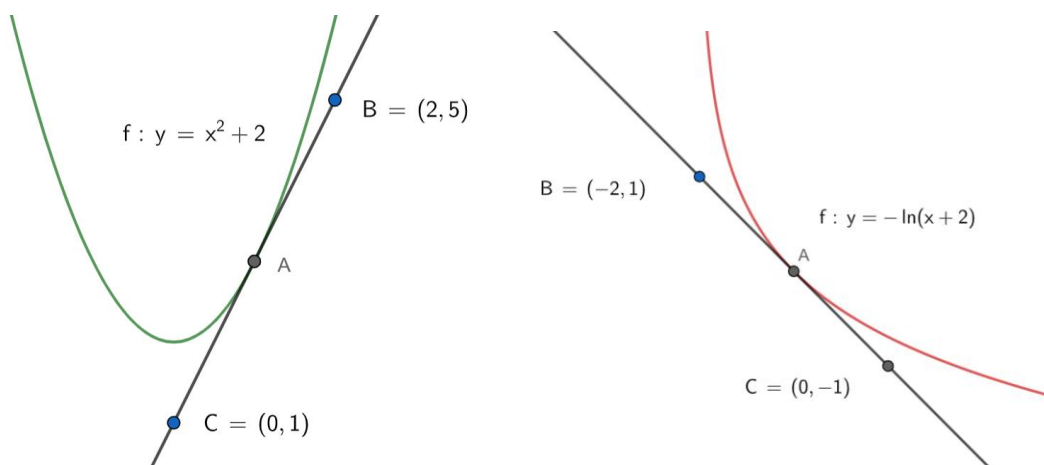


De nuevo, manipula los puntos acercándolos lo máximo posible. Si eres capaz de conseguir que sean exactamente coincidentes, la recta desaparecerá. ¿Por qué crees que ocurre eso?

También puedes comparar la posición y la altura de cada uno de los puntos, y de esa manera ver si la recta sube o baja. Intenta comparar la tendencia de la recta con la tendencia de la gráfica. ¿Encuentras alguna relación?

**Problema 3.4**

Determina la expresión de la recta cuyos puntos se muestran a continuación, y su pendiente:



***CP 4: Cálculo de derivadas en un punto aplicando la definición***

A partir de este momento, iremos introduciendo el concepto de derivada a través de su definición analítica, para de esa manera hacer un nexo entre su significado geométrico previamente trabajado y las herramientas analíticas que son necesarias para su correcta utilización.

**Problema 4.1**

El rendimiento de un deportista viene determinado por la siguiente expresión:

$$R(x) = -x^2 + 5x$$

Donde  $R(x)$  es el rendimiento y  $x$  la distancia recorrida, expresada en kilómetros. Su entrenador se pregunta cómo varía su rendimiento a lo largo de una carrera de 5 km, concretamente en el tercer kilómetro, donde ha detectado que este empieza a reducirse. ¿Puedes ayudarle a identificar la variación de rendimiento del atleta en el tercer kilómetro?

### **Problema 4.2**

Un bar compra refrescos en relación con el consumo de los mismos, siguiendo la siguiente regla:

$$R(x) = 2x + 10$$

Donde  $R(x)$  son los refrescos comprados y  $x$  son los consumidos por los clientes. De esa manera, siempre tiene remanente para no quedarse desprovisto para el día siguiente. El dueño quiere calcular como varía los refrescos comprados según la cantidad de clientes que tienen. Calcula la variación de refrescos para 10, 50 y 100 clientes. ¿Qué observas?

### **CP 5: Función derivada**

En este caso vamos a trabajar con la función derivada, aquella herramienta a la que se le introduce una función y nos devuelve la derivada de dicha función, para todos los valores del dominio de dicha función.

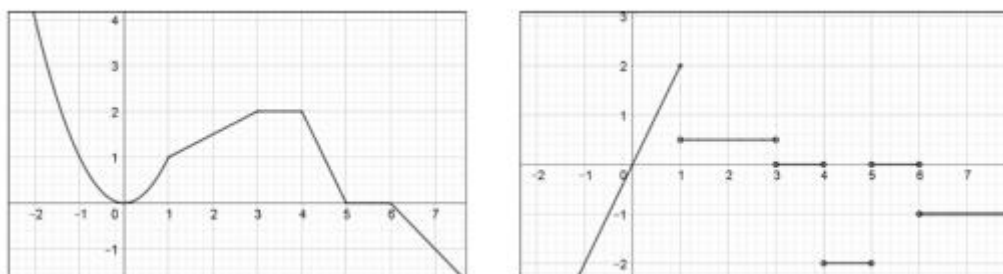
### **Problema 5.1**

Se presenta la siguiente herramienta de [Geogebra](#)<sup>3</sup>, la cual dada una función analítica cualquiera y un punto del dominio de dicha función pinta la curva, junto con la función derivada de dicha curva y calcula el valor de la derivada en el punto dado.

En este caso nuestro objetivo es de nuevo manipular la herramienta para ver cómo varía la derivada y su valor según modificamos la función y el valor determinado.

### **Problema 5.2**<sup>4</sup>

La posición y la velocidad de una partícula en un plano viene determinado por las siguientes gráficas:



Teniendo en cuenta que la velocidad se define como el cambio de la posición con respecto al tiempo, o lo que es equivalente, con la derivada de la posición con respecto al tiempo:

- Determina las expresiones de la posición y la velocidad para cada uno de los tramos.

<sup>3</sup> Extraído del currículo LOMLOE de matemáticas.

<sup>4</sup> Ídem.

b. Averigua qué relación existe entre las distintas funciones que representan a trozos la posición y sus equivalente temporales de la velocidad.

**Problema 5.3**

En la siguiente tabla se representa las funciones que determinan el movimiento de un glóbulo blanco a lo largo del torrente sanguíneo durante un tiempo determinado:

	<i>Posición (cm)</i>	<i>Velocidad (cm/s)</i>
$x < 3 \text{ cm}$	$x^2 + 3x$	$2x + 3$
$3 \leq x \leq 6 \text{ cm}$	$e^{2x}$	$2e^{2x}$
$x > 6 \text{ cm}$	$\ln(2x + 3)$	$2/2x + 3$

a. ¿Encuentras alguna relación entre la posición y la velocidad del glóbulo a lo largo del recorrido?

b. Determina la posición y la velocidad de la célula en las posiciones 2 cm, 5 cm y 10 cm.

***CP 6: Aplicaciones de las derivadas al estudio de la monotonía de una función***

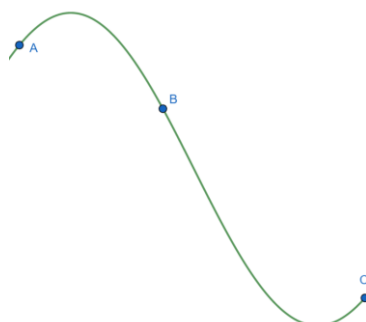
Este campo de problemas nos permitirá, una vez conocido el significado de la derivada de una función en un punto y su cálculo en casos sencillos, avanzar en el análisis de funciones.

***CP 6.1: Crecimiento y decrecimiento***

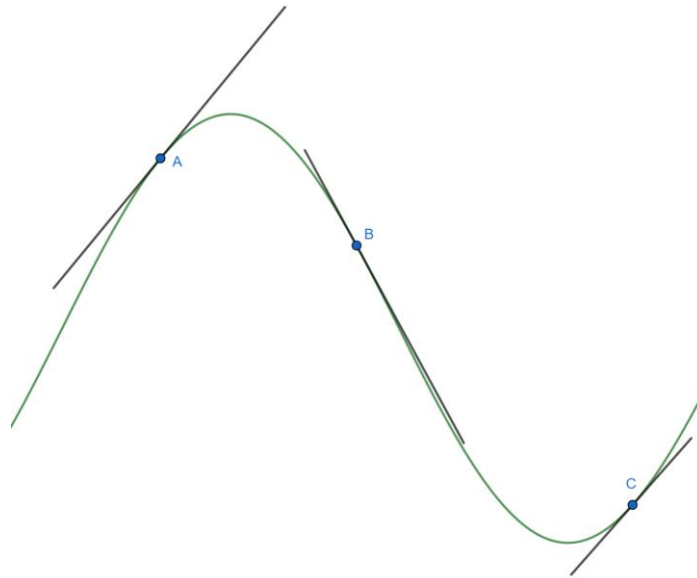
Pretendemos trabajar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Para ello, se ha demostrado que los intervalos donde la pendiente de la recta tangente, o lo que es lo mismo, la derivada de la función, es positiva, la función es estrictamente creciente. De la misma manera ocurre a la inversa: aquellos intervalos donde la derivada de la función sea negativa, la función es estrictamente decreciente.

**Problema 6.1.1**

A Lucas le encanta utilizar su patinete para ir por el parque haciendo piruetas. Un día llega al pueblo de su tío, donde no ha estado nunca, y se va por allí a dar una vuelta con el patinete, hasta que llega a una calle que tiene este aspecto:



De tal manera que la calle empieza en el punto A y termina en el punto C. Como Lucas es un poco vago, no le gusta demasiado empujar el patinete cuando no es necesario. Tras varios años se ha dado cuenta que los trozos de calle donde baja no es necesario impulsarse, mientras que aquellos donde la calle se empina hacia arriba tiene que impulsarse. Para ello, Lucas se imagina como si cada punto fuera una recta:

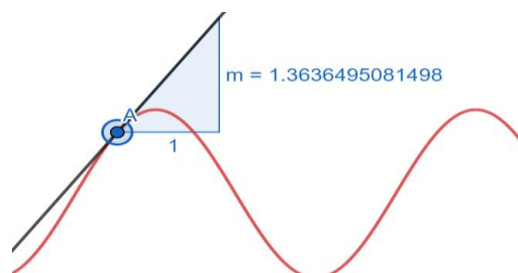


De esa manera, Lucas quiere averiguar si en cada uno de los puntos marcados (A,B,C) debe acelerar o dejarse llevar, en relación a lo que haga la calle: si la calle sube deberá impulsarse, y si la calle baja deberá dejarse caer. Determina qué ocurre en cada punto.

Además, quiere pensarlo para toda la calle. Utilizando la analogía de las rectas de Lucas, determina que se debe cumplir para que comience o deje de impulsarse, y a partir de qué lugar tendrá que cambiar su comportamiento

**Problema 6.1.2**

Vamos a volver a ayudarnos de [Geogebra](#) para ver cómo cambia la monotonía de las funciones. Para ello, analizaremos la siguiente función:  $f(x) = \text{sen}(2x)$ .



Esta herramienta nos permite calcular la inclinación de la recta tangente dependiendo del punto en el que nos encontremos de la recta. Ahora, tu objetivo es ir moviendo el punto a lo largo de la curva y ver cómo varía el valor de la pendiente de la recta, teniendo muy en

cuenta el signo de la misma. ¿Eres capaz de encontrar alguna relación entre el signo y la tendencia de la curva?

**Problema 6.1.3**

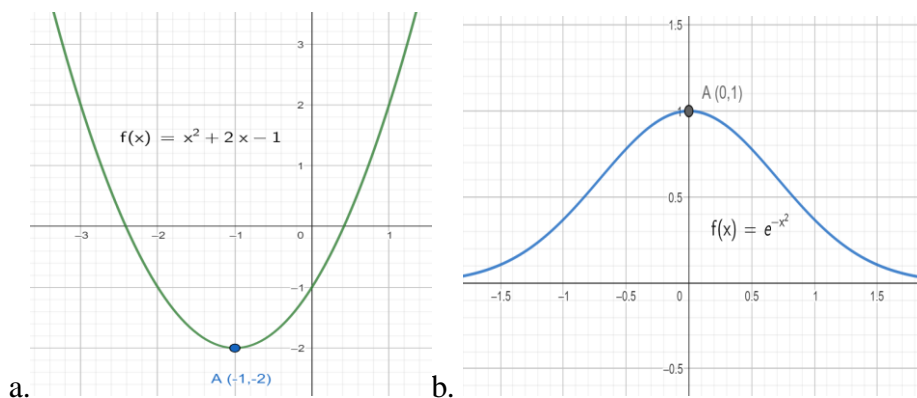
En la siguiente tabla se presentan las medidas tomadas de una función, en la cual se calcula la variación instantánea de dicha función en algunos puntos:

Posición (x)	T.V.I.
1	-1
3	-2
6	4
10	-7
14	3

Con esta información y comprendiendo el significado que hemos planteado de la tasa de variación instantánea en relación con el comportamiento de la función, ¿eres capaz de determinar si la función crece o decrece en cada uno de esos puntos?

**Problema 6.1.4**

Determine los intervalos de crecimiento de las siguientes funciones, primero gráficamente y después analíticamente:



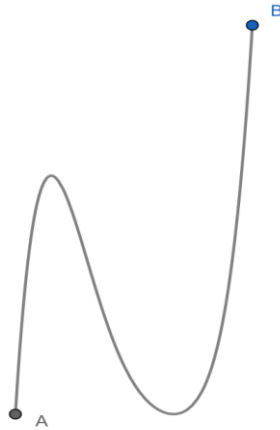
***CP 6.2: Extremos relativos***

Aquellos lugares geométricos en los que la función ni crece ni decrece, es decir, que la pendiente de la recta tangente es nula, o por equivalencia que su derivada es cero, son los

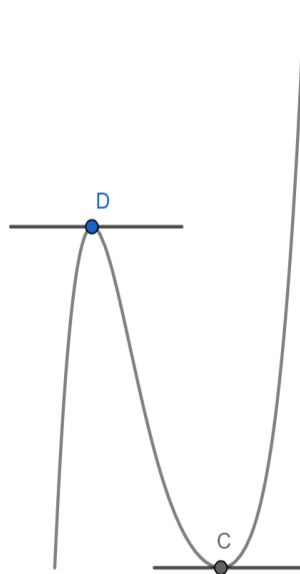
extremos relativos. En caso de acercarnos positivamente en pendiente y alejarnos negativamente, se tratará de un máximo. En el caso contrario, cuando nos acercamos con pendiente negativa y nos alejamos con pendiente positiva, tendremos un mínimo.

**Problema 6.2.1**

Paula es una aficionada de las canicas. Le encanta jugar con ellas por casa, y sus padres le compran un set, de tal manera que este tiene unos carriles por los que se pueden dirigir, que tiene la siguiente forma:



El circuito empieza en A y acaba en B, de tal manera que puede tirar la canica por cualquiera de los trozos del mismo y ver que hace: subir o bajar mucho o poco. Sin embargo, hay unos puntos donde, si Paula deja muy cuidadosamente la canica, esta no se mueve ni hacia un lado ni hacia otro de la pista. Es como si estuviera sobre un suelo plano:



Si nos damos cuenta, el suelo dibujado en los puntos donde la canica no se cae es completamente plano, para que de esa manera no se caiga. Explica las cualidades de esos puntos, y determina un método para averiguarlos.

**Problema 6.2.2**

De manera semejante al problema 6.1.3, se presentan de manera tabular distintos puntos de una función, y se mide la pendiente de la recta tangente a dicha función en dicho punto:

Posición (x)	Pendiente (m)
1	-2
3	3
4	4
6	-2
7	1

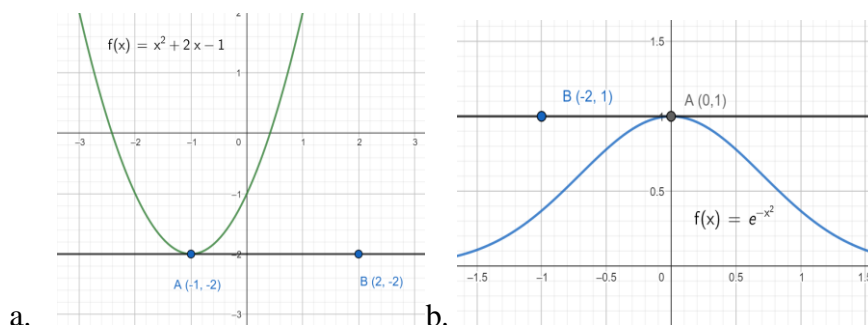
Teniendo en cuenta ambas magnitudes, determina :

a. Si, entre cada intervalo de puntos, existe un punto crítico de la función, a partir del cual la monotonía de dicha función cambiaría.

b. En caso de que existan, determina si es un máximo o un mínimo. Argumenta por qué.

**Problema 6.2.3**

Determine la ecuación de las rectas tangentes a las funciones, condicionadas por los dos puntos que se presentan. Determina la pendiente de dicha recta:



Después, calcule la derivada de la función en los puntos que presentan en común la curvas y las rectas. Se puede apreciar que en la primera gráfica el punto es un mínimo y en la segunda un máximo, ¿observa alguna característica especial que compartan?

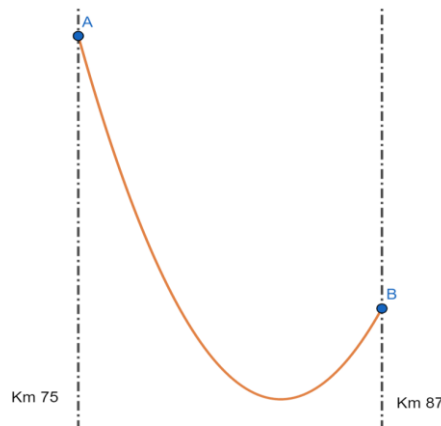
***CP 7: Optimización***

Para culminar la unidad, el último campo de problemas que trataremos será la optimización de funciones. En ellos, pretendemos mostrar situaciones realistas donde sea

necesario obtener el valor que maximice o minimice una función: coste, beneficio, dimensiones, etc. Por tanto, explicaremos las técnicas y tecnologías necesarias más adelante, de tal manera que los alumnos aprendan cómo resolverlos correctamente, junto con su significado y aplicación.

**Problema 7.1**

Antonio es un empresario que está barajando la posibilidad de construir una explotación de patatas entre dos pueblos (A, B). Para ello, hace un estudio de mercado, donde encuentra una gráfica que le informa acerca del precio por metro cuadrado en relación a la distancia a los pueblos:

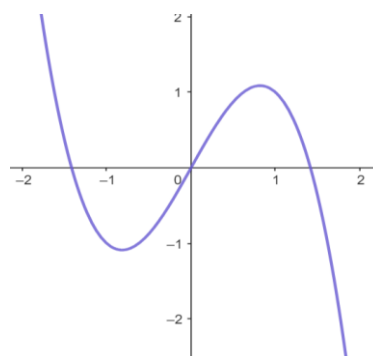


Si nos damos cuenta, lo más lógico es que Antonio compre el terreno donde será más barato, para que de esa manera invirtiendo el mismo dinero pueda comprar más metros cuadrados, y por tanto plantar más patatas. ¿A qué distancia entre los dos pueblos deberá comprar su campo?

**Problema 7.2**

Antonio pretende hacer una nueva inversión, en este caso en una plantación de olivos. Para ello, habla con un agricultor compañero suyo, que es capaz de calcular el rendimiento de la plantación en función de la cantidad de olivos que plante en un terreno determinado, el cual se rige por la siguiente función:

$$R(x) = -x^3 + 2x$$



donde  $R$  es el rendimiento de la finca y  $x$  es el número de miles de olivos que debe plantar Antonio. Como es lógico, Antonio busca maximizar su beneficio, para que con un determinado número de olivos sea capaz de producir lo máximo posible. ¿Puedes ayudarlo a encontrar la cantidad óptima de olivos que debe plantar?

Si no tuviéramos en cuenta el significado de la función, ¿existiría algún otro valor para el cual el rendimiento fuera mayor? ¿Por qué en este problema ese valor no tiene sentido?

### **Problema 7.3**

Pedro es un granjero de Toledo, el cual tiene que vallar su campo, obtenido en subasta pública, con una reja metálica. Para ello, posee 64 metros de valla, los cuales tiene que distribuir entre los cuatro lados de un rectángulo, que es la forma que su finca debe tener por la legislación actual. Si el objetivo de Pedro es obtener el mayor área posible para cultivar, determine las dimensiones del campo. Una vez obtenido, determine el área del campo de Pedro y compruebe que, en efecto, esas dimensiones maximizan el área del campo. Argumente las herramientas utilizadas para el cálculo.

## 7. Técnicas para el desarrollo de los campos de problemas

Procedemos ahora a analizar las técnicas necesarias para el dominio de los campos de problemas a la hora de la resolución del trabajo con las derivadas:

### ***T 1: Cálculo de la tasa de variación media de una función en un intervalo.***

*Determina la tasa de variación media de las siguientes funciones entre los puntos determinados:*

a.  $T.V.M._{1,3} x^2 + 2$

b.  $T.V.M._{1,2} 2x + 6$

c.  $T.V.M._{1,2} \frac{2x+6}{x-3}$

d.  $T.V.M._{-1,1} - \ln(x + 2)$

e.  $T.V.M._{-2,3} e^{3x}$

f.  $T.V.M._{1,2} \sqrt{3x - 2}$

g.  $T.V.M._{0,\pi} \cos(2x + \pi)$

h.  $T.V.M._{0,\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2(x - \pi)$

Después, representa gráficamente los puntos de dicha expresión utilizando [Geogebra](#) y únelos con una recta. ¿Encuentras alguna relación entre el resultado obtenido y dicha recta?

### ***T 2: Cálculo de la tasa de variación instantánea de una función en un punto.***

*Determina la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en el punto determinado:*

a.  $T.V.I._1 x^2 + 2$

b.  $T.V.I._2 2x + 6$

c.  $T.V.I._2 \frac{2x+6}{x-3}$

d.  $T.V.I._1 - \ln(x + 2)$

e.  $T.V.I._3 e^{3x}$

f.  $T.V.I._2 \sqrt{3x - 2}$

g.  $T.V.I._\pi \cos(2x + \pi)$

h.  $T.V.I._{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2(x - \pi)$

### ***T 3: Cálculo de una recta dados dos puntos o un punto y su vector director.***

*Determina la recta y señala su pendiente a través de la información dada:*

a.  $P(0,1)$  y  $Q(1,2)$

b.  $P(1,3)$  y  $Q(3,4)$

c.  $P(0,1)$  y  $\vec{v} = (1,0)$

- d.  $P(2,1)$  y  $\vec{v} = (3,1)$
- e.  $P(0,1)$  y  $m = -2$
- f.  $P(2,3)$  y  $m = \frac{3}{2}$

**T 4: Derivada de una función en un punto a partir de su definición.**

Determine la derivada de las siguientes funciones a través de la definición para  $x = 1$ :

- a.  $f(x) = 4$
- b.  $f(x) = x$
- c.  $f(x) = 2x - 1$
- d.  $f(x) = \sqrt{x}$
- e.  $f(x) = \sqrt{x} + 3$
- f.  $f(x) = x^2$

**T 5: Cálculo de la función derivada.**

Determine analíticamente las derivadas de las siguientes funciones:

- a.  $f(x) = 2x + 6$
- b.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$
- c.  $f(x) = \sqrt{x} + 3$
- d.  $f(x) = \frac{x^2-3}{x-5}$
- e.  $f(x) = \sqrt{x}$
- f.  $f(x) = (x^2 + 2x)^2$
- g.  $f(x) = \ln(2x + 3)$
- h.  $f(x) = e^{(5x-7)}$
- i.  $f(x) = \cos(2x + 6)$
- j.  $f(x) = \operatorname{tg}(4x^3 - 7)$

**T 6: Estudio de la monotonía de una función.**

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

- a.  $f(x) = 2x - 7$
- b.  $f(x) = x^3 - 3$
- c.  $f(x) = \sqrt{2x - 6}$
- d.  $f(x) = \ln(2x - 4)$
- e.  $f(x) = e^{3x}$
- f.  $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$
- g.  $f(x) = \operatorname{sen}(2x - 3)$

**T 7: Estudio de los extremos relativos de una función.**

Determina los máximo y mínimos de las siguientes funciones en todo su dominio, si existen:

- a.  $f(x) = 2x - 3$
- b.  $f(x) = x^2 - 3$
- c.  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 2$
- d.  $f(x) = \sqrt{x^3 - 4}$
- e.  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
- f.  $f(x) = \ln\left(2x - \frac{4}{x}\right)$
- g.  $f(x) = \cos(x - \pi)$

**T 8: Determinación de máximos y mínimos absolutos de una función en un intervalo.**

Determina los máximo y mínimos de las funciones anteriores, pero esta vez acotados a un intervalo determinado:

- a.  $f(x) = 2x - 3$  si  $x \in [0,3]$
- b.  $f(x) = x^2 - 3$  si  $x \in [-2,4]$
- c.  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 2$  si  $x \in [2,5]$
- d.  $f(x) = \sqrt{x^3 - 4}$  si  $x \in [-7,8]$
- e.  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  si  $x \in [-2,5]$
- f.  $f(x) = \ln\left(2x - \frac{4}{x}\right)$  si  $x \in [2,5]$
- g.  $f(x) = \cos(x - \pi)$  si  $x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}]$

## 8. Tecnologías de las derivadas

En este apartado presentaremos las tecnologías que los alumnos deberán adquirir para el completo dominio de las derivadas y su aplicación en la representación de funciones:

### **Tec.1: Tasa de variación media**

Sea  $f(x)$  una función definida en el plano real. La tasa de variación media en el intervalo  $[a, b] \in \text{Dom } f(x)$ , se define como:

$$T.V.M._{ab} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esta magnitud determina el promedio del cambio de una función en un intervalo determinado entre dos puntos cualesquiera del dominio de dicha función.

### **Tec.2: Tasa de variación instantánea**

Sea  $f(x)$  una función definida en el plano real. La tasa de variación instantánea en un punto  $x = a \in \text{Dom } f(x)$  se define como:

$$T.V.I._a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si redefinimos la expresión, llegamos a la siguiente conclusión:

$$T.V.I._a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Esta magnitud determina el cambio momentáneo de una función en un punto.

### **Tec. 3: Derivada de una función en un punto**

Sea  $f(x)$  una función definida en el plano real. La derivada de una función en un punto  $x = a \in \text{Dom } f(x)$  se define como:

$$f'(a) \equiv T.V.I._a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

La derivada de una función en un punto representa la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

### **Tec.4: Ecuación de la recta tangente**

Sea  $f(x)$  una función definida en el plano real. La ecuación de la recta tangente en el punto  $x = a \in \text{Dom } f(x)$  se define como:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

La recta tangente a la curva en dicho punto representa aquella recta cuyo valor mejor se adecua a la curva en el punto de tangencia. La recta normal a la curva en dicho punto es la recta perpendicular a la tangente.

### **Tec. 5: Función derivada**

Sea  $f(x)$  una función definida en el plano real. La función derivada, definida en  $\text{Dom } f(x)$  se define como:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La función derivada nos determina la derivada de una función, la cual se cumple para todos los puntos definidos para dicha función. Si se evalúa en cualquier punto de su dominio, se obtiene la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

### **Tec. 6: Derivadas n-ésimas**

Sea  $f(x)$  una función definida en el plano real. Su derivada n-ésima se define como:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

La derivada n-ésima de una función nos permite derivar indefinidamente una función, de tal modo que obtenemos funciones derivadas sucesivas.

### **Tec. 7: Propiedades de las derivadas**

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones definidas en el plano real. Se definen las siguientes propiedades de las derivadas:

#### **Tec. 7.1: Suma y resta de derivadas**

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

#### **Tec. 7.2: Producto de derivadas**

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

#### **Tec. 7.3: Derivada de una función por una constante**

$$[kf(x)]' = kf'(x) \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

#### **Tec. 7.4: Derivada de un cociente**

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \forall g(x) \neq 0$$

La introducción de las propiedades de las derivadas es elemental a la hora del cálculo de las mismas. Sin embargo, la demostración de las mismas puede exceder el nivel de los alumnos de este curso. Por tanto, se presentan dichas propiedades sin mayor argumentación, la cual se pospone para cursos posteriores.

### **Tec. 8: Regla de la cadena**

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones definidas en el plano real. Así, la derivada de la función compuesta se define como:

$$f'[g(x)] = f'[g(x)]g'(x)$$

## **Tec. 9: Aplicaciones de las funciones**

### **Tec. 9.1: Monotonía de una función**

Sea  $f(x)$  una función definida en un subconjunto de  $R$ :

1.  $f(x)$  es creciente en  $x = a$  si existe un entorno  $E(a, \delta)$  en el que:
  - a. si  $x < a$ ,  $f(x) < f(a)$
  - b. si  $x > a$ ,  $f(x) > f(a)$
2.  $f(x)$  es decreciente en  $x = a$  si existe un entorno  $E(a, \delta)$  en el que:
  - a. si  $x < a$ ,  $f(x) > f(a)$
  - b. si  $x > a$ ,  $f(x) < f(a)$
3. Si  $f(x)$  es derivable en  $x = a$  se puede demostrar que:
  - a.  $f(x)$  es creciente en  $x = a \rightarrow f'(a) \geq 0$
  - b.  $f(x)$  es decreciente en  $x = a \rightarrow f'(a) \leq 0$

### **Tec. 9.2. Extremos de una función**

Sea  $f(x)$  una función definida en un subconjunto de  $R$ :

1.  $x = a$  es un máximo relativo de  $f$  si existe un entorno  $E(a, \delta)$ , en el que  $f(x) \leq f(a)$ .
2.  $x = a$  es un mínimo relativo de  $f$  si existe un entorno  $E(a, \delta)$ , en el que  $f(x) \geq f(a)$ .
3. Si  $f(x)$  es derivable en  $x = a$  se puede demostrar que
  - a. Si  $f$  tiene un máximo o mínimo relativo en  $x = a \rightarrow f'(a) = 0$

## **9. Metodología de la propuesta**

A la hora de plantear la metodología que utilizaremos a lo largo de las sesiones, debemos tener en cuenta varios factores influyentes en la comprensión y asimilación de los conceptos por parte de los alumnos.

Debemos ser conscientes de la base de la que parte, que evaluaremos previamente mediante una prueba inicial. También hemos de tener en cuenta que el rendimiento de todos los alumnos no será idéntico, por lo que será conveniente introducir sesiones de repaso para que, de esa manera, todos los alumnos sean capaces de alcanzar los conocimientos elementales para poder comprender perfectamente la unidad, y por otra parte se permite que el mayor número de alumnos posible tengan la posibilidad de desarrollar plenamente su capacidad cognitiva, de tal modo que pueda expresar todas sus conjeturas acerca de la unidad.

La metodología que vamos a aplicar se basará en la presentación de cada uno de los campos de problemas, concretamente con alguno de los ejemplo que hemos diseñado. De esa manera, los alumnos podrán resolver el problemas con las técnicas y tecnologías que conocen de unidades anteriores, pero llegará un punto donde verán que la tarea que se les plantea supera su conocimiento actual. Será ahí el momento para introducir la tecnología pertinente que les permite enfrentarse al campo de problemas en cuestión. Para perfeccionarla, utilizaremos los ejemplos expuestos en las técnicas, de tal manera que tengan dominio de la misma.

Una vez se haya institucionalizado la tecnología será el momento de avanzar el siguiente campo de problemas, donde volverá a encontrarse con la misma cuestión, que de nuevo afrontaremos de la misma manera.

Esta metodología permite hacer ver a los alumnos por qué las tecnologías y técnicas implementadas resultan útiles, más allá del planteamiento inicial de las tecnologías sin motivo alguno, lo cual podría inducir a la mecanización de los procesos y su desvirtuación del contexto real.

Es interesante que los alumnos puedan trabajar en grupo, de un tamaño en torno a las cuatro personas, para que de esa manera puedan poner en común su perspectiva a cerca de todos los problemas a los que se van a enfrentar. La visión de cada uno de ellos pueden permitirles resolver el problema satisfactoriamente, lo que determinará un mayor aprendizaje.

## **10. Secuencia didáctica y cronograma de sesiones**

Ahora, aplicando todo lo visto previamente, formulamos la secuencia didáctica de la unidad, de tal manera que se presentarán los campos de problemas que trabajaremos, las técnicas necesarias para su correcto desarrollo y qué tecnologías se introducen.

### ***Sesión 0***

Lo primero será evaluar que los alumnos son capaces de manejar correctamente las herramientas que necesitan para la completa comprensión de las derivadas. Para ello, haremos una pequeña prueba, de tal modo que cercioramos dicho conocimiento.

### ***Sesiones 1-2***

En estas dos primeras sesiones se presentarán a los alumnos los tres problemas de razones de ser, explicados en el apartado 5. Con estos problemas, nuestro objetivo es introducir a los alumnos a los diversos conceptos que veremos más adelante, haciéndoles ver el motivo por el cual el estudio de la derivada es esencial para los tratamientos de problemas realistas.

Para ello, vamos más allá de que los alumnos sean capaces de resolver los problemas, sino de que encuentren la carencia de una herramienta para medir las variaciones de las funciones y para encontrar tanto analíticamente como geoméricamente los puntos de crecimiento, decrecimiento y estabilidad de las funciones.

### ***Sesión 3***

En esta primera sesión, una vez han comprendido la necesidad de los problemas de razón de ser, comenzaremos con aquellos en relación con la tasa de variación media para después institucionalizarla.

*Campos, técnicas y tecnologías trabajados:* CP. 1; T 1; Tec.1

### ***Sesión 4***

Una vez se ha comprendido el concepto de tasa de variación media como el promedio de cambio en un intervalo, se reduce la longitud del intervalo hasta infinitesimalizarlo, o lo que es equivalente, introducimos la tasa de variación instantánea como razón de cambio puntual.

*Campos, técnicas y tecnologías trabajados:* CP. 2; T 2; Tec.2

### ***Sesión 5***

Una vez se conoce el cambio puntual de una función, se trabaja con la noción de límite para definir la derivada de la función en el punto como pendiente de la recta tangente, que determinará la razón de cambio instantáneo.

*Campos, técnicas y tecnologías trabajados:* CP. 3; T 3; Tec.3,4

### **Sesión 6**

Realizaremos una sesión de control, donde manejaremos los conceptos trabajados durante todas las sesiones anteriores. Es importante que los alumnos los aprendan perfectamente, para que cuando estos se compliquen sean capaces de afrontar el aumento de dificultad.

Campos, técnicas y tecnologías trabajados: CP. 1,2,3; T 1,2,3; Tec.1,2,3,4

### **Sesión 7**

Se vincula directamente el significado geométrico de la razón de cambio, trabajando tanto geoméricamente como analíticamente en relación a la definición de derivada.

Campos, técnicas y tecnologías trabajados: CP. 3,4; T 3,4; Tec. 3,4

### **Sesión 8**

Cuando los alumnos conocen el concepto de derivada geoméricamente, es el momento de trabajar con las expresiones analíticas. Se demostrarán algunas funciones derivadas, se introducirán las derivadas sucesivas y se trabajará con distintas expresiones las propiedades de las derivadas.

Campos, técnicas y tecnologías trabajados: CP.4,5; T 4,5; Tec. 4,5, 6, 7

### **Sesión 9**

Es el momento de implementar la regla de la cadena, necesaria para que los alumnos sean capaces de analizar funciones compuestas. Este concepto suele ser bastante complejo de entender, por lo que utilizaremos una sesión completa, y parte de las siguientes para trabajarlo.

Campos, técnicas y tecnologías trabajados: CP. 5; T 5; Tec. 8

### **Sesión 10**

De nuevo, realizaremos sesión de control para reafirmar los conceptos anteriores que hayan quedado poco afianzados.

Campos, técnicas y tecnologías trabajados: CP. 3,4,5; T 3,4,5; Tec. 3, 4, 5, 6, 7, 8

### **Sesión 11**

Una vez los alumnos son capaces de dominar las derivadas con la suficiente soltura, es momento de introducirlos a sus aplicaciones más elementales. Como conocen su significado geométrico, comenzaremos tratando la monotonía de las funciones.

Campos, técnicas y tecnologías trabajados: CP. 6.1; T 6.1; Tec. 9.1

### **Sesión 12**

Una vez los alumnos han comprendido que una manera de medir la monotonía de las funciones es trabajar con la recta tangente, utilizaremos lo mismo para determinar los extremos de la función.

Campos, técnicas y tecnologías trabajados: CP 6.2; T 6.2; Tec. 9.2

### **Sesión 13**

En este caso, nos enfocaremos especialmente de nuevo en el trabajo de monotonía y extremos relativos, ya que son las aplicaciones fundamentales que los alumnos deben dominar y las seguiremos utilizando a lo largo de la unidad.

Campos, técnicas y tecnologías trabajados: CP 6.1, 6.2; T 6.1, 6.2; Tec. 9.1, 9.2

### **Sesión 14**

Como ya es habitual, haremos un repaso de todos los conceptos implementados en las sesiones anteriores.

Campos, técnicas y tecnologías trabajados: CP 5.1, 5.2, 6; T 5.1, 5.2, 6; Tec. 9.1, 9.2

### **Sesión 15**

En esta sesión introduciremos los problemas de optimización: significado, objetivos, métodos de resolución e importancia de la comprensión de resultados.

Campos, técnicas y tecnologías trabajados: CP 7; T 6.1, 6.2, 6; Tec. 9.1, 9.2

### **Sesión 16**

En esta sesión, repetiremos los problemas de razón de ser que introdujimos en las dos primeras sesiones, pero esta vez contando con las herramientas de derivación que los alumnos habrán ido adquiriendo a lo largo del transcurso de la unidad didáctica.

De esta manera, podrán ver la diferencia entre la utilización de dichas herramientas y la carencia de ellas, lo que determina una simplificación de los problemas y mejores resultados obtenidos, siendo estos más precisos y coherentes.

### **Sesiones 17-18**

Para finalizar la secuencia didáctica, realizaremos en las dos últimas sesiones un repaso general de todas las sesiones anteriores: los alumnos deben tener claras todas las tecnologías que se les han presentado, y ser capaces de resolver los distintos campos de problemas aplicando las técnicas expuestas durante las clases.

## **11. Evaluación**

Procedemos a diseñar una prueba que sea capaz de evaluar el aprendizaje de los alumnos acerca de las derivadas y su utilidad en la representación de funciones. Para ello, nuestro objetivo es cerciorarnos de que han aprendido tanto el concepto como la metodología de la derivación, y que tienen la capacidad de utilizar dicha herramienta para analizar comportamientos de las funciones.

Parte de nuestra evaluación y calificación va a basarse en el dominio de los alumnos a la hora de la utilización de las aplicaciones tecnológicas que iremos haciendo a lo largo de las sesiones. Con esto nos referimos a que sean capaces de dominar el uso de los applets de Geogebra que hemos diseñado a lo largo de los campos de problemas, que pueden clarificar la funcionalidad de las derivadas.

En primer lugar, iremos recogiendo evidencia durante las clases para, de esa manera, poder llegar a calificar con hasta tres puntos sobre el total el dominio de los conceptos. Con esto pretendemos implementar los criterios de evaluación 1.1, 3.2 y 4.1 del currículo [1], los cuales se basan en el dominio de las nuevas tecnologías a la hora de plantear y resolver problemas.

Sin embargo, esto no elimina la prueba evaluadora final a la que los alumnos deberán enfrentarse. En este caso vamos a diseñar una prueba que conste de tres problemas: El primero de ellos pretende trabajar el concepto de tasa de variación media, tasa de variación instantánea y su aplicación al concepto de pendiente de la recta tangente en un punto. Con este problema evaluaremos según los criterios 3.1, 5.1 y 7.1, ya que se guía al alumno a que conecte diversas ideas matemáticas correlacionadas entre sí.

El segundo se centrará en el trabajo analítico de las derivadas, donde se pretende que los alumnos utilicen las propiedades de las funciones y la regla de la cadena para resolverlo. Para su evaluación nos centraremos en los criterios 7.1, 8.1 y 8.2, ya que buscamos que el alumno aplique las tecnologías más pertinentes a la hora del cálculo de derivadas y las muestre según el lenguaje pertinente para cada expresión.

Por último, en el tercer problema trabajaremos las aplicaciones de las derivadas: monotonía, extremos relativos y optimización en el cual evaluaremos según los criterios 1.2, 2.1, 2.2, 5.2 y 6.1. Este es claramente el problema más relevante, ya que pretendemos que el alumno determine que las soluciones obtenidas son coherentes con el contexto del problema, siendo la aplicación más realista a la que se va a tener que enfrentar en esta prueba.

### Prueba de evaluación

1. a. Determina la tasa de variación media de la siguiente función en los puntos pertinentes.

Una vez calculada, representa gráficamente en el papel cuadriculado la función, coloca los puntos y únelos:

$$T.V.M._{1,3} x^2 - 6$$

b. Determina la tasa de variación instantánea de la misma función en el primero de los puntos, es decir:

$$T.V.I._1 x^2 - 6$$

c. Representa la recta tangente a la curva en dicho punto. Una vez hecho, escoge dos puntos de dicha recta y determina su expresión analítica. Por último, expresa la relación entre la pendiente de dicha recta y la tasa de variación instantánea previamente calculada.

2. Determina la función derivada de las siguientes expresiones:

a.  $f(x) = x^2 + 3$

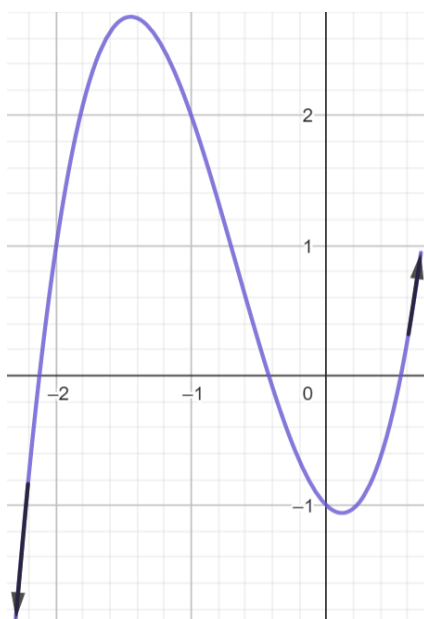
b.  $f(x) = (2x + 6)(e^x + 1)$

c.  $f(x) = \frac{3x-5}{\ln(x)}$

d.  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2x}{\sqrt{2x-5}}\right)$

3. a. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguiente función, tanto gráfica como analíticamente, teniendo en cuenta que los vectores determinan la tendencia de la gráfica:

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 1$$



b. Determina los puntos máximos y mínimos, tanto gráficamente como analíticamente. Además, determina el valor máximo y mínimo que puede adquirir la función.

c. Supongamos que esta gráfica determina el coste mantenimiento de una instalación eléctrica en relación al voltaje aplicado a través de la misma, expresado en MV. Determina el voltaje idóneo para el cual el coste se reducirá lo máximo posible.

Una vez calculado, explica por qué ese valor es correcto en el planteamiento del problema. ¿Existiría algún otro valor para el cual el consumo fuera menor? En caso de que así sea, ¿tiene sentido? ¿Por qué?

A la hora de la calificación de los problemas, nuestro objetivo es barrer todo el espectro de conocimiento que el alumno ha de presentar para superar satisfactoriamente la unidad didáctica. Es por ello que sea capaz de entender los conceptos y ser capaz de aplicar las tecnologías correctamente en los campos de problemas.

Por lo tanto, sería ilógico que valoráramos únicamente el resultado final como referencia para la superación, sino que hemos de tener en cuenta todos los procesos que el alumno ha de efectuar y argumentar a lo largo del desarrollo de los problemas.

Ahora crearemos una rúbrica, la cual nos permitirá verificar si los alumnos han sido capaces de alcanzar los objetivos esperados, son capaces de satisfacer los criterios de evaluación que hemos planteado previamente para cada uno de los problemas y podamos calificarlos correctamente.

### ***Problema 1***

- El alumno es capaz de calcular la tasa de variación media: 0.3 p.
- El alumno es capaz de representar tanto la gráfica, como los puntos y la recta: 0.3 p.
- El alumno es capaz de calcular la tasa de variación instantánea: 0.3 p.
- El alumno es capaz de representar la recta tangente: 0.2 p.
- El alumno es capaz de determinar la ecuación de la recta tangente: 0.3 p.
- El alumno es capaz de encontrar la relación esperada: 0.5 p.

### ***Problema 2***

- El alumno es capaz de realizar la derivada de una función polinómica: 0.2 p.
- El alumno es capaz de aplicar la propiedad de la derivada de un producto: 0.4 p.
- El alumno es capaz de aplicar la propiedad de la derivada de un cociente: 0.4 p.
- El alumno es capaz de aplicar la regla de la cadena: 1 p.

### ***Problema 3***

- El alumno es capaz de determinar gráficamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento: 1 p.
- El alumno es capaz de determinar analíticamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento: 1 p.
- El alumno es capaz de posicionar los máximos y los mínimos de la función: 0.5 p.
- El alumno es capaz de determinar analíticamente los máximos y los mínimos de la función: 1 p.
- El alumno es capaz de determinar el valor máximo y mínimo de la función: 0.5 p.
- El alumno es capaz de determinar el punto de minimización de la función: 0.5 p.
- El alumno es capaz de razonar por qué ese valor es el correcto para la minimización de la función, basándose en los resultados analíticos y geométricos: 1.5 p.

Teniendo en cuenta lo mencionado previamente, se debería hacer una escala que puntúe proporcionalmente los diez puntos de la prueba escrita sobre siete, para así unificarlo con las evidencias recogidas durante las clases. De esa manera se podrá obtener la calificación final de todos los alumnos sometidos a este modelo.

## **12. Conclusiones**

La derivada es una herramienta que nos permite medir la variación de una función a lo largo de su dominio. Históricamente resulta de la necesidad de determinar el cambio de fenómenos basados en la naturaleza, como el movimiento de planetas o el cálculo de velocidades de partículas.

A la hora de la enseñanza, es precisamente ese el camino que debemos seguir para que los alumnos encuentren coherente su aplicación: si creamos en ellos una necesidad de dicha herramienta en ellos, comprenderán que es lógico estudiarla. Sin embargo, si se les presenta sin contextualización alguna no comprenderán el motivo por el cual es necesaria su introducción, lo cual puede derivar en desidia a la hora del estudio.

En mi caso ha sido todo un reto afrontar el estudio y redacción de este documento. El planteamiento de la LOMLOE chocaba claramente con el modo en el que yo estudié este tema, donde se introducía el concepto de derivada sin contextualización alguna, para una vez dominadas las tecnologías, aplicarlas a problemas contextualizados.

La preparación y redacción de este Trabajo de Fin de Máster ha supuesto un gran esfuerzo, no sólo en la lectura de las referencias que estudian al detalle el desarrollo de la derivada, sino en el diseño de los ejemplos en los campos de problemas utilizando herramientas informáticas para su desarrollo.

Es un tema muy amplio, para cuyo desarrollo se requeriría mucho más tiempo y dedicación. Con esta introducción, se pretende una simple aproximación.

La influencia de mis tutores de prácticas ha sido fundamental a la hora de ser consciente de los problemas a los que se pueden enfrentar los alumnos a la hora de la comprensión de los conceptos, influyendo en el esquema del trabajo a la hora de su aplicación.

Por último y más importante, recalcar el gran trabajo ejercido por la tutora de este TFM, tanto en el aspecto cognitivo como técnico, el cual ha permitido su correcta estructuración de los conceptos y la modelización de los conceptos en la secuenciación didáctica.

### **13. Referencias**

1. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas del bachillerato (Matemáticas).
2. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas del bachillerato (Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales).
3. Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover Publications, Inc., New York.
4. Sánchez-Matamoros García, G, García Blanco, M. y Llinares Ciscar, S. (2005). *El desarrollo del esquema de la derivada*. Enseñanza de las ciencias, 24(1).
5. Sánchez-Matamoros García, G., García Blanco, M. y Llinares Ciscar, S. (2008). *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. Relime vol. 11, núm. 2, 2008, pp. 267- 296.
6. Artigue, M. *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Grupo Editorial Iberoamética.
7. Dolores C. (2000). El futuro del cálculo infinitesimal. Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Cantoral R. (coordinador). Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F. pp. 155-181.
8. Colera, J., Oliveira, M.J., García, R. y Santaella, E.(2008). *Matemáticas I*. Anaya.
9. Garrido González, A., Banal Martínez, M., Estela Herrero, J., Centelles Cervera, S. y López Navarro, J. (2015) *Matemáticas I aplicadas a las ciencias sociales*. Edebé.

## Anexos

### 1. Criterios de evaluación establecidos por el currículo de matemáticas LOMLOE

1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones.
  - 1.1 Manejar algunas estrategias y herramientas, incluidas las digitales, en la modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología, evaluando su eficiencia en cada caso.
  - 1.2 Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología, describiendo el procedimiento utilizado.
2. Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.
  - 2.1 Comprobar la validez matemática de las posibles soluciones de un problema, utilizando el razonamiento y la argumentación.
  - 2.2 Seleccionar la solución más adecuada de un problema en función del contexto (de sostenibilidad, de consumo responsable, equidad), usando el razonamiento y la argumentación.
3. Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento y la argumentación, con apoyo de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.
  - 3.1. Adquirir nuevo conocimiento matemático a partir de la formulación de conjeturas y problemas de forma guiada.
  - 3.2. Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la formulación o investigación de conjeturas o problemas.
4. Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz, modificando, creando y generalizando algoritmos, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de la Ciencia y la Tecnología.
  - 4.1. Interpretar y resolver situaciones problematizadas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología, utilizando el pensamiento computacional, modificando y creando algoritmos.
5. Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.

- 5.1. Manifestar una visión matemática integrada, investigando y conectando las diferentes ideas matemáticas.
- 5.2. Resolver problemas en contextos matemáticos estableciendo y aplicando conexiones entre las diferentes ideas matemáticas.
6. Descubrir los vínculos de las matemáticas con otras materias y profundizar en sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.
  - 6.1 Resolver problemas en situaciones diversas, utilizando procesos matemáticos, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real, otras materias y las matemáticas.
  - 6.2 Analizar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad, reflexionando sobre su contribución en la propuesta de soluciones a situaciones complejas y a los retos científicos y tecnológicos que se plantean en la sociedad.
7. Representar conceptos, procedimientos e información matemáticos seleccionando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.
  - 7.1. Representar ideas matemáticas estructurando diferentes razonamientos matemáticos y seleccionando las tecnologías más adecuadas para la resolución de problemas.
  - 7.2. Seleccionar y utilizar diversas formas de representación valorando su utilidad para compartir información.
8. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.
  - 8.1. Mostrar organización al comunicar las ideas matemáticas empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados.
  - 8.2. Reconocer y emplear el lenguaje matemático en diferentes contextos, comunicando la información con precisión y rigor.
9. Utilizar destrezas personales y sociales, identificando y gestionando las propias emociones, respetando las de los demás y organizando activamente el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje y afrontando situaciones de incertidumbre, para perseverar en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas.

9.1 Afrontar las situaciones de incertidumbre identificando y gestionando emociones y aceptando y aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas.

9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando y aprendiendo de la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.

9.3 Participar en tareas matemáticas de forma activa en equipos heterogéneos, respetando las emociones y experiencias de los demás, escuchando su razonamiento, identificando las habilidades sociales más propicias y fomentando el bienestar grupal y las relaciones saludables.