



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

CÁLCULO ANALÍTICO Y NUMÉRICO DE EJES
AGRÍCOLAS E INDUSTRIALES

ANALYTICAL AND NUMERICAL CALCULATION OF
AGRICULTURAL AND INDUSTRIAL AXES

Autor:

Ismael De Elvira Vicente

Directores:

Luis Castejón Herrer
David Valladares Hernando

Titulación del autor

Máster Universitario en Ingeniería Mecánica

ESCUELA DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

2023

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es analizar diferentes configuraciones de disposición de ejes en remolques agrícolas expuestos a diferentes casos de sollicitaciones y cargas para obtener las tensiones a las que está expuesto el eje y saber con qué margen de seguridad está este trabajando. Conocido el coeficiente de seguridad, se actuará en consecuencia tomando las medidas que se crean oportunas para que el eje pueda funcionar sin ningún problema durante toda su vida.

Se realizarán los cálculos desde un punto de vista analítico a partir de las dimensiones del remolque y del eje para calcular las tensiones y coeficientes antes mencionados y posteriormente, se hará un modelado del eje mediante elementos finitos para comprobar si los cálculos analíticos son correctos y analizar a su vez cuánto error se comete con las simplificaciones que se han tomado durante el cálculo analítico.

Una vez efectuados ambos cálculos, se han implementado todas las ecuaciones del cálculo analítico a una Hoja Excel para poder calcular las fuerzas que se ejercen sobre el eje y sus tensiones de una manera rápida y eficaz. En la Hoja de Excel simplemente hay que introducir las dimensiones del remolque, las dimensiones del eje y las cargas que actúan sobre el remolque; y la Hoja muestra directamente las tensiones máximas y el coeficiente de seguridad en función del límite elástico del material.

Una vez finalizado todo lo anterior, se harán unos ejemplos de cálculo en los anexos con ambos métodos de cálculo, para verificar su exactitud entre ambos y para conseguir tener una idea de los Coeficientes de Seguridad que manejan este tipo de remolques.

ABSTRACT

The aim of this work is to analyze different axle arrangement configurations in agricultural trailers exposed to different cases of stresses and loads to obtain the stresses to which the axle is exposed and to know what safety margin with which it is working. Once the safety coefficient is known, the right measures will be taken to ensure that the axle can work without any problem throughout its life.

The calculations will be carried out from an analytical point of view from the dimensions of the trailer and the axle to calculate the aforementioned stresses and coefficients and subsequently, the axle will be modelled using finite elements to check if the analytical calculations are correct and to analyze how much error is made with the simplifications that have been taken during the analytical calculation.

Once both calculations have been carried out, all the equations of the analytical calculation have been implemented in an Excel sheet in order to calculate the forces exerted on the shaft and their stresses in a quick and efficient way. In the Excel sheet, simply enter the dimensions of the trailer, the dimensions of the axle and the loads acting on the trailer; and the sheet directly displays the maximum stresses and the safety coefficient according to the elastic limit of the material.

Once all the above is finished, some examples of calculations will be made in the annexes with both calculation methods, in order to verify their accuracy and to get an idea of the Safety Coefficients that this type of trailers handle.

ÍNDICE

RESUMEN	1
ABSTRACT	2
ÍNDICE.....	3
TABLA DE ILUSTRACIONES	5
TABLA DE GRÁFICAS	8
CAPÍTULO 1. Introducción	9
CAPÍTULO 2. Cálculos Analíticos.....	11
2.1. Caso Estático	13
2.2. Caso Frenado.....	18
2.2.1. Frenado 1 Eje.....	18
2.2.2. Frenado 2 Ejes Separados	21
2.2.3. Frenado 2 Ejes Tándem	24
2.2.3. Cálculo Tensiones y Coeficiente de Seguridad en el Eje Más Solicitado.....	27
2.3. Caso Giro	34
2.3.1. Cálculo Transferencia entre Lados del Eje	34
2.3.2. Giro 1 Eje	36
2.3.2. Giro 2 Ejes Separados.....	37
2.3.3. Giro 2 Ejes Tándem	38
2.3.3. Cálculo Tensiones y Coeficiente de Seguridad en el Eje Más Solicitado.....	40
2.4. Caso Giro de Radio Mínimo.....	47
2.4.1. Cálculo Reacciones en los Ejes	47
2.4.2. Cálculo Tensiones y Coeficiente de Seguridad en el Eje Más Solicitado.....	51
CAPÍTULO 3. Cálculos Numéricos.....	57
3.1. Modelado del Eje	57
3.2. Material	59
3.3. Mallado	61
3.4. Posicionamiento de las Ballestas	63
3.5. Condiciones de Contorno, Fuerzas y Momentos	64
3.6. Inicialización del Cálculo.....	67
3.7. Análisis de Resultados.....	67



CAPÍTULO 4. Comparación Cálculo Analítico y Numérico	69
CONCLUSIONES	71
BIBLIOGRAFÍA	72
ANEXOS	73
ANEXO I. Ejemplo de Cálculo de Caso Estático	73
ANEXO II. Ejemplo de Cálculo de Caso Frenado.....	75
II.1. Remolque 1 Eje Frenando	76
II.2. Remolque 2 Ejes Separados Frenando.....	77
II.3. Frenado 2 Ejes Tándem Frenando.....	78
ANEXO III. Ejemplo de Cálculo de Caso Giro	79
III.1. Remolque 1 Eje Girando.....	79
II.2. Remolque 2 Ejes Separados Girando	80
II.3. Frenado 2 Ejes Tándem Girando	81
ANEXO IV. Ejemplo de Cálculo de Caso Giro de Radio Mínimo	82
ANEXO V. Cálculo Caso Frenado con Momento Torsor	83
ANEXO VI. Estudio de Ejes FERRUZ	92

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Remolque de 1 Eje (Superior Izquierda), Remolque de 2 Ejes Separados (Superior Derecha) y Remolque 2 Ejes Tándem (Inferior)	11
Ilustración 2. Eje de FERRUZ sometido a Estudio.....	12
Ilustración 3. Eje Caso Estático.....	13
Ilustración 4. Reacciones Eje Estático	14
Ilustración 5. Cortante y Flector Caso Estático entre Rueda Derecha y Ballesta Derecha.....	14
Ilustración 6. Cortante y Flector Caso Estático entre Ballesta Derecha y Ballesta Izquierda.....	14
Ilustración 7. Cortante y Flector Caso Estático entre Ballesta Izquierda y Rueda Izquierda	15
Ilustración 8. Cortante y Flector Caso Estático	15
Ilustración 9. Tensión Normal debida a Momento Flector Caso Estático	15
Ilustración 10. Tensión Tangencial debida a Cortante Caso Estático.....	16
Ilustración 11. Sección Eje Caso Estático	16
Ilustración 12. Fuerzas actuando sobre Remolque 1 Eje Frenando	18
Ilustración 13. Fuerzas actuando sobre Remolque 2 Ejes Separados Frenando	21
Ilustración 14. Fuerzas actuando sobre Remolque 2 Ejes Tándem Frenando	24
Ilustración 15. Simplificación Remolque Tándem Frenando.....	25
Ilustración 16. Eje Caso Frenado	28
Ilustración 17. Reacciones Eje Caso Frenado	29
Ilustración 18. Cortante y Flector Caso Frenado entre Rueda Derecha y Ballesta Derecha	29
Ilustración 19. Cortante y Flector Caso Frenado entre Ballesta Derecha y Ballesta Izquierda ...	30
Ilustración 20. Cortante y Flector Caso Frenado entre Ballesta Izquierda y Rueda Izquierda	30
Ilustración 21. Cortante y Flector Caso Frenado.....	31
Ilustración 22. Tensión Normal debida a Momento Flector Caso Frenado	32
Ilustración 23. Sección Eje Caso Frenado.....	32
Ilustración 24. Fuerzas actuando sobre Remolque Girando	34
Ilustración 25. Fuerzas actuando sobre Remolque 1 Eje Girando Lado Derecho	36
Ilustración 26. Fuerzas actuando sobre Remolque 2 Ejes Separados Girando Lado Derecho....	37
Ilustración 27. Fuerzas actuando sobre Remolque 2 Ejes Tándem Girando Lado Derecho	38
Ilustración 28. Simplificación Remolque Tándem Girando	39
Ilustración 29. Eje Caso Giro.....	40
Ilustración 30. Reacciones Eje Girando	42
Ilustración 31. Cortante, Axil y Flector Caso Giro entre Rueda Derecha y Ballesta Derecha.....	42
Ilustración 32. Cortante, Axil y Flector Caso Giro entre Ballesta Derecha y Ballesta Izquierda..	43
Ilustración 33. Cortante, Axil y Flector Caso Giro entre Ballesta Izquierda y Rueda Izquierda...	43
Ilustración 34. Cortante, Axil y Flector Caso Giro.....	44
Ilustración 35. Tensión Normal debida a Momento Flector y al Esfuerzo Axial Caso Giro	45
Ilustración 36. Sección Eje Caso Giro	45
Ilustración 37. Fuerzas actuando sobre Remolque Tándem Caso Giro Radio Mínimo.....	47
Ilustración 38. Fuerzas actuando sobre Remolque 2 Ejes Tándem Giro de Radio Mínimo	49
Ilustración 39. Simplificación Remolque Tándem Giro de Radio Mínimo.....	50



Ilustración 40. Eje Caso Giro de Radio Mínimo	51
Ilustración 41. Reacciones Eje Giro de Radio Mínimo.....	52
Ilustración 42. Cortante, Axil y Flector Caso Giro de Radio Mínimo entre Rueda Derecha y Ballesta Derecha.....	52
Ilustración 43. Cortante, Axil y Flector Caso Giro de Radio Mínimo entre Ballesta Derecha y Ballesta Izquierda	53
Ilustración 44. Cortante, Axil y Flector Caso Giro de Radio Mínimo entre Ballesta Izquierda y Rueda Izquierda	54
Ilustración 45. Cortante, Axil y Flector Caso Giro de Radio Mínimo	55
Ilustración 46. Tensión Normal debida a Momento Flector y al Esfuerzo Axial Caso Radio Mínimo	55
Ilustración 47. Sección Eje Caso Radio Mínimo.....	56
Ilustración 48. Creación del Eje	57
Ilustración 49. Sección del Eje Dibujado	58
Ilustración 50. Proceso de Extrusión	58
Ilustración 51. Propiedades Material	59
Ilustración 52. Creación Sección	59
Ilustración 53. Árbol de ABAQUS	60
Ilustración 54. Partición de Piezas.....	60
Ilustración 55. Creación de Instancias.....	61
Ilustración 56. Selección de Malla del Eje	62
Ilustración 57. Mallado de las Piezas	62
Ilustración 58. Planos de Corte Posición Ballestas	63
Ilustración 59. Posición Ballestas	63
Ilustración 60. Restricciones entre Superficies	64
Ilustración 61. Condiciones de Contorno Apoyo.....	65
Ilustración 62. Acoplamiento de Grados de Libertad	65
Ilustración 63. Fuerzas y Momentos Ejercidos en los Extremos del Eje	66
Ilustración 64. Tensión Equivalente Eje con Apoyos.....	67
Ilustración 65. Tensión Equivalente Eje sin Apoyos	68
Ilustración 66. Cálculo Analítico Caso Comparación Cálculo Analítico y Numérico.....	69
Ilustración 67. Tensión Equivalente ABAQUS Caso Comparación Cálculo Analítico y Numérico	70
Ilustración 68. Hoja Excel Ejemplo Caso Estático.....	73
Ilustración 69. ABAQUS Ejemplo Caso Estático.....	74
Ilustración 70. Dimensiones Remolque 1 Eje	75
Ilustración 71. Dimensiones Remolque 2 Ejes Separados.....	75
Ilustración 72. Dimensiones Remolque 2 Ejes Tándem	75
Ilustración 73. Hoja Excel Frenado 1 Eje	76
Ilustración 74. ABAQUS Ejemplo Frenado 1 Eje.....	76
Ilustración 75. Hoja Excel Frenado 2 Ejes Separados	77
Ilustración 76. ABAQUS Ejemplo Frenado 2 Ejes Separados.....	77
Ilustración 77. Hoja Excel Frenado 2 Ejes Tándem.....	78
Ilustración 78. ABAQUS Ejemplo Frenado 2 Ejes Tándem	78
Ilustración 79. Hoja Excel Girando 1 Eje.....	79
Ilustración 80. ABAQUS Ejemplo Girando 1 Eje	79



Ilustración 81. Hoja Excel Girando 2 Ejes Separados	80
Ilustración 82. ABAQUS Ejemplo Girando 2 Ejes Separados	80
Ilustración 83. Hoja Excel Girando 2 Ejes Tándem	81
Ilustración 84. ABAQUS Ejemplo Girando 2 Ejes Tándem	81
Ilustración 85. Hoja Excel Giro de Radio Mínimo	82
Ilustración 86. ABAQUS Ejemplo Giro de Radio Mínimo	82
Ilustración 87. Eje con Freno	83
Ilustración 88. Eje Caso Frenado con Torsor	83
Ilustración 89. Reacciones Eje Caso Frenado con Torsor	85
Ilustración 90. Cortante, Flector y Torsor Caso Frenado con Torsor entre Rueda Derecha y Ballesta Derecha	85
Ilustración 91. Cortante, Flector y Torsor Caso Frenado con Torsor entre Ballesta Derecha y Ballesta Izquierda	86
Ilustración 92. Cortante, Flector y Torsor Caso Frenado con Torsor entre Ballesta Izquierda y Rueda Izquierda	87
Ilustración 93. Cortante, Flector y Torsor Caso Frenado con Torsor	88
Ilustración 94. Tensión Normal debida a Momento Flector Caso Frenado con Torsor	88
Ilustración 95. Tensión Tangencial debida a Momento Torsor Caso Frenado con Torsor	89
Ilustración 96. Sección Eje Caso Frenado con Torsor	89
Ilustración 97. Frenado 1 Eje con Torsor	90
Ilustración 98. Frenado 2 Ejes Separados con Torsor	90
Ilustración 99. Frenado 2 Ejes Tándem con Torsor	91
Ilustración 100. Coeficientes Estáticos Ejes FERRUZ	92
Ilustración 101. Coeficientes de Frenado, Giro y Giro de Radio Mínimo Ejes FERRUZ	93

TABLA DE GRÁFICAS

Gráfica 1. Fuerzas según Deceleración 1 Eje	20
Gráfica 2. Fuerzas según Deceleración 2 Ejes Separados	23
Gráfica 3. Fuerzas según Deceleración 2 Ejes Tándem	27

CAPÍTULO 1. Introducción

El análisis de los ejes en todo tipo de máquinas es siempre un punto muy importante para tener en cuenta, ya que un mal diseño tanto geométrico como de material puede conllevar que el componente se fracture. Esto, puede llegar a provocar costes económicos muy cruciales en caso de ser el eje una parte esencial de la máquina y en casos muy catastróficos puede conllevar también daños personales.

En la actualidad existen gran variedad de remolques agrícolas:

- Los remolques agrícolas multifunción formados principalmente por una caja rectangular para transportar grano y los cuales suelen llevar laterales abatibles y varias compuertas de descarga. Este tipo de remolque puede llevar 1, 2 o 3 ejes. La carga se realiza por encima. La descarga suele ser de tipo volquete por la parte trasera o por los laterales.
- Las bañeras agrícolas que son más robustas y están formadas de una sola pieza. Presentan mayor resistencia a los golpes y como los anteriores, pueden tener 1 eje, 2 ejes o 3 ejes. La carga, al igual que los remolques multifunción, es por la parte superior. La descarga de este tipo de remolques suele ser de tipo volquete por la parte trasera.
- Las plataformas agrícolas, las cuales no cuentan con estructura en los laterales, lo que facilita que se puedan cargar desde cualquier dirección. Están indicadas para el transporte de volúmenes grandes como pacas, cajas de fruta, depósitos, etc. Existen a su vez las plataformas concebidas para el transporte de maquinaria, las cuales suelen tener menor altura.
- Las cubas o cisternas que están destinadas al transporte de líquidos. La descarga puede ser de 3 tipos: en abanico haciendo chocar el líquido contra un plato, mediante tubos que esparcen el líquido más cerca del suelo o mediante enterrado directo con accesorios en las cisternas.
- Los remolques esparcidores de estiércol, los cuales se usan para transportar y esparcir estiércol, compost u otras sustancias fertilizantes. Pueden ser de diferentes tamaños y montar 1, 2 o 3 ejes dependiendo de sus dimensiones y carga. La carga se hace por la parte superior y la descarga se puede hacer a través de un sistema de cadenas o por suelo móvil. El esparcido se realiza mediante unos molinetes (que pueden ser horizontales o verticales) instalados en la parte trasera que trituran y esparcen el material por el campo.
- Remolques para ensilado los cuales se emplean para transportar materia verde y los cuales priorizan el transporte de volumen al transporte de peso debido a la baja densidad de este tipo de materia. Al ser la materia verde más grande que el grano, no es necesario que sean tan herméticos, por lo que habitualmente se utilizan rejillas para los laterales (lo que reduce su peso). La carga se efectúa por arriba y la descarga se ejecuta o mediante volquete o mediante sistema de cadenas, aunque últimamente se está empezando a usar también el sistema de suelo móvil (permitiendo cargar productos más pequeños).

- Los remolques autocargadores están concebidos para recolectar y transportar forraje verde. La carga se puede efectuar mediante pick-up directamente del campo, mediante una segadora o cargarlos por encima como cualquier otro remolque. La descarga se ejecuta mediante cadenas por la parte trasera, pero muchos remolques de este tipo llevan también cadenas para hacer descarga lateral y así poder descargar directamente en los comederos del establo para alimentar a los animales.
- Remolques para vendimia, los cuales son de reducido tamaño para poder circular por los viñedos y además son totalmente herméticos para que no se pierda el líquido de las uvas. La carga es o bien manual por los vendimiadores durante la vendimia, o bien a través de una vendimiadora. La descarga es mediante volquete.
- Remolques unifeed los cuales se usan para producir la ración mezclada para alimentar a los animales rumiantes. Está compuesto por una olla con un sinfín vertical para mezclar y triturar el alimento y una báscula para ir pesando la cantidad de cada ingrediente que se introduce para preparar la mezcla perfecta. La carga se efectúa por arriba y la descarga se realiza de forma lateral por medio de una compuerta y una cinta para ir descargando paulatinamente en el establo.

En este trabajo el estudio se centrará en los ejes de remolques agrícolas, ya que es un campo de mi interés. El análisis se llevará a cabo en 3 tipos de disposiciones de ejes (1 eje, 2 ejes separados y 2 ejes tándem) y se hará el análisis en varias situaciones (estáticamente, frenando, girando y realizando un giro de radio mínimo). Los remolques para los que está mayormente centrado el trabajo son los remolques multifunción, las bañeras y los remolques para vendimia, pero se puede llegar a hacer cualquier tipo de remolque siempre y cuando tenga 1 o 2 ejes.

Durante el trabajo se efectuarán 2 tipos diferentes de cálculos. En primer lugar, se hará un cálculo analítico en el cual mediante equilibrios de fuerzas y momentos se obtendrán las fuerzas que soporta cada eje del remolque y posteriormente, mediante diagramas de esfuerzos, se obtendrán las solicitaciones y tensiones a las que está sometido el eje más desfavorable de cada remolque. Con estos resultados, se procederá a analizar cuál es el coeficiente de seguridad de dicho eje y, en consecuencia, se ejecutarán las acciones pertinentes para que no haya riesgo de rotura (ni un sobredimensionamiento del eje que solamente produce un exceso de peso en vacío que deja menor carga útil). En la segunda parte, se efectuará un cálculo numérico mediante elementos finitos en la aplicación ABAQUS para estudiar cómo de precisos son los cálculos analíticos realizados. Se modelará el eje y posteriormente, se le ejercerán las fuerzas obtenidas mediante los equilibrios de fuerzas y momentos para obtener las tensiones a las que está sometido el eje y poder analizar cómo de similares son dichas tensiones con las obtenidas mediante los cálculos hechos a mano.

CAPÍTULO 2. Cálculos Analíticos

En este capítulo se llevará a cabo la explicación de los cálculos efectuados para resolver los diferentes tipos de disposición de los ejes de los remolques, actuando sobre ellos los diferentes casos de análisis que se van a estudiar en el trabajo.

En primer lugar, hay que mencionar que se van a analizar 3 tipos de disposición de ejes, los cuales son: un solo eje, dos ejes separados y dos ejes en tándem (los 2 ejes están juntos y unidos a la misma ballesta).



Ilustración 1. Remolque de 1 Eje (Superior Izquierda), Remolque de 2 Ejes Separados (Superior Derecha) y Remolque 2 Ejes Tándem (Inferior)

Los diferentes casos de análisis que se van a estudiar van a ser: análisis estático del remolque (soportando simplemente la carga sin haber movimiento, aunque si el remolque se mueve a velocidad constante en una recta también se pueden considerar las mismas fuerzas al no haber fuerzas de inercia), frenado del vehículo (y por consiguiente frenado del remolque) en el que habrá una fuerza de inercia actuando sobre el remolque hacia delante, giro del remolque siendo en este caso la inercia perpendicular a la dirección del movimiento y por último giro de radio mínimo (este cálculo solo se llevará a cabo en el caso de un remolque con 2 ejes en disposición tándem) en el cual se estudian las fuerzas que se crean en los ejes al realizar un giro cerrado (al ser la velocidad constante no habrá fuerza de inercia y además aunque hubiera inercia sería muy pequeña, ya que este movimiento se realiza a bajas velocidades).

En todos los casos se va a hacer la simplificación de no tener en cuenta la acción de las ballestas, haciendo la suposición de que la unión entre los ejes y el remolque es rígida. Esta simplificación, como ya se verá, no va a suponer ningún cambio en los resultados respecto de la realidad, a excepción de cuando los ejes están en disposición tándem (al estar ambos ejes unidos a la misma ballesta existe transferencia de cargas entre los ejes a través de la ballesta y se tendrán que hacer suposiciones sobre el reparto de cargas en la ballesta).

Para todos los estudios que se van a ejecutar, se va a suponer que el eje es de sección cuadrada, aunque una vez hechos los equilibrios y los diagramas, el cambiar de sección sería simplemente modificar el Área, el Momento de Inercia y los Puntos más Alejados (ya que los puntos más alejados del centro de la sección, como veremos a lo largo del apartado, son los que más solicitados estarán) en los cálculos de las tensiones máximas.

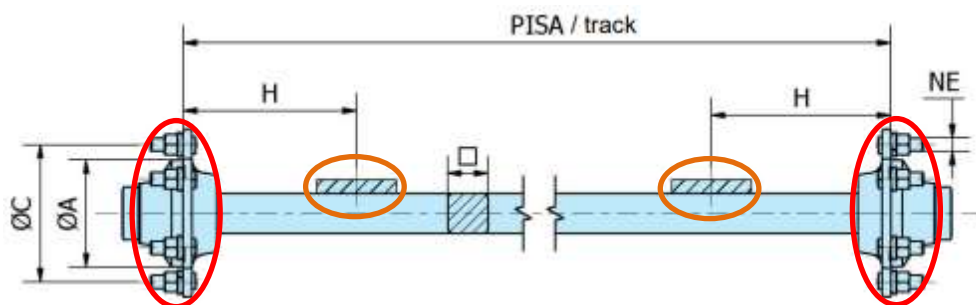


Ilustración 2. Eje de FERRUZ sometido a Estudio

El eje, al no tener transmisión de momentos a las ruedas, no girará, ya que además está sujeto fijamente a las ballestas en las zonas rodeadas en naranja, las cuales, en el análisis, al no saber su ancho, se consideran que son sujeciones puntuales. Las ruedas girarán gracias a que en la zona marcada en rojo existe un rodamiento que permite girar las ruedas.

Antes de comenzar con los cálculos, hay que indicar que todas las ecuaciones han sido posteriormente implementadas en una hoja de Excel en la cual, introduciendo las dimensiones del remolque, las medidas del eje, las cargas, la posición del centro de gravedad, el coeficiente de rozamiento de los neumáticos con el suelo y las correspondientes aceleraciones longitudinales o transversales (según sea el caso), la propia hoja calculará cuál es el coeficiente de seguridad del eje del remolque. Esta misma hoja va dando valores intermedios de reacciones, tensiones, etc. para entender de mejor manera lo que está ocurriendo, poder analizar si las ecuaciones son correctas o no y poder también saber que valores debemos introducir en el modelado de ABAQUS para el cálculo de las tensiones.

2.1. Caso Estático

El caso estático es el más sencillo de todos los que se van a analizar en este trabajo, ya que gracias al catálogo de ejes de la empresa FERRUZ, ya se sabe cuánta carga está soportando cada eje para las diferentes disposiciones, por lo que no hay que realizar ningún equilibrio de fuerzas ni de momentos previo en el remolque para obtener las solicitaciones a las que está sometido el eje.

Es por esto por lo que lo único que se debe hacer en esta parte es calcular los diagramas de axil, cortante y flector, con ellos obtener el punto de mayor sollicitación y calcular en dicho punto la tensión máxima equivalente, para posteriormente, obtener cuál es el coeficiente de seguridad de dicho eje. Al ser un caso estático, no va a haber ninguna fuerza axial en el eje.

Como ya se ha dicho, ya se sabe cuál es la carga que tiene que soportar cada eje, por lo que las cargas a las que está sometido el eje quedarán tal que así:

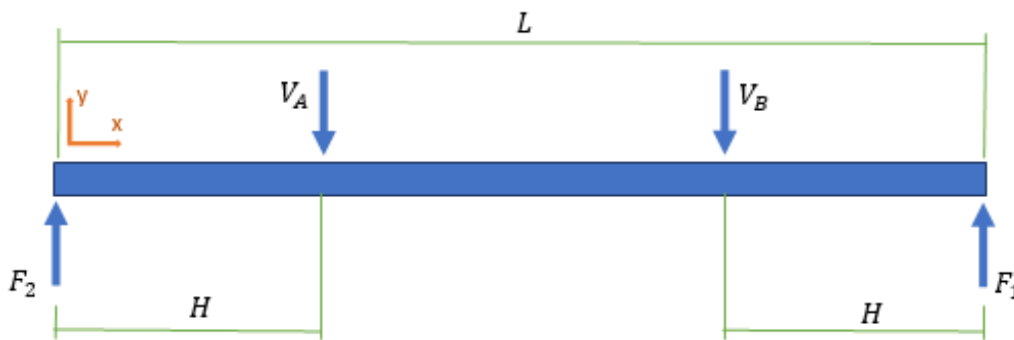


Ilustración 3. Eje Caso Estático

Donde:

F_1 es la fuerza que ejerce la rueda izquierda (que es la mitad de la carga que soporta el eje).

F_2 es la fuerza que ejerce la rueda derecha (que es la mitad de la carga que soporta el eje).

V_A es la fuerza que ejerce la ballesta derecha.

V_B es la fuerza que ejerce la ballesta izquierda.

$$F_1 = F_2 = \frac{\text{Carga}}{2} = F$$

Por lo tanto, haciendo los siguientes equilibrios de fuerzas y de momentos:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F + F - V_A - V_B = 0 \rightarrow V_A = 2F - V_B$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -F \cdot H - V_B \cdot (L - 2H) + F \cdot (L - H) = 0 \rightarrow F \cdot (L - 2H) - V_B \cdot (L - 2H) = 0 \rightarrow V_B = F$$

Y sustituyendo en la primera ecuación:

$$V_A = 2F - F = F$$

Una vez conseguidas las reacciones en los apoyos, se pueden obtener las siguientes reacciones totales en el eje:



Ilustración 4. Reacciones Eje Estático

Y, con estas reacciones, se realiza el cálculo de cuáles serán el esfuerzo cortante y el momento flector en cada punto del eje.

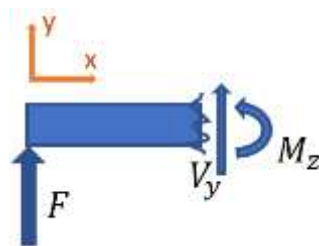


Ilustración 5. Cortante y Flector Caso Estático entre Rueda Derecha y Ballesta Derecha

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow F + V_y = 0 \rightarrow V_y(0 \leq x \leq H) = -F$$

$$\sum M_Z = 0 \rightarrow -F \cdot x + M_z = 0 \rightarrow M_z(0 \leq x \leq H) = F \cdot x$$

$$M_z(x = 0) = 0; M_z(x = H) = F \cdot H$$

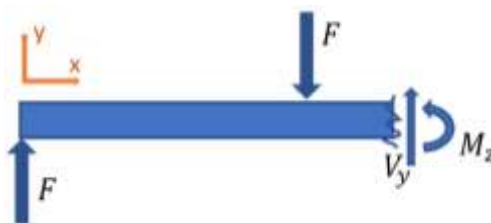


Ilustración 6. Cortante y Flector Caso Estático entre Ballesta Derecha y Ballesta Izquierda

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow F - F + V_y = 0 \rightarrow V_y(H < x \leq L - H) = 0$$

$$\sum M_Z = 0 \rightarrow -F \cdot x + F \cdot (x - H) + M_z = 0 \rightarrow M_z(H < x \leq L - H) = F \cdot H$$



Ilustración 7. Cortante y Flector Caso Estático entre Ballesta Izquierda y Rueda Izquierda

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F - F - F + V_y = 0 \rightarrow V_y(L - H < x \leq L) = F$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow -F \cdot x + F \cdot (x - H) + F \cdot [x - (L - H)] + M_z = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_z(L - H < x \leq L) = F \cdot H - F \cdot (x - L + H) = F \cdot (L - x)$$

$$M_z(x = L - H) = F \cdot H; M_z(x = L) = 0$$

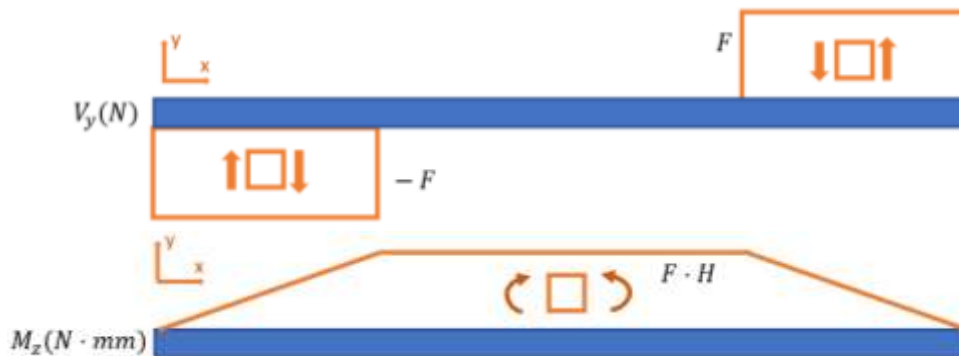


Ilustración 8. Cortante y Flector Caso Estático

En este caso, el punto más desfavorable será cualquiera de los 2 apoyos de las ballestas, si es la ballesta izquierda será en su lado izquierdo y si es la ballesta derecha será en su lado derecho (hay que tener en cuenta que el eje se está viendo de frente por lo que el lado izquierdo será el lado derecho de los diagramas y viceversa).

Con estos esfuerzos de cortante F (no nos importa el signo, ya que lo único que va a cambiar es el sentido de la tensión producida, pero la dirección es la misma) y de flector $F \cdot H$, se calcula cuál es la tensión equivalente que soporta el eje en su punto más crítico.

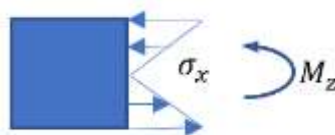


Ilustración 9. Tensión Normal debida a Momento Flector Caso Estático



Ilustración 10. Tensión Tangencial debida a Cortante Caso Estático

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max}$$

$$\tau_{xy,max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_y}{A}$$

Siendo M_z el momento flector, I_z el momento de inercia de la sección, y_{max} la distancia desde el centro de la sección al punto más alejado (que en nuestro caso será la mitad de la altura de la sección del eje), A el área de la sección y V_y el cortante. Como en el lugar de la sección donde la tensión normal es máxima, la tensión tangencial es 0 (y viceversa) y las tensiones producidas por el Momento Flector son mayores que las que produce el esfuerzo Cortante, se desprecia el cortante (esto va a ocurrir siempre por lo que en el resto de los casos de estudio directamente no tomaremos en consideración el esfuerzo cortante a la hora de calcular las tensiones).

Sabiendo que la sección del eje es la mostrada en la ilustración siguiente, se calcula cuál será la tensión normal máxima de la sección.

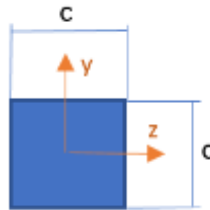


Ilustración 11. Sección Eje Caso Estático

$$M_z = F \cdot H$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot c \cdot c^3 = \frac{c^4}{12}$$

$$y_{max} = \frac{c}{2}$$

Por lo que, sustituyendo,

$$\sigma_{x,max} = \frac{F \cdot H}{\frac{c^4}{12}} \cdot \frac{c}{2} = \frac{6 \cdot F \cdot H}{c^3}$$

Si, además, usamos la Teoría de Von Mises la cual dice que $\sigma_{eqv} = \sqrt{3 \cdot \tau_{xy}^2 + \sigma_x^2}$, nos queda que $\sigma_{eqv} = \sigma_x = \sigma_{x,max}$. Por otra parte, se define el Coeficiente de Seguridad como $CS = \frac{\sigma_F}{\sigma_{eqv}}$ siendo σ_F el límite elástico del material.

Por lo que nos queda que

$$CS = \frac{\sigma_F}{\sigma_{x,max}}$$

En este caso, además, se va a tomar un factor dinámico para cerciorarse de que las acciones de posibles baches no produzcan la rotura o desgaste del eje, ya que, como se ha mencionado al principio, el caso estático es aplicable a remolques moviéndose en línea recta a velocidad constante. Es por esto por lo que interesa que el coeficiente de seguridad sea de por lo menos 2 para aguantar con seguridad, puesto que según un autor llamado Erz del siglo XX, el factor dinámico a tener en cuenta debe ser de valor 2. Otro autor llamado Pawlowski indica que este factor dinámico debe ser de 2,5 y, además, debe tener asociado un coeficiente de seguridad de entre 1,4 y 2 según el caso.

2.2. Caso Frenado

El caso de frenado tiene una peculiaridad y esta es que, si las fuerzas de rozamiento de las ruedas contra el terreno son inferiores a la fuerza de inercia producida por la deceleración, la diferencia entre ellas repercutirá en el vehículo tractor a través del enganche (todo esto se va a explicar a lo largo del apartado).

Lo primero de todo, hay que decir que, al estudiarse 3 tipos de configuraciones de los ejes del remolque, habrá que realizar equilibrios de fuerzas y momentos para 3 casos diferentes de remolque, seleccionar dentro de cada caso cuál es el eje más solicitado (en el caso de 1 eje como es lógico no hay que hacer ninguna selección) y, conociendo las fuerzas actuando sobre dicho eje, realizar los equilibrios de fuerzas y momentos en el eje para calcular el esfuerzo cortante y el momento flector (como se observará, en este caso no existe axil). Hay que destacar que el equilibrio en el eje solamente va a hacer falta hacerlo 1 vez, ya que solo cambiará el valor de las fuerzas ejercidas en cada caso, pero el modo de calcular las reacciones es para todos los remolques igual.

2.2.1. Frenado 1 Eje

Las cargas actuando sobre un remolque con un solo eje, el cual está frenando, son las siguientes:

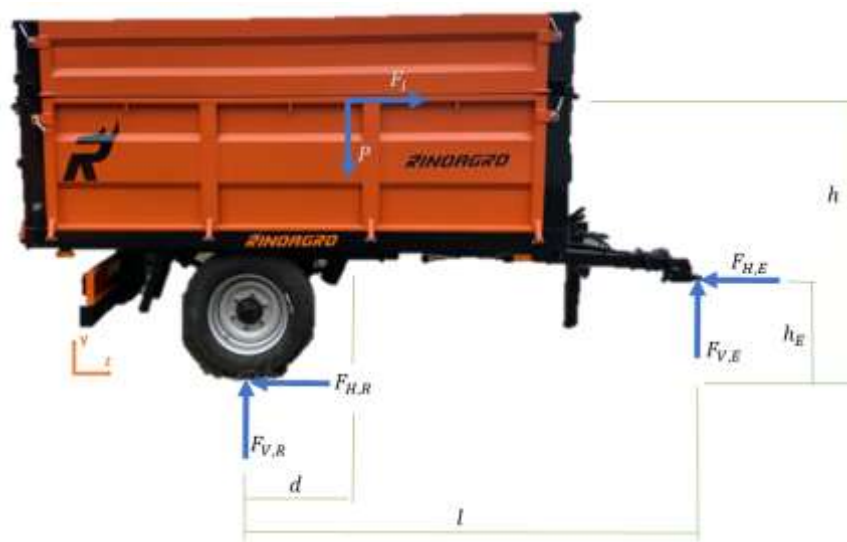


Ilustración 12. Fuerzas actuando sobre Remolque 1 Eje Frenando

Donde:

$F_{V,R}$ y $F_{H,R}$ son las fuerzas vertical y horizontal respectivamente actuando sobre las ruedas.

$F_{V,E}$ y $F_{H,E}$ son las fuerzas vertical y horizontal respectivamente actuando sobre el enganche.

P es la fuerza producida por la carga sobre el remolque.

F_i es la fuerza de inercia debida a la deceleración.

También se sabe que:

$$P = m \cdot g$$

$$F_i = m \cdot a$$

$$F_{H,R} = F_{V,R} \cdot \mu$$

Siendo m la masa del remolque, g la gravedad, a la deceleración y μ el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y el suelo.

Realizando equilibrio de fuerzas y de momentos:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_i - F_{H,R} - F_{H,E} = 0 \rightarrow F_{H,E} = F_i - F_{H,R}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -P + F_{V,R} + F_{V,E} = 0 \rightarrow F_{V,E} = P - F_{V,R}$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow -F_{H,R} \cdot h_E - F_{V,R} \cdot l + P \cdot (l - d) - F_i \cdot h = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -F_{V,R} \cdot \mu \cdot h_E - F_{V,R} \cdot l + P \cdot (l - d) - F_i \cdot h = 0 \rightarrow F_{V,R} = \frac{P \cdot (l - d) - F_i \cdot (h - h_E)}{l + \mu \cdot h_E}$$

$$F_{H,R} = \mu \cdot \frac{P \cdot (l - d) - F_i \cdot (h - h_E)}{l + \mu \cdot h_E}$$

$$F_{V,E} = P - \frac{P \cdot (l - d) - F_i \cdot (h - h_E)}{l + \mu \cdot h_E} = \frac{P \cdot (\mu \cdot h_E + d) + F_i \cdot (h - h_E)}{l + \mu \cdot h_E}$$

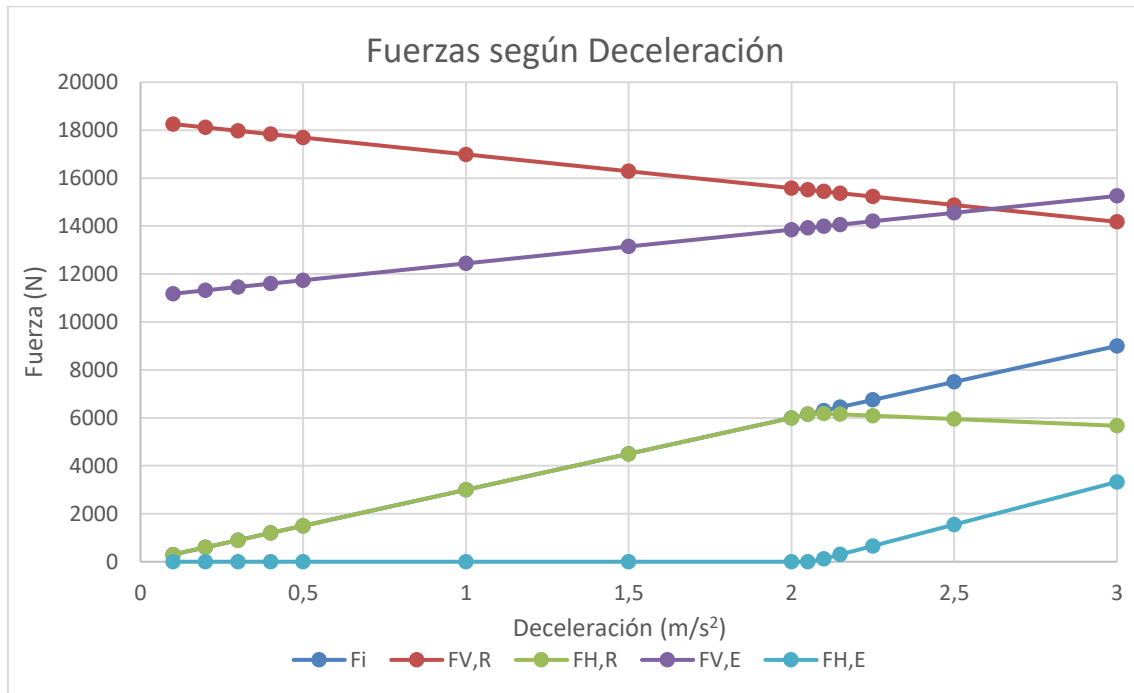
$$F_{H,E} = F_i - \mu \cdot \frac{P \cdot (l - d) - F_i \cdot (h - h_E)}{l + \mu \cdot h_E} = F_i \cdot \frac{l + \mu \cdot h}{l + \mu \cdot h_E} - P \cdot \frac{\mu \cdot (l - d)}{l + \mu \cdot h_E}$$

En el instante en el que $F_{H,E} = 0$ será el instante en el que la deceleración es la máxima para que el remolque no transmita fuerza horizontal al tractor. Esto ocurrirá cuando:

$$a_{max} = \frac{\mu \cdot g \cdot (l - d)}{l + \mu \cdot h}$$

Por otra parte, la fuerza horizontal en la rueda nunca puede ser mayor que la fuerza de inercia, por lo que en caso de que esto ocurra se deberá igualar la fuerza horizontal en la rueda con la fuerza de inercia $F_{H,R} = F_i$ (se descarta la opción de que el enganche haga una fuerza en el sentido de la marcha por ser incoherente que se produzca una fuerza de tracción mientras se frena). Esto ocurrirá siempre que $a < a_{max}$. Una menor deceleración producirá que se cargue más el eje verticalmente, pero, por el contrario, habrá menor fuerza horizontal.

A continuación, se realizará un análisis de cómo varían las diferentes fuerzas en función de la deceleración que existe. Se tomará un coeficiente de rozamiento de 0,4; una masa de 3.000 kg; distancia d de 1 m; distancia l de 4 m; altura h_E de 0,5 m y altura h de 2 m.



Gráfica 1. Fuerzas según Deceleración 1 Eje

Como se puede observar, y ya se ha comentado, a mayor deceleración se descarga el eje verticalmente, pero hay mayor fuerza horizontal. Esto ocurre hasta que se llega a a_{max} , instante donde se empieza a transmitir carga horizontal al enganche, momento en el cual no solo deja de aumentar la fuerza horizontal en el eje, sino que empieza a descender lentamente debido a que la carga vertical no es suficiente como para que se igualen la fuerza de inercia y la fuerza debida al rozamiento. Cabe destacar, como se puede observar, que esa deceleración es de en torno a $2,05 \text{ m/s}^2$ (lo cual es bastante elevado y lo más seguro es que posiblemente nunca se produzca una deceleración así en un vehículo agrícola). En conclusión, no es interesante estudiar el eje para deceleraciones mayores a $2,05$ en este remolque, ya que ambas componentes de la fuerza sobre el eje disminuyen a partir de este punto.

2.2.2. Frenado 2 Ejes Separados

Las cargas actuando sobre un remolque con 2 ejes separados, el cual está frenando son las siguientes:

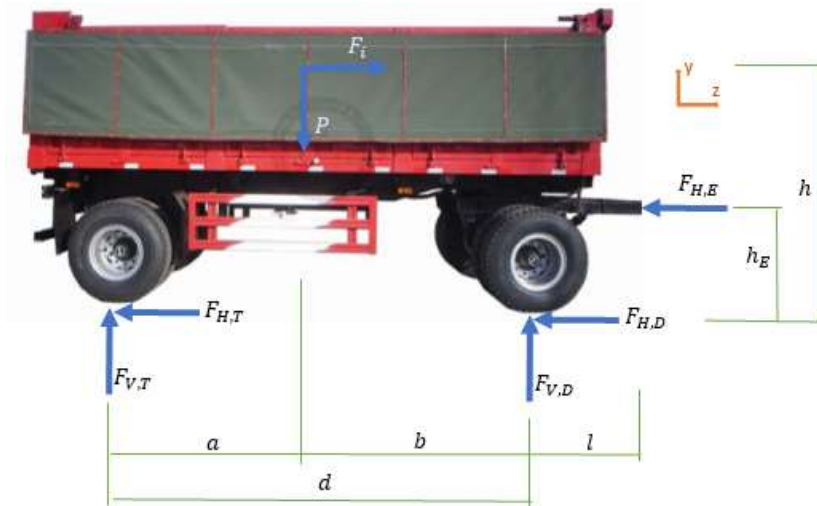


Ilustración 13. Fuerzas actuando sobre Remolque 2 Ejes Separados Frenando

Donde:

$F_{V,D}$ y $F_{H,D}$ son las fuerzas vertical y horizontal respectivamente actuando sobre las ruedas delanteras.

$F_{V,T}$ y $F_{H,T}$ son las fuerzas vertical y horizontal respectivamente actuando sobre las ruedas traseras.

$F_{H,E}$ es la fuerza horizontal actuando sobre el enganche (vertical no va a haber, ya que el enganche está unido al eje delantero a través de la lanza y toda la carga vertical se la llevan las ruedas).

P es la fuerza producida por la carga sobre el remolque.

F_i es la fuerza de inercia debida a la deceleración.

También se sabe que:

$$P = m \cdot g$$

$$F_i = m \cdot a$$

$$F_{H,D} = F_{V,D} \cdot \mu$$

$$F_{H,T} = F_{V,T} \cdot \mu$$

Siendo m la masa del remolque, g la gravedad, a la deceleración y μ el coeficiente de rozamiento entre el neumático y el suelo.

Haciendo equilibrio de fuerzas y de momentos:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_i - F_{H,D} - F_{H,T} - F_{H,E} = 0 \rightarrow F_{H,E} = F_i - F_{H,D} - F_{H,T}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -P + F_{V,D} + F_{V,T} = 0 \rightarrow F_{V,D} = P - F_{V,T}$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow -F_{H,D} \cdot h_E - F_{H,T} \cdot h_E - F_{V,D} \cdot l - F_{V,T} \cdot (l + d) + P \cdot (l + b) - F_i \cdot (h - h_E) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (F_{V,D} + F_{V,T}) \cdot \mu \cdot h_E + (F_{V,D} + F_{V,T}) \cdot l + F_{V,T} \cdot d + F_i \cdot (h - h_E) - P \cdot (l + b) = 0$$

$$\rightarrow P \cdot (\mu \cdot h_E + l - l - b) + F_{V,T} \cdot d + F_i \cdot (h - h_E) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow F_{V,T} = \frac{P \cdot (b - \mu \cdot h_E) - F_i \cdot (h - h_E)}{d}$$

$$F_{V,D} = \frac{P \cdot (d - b + \mu \cdot h_E) + F_i \cdot (h - h_E)}{d}$$

$$F_{H,T} = \mu \cdot \frac{P \cdot (b - \mu \cdot h_E) - F_i \cdot (h - h_E)}{d}$$

$$F_{H,D} = \mu \cdot \frac{P \cdot (d - b + \mu \cdot h_E) + F_i \cdot (h - h_E)}{d}$$

$$F_{H,E} = F_i - (F_{V,D} + F_{V,T}) \cdot \mu = F_i - \mu \cdot P$$

En el instante en el que $F_{H,E} = 0$ será el instante en el que la deceleración será la máxima para que el remolque no transmita fuerza horizontal al tractor. Esto ocurrirá cuando:

$$a_{max} = \mu \cdot g$$

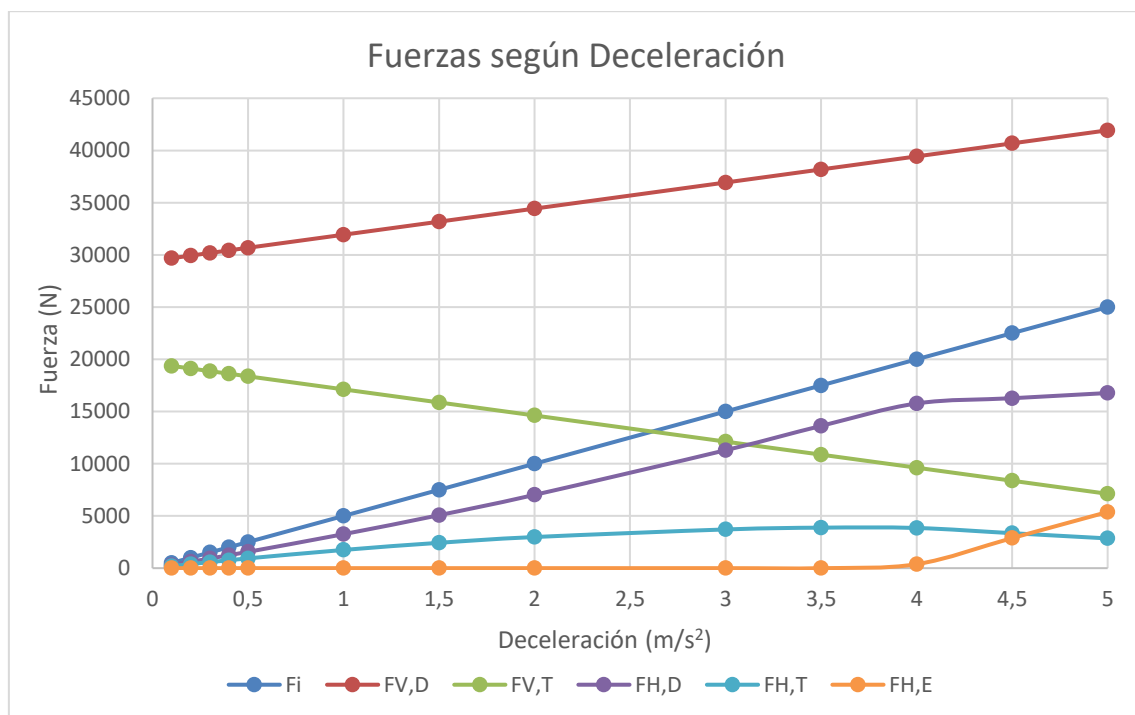
Por debajo de este valor, toda la fuerza de inercia será absorbida por el rozamiento de las ruedas con el terreno. Por otra parte, la fuerza horizontal en las ruedas nunca puede ser mayor que la fuerza de inercia. En caso de que esto ocurra, se debe cumplir que $F_{H,D} + F_{H,T} = F_i$ (se descarta la opción de que el enganche haga una fuerza en el sentido de la marcha por ser incoherente que se produzca una fuerza de tracción mientras se frena). Esto ocurrirá siempre que $a < a_{max}$. Para esos casos, la fuerza horizontal se distribuirá entre ambos ejes de forma proporcional a la carga vertical de cada uno de los ejes:

$$F_{H,D} = F_i \cdot \frac{F_{V,D}}{P}; F_{H,T} = F_i \cdot \frac{F_{V,T}}{P}$$

Para el cálculo del Coeficiente de Seguridad del eje hace falta seleccionar el eje más solicitado, el cual será el que mayor carga vertical tenga, pero no se puede saber directamente cuál de los

dos será, ya que dependiendo de si la carga está más o menos cerca del eje trasero y dependiendo de la magnitud de la deceleración, puede ser el eje más solicitado el delantero o el trasero. Si la distancia b es menor que la distancia a , sea cual sea la deceleración, será más solicitado el eje delantero, ya que la carga estará más cerca de él y además la deceleración le transmite una carga adicional, a excepción que se quiera calcular una aceleración (para lo cual la deceleración será negativa). Si la carga está más cerca del eje trasero, interesará poca deceleración para que no se descargue (puesto que el eje trasero será el más solicitado de forma estática).

Al igual que para el caso de 1 solo eje se va a realizar una gráfica mostrando los valores de las fuerzas obtenidos en función de la deceleración. Se tomará un coeficiente de rozamiento de 0,4; una masa de 5.000 kg; distancia d de 3 m; distancia l de 1 m; distancia a de 0,6 m; distancia b de 1,4 m; altura h_E de 0,5 m y altura h de 2 m.



Gráfica 2. Fuerzas según Deceleración 2 Ejes Separados

Como se puede observar, la fuerza horizontal trasera se mantiene prácticamente invariable en comparación con la delantera que va aumentando, hasta el momento en el que se llega al valor de deceleración a_{max} , instante en el cual deja de aumentar tan rápidamente y empieza a estancarse. Asimismo, para este remolque, la deceleración a partir de la cual se transmite algo de fuerza al enganche son 4 m/s^2 (lo cual es imposible que ocurra en un vehículo agrícola nunca) y, por lo tanto, el análisis de este remolque se va a realizar en todo momento en la zona en la que el enganche no recibe fuerza horizontal.

2.2.3. Frenado 2 Ejes Tándem

En el caso de remolque con 2 ejes en disposición tándem, como se va a ver a continuación, se afronta una dificultad. Esta dificultad no es otra que darse cuenta de que nos encontramos ante un problema hiperestático.

Las cargas actuando sobre un remolque con 2 ejes tándem, el cual está frenando son las siguientes:

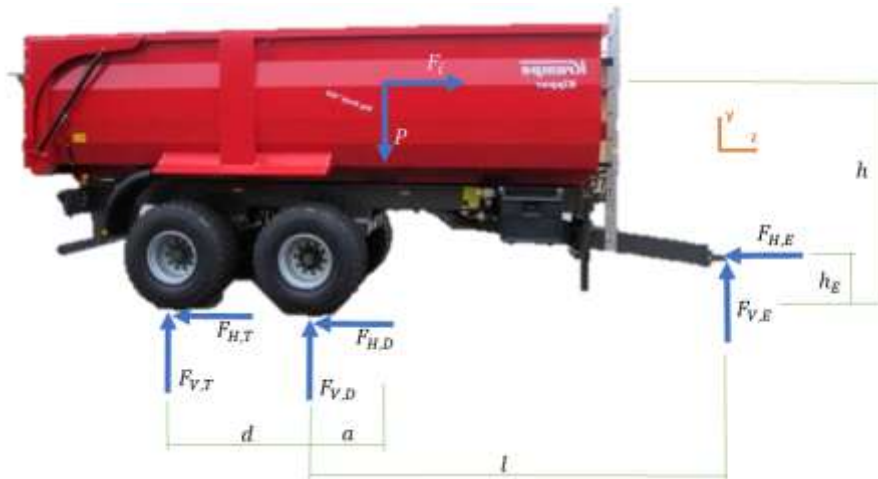


Ilustración 14. Fuerzas actuando sobre Remolque 2 Ejes Tándem Frenando

Donde:

$F_{V,D}$ y $F_{H,D}$ son las fuerzas vertical y horizontal respectivamente actuando sobre las ruedas delanteras.

$F_{V,T}$ y $F_{H,T}$ son las fuerzas vertical y horizontal respectivamente actuando sobre las ruedas traseras.

$F_{V,E}$ y $F_{H,E}$ son las fuerzas vertical y horizontal respectivamente actuando sobre el enganche.

P es la fuerza producida por la carga sobre el remolque.

F_i es la fuerza de inercia debida a la deceleración.

También se conoce que:

$$P = m \cdot g$$

$$F_i = m \cdot a$$

$$F_{H,D} = F_{V,D} \cdot \mu$$

$$F_{H,T} = F_{V,T} \cdot \mu$$

Siendo m la masa del remolque, g la gravedad, a la deceleración y μ el coeficiente de rozamiento entre el neumático y el suelo.

Como se puede observar, se está ante un problema hiperestático, ya que se tienen 4 incógnitas ($F_{V,D}$, $F_{V,T}$, $F_{V,E}$ y $F_{H,E}$) pero solamente se dispone de 3 ecuaciones ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M_E = 0$). Es por esto por lo que se va a hacer una suposición, la cual es tomar un punto central en el tándem para calcular cuánta carga recae sobre el tándem y posteriormente, esa carga vertical se distribuirá a un 55 % en el eje delantero y un 45 % en el eje trasero (se hace esta suposición, ya que al estar el eje delantero más cerca del centro de gravedad de la carga se va a ver más solicitado este eje). Esta suposición se realiza, puesto que en el trabajo no se está teniendo en cuenta la ballesta ni su rigidez, por lo que se tiene que simular la transferencia de cargas a través de la ballesta (hay que recordar que ambos ejes están sujetos a la misma ballesta).

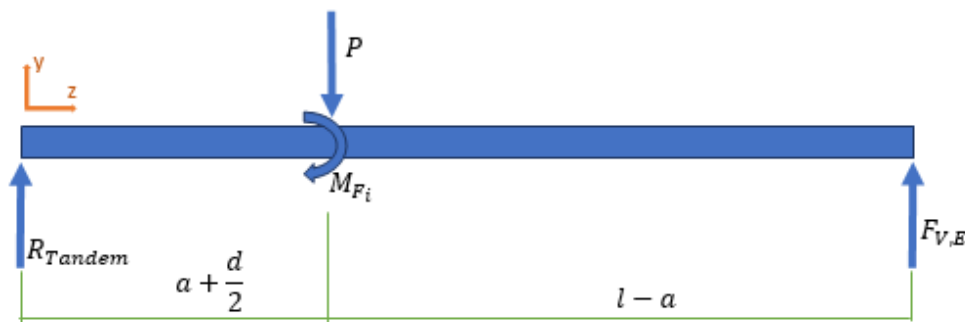


Ilustración 15. Simplificación Remolque Tándem Frenando

Donde:

R_{Tandem} es la reacción total en el tándem.

M_{F_i} es el momento que crea la fuerza de inercia del remolque.

También se sabe que:

$$R_{Tandem} = F_{V,D} + F_{V,T}$$

$$M_{F_i} = F_i \cdot (h - h_E)$$

Haciendo equilibrio de fuerzas y de momentos:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -P + R_{Tandem} + F_{V,E} = 0 \rightarrow F_{V,E} = P - R_{Tandem}$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow P \cdot (l - a) - R_{Tandem} \cdot \left(l + \frac{d}{2}\right) - M_{F_i} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow R_{Tandem} = \frac{P \cdot (l - a) - F_i \cdot (h - h_E)}{l + \frac{d}{2}}$$

$$F_{V,D} = 0,55 \cdot R_{Tandem}$$

$$F_{V,T} = 0,45 \cdot R_{Tandem}$$

$$F_{H,D} = 0,55 \cdot R_{Tandem} \cdot \mu$$

$$F_{H,T} = 0,45 \cdot R_{Tandem} \cdot \mu$$

$$F_{V,E} = P - \frac{P \cdot (l - a) - F_i \cdot (h - h_E)}{l + \frac{d}{2}} = \frac{P \cdot \left(a + \frac{d}{2}\right) + F_i \cdot (h - h_E)}{l + \frac{d}{2}}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_i - F_{H,D} - F_{H,T} - F_{H,E} = 0 \rightarrow F_{H,E} = F_i - F_{H,D} - F_{H,T} = F_i - (F_{V,D} + F_{V,T}) \cdot \mu$$

$$\begin{aligned} F_{H,E} &= F_i - \mu \cdot R_{Tandem} = F_i - \mu \cdot \frac{P \cdot (l - a) - F_i \cdot (h - h_E)}{l + \frac{d}{2}} = \\ &= \frac{P \cdot \mu \cdot (a - l) + F_i \cdot [\mu \cdot (h - h_E) + l + \frac{d}{2}]}{l + \frac{d}{2}} \end{aligned}$$

En el instante en el que $F_{H,E} = 0$ será el instante en el que la deceleración será la máxima para que el remolque no transmita fuerza horizontal al tractor. Esto ocurrirá cuando:

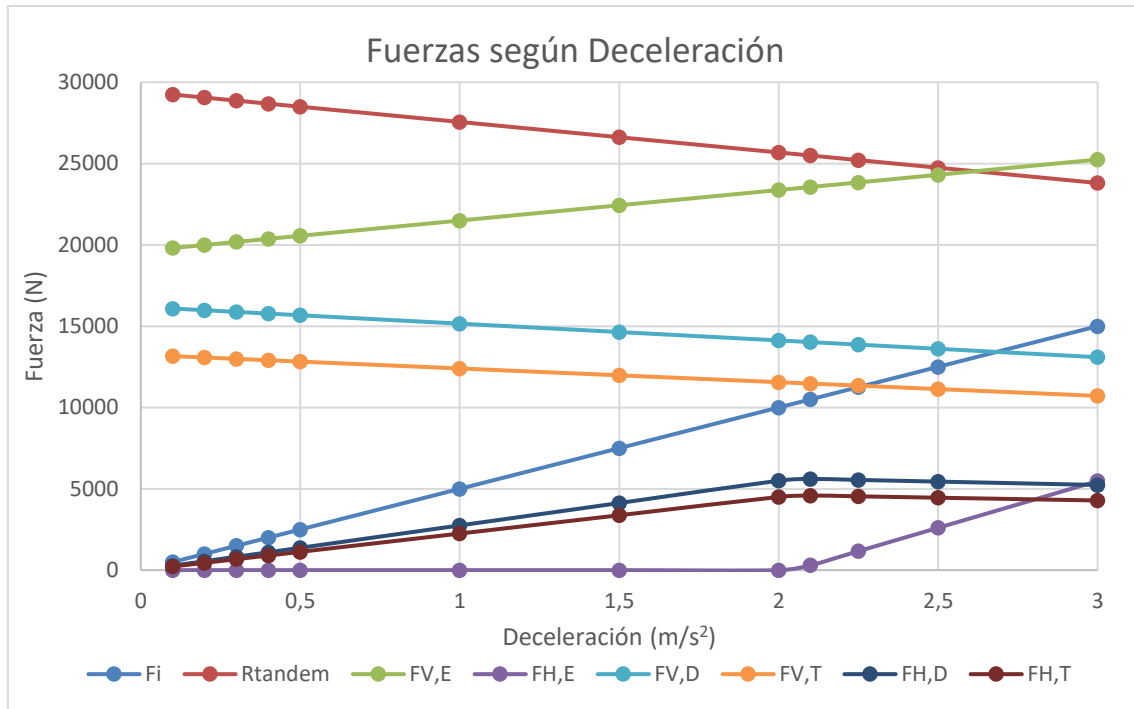
$$a_{max} = \frac{\mu \cdot g \cdot (l - a)}{l + \frac{d}{2} + \mu \cdot (h - h_E)}$$

Cuanta más deceleración hay, más se descargan los ejes y eso no interesa, ya que queremos estudiar los ejes en sus peores situaciones. Por debajo de este valor, toda la fuerza de inercia será absorbida por el rozamiento de las ruedas con el terreno. Por otra parte, la fuerza horizontal en las ruedas nunca puede ser mayor que la fuerza de inercia, por lo que en caso de que esto ocurra, se debe cumplir que $F_{H,D} + F_{H,T} = F_i$ (se descarta la opción de que el enganche haga una fuerza en el sentido de la marcha por ser incoherente que se produzca una fuerza de tracción mientras se frena). Esto ocurrirá siempre que $a < a_{max}$. Para esos casos, la fuerza horizontal se distribuirá de forma proporcional a la carga vertical del eje:

$$F_{H,D} = 0,55 \cdot F_i; F_{H,T} = 0,45 \cdot F_i$$

Como se puede observar, de ambos ejes, el más solicitado es el delantero, por lo que se tomarán su fuerza vertical y horizontal para calcular los coeficientes de seguridad de los ejes del remolque. Al ser ambos ejes idénticos (tanto en tamaño como en material), si cumple el delantero, el trasero también cumplirá por estar menos solicitado.

A continuación, se muestra una gráfica con los valores de las diferentes fuerzas en función de la deceleración. Se tomará un coeficiente de rozamiento de 0,4; una masa de 5.000 kg; distancia d de 2 m; distancia l de 3 m; distancia a de 0,6 m; altura h_E de 0,5 m y altura h de 2 m.



Gráfica 3. Fuerzas según Deceleración 2 Ejes Tándem

Al igual que en el caso de 1 eje, a mayor deceleración, menos cargados están los ejes (como ya se preveía). Además, a partir de la aceleración límite que está en torno a $2,05 \text{ m/s}^2$, no es de interés tomar dichos valores, ya que desciende la fuerza vertical sobre los ejes y la fuerza horizontal se estanca y empieza a disminuir lentamente. Como ya se adelantaba, las fuerzas en el eje delantero son mayores que las fuerzas en el eje trasero.

2.2.3. Cálculo Tensiones y Coeficiente de Seguridad en el Eje Más Solicitado

Una vez calculadas las fuerzas que se deben ejercer en cada eje dependiendo del tipo de remolque, se deben calcular las tensiones en el eje. En las imágenes siguientes, se pueden observar las fuerzas que se ejercen a lo largo del eje. El dividir las fuerzas vertical y horizontal entre 2 es debido a que la mitad de la carga recae en cada una de las ruedas (no hay desequilibrio entre el lado derecho e izquierdo del remolque, ya que el movimiento es en la dirección de la marcha).



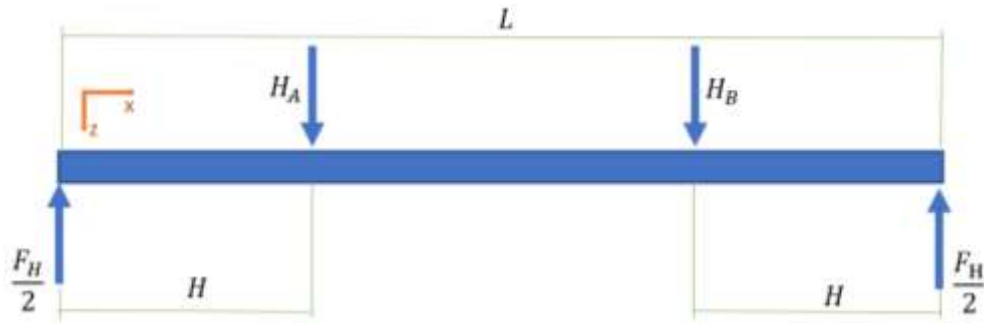


Ilustración 16. Eje Caso Frenado

Donde:

V_A es la fuerza vertical que ejerce la ballesta derecha.

V_B es la fuerza vertical que ejerce la ballesta izquierda.

H_A es la fuerza horizontal que ejerce la ballesta derecha.

H_B es la fuerza horizontal que ejerce la ballesta izquierda.

$F_V = \max(F_{V,D}; F_{V,T})$ y en el caso de 1 eje como es de suponer, es la fuerza vertical en el único eje (denominada $F_{V,R}$)

$F_H = \max(F_{H,D}; F_{H,T})$

Y evidentemente, al ser $F_H = F_V \cdot \mu$, si el máximo vertical está en el eje delantero, el máximo horizontal tiene que estar en el delantero también.

Podría existir, como ya se ha mencionado anteriormente, un momento torsor, pero en este caso no se produce dicho momento porque el eje no dispone de frenos en las ruedas (porque modifica mucho la morfología del eje y complica el análisis) y, por tanto, estas pueden girar libremente. En los ejes con freno integrado, las fuerzas y momentos que actuarían sobre ellos serían las mismas, pero con el añadido de un momento torsor en cada extremo del eje de valor $M_x = \frac{F_H}{2} \cdot R$, siendo R el radio exterior del neumático.

Haciendo los siguientes equilibrios de fuerzas y de momentos, se calculan las reacciones en las ballestas.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{F_V}{2} + \frac{F_V}{2} - V_A - V_B = 0 \rightarrow V_A = F_V - V_B$$

$$\begin{aligned} \sum M_{z,A} = 0 &\rightarrow -\frac{F_V}{2} \cdot H - V_B \cdot (L - 2H) + \frac{F_V}{2} \cdot (L - H) = 0 \rightarrow \frac{F_V}{2} \cdot (L - 2H) - V_B \cdot (L - 2H) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow V_B = \frac{F_V}{2} \end{aligned}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} - \frac{F_H}{2} + H_A + H_B = 0 \rightarrow H_A = F_H - H_B$$

$$\sum M_{y,A} = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} \cdot H - H_B \cdot (L - 2H) + \frac{F_H}{2} \cdot (L - H) = 0 \rightarrow \frac{F_H}{2} \cdot (L - 2H) - H_B \cdot (L - 2H) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow H_B = \frac{F_H}{2}$$

Y sustituyendo en la primera ecuación y en la tercera ecuación:

$$V_A = F_V - \frac{F_V}{2} = \frac{F_V}{2}$$

$$H_A = F_H - \frac{F_H}{2} = \frac{F_H}{2}$$

Lo cual nos da las siguientes reacciones en el eje:

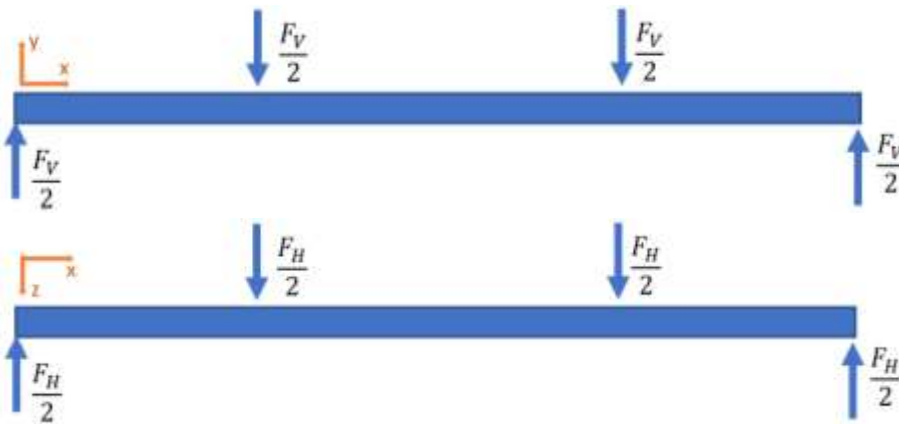


Ilustración 17. Reacciones Eje Caso Frenado

Y con estas reacciones se realiza el cálculo de cuáles serán el esfuerzo cortante y el momento flector en cada punto del eje.

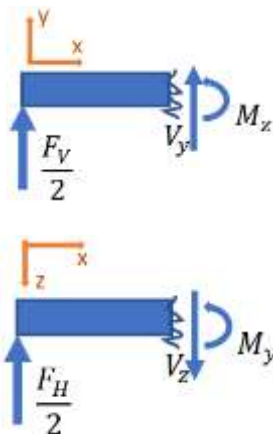


Ilustración 18. Cortante y Flector Caso Frenado entre Rueda Derecha y Ballesta Derecha

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow \frac{F_V}{2} + V_y = 0 \rightarrow V_y(0 \leq x \leq H) = -\frac{F_V}{2}$$

$$\sum M_Z = 0 \rightarrow -\frac{F_V}{2} \cdot x + M_z = 0 \rightarrow M_z(0 \leq x \leq H) = \frac{F_V}{2} \cdot x$$

$$M_z(x = 0) = 0; M_z(x = H) = \frac{F_V}{2} \cdot H$$

$$\sum F_Z = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} + V_z = 0 \rightarrow V_z(0 \leq x \leq H) = \frac{F_H}{2}$$

$$\sum M_Y = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} \cdot x + M_y = 0 \rightarrow M_y(0 \leq x \leq H) = \frac{F_H}{2} \cdot x$$

$$M_y(x = 0) = 0; M_y(x = H) = \frac{F_H}{2} \cdot H$$

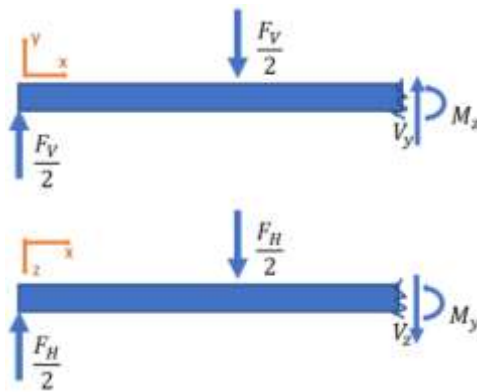


Ilustración 19. Cortante y Flector Caso Frenado entre Ballesta Derecha y Ballesta Izquierda

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow \frac{F_V}{2} - \frac{F_V}{2} + V_y = 0 \rightarrow V_y(H < x \leq L - H) = 0$$

$$\sum M_Z = 0 \rightarrow -\frac{F_V}{2} \cdot x + \frac{F_V}{2} \cdot (x - H) + M_z = 0 \rightarrow M_z(H < x \leq L - H) = \frac{F_V}{2} \cdot H$$

$$\sum F_Z = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} + \frac{F_H}{2} + V_z = 0 \rightarrow V_z(H < x \leq L - H) = 0$$

$$\sum M_Y = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} \cdot x + \frac{F_H}{2} \cdot (x - H) + M_y = 0 \rightarrow M_y(H < x \leq L - H) = \frac{F_H}{2} \cdot H$$

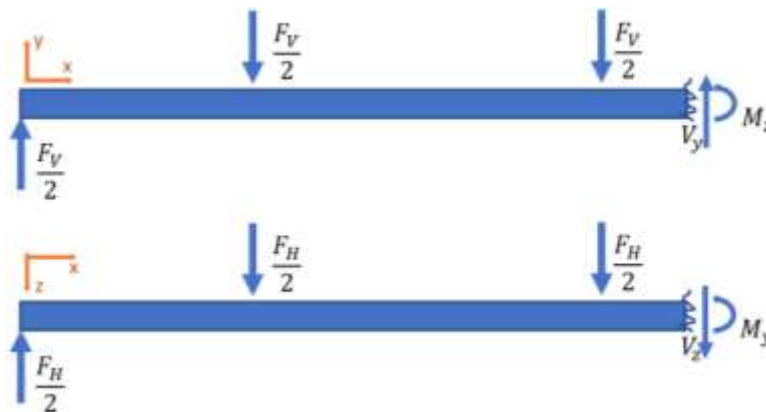


Ilustración 20. Cortante y Flector Caso Frenado entre Ballesta Izquierda y Rueda Izquierda

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow \frac{F_V}{2} - \frac{F_V}{2} - \frac{F_V}{2} + V_y = 0 \rightarrow V_y(L - H < x \leq L) = \frac{F_V}{2}$$

$$\sum M_Z = 0 \rightarrow -\frac{F_V}{2} \cdot x + \frac{F_V}{2} \cdot (x - H) + \frac{F_V}{2} \cdot [x - (L - H)] + M_z = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_z(L - H < x \leq L) = \frac{F_V}{2} \cdot H - \frac{F_V}{2} \cdot (x - L + H) = \frac{F_V}{2} \cdot (L - x)$$

$$M_z(x = L - H) = \frac{F_V}{2} \cdot H; M_z(x = L) = 0$$

$$\sum F_Z = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} + \frac{F_H}{2} + \frac{F_H}{2} + V_z = 0 \rightarrow V_z(L - H < x \leq L) = -\frac{F_H}{2}$$

$$\sum M_Y = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} \cdot x + \frac{F_H}{2} \cdot (x - H) + \frac{F_H}{2} \cdot [x - (L - H)] + M_y = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_y(L - H < x \leq L) = \frac{F_H}{2} \cdot H - \frac{F_H}{2} \cdot (x - L + H) = \frac{F_H}{2} \cdot (L - x)$$

$$M_y(x = L - H) = \frac{F_H}{2} \cdot H; M_y(x = L) = 0$$

Y a continuación se muestran los diagramas de Cortante y Flector que se producen en el eje.

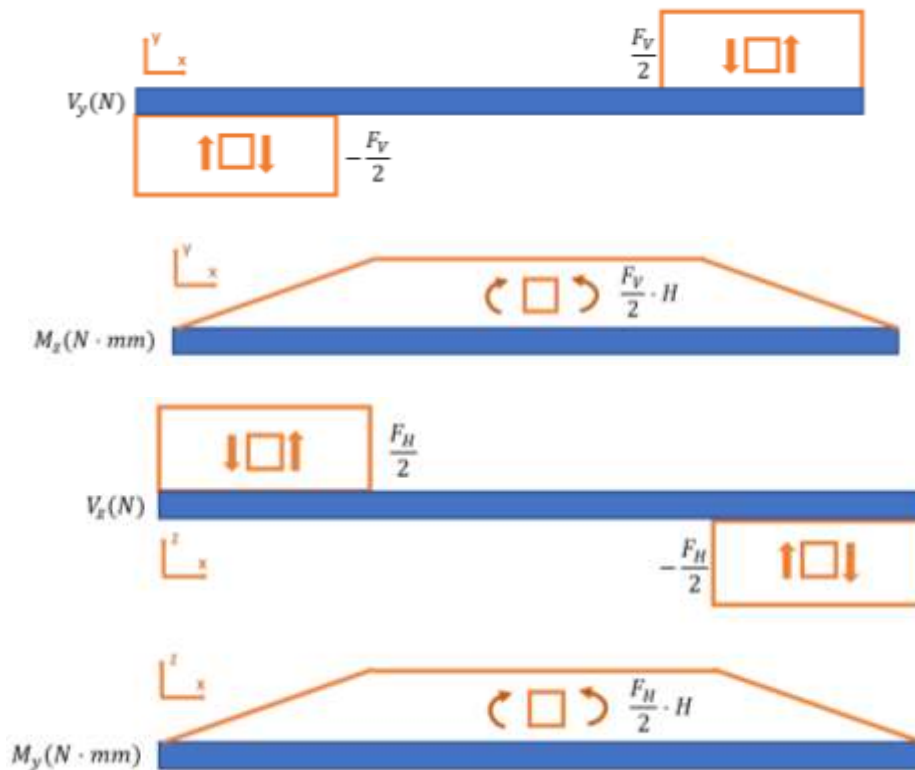


Ilustración 21. Cortante y Flector Caso Frenado

En este caso, el punto más desfavorable será cualquiera de los 2 apoyos de las ballestas, si es la ballesta izquierda será en su lado izquierdo y si es la derecha será en su lado derecho (hay que tener en cuenta que se están viendo de frente, por lo que el lado izquierdo será el lado derecho de los diagramas y viceversa).

Como ya se ha visto en el caso estático, solo se va a tener en cuenta la tensión normal producida por los momentos flectores, ya que la tensión tangencial máxima es despreciable en comparación.

Con estos flectores de $M_z = \frac{F_V}{2} \cdot H$ y $M_y = \frac{F_H}{2} \cdot H$, se calcula cuál es la tensión equivalente máxima que soporta el eje en su punto más crítico.

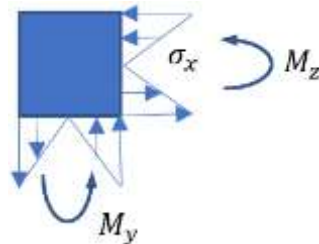


Ilustración 22. Tensión Normal debida a Momento Flector Caso Frenado

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max}$$

Siendo M_z y M_y los momentos flectores, I_z y I_y los momentos de inercia de la sección, y_{max} la distancia desde el centro de la sección al punto más alejado verticalmente (que en nuestro caso será la mitad de la altura de la sección del eje) y z_{max} la distancia desde el centro de la sección al punto más alejado horizontalmente (que en nuestro caso será la mitad de la anchura de la sección del eje). Como se puede observar en Ilustración 22. Tensión Normal debida a Momento Flector, la mayor tensión normal se producirá bien en la esquina superior derecha de la sección o en la esquina inferior izquierda, ya que son los 2 puntos en los que ambos flectores comprimen o traccionan el eje respectivamente.

Sabiendo que la sección del eje es la mostrada en la ilustración siguiente, se calcula cuál será la tensión normal máxima de la sección.

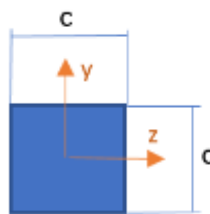


Ilustración 23. Sección Eje Caso Frenado

$$I_z = I_y = \frac{1}{12} \cdot c \cdot c^3 = \frac{c^4}{12}$$

$$y_{max} = z_{max} = \frac{c}{2}$$



Por lo que, sustituyendo,

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_z}{\frac{c^4}{12}} \cdot \frac{c}{2} + \frac{M_y}{\frac{c^4}{12}} \cdot \frac{c}{2} = \frac{6 \cdot (M_z + M_y)}{c^3} = \frac{3 \cdot H \cdot (F_V + F_H)}{c^3}$$

Si además usamos la Teoría de Von Mises la cual dice que $\sigma_{eqv} = \sqrt{3 \cdot \tau_{xy}^2 + \sigma_x^2}$ nos queda que $\sigma_{eqv} = \sigma_x = \sigma_{x,max}$. Por otra parte, se define el Coeficiente de Seguridad como $CS = \frac{\sigma_F}{\sigma_{eqv}}$ siendo σ_F el límite elástico del material. Por lo que nos queda que

$$CS = \frac{\sigma_F}{\sigma_{x,max}}$$

Interesa que este coeficiente sea de por lo menos 1,5 para aguantar con seguridad para no estar empleando el material cerca de su límite.

2.3. Caso Giro

Este caso es similar al de frenado, pero con la particularidad de que en este caso la inercia en vez de ir en la dirección de la marcha va perpendicular a ella. En este caso se calculará en primer lugar cuál es la transferencia de carga entre los lados del remolque debida a la inercia del giro (este cálculo se hará una única vez para todas las disposiciones de ejes) para una vez conocida la carga en el lado izquierdo y en el lado derecho poder calcular para cada tipo de remolque cuál es la cantidad de carga que se lleva cada eje.

2.3.1. Cálculo Transferencia entre Lados del Eje

En la imagen siguiente se muestra cuáles son las fuerzas actuando en un remolque girando.

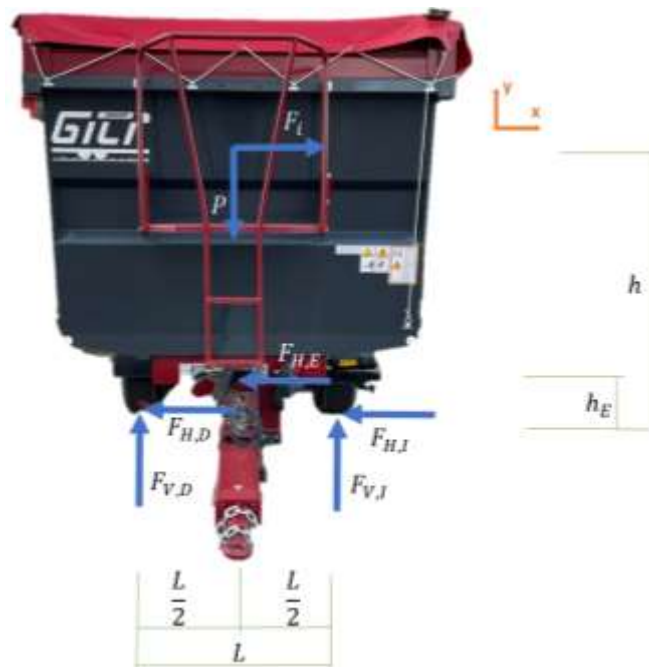


Ilustración 24. Fuerzas actuando sobre Remolque Girando

Donde:

$F_{V,D}$ y $F_{H,D}$ son las fuerzas vertical y horizontal respectivamente actuando sobre las ruedas derechas.

$F_{V,I}$ y $F_{H,I}$ son las fuerzas vertical y horizontal respectivamente actuando sobre las ruedas izquierdas.

$F_{H,E}$ es la fuerza horizontal actuando sobre el enganche (la vertical se calculará posteriormente al calcular la carga que se lleva cada eje).

P es el peso de la carga del remolque.

F_i es la fuerza de inercia debida al giro.

También se sabe que:

$$P = m \cdot g$$

$$F_i = m \cdot a$$

$$F_{H,D} = F_{V,D} \cdot \mu$$

$$F_{H,I} = F_{V,I} \cdot \mu$$

Siendo m la masa del remolque, g la gravedad, a la aceleración lateral debida al giro y μ el coeficiente de rozamiento entre el neumático y el suelo.

Haciendo equilibrios de fuerzas y de momentos se pueden obtener las fuerzas en las ruedas de ambos lados.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_i - F_{H,D} - F_{H,I} - F_{H,E} = 0 \rightarrow F_{H,E} = F_i - F_{H,D} - F_{H,I}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -P + F_{V,I} + F_{V,D} = 0 \rightarrow F_{V,I} = P - F_{V,D}$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow -F_{H,D} \cdot h_E - F_{H,I} \cdot h_E + F_{V,I} \cdot \frac{L}{2} - F_{V,D} \cdot \frac{L}{2} - F_i \cdot (h - h_E) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -h_E \cdot \mu \cdot (F_{V,I} + F_{V,D}) + \frac{L}{2} \cdot (F_{V,I} - F_{V,D}) - F_i \cdot (h - h_E) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -h_E \cdot \mu \cdot (P - F_{V,D} + F_{V,D}) + \frac{L}{2} \cdot (P - F_{V,D} - F_{V,D}) - F_i \cdot (h - h_E) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow F_{V,D} = P \cdot \frac{\frac{L}{2} - h_E \cdot \mu}{L} - F_i \cdot \frac{h - h_E}{L} = P \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{h_E \cdot \mu}{L} \right) - F_i \cdot \frac{h - h_E}{L}$$

$$F_{V,I} = P - P \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{h_E \cdot \mu}{L} \right) + F_i \cdot \frac{h - h_E}{L} = P \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{h_E \cdot \mu}{L} \right) + F_i \cdot \frac{h - h_E}{L}$$

$$F_{H,E} = F_i - \mu \cdot \sum F_{V,Rueda}$$

La fuerza vertical de cada una de las ruedas se calculará en los siguientes apartados para los diferentes tipos de remolque, ya que no toda la fuerza en el lado derecho e izquierdo se transmite a las ruedas (hay parte de la carga que como se ha visto previamente se la lleva el enganche).

También hay que comentar que si la suma de fuerzas horizontales ($F_H = F_V \cdot \mu$) en las ruedas es superior a la fuerza de inercia debida al giro, la fuerza horizontal en cada rueda se deberá tomar proporcionalmente a la fuerza vertical de esa rueda respecto de la suma de las fuerzas verticales de todas las ruedas:

$$F_{H,Rueda} = F_i \cdot \frac{F_{V,Rueda}}{\sum F_{V,Rueda}}$$

Y ahora, a partir de las fuerzas verticales que se han obtenido para cada lado del remolque, se va a calcular para cada tipo de disposición de ejes cuál es la carga de cada lado que va a cada eje.

2.3.2. Giro 1 Eje

Las fuerzas que actuarán en el remolque de 1 solo eje en cada lado serán las siguientes:



Ilustración 25. Fuerzas actuando sobre Remolque 1 Eje Girando Lado Derecho

Donde:

$F_{V,D}$ es la fuerza vertical total que actúa en el lado derecho calculada en el [Apartado 2.3.1.](#)

$F_{V,RD}$ es la fuerza vertical que actúa en la rueda derecha.

$F_{V,ED}$ es la fuerza vertical que actúa en el enganche debida a la carga actuando en el lado derecho.

Haciendo equilibrios de fuerzas y de momentos:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -F_{V,D} + F_{V,RD} + F_{V,ED} = 0 \rightarrow F_{V,ED} = F_{V,D} - F_{V,RD}$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow -F_{V,RD} \cdot l + F_{V,D} \cdot (l - d) = 0 \rightarrow F_{V,RD} = F_{V,D} \cdot \frac{(l - d)}{l}$$

$$F_{V,ED} = F_{V,D} - F_{V,D} \cdot \frac{(l - d)}{l} = F_{V,D} \cdot \frac{d}{l}$$

Y, por tanto:

$$F_{V,RI} = F_{V,I} \cdot \frac{(l - d)}{l}$$

$$F_{V,E} = (F_{V,D} + F_{V,I}) \cdot \frac{d}{l}$$

Siendo:

$F_{V,I}$ la fuerza vertical total que actúa en el lado izquierdo calculada en el [Apartado 2.3.1](#).

$F_{V,RI}$ la fuerza vertical que actúa en la rueda izquierda.

$F_{V,E}$ la fuerza vertical total que se produce en el enganche.

2.3.2. Giro 2 Ejes Separados

Las fuerzas que actuarán en el remolque de 2 ejes separados en cada lado serán las siguientes:

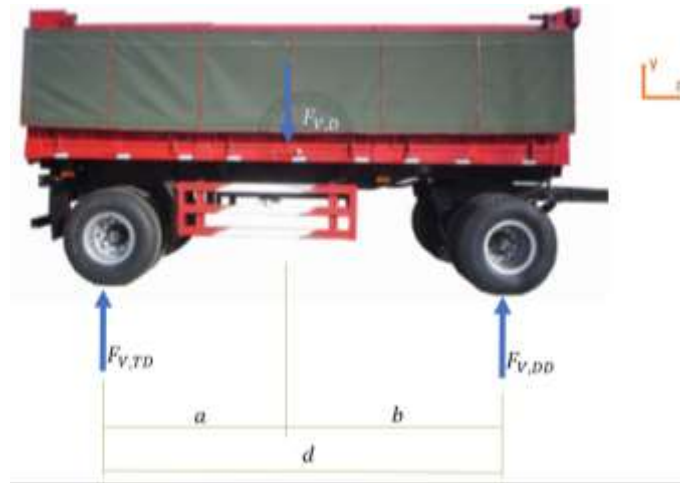


Ilustración 26. Fuerzas actuando sobre Remolque 2 Ejes Separados Girando Lado Derecho

Donde:

$F_{V,D}$ es la fuerza vertical total que actúa en el lado derecho calculada en el [Apartado 2.3.1](#).

$F_{V,TD}$ es la fuerza vertical que actúa en la rueda trasera derecha.

$F_{V,DD}$ es la fuerza vertical que actúa en la rueda delantera derecha.

Haciendo equilibrios de fuerzas y de momentos:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -F_{V,D} + F_{V,DD} + F_{V,TD} = 0 \rightarrow F_{V,DD} = F_{V,D} - F_{V,TD}$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow -F_{V,TD} \cdot d + F_{V,D} \cdot b = 0 \rightarrow F_{V,TD} = F_{V,D} \cdot \frac{b}{d}$$

$$F_{V,DD} = F_{V,D} - F_{V,D} \cdot \frac{b}{d} = F_{V,D} \cdot \frac{a}{d}$$

Y, por tanto:

$$F_{V,TI} = F_{V,I} \cdot \frac{b}{d}$$

$$F_{V,DI} = F_{V,I} \cdot \frac{a}{d}$$

Siendo:

$F_{V,I}$ la fuerza vertical total que actúa en el lado izquierdo calculada en el [Apartado 2.3.1](#).

$F_{V,TI}$ la fuerza vertical que actúa en la rueda trasera izquierda.

$F_{V,DI}$ la fuerza vertical que actúa en la rueda delantera izquierda.

Si la distancia a es mayor que la distancia b , el eje más cargado será el delantero y en caso contrario será el trasero.

2.3.3. Giro 2 Ejes Tándem

Las fuerzas que actuarán en el remolque de 2 ejes separados en cada lado serán las siguientes:

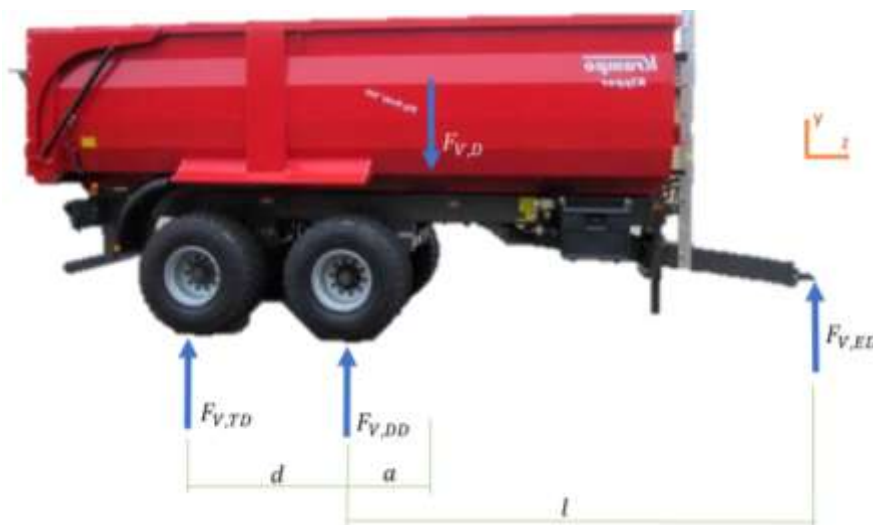


Ilustración 27. Fuerzas actuando sobre Remolque 2 Ejes Tándem Girando Lado Derecho

Donde:

$F_{V,D}$ es la fuerza vertical total que actúa en el lado derecho calculada en el [Apartado 2.3.1.](#)

$F_{V,TD}$ es la fuerza vertical que actúa en la rueda trasera derecha.

$F_{V,DD}$ es la fuerza vertical que actúa en la rueda delantera derecha.

$F_{V,ED}$ es la fuerza vertical que actúa en el enganche debida a la carga actuando en el lado derecho.

Al igual que en el [Apartado 2.2.3.](#), estamos ante un problema hiperestático, ya que se tienen 3 incógnitas ($F_{V,DD}$, $F_{V,TD}$ y $F_{V,E}$) pero solamente se dispone de 2 ecuaciones ($\sum F_y = 0$ y $\sum M_E = 0$). Es por esto por lo que se va a hacer la misma suposición de tomar un punto central en el tándem para calcular cuánta carga recae sobre el tándem y posteriormente esa carga vertical se distribuirá a un 55 % en el eje delantero y un 45 % en el eje trasero.

A continuación, se muestra la imagen de la simplificación:

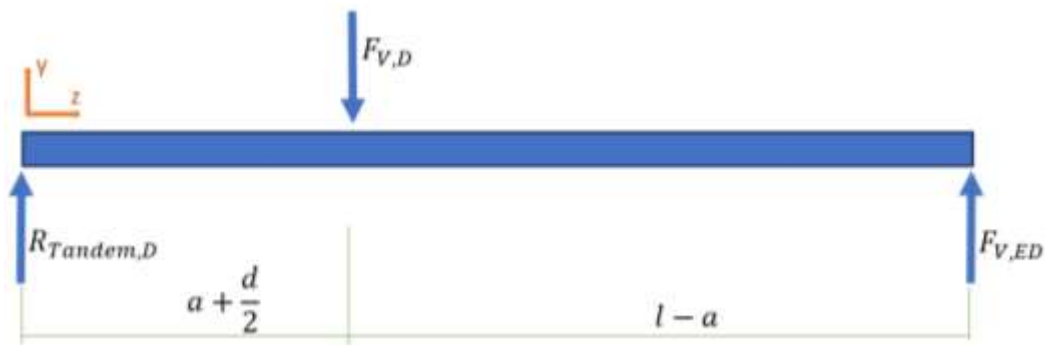


Ilustración 28. Simplificación Remolque Tándem Girando

Donde:

$R_{Tandem,D}$ es la reacción total en el lado derecho del tándem.

$$R_{Tandem,D} = F_{V,DD} + F_{V,TD}$$

Haciendo equilibrio de fuerzas y de momentos:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -F_{V,D} + R_{Tandem} + F_{V,ED} = 0 \rightarrow F_{V,ED} = F_{V,D} - R_{Tandem,D}$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow F_{V,D} \cdot (l - a) - R_{Tandem,D} \cdot \left(l + \frac{d}{2}\right) = 0 \rightarrow R_{Tandem,D} = \frac{F_{V,D} \cdot (l - a)}{l + \frac{d}{2}}$$

$$F_{V,DD} = 0,55 \cdot R_{Tandem,D}$$

$$F_{V,TD} = 0,45 \cdot R_{Tandem,D}$$

Y, por tanto:

$$R_{Tandem,I} = \frac{F_{V,I} \cdot (l - a)}{l + \frac{d}{2}}$$

$$F_{V,DI} = 0,55 \cdot R_{Tandem,I}$$

$$F_{V,TI} = 0,45 \cdot R_{Tandem,I}$$

$$F_{V,E} = (F_{V,D} + F_{V,I}) \cdot \frac{a + \frac{d}{2}}{l + \frac{d}{2}}$$

Siendo:

$R_{Tandem,I}$ la reacción total en el lado izquierdo del tándem.

$F_{V,I}$ la fuerza vertical total que actúa en el lado izquierdo calculada en el [Apartado 2.3.1](#).

$F_{V,TI}$ la fuerza vertical que actúa en la rueda trasera izquierda.

$F_{V,DI}$ la fuerza vertical que actúa en la rueda delantera izquierda.

$F_{V,E}$ la fuerza vertical total que se produce en el enganche.

En este caso el eje delantero siempre va a estar más solicitado que el trasero, ya que el 55 % de la carga vertical en el tándem se la lleva el eje delantero.

2.3.3. Cálculo Tensiones y Coeficiente de Seguridad en el Eje Más Solicitado

Una vez calculadas las fuerzas que se deben ejercer en cada eje dependiendo del tipo de remolque se deben calcular las tensiones en el eje. En la imagen siguiente, se pueden observar las fuerzas y momentos que se ejercen a lo largo del eje. Como se puede observar, en este caso va a haber carga horizontal paralela al eje (también llamada axial) y desaparece la carga horizontal perpendicular al eje.

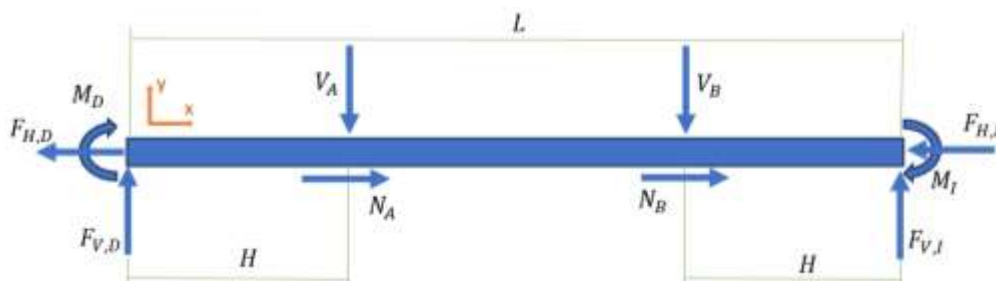


Ilustración 29. Eje Caso Giro

Donde:

$F_{V,I}$ es la fuerza vertical que actúa en el lado izquierdo del eje. $F_{V,I} = \max(F_{V,DI}; F_{V,TI})$

$F_{V,D}$ es la fuerza vertical que actúa en el lado derecho del eje. $F_{V,D} = \max(F_{V,DD}; F_{V,TD})$

Evidentemente, si el máximo en el lado derecho está en el eje delantero, en el lado izquierdo también estará delante, ya que en ambos lados la proporción entre la carga de los ejes es idéntica. En el caso de un solo eje, hay poco que pensar, puesto que la carga es directamente la vertical de la rueda izquierda y de la rueda derecha.

$F_{H,I}$ es la fuerza horizontal que actúa en el lado izquierdo del eje. $F_{H,I} = F_{V,I} \cdot \mu$

$F_{H,D}$ es la fuerza horizontal que actúa en el lado derecho del eje. $F_{H,D} = F_{V,D} \cdot \mu$

Esto ocurrirá siempre y cuando se cumpla lo dicho en el [Apartado 2.3.1.](#) de que la suma de las fuerzas horizontales en todas las ruedas debe ser menor o igual a la fuerza de inercia debida al giro.

M_I es el momento flector que produce la fuerza horizontal en el lado izquierdo del eje.

$$M_I = F_{H,I} \cdot R$$

M_D es el momento flector que produce la fuerza horizontal en el lado derecho del eje.

$$M_D = F_{H,D} \cdot R$$

Siendo R el radio exterior del neumático.

V_A es la fuerza vertical que ejerce la ballesta derecha.

V_B es la fuerza vertical que ejerce la ballesta izquierda.

N_A es la fuerza normal al eje que ejerce la ballesta derecha.

N_B es la fuerza normal al eje que ejerce la ballesta izquierda.

Va a haber un problema hiperestático de grado 1, ya que se tienen 4 incógnitas (V_A, V_B, H_A y H_B) pero solamente se dispone de 3 ecuaciones ($\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ y $\sum M_A = 0$). Se va a solucionar de una manera bastante lógica y esta no es otra que igualar $N_A = F_{H,D}$ y $N_B = F_{H,I}$, para así conseguir que entre las ballestas la carga normal al eje sea nula. Hay que tener cuidado de que N_A tenga sentido contrario a $F_{H,D}$ y N_B a $F_{H,I}$ para que así se cumpla $\sum F_x = 0$.

Usando entonces las otras 2 ecuaciones:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{V,D} + F_{V,I} - V_A - V_B = 0 \rightarrow V_A = F_{V,D} + F_{V,I} - V_B$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -M_I + F_{V,I} \cdot (L - H) - V_B \cdot (L - 2H) - M_D - F_{V,D} \cdot H = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow V_B = \frac{-M_I + F_{V,I} \cdot (L - H) - M_D - F_{V,D} \cdot H}{L - 2H} = \frac{F_{V,I} \cdot (L - H - \mu \cdot R) - F_{V,D} \cdot (H + \mu \cdot R)}{L - 2H} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_B = \frac{F_{V,I} \cdot L - (F_{V,I} + F_{V,D}) \cdot (H + \mu \cdot R)}{L - 2H}$$

El igualar $M_D = F_{V,D} \cdot \mu \cdot R$ y $M_I = F_{V,I} \cdot \mu \cdot R$ es debido a que se hace la suposición de que la fuerza de inercia producida por el giro es igual o mayor que la suma de las fuerzas horizontales en las ruedas del remolque (ya que de esta manera el eje estará más solicitado tanto de forma axial como a flexión). Cabe destacar que en la Hoja de Excel no se hace la suposición, y será la condición antes mencionada la que nos indicará que fórmula hay que utilizar para obtener la fuerza horizontal.

$$V_A = F_{V,D} + F_{V,I} - \frac{F_{V,I} \cdot L - (F_{V,I} + F_{V,D}) \cdot (H + \mu \cdot R)}{L - 2H} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_A = \frac{F_{V,D} \cdot L + (F_{V,I} + F_{V,D}) \cdot (\mu \cdot R - H)}{L - 2H}$$

Y a continuación se muestran las reacciones finales en el eje.



Ilustración 30. Reacciones Eje Girando

Y a partir de las reacciones obtenidas se realiza el cálculo de cuáles serán los esfuerzos cortante y axil y el momento flector en cada punto del eje.

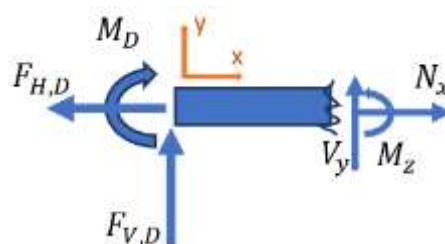


Ilustración 31. Cortante, Axil y Flector Caso Giro entre Rueda Derecha y Ballesta Derecha

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F_{H,D} + N_x = 0 \rightarrow N_x(0 \leq x \leq H) = F_{H,D}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{V,D} + V_y = 0 \rightarrow V_y(0 \leq x \leq H) = -F_{V,D}$$

$$\sum M_Z = 0 \rightarrow -F_{V,D} \cdot x - M_D + M_z = 0 \rightarrow M_z(0 \leq x \leq H) = F_{V,D} \cdot x + M_D$$

$$M_z(x = 0) = M_D = F_{V,D} \cdot \mu \cdot R$$

$$M_z(x = H) = F_{V,D} \cdot H + M_D = F_{V,D} \cdot (H + \mu \cdot R)$$

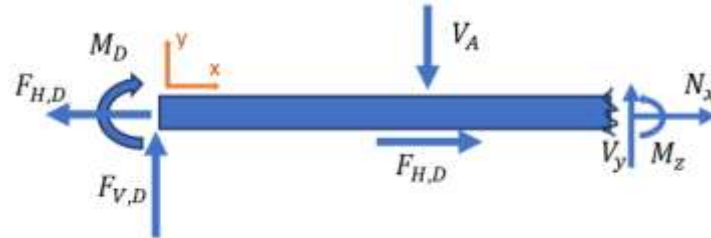


Ilustración 32. Cortante, Axil y Flector Caso Giro entre Ballesta Derecha y Ballesta Izquierda

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F_{H,D} + F_{H,D} + N_x = 0 \rightarrow N_x(0 \leq x \leq H) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{V,D} - V_A + V_y = 0 \rightarrow V_y(0 \leq x \leq H) = V_A - F_{V,D} = \frac{F_{V,D} \cdot 2H + (F_{V,I} + F_{V,D}) \cdot (\mu \cdot R - H)}{L - 2H}$$

$$\sum M_Z = 0 \rightarrow -F_{V,D} \cdot x - M_D + V_A \cdot (x - H) + M_z = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_z(H \leq x \leq L - H) = F_{V,D} \cdot x + M_D - V_A \cdot (x - H)$$

$$M_z(x = H) = F_{V,D} \cdot H + M_D = F_{V,D} \cdot (H + \mu \cdot R)$$

$$M_z(x = L - H) = F_{V,D} \cdot (L - H) + M_D - V_A \cdot [(L - H) - H] =$$

$$= F_{V,D} \cdot (L - H + \mu \cdot R) - V_A \cdot (L - 2H) = F_{V,I} \cdot (H - \mu \cdot R)$$

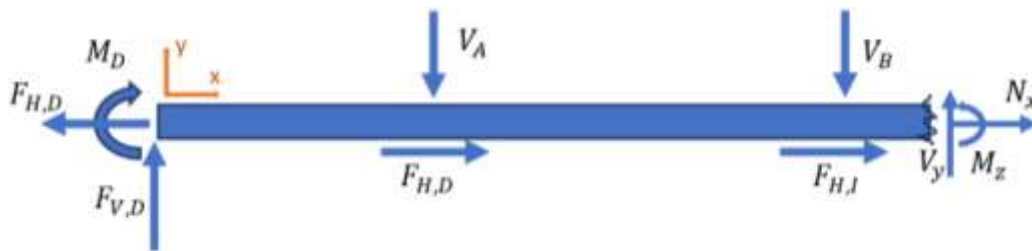


Ilustración 33. Cortante, Axil y Flector Caso Giro entre Ballesta Izquierda y Rueda Izquierda

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F_{H,D} + F_{H,D} + F_{H,I} + N_x = 0 \rightarrow N_x(0 \leq x \leq H) = -F_{H,I}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{V,D} - V_A - V_B + V_y = 0 \rightarrow V_y(0 \leq x \leq H) = V_A + V_B - F_{V,D} = F_{V,I}$$

$$\sum M_Z = 0 \rightarrow -F_{V,D} \cdot x - M_D + V_A \cdot (x - H) + V_B \cdot [x - (L - H)] + M_z = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_z(L - H \leq x \leq L) = F_{V,D} \cdot x + M_D - V_A \cdot (x - H) - V_B \cdot (x - L + H)$$

$$M_z(x = L - H) = F_{V,D} \cdot (L - H) + M_D - V_A \cdot [(L - H) - H] - V_B \cdot [(L - H) - L + H] =$$

$$= F_{V,D} \cdot (L - H + \mu \cdot R) - V_A \cdot (L - 2H) = F_{V,I} \cdot (H - \mu \cdot R)$$

$$M_z(x = L) = F_{V,D} \cdot L + M_D - V_A \cdot (L - H) - V_B \cdot (L - L + H) =$$

$$= F_{V,D} \cdot (L + \mu \cdot R) - V_A \cdot (L - H) - V_B \cdot H = -F_{V,I} \cdot \mu \cdot R$$

Y a continuación se muestran los diagramas de Cortante, Axil y Flector que se producen en el eje.

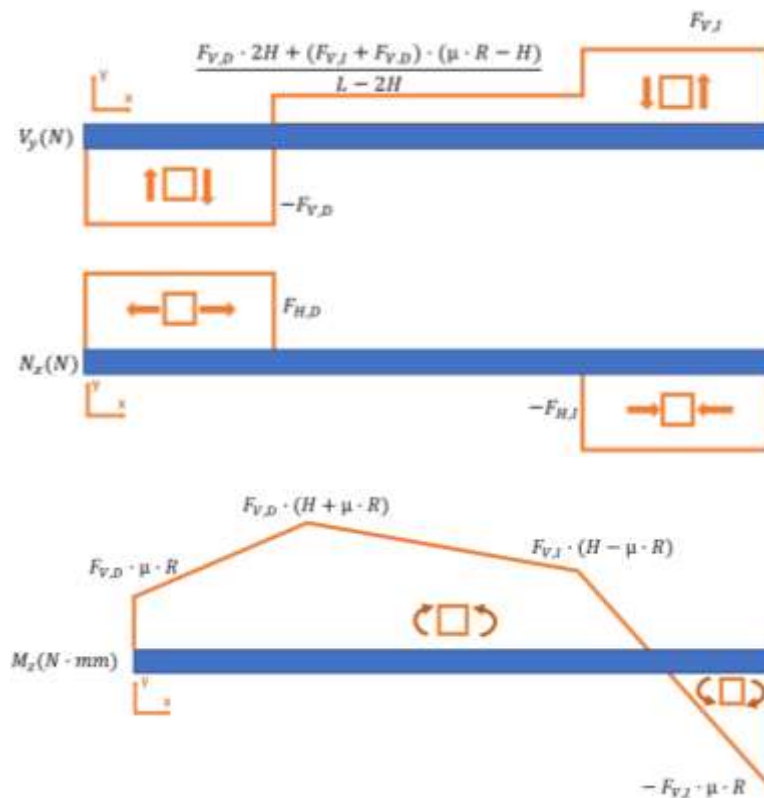


Ilustración 34. Cortante, Axil y Flector Caso Giro

En este caso, el punto más desfavorable será el apoyo de la ballesta derecha (apoyo izquierdo de los diagramas) en su lado derecho (el lado exterior), ya que es donde mayor momento flector se produce. Podrían darse los casos de, si la distancia H es grande, el coeficiente de rozamiento μ es pequeño y la aceleración lateral a es grande (se descarga mucho el lado derecho y se carga mucho el lado izquierdo), de que el mayor momento flector sea el producido en la ballesta izquierda en su lado izquierdo o si la aceleración a es grande y el coeficiente de rozamiento μ es grande, que se produzca el mayor flector en la unión del eje con la rueda izquierda. Es por esto, por lo que en la tabla Excel se introducen las 3 posibilidades y la tabla escoge la mayor de todas (y se escoge el axil que le corresponde a ese momento flector).

En este caso hay que tener en cuenta el esfuerzo axial, ya que va a producir una tensión normal que se va a sumar a la tensión normal producida por la flexión, aumentando así la tensión equivalente del eje (como en los casos anteriores, la tensión tangencial que produce el esfuerzo vertical se va a despreciar, por el hecho de que el punto de cálculo en la sección va a ser en los extremos y la tensión tangencial en dichos puntos va a ser 0).

Con el momento flector M_z y el esfuerzo axial N_x , se calcula cuál es la tensión equivalente que soporta el eje en su punto más crítico.



Ilustración 35. Tensión Normal debida a Momento Flector y al Esfuerzo Axial Caso Giro

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{N_x}{A}$$

Siendo M_z el momento flector, I_z el momento de inercia de la sección, y la distancia desde el centro de la sección al punto más alejado verticalmente (que en nuestro caso será la mitad de la altura de la sección del eje) y A el área de la sección. Como se puede observar en Ilustración 22. Tensión Normal debida a Momento Flector, la mayor tensión normal se producirá en la parte inferior de la sección, ya que es donde ambas tensiones normales son de tracción, en la parte superior se restarían y entonces no sería la mayor tensión.

Sabiendo que la sección del eje es la mostrada en la ilustración siguiente, se calcula cuál será la tensión normal máxima de la sección.

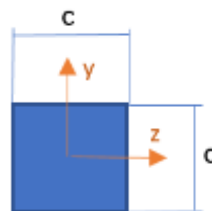


Ilustración 36. Sección Eje Caso Giro

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot c \cdot c^3 = \frac{c^4}{12}$$

$$y_{max} = \frac{c}{2}$$

$$A = c \cdot c = c^2$$

Por lo que, sustituyendo,

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_z}{\frac{c^4}{12}} \cdot \frac{c}{2} + \frac{N_x}{c^2} = \frac{6 \cdot M_z}{c^3} + \frac{N_x}{c^2}$$



Lo cual si suponemos $M_z = F_{V,D} \cdot (H + \mu \cdot R)$ y $N_x = F_{H,D} = F_{V,D} \cdot \mu$ queda

$$\sigma_{x,max} = \frac{6 \cdot F_{V,D} \cdot (H + \mu \cdot R)}{c^3} + \frac{F_{V,D} \cdot \mu}{c^2} = \frac{F_{V,D}}{c^2} \cdot \left(\frac{6 \cdot (H + \mu \cdot R)}{c} + \mu \right)$$

Si además usamos la Teoría de Von Mises la cual dice que $\sigma_{eqv} = \sqrt{3 \cdot \tau_{xy}^2 + \sigma_x^2}$ nos queda

que $\sigma_{eqv} = \sigma_x = \sigma_{x,max}$. Por otra parte, se define el Coeficiente de Seguridad como $CS = \frac{\sigma_F}{\sigma_{eqv}}$

siendo σ_F el límite elástico del material. Por lo que nos queda que

$$CS = \frac{\sigma_F}{\sigma_{x,max}}$$

Interesa que este coeficiente sea de por lo menos 1,5 para aguantar con algo de seguridad.

2.4. Caso Giro de Radio Mínimo

Este caso de estudio, solamente se va a llevar a cabo en el remolque con 2 ejes tándem, ya que lo que interesa de este caso es el estudio de lo que ocurre en los ejes al tomar una curva cerrada, y es el remolque tándem el que sufre en estas circunstancias, puesto que como se va a ver a continuación, su eje de rotación está en el centro del tándem por lo que al estar las ruedas tan cerca del centro de rotación sufren grandes esfuerzos de arrastre. En este caso, al producirse el giro a velocidades bajas no se va a considerar que exista ninguna aceleración, ya que sería despreciable en comparación con la fuerza que produce el vehículo tractor.

2.4.1. Cálculo Reacciones en los Ejes

Las fuerzas que actúan en el remolque durante el giro son las siguientes:

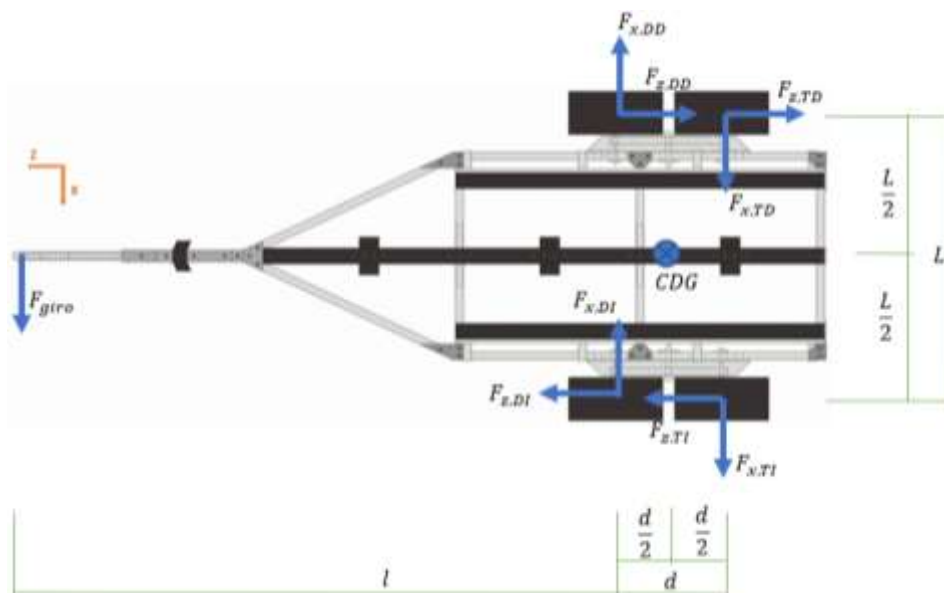


Ilustración 37. Fuerzas actuando sobre Remolque Tándem Caso Giro Radio Mínimo

Donde:

F_{giro} es la fuerza que ejerce el vehículo tractor sobre el remolque de forma tangencial al remolque, ya que interesa que gire en el menor espacio posible.

CDG es el centro de giro del remolque.

$F_{x,DD}$ y $F_{z,DD}$ son respectivamente la fuerza perpendicular a la marcha y la fuerza en la dirección de la marcha actuando en la rueda delantera derecha del remolque.



$F_{x,TD}$ y $F_{z,TD}$ son respectivamente la fuerza perpendicular a la marcha y la fuerza en la dirección de la marcha actuando en la rueda trasera derecha del remolque.

$F_{x,DI}$ y $F_{z,DI}$ son respectivamente la fuerza perpendicular a la marcha y la fuerza en la dirección de la marcha actuando en la rueda delantera izquierda del remolque.

$F_{x,TI}$ y $F_{z,TI}$ son respectivamente la fuerza perpendicular a la marcha y la fuerza en la dirección de la marcha actuando en la rueda trasera izquierda del remolque.

Hay que darse cuenta de que:

$$F_{z,DD} = F_{z,DI} = F_{z,TD} = F_{z,TI} = F_z$$

$$F_{x,TI} = F_{x,TD} = F_{x,T}$$

$$F_{x,DI} = F_{x,DD} = F_{x,D}$$

Haciendo equilibrio de fuerzas y de momentos en el remolque:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{giro} - 2 \cdot F_{x,D} + 2 \cdot F_{x,T} = 0 \rightarrow F_{x,D} = \frac{F_{giro}}{2} + F_{x,T}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow F_{z,DI} + F_{z,TI} - F_{z,DD} - F_{z,TD} = 0$$

Por lo que $F_z = 0$ y, por tanto, no habrá fuerza en la dirección del sentido de la marcha (lo que tiene sentido, ya que no hay nada que impida que gire la rueda).

$$\begin{aligned} \sum M_{CDG} = 0 &\rightarrow F_{giro} \cdot \left(l + \frac{d}{2}\right) - F_{x,D} \cdot \frac{d}{2} - F_{x,T} \cdot \frac{d}{2} - F_{x,D} \cdot \frac{d}{2} - F_{x,T} \cdot \frac{d}{2} = 0 \\ &\rightarrow F_{giro} \cdot \left(l + \frac{d}{2}\right) - F_{x,D} \cdot d - F_{x,T} \cdot d = 0 \end{aligned}$$

Y sustituyendo $F_{x,D} = \frac{F_{giro}}{2} + F_{x,T}$

$$\begin{aligned} F_{giro} \cdot \left(l + \frac{d}{2}\right) - \left(\frac{F_{giro}}{2} + F_{x,T}\right) \cdot d - F_{x,T} \cdot d = 0 &\rightarrow -2 \cdot F_{x,T} \cdot d + F_{giro} \cdot \frac{l}{2} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow F_{x,T} = F_{giro} \cdot \frac{l}{2d} \end{aligned}$$

$$F_{x,D} = \frac{F_{giro}}{2} + F_{giro} \cdot \frac{l}{2d} = F_{giro} \cdot \frac{l+d}{2d}$$

Como se puede observar, habrá más fuerza en dirección axial en el eje delantero.

Ahora, se va a pasar a calcular las cargas verticales en cada eje, este cálculo es idéntico al realizado en el [Apartado 2.3.3.](#) con alguna pequeña diferencia.

Las fuerzas que actuarán en el remolque serán las siguientes:

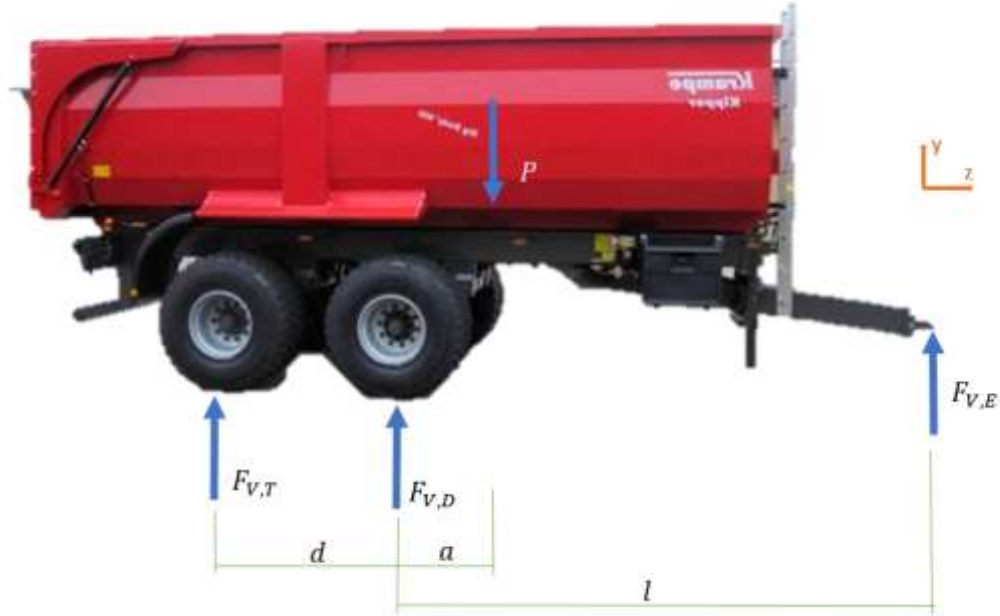


Ilustración 38. Fuerzas actuando sobre Remolque 2 Ejes Tándem Giro de Radio Mínimo

Donde:

P es la carga total del remolque.

$F_{V,T}$ es la fuerza vertical que actúa en el eje trasero.

$F_{V,D}$ es la fuerza vertical que actúa en el eje delantero.

$F_{V,E}$ es la fuerza vertical que actúa en el enganche.

Al igual que en el [Apartado 2.2.3.](#), estamos ante un problema hiperestático, ya que se tienen 3 incógnitas ($F_{V,DD}$, $F_{V,TD}$ y $F_{V,E}$) pero solamente se dispone de 2 ecuaciones ($\sum F_y = 0$ y $\sum M_E = 0$). Es por esto por lo que se va a hacer la misma suposición de tomar un punto central en el tándem para calcular cuánta carga recae sobre el tándem y posteriormente, esa carga vertical se distribuirá a un 55 % en el eje delantero y un 45 % en el eje trasero.

A continuación, se muestra la imagen de la simplificación:

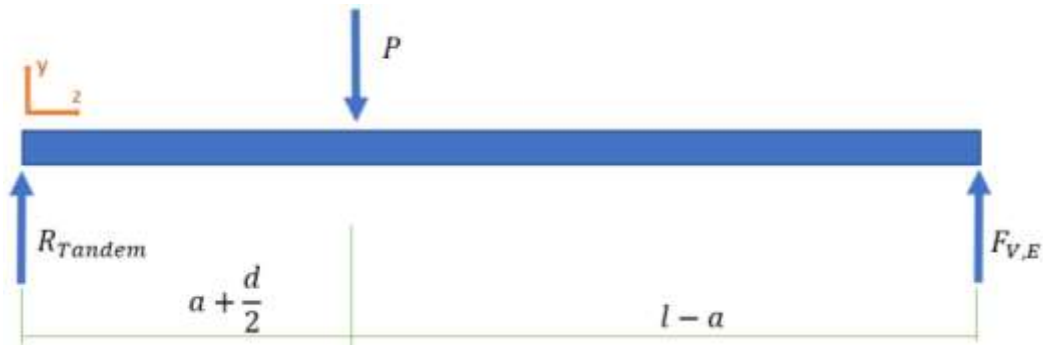


Ilustración 39. Simplificación Remolque Tándem Giro de Radio Mínimo

Donde:

R_{Tandem} es la reacción total en el tándem.

$$R_{Tandem} = F_{V,D} + F_{V,T}$$

Haciendo equilibrio de fuerzas y de momentos:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -P + R_{Tandem} + F_{V,E} = 0 \rightarrow F_{V,E} = P - R_{Tandem}$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow P \cdot (l - a) - R_{Tandem} \cdot \left(l + \frac{d}{2}\right) = 0 \rightarrow R_{Tandem} = \frac{P \cdot (l - a)}{l + \frac{d}{2}}$$

$$F_{V,D} = 0,55 \cdot R_{Tandem}$$

$$F_{V,T} = 0,45 \cdot R_{Tandem}$$

Y, por tanto:

$$F_{V,E} = P \cdot \frac{a + \frac{d}{2}}{l + \frac{d}{2}}$$

En este caso, el eje delantero siempre va a estar más cargado que el trasero, ya que el 55 % de la carga vertical en el tándem se la lleva el eje delantero.

Cabe destacar que va a haber restricciones en la fuerza normal al eje:

$$F_{x,D} \leq \frac{F_{V,D}}{2} \cdot \mu$$

$$F_{x,T} \leq \frac{F_{V,T}}{2} \cdot \mu$$

2.4.2. Cálculo Tensiones y Coeficiente de Seguridad en el Eje Más Solicitado

Una vez calculadas las fuerzas que se deben ejercer en cada eje del remolque, se deben calcular las tensiones en el eje delantero, ya que es el más solicitado. En la imagen siguiente se pueden observar las fuerzas que se ejercen a lo largo del eje. Como se puede observar en la imagen siguiente, en este caso van a haber tanto fuerzas horizontales paralelas al eje (también llamadas axiales), como fuerzas perpendiculares al eje en dirección vertical y también momentos flectores producidos por la distancia entre las fuerzas axiales que se producen en el suelo y el centro del eje.

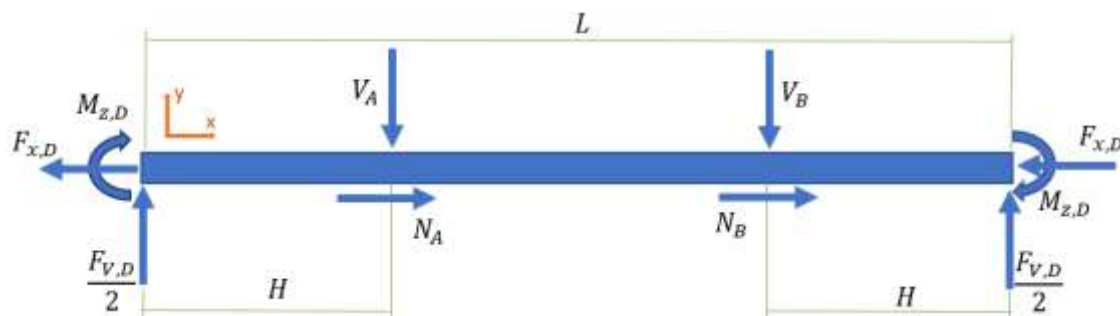


Ilustración 40. Eje Caso Giro de Radio Mínimo

Donde:

$F_{V,D}$ es la fuerza vertical que actúa en el eje delantero (se divide entre 2 para dividirlo a partes iguales en ambos lados).

$F_{x,D}$ es la fuerza horizontal que actúa en cada rueda. $F_{x,D} = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot \mu$

Se iguala a la fuerza vertical en la rueda por el coeficiente de rozamiento, ya que es la mayor fuerza horizontal a la que puede estar solicitada, y es lo que interesa para tener los mayores esfuerzos axiales y momentos flectores. En la Hoja Excel se implementará que se haga la selección según cuál sea el valor mínimo de los 2 posibles, ya que no puede ocurrir que la fuerza de rozamiento sea superior a la fuerza de giro.

$M_{z,D}$ es el momento flector que produce la fuerza horizontal en los extremos del eje.

$$M_{z,D} = F_{x,D} \cdot R$$

Siendo R el radio exterior del neumático.

V_A es la fuerza vertical que ejerce la ballesta derecha.

V_B es la fuerza vertical que ejerce la ballesta izquierda.

N_A es la fuerza normal al eje que ejerce la ballesta derecha.

N_B es la fuerza normal al eje que ejerce la ballesta izquierda.

Va a haber un problema hiperestático de grado 1, ya que se tienen 4 incógnitas (V_A, V_B, H_A y H_B) pero solamente se dispone de 3 ecuaciones ($\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ y $\sum M_A = 0$). Se va a solucionar de una manera bastante lógica y esta no es otra que igualar $N_A = N_B = F_{x,D}$, ya que entre las ballestas no puede haber carga normal al eje. Hay que tener cuidado de que N_A tenga sentido contrario al $F_{x,D}$ del lado derecho del eje y N_B al $F_{x,D}$ del lado izquierdo del eje (recordar que el eje se está viendo de frente y, por tanto, los lados cambian) para que así se cumpla $\sum F_x = 0$.

Usando entonces las otras 2 ecuaciones:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{F_{V,D}}{2} + \frac{F_{V,D}}{2} - V_A - V_B = 0 \rightarrow V_A = F_{V,D} - V_B$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -M_{z,D} + \frac{F_{V,D}}{2} \cdot (L - H) - V_B \cdot (L - 2H) - M_{z,D} - \frac{F_{V,D}}{2} \cdot H = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow V_B = \frac{-2 \cdot M_{z,D} + \frac{F_{V,D}}{2} \cdot (L - 2H)}{L - 2H} = \frac{F_{V,D}}{2} - \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} = \frac{F_{V,D}}{2} - \frac{F_{V,D} \cdot \mu \cdot R}{L - 2H}$$

$$V_A = F_{V,D} - \left(\frac{F_{V,D}}{2} - \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} \right) \rightarrow V_A = \frac{F_{V,D}}{2} + \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} = \frac{F_{V,D}}{2} + \frac{F_{V,D} \cdot \mu \cdot R}{L - 2H}$$

Y a continuación, se muestran las reacciones finales en el eje.

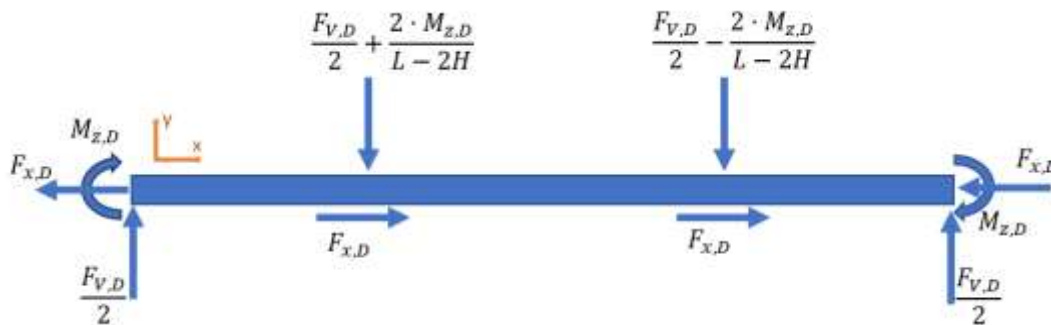


Ilustración 41. Reacciones Eje Giro de Radio Mínimo

Y a partir de las reacciones obtenidas, se realiza el cálculo de cuáles serán el esfuerzo cortante, el esfuerzo axial y el momento flector en cada punto del eje.

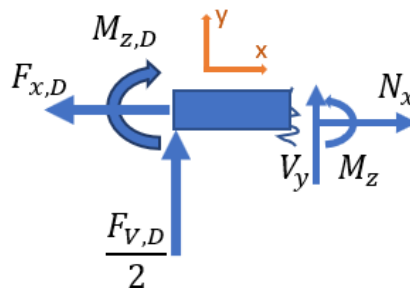


Ilustración 42. Cortante, Axil y Flector Caso Giro de Radio Mínimo entre Rueda Derecha y Ballesta Derecha

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F_{x,D} + N_x = 0 \rightarrow N_x(0 \leq x \leq H) = F_{x,D}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{F_{V,D}}{2} + V_y = 0 \rightarrow V_y(0 \leq x \leq H) = -\frac{F_{V,D}}{2}$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow -\frac{F_{V,D}}{2} \cdot x - M_{z,D} + M_z = 0 \rightarrow M_z(0 \leq x \leq H) = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot x + M_{z,D}$$

$$M_z(x=0) = M_{z,D} = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot \mu \cdot R$$

$$M_z(x=H) = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot H + M_{z,D} = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot (H + \mu \cdot R)$$

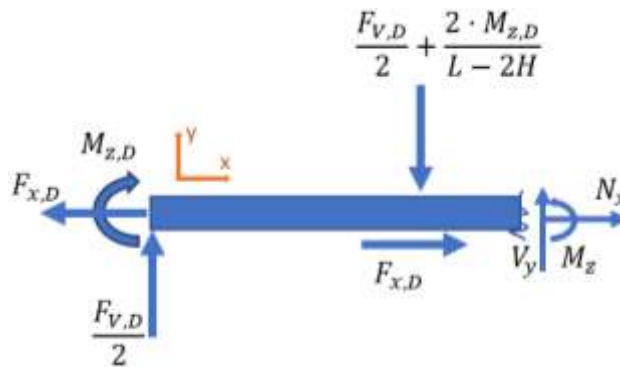


Ilustración 43. Cortante, Axil y Flector Caso Giro de Radio Mínimo entre Ballesta Derecha y Ballesta Izquierda

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F_{x,D} + F_{x,D} + N_x = 0 \rightarrow N_x(0 \leq x \leq H) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{F_{V,D}}{2} - \frac{F_{V,D}}{2} - \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} + V_y = 0 \rightarrow V_y(0 \leq x \leq H) = \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} = \frac{F_{V,D} \cdot \mu \cdot R}{L - 2H}$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow -\frac{F_{V,D}}{2} \cdot x - M_{z,D} + \left(\frac{F_{V,D}}{2} + \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H}\right) \cdot (x - H) + M_z = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_z(H \leq x \leq L - H) = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot H + M_{z,D} - \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} \cdot (x - H)$$

$$M_z(x=H) = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot H + M_{z,D} = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot (H + \mu \cdot R)$$

$$M_z(x=L-H) = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot H + M_{z,D} - \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} \cdot [(L-H) - H] =$$

$$= \frac{F_{V,D}}{2} \cdot H + M_{z,D} - \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} \cdot (L - 2H) = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot H - M_{z,D} = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot (H - \mu \cdot R)$$

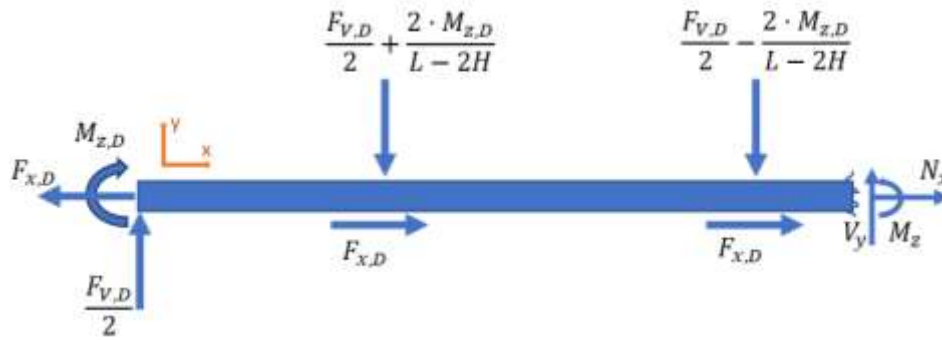


Ilustración 44. Cortante, Axil y Flector Caso Giro de Radio Mínimo entre Ballesta Izquierda y Rueda Izquierda

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -F_{x,D} + F_{x,D} + F_{x,D} + N_x = 0 \rightarrow N_x(0 \leq x \leq H) = -F_{x,D}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{F_{V,D}}{2} - \left(\frac{F_{V,D}}{2} + \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} \right) - \left(\frac{F_{V,D}}{2} - \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} \right) + V_y = 0 \rightarrow V_y(0 \leq x \leq H) = \frac{F_{V,D}}{2}$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow -\frac{F_{V,D}}{2} \cdot x - M_{z,D} + \left(\frac{F_{V,D}}{2} + \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} \right) \cdot (x - H) + \left(\frac{F_{V,D}}{2} - \frac{2 \cdot M_{z,D}}{L - 2H} \right) \cdot [x - (L - H)] + M_z = 0 \rightarrow$$

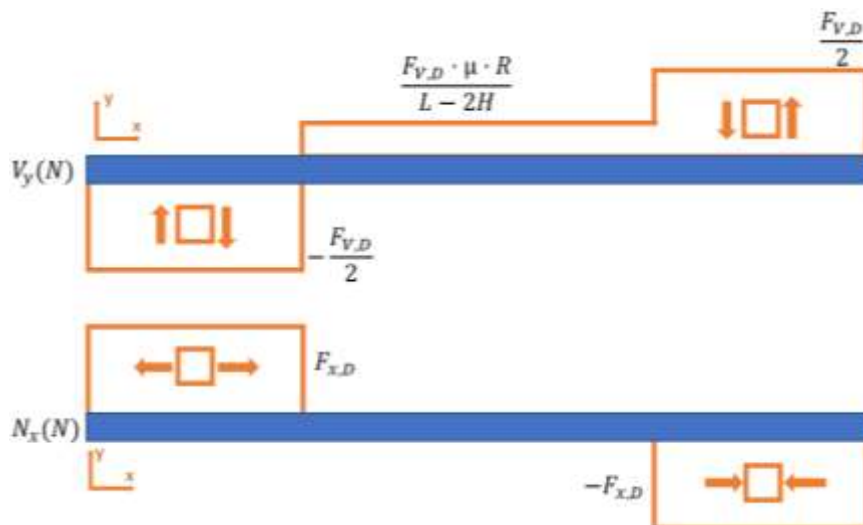
$$\rightarrow M_z(L - H \leq x \leq L) = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot (L - x) - M_{z,D}$$

$$M_z(x = L - H) = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot [L - (L - H)] - M_{z,D} =$$

$$= \frac{F_{V,D}}{2} \cdot H - M_{z,D} = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot (H - \mu \cdot R)$$

$$M_z(x = L) = -M_{z,D} = -\frac{F_{V,D}}{2} \cdot \mu \cdot R$$

Y a continuación se muestran los diagramas de Cortante, Axil y Flector que se producen en el eje.



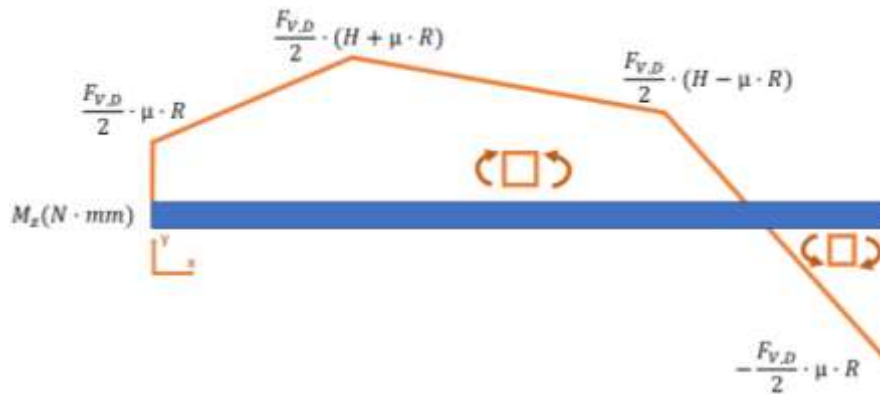


Ilustración 45. Cortante, Axil y Flector Caso Giro de Radio Mínimo

En este caso, el punto más desfavorable será el apoyo de la ballesta derecha (apoyo izquierdo de los diagramas) en su lado derecho (el lado exterior), ya que es donde mayor momento flector hay.

En este caso, hay que tener en cuenta el esfuerzo axial, por el hecho de que va a producir una tensión normal que se va a sumar a la tensión normal producida por la flexión, aumentando así la tensión equivalente del eje (como en los casos anteriores, la tensión tangencial que produce el esfuerzo vertical se va a despreciar, puesto que el punto de cálculo en la sección va a ser en los extremos y la tensión tangencial en dichos puntos va a ser 0).

Con el momento flector M_z y el esfuerzo axial N_x , se calcula cuál es la tensión equivalente que soporta el eje en su punto más crítico.

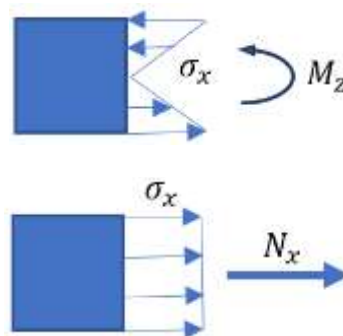


Ilustración 46. Tensión Normal debida a Momento Flector y al Esfuerzo Axial Caso Radio Mínimo

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{N_x}{A}$$

Siendo M_z el momento flector, I_z el momento de inercia de la sección, y la distancia desde el centro de la sección al punto más alejado verticalmente (que en nuestro caso será la mitad de la altura de la sección del eje) y A el área de la sección. Como se puede observar en la Ilustración 46, la mayor tensión normal se producirá en la parte inferior de la sección, ya que es donde ambas tensiones normales son de tracción, en la parte superior se restarían y entonces no sería la mayor tensión.

Sabiendo que la sección del eje es la mostrada en la Ilustración siguiente, se calcula cuál será la tensión normal máxima de la sección.

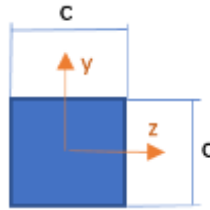


Ilustración 47. Sección Eje Caso Radio Mínimo

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot c \cdot c^3 = \frac{c^4}{12}$$

$$y_{max} = \frac{c}{2}$$

$$A = c \cdot c = c^2$$

Por lo que, sustituyendo,

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_z}{\frac{c^4}{12}} \cdot \frac{c}{2} + \frac{N_x}{c^2} = \frac{6 \cdot M_z}{c^3} + \frac{N_x}{c^2}$$

Lo cual si suponemos $M_z = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot (H + \mu \cdot R)$ y $N_x = F_{x,D} = \frac{F_{V,D}}{2} \cdot \mu$ queda

$$\sigma_{x,max} = \frac{6 \cdot \frac{F_{V,D}}{2} \cdot (H + \mu \cdot R)}{c^3} + \frac{\frac{F_{V,D}}{2} \cdot \mu}{c^2} = \frac{F_{V,D}}{2 \cdot c^2} \cdot \left(\frac{6 \cdot (H + \mu \cdot R)}{c} + \mu \right)$$

Si además usamos la Teoría de Von Mises la cual dice que $\sigma_{eqv} = \sqrt{3 \cdot \tau_{xy}^2 + \sigma_x^2}$ nos queda

que $\sigma_{eqv} = \sigma_x = \sigma_{x,max}$. Por otra parte, se define el Coeficiente de Seguridad como $CS = \frac{\sigma_F}{\sigma_{eqv}}$

siendo σ_F el límite elástico del material. Por lo que nos queda que

$$CS = \frac{\sigma_F}{\sigma_{x,max}}$$

Interesa que este coeficiente sea de por lo menos 1,5 para aguantar con seguridad.

CAPÍTULO 3. Cálculos Numéricos

Una vez realizados los cálculos para el análisis analítico del eje en los diferentes casos que se han estudiado, se va a pasar a realizar un estudio numérico del eje para así poder corroborar la veracidad de las ecuaciones formuladas. Estos cálculos analíticos se van a efectuar mediante el modelado del eje en el programa informático ABAQUS y, aplicando sobre este las fuerzas y momentos en los extremos del eje, comprobar si la posición de las mayores sollicitaciones y la tensión máxima son los calculados en el [CAPÍTULO 2](#).

3.1. Modelado del Eje

En primer lugar, se debe fabricar el eje, para lo cual se crea una “Part” dentro del modelo y se selecciona como se va a querer fabricar la parte en la pestaña que aparece. Se elige dibujar el eje mediante un modelado en 3D, siendo una pieza deformable, la forma será sólida y el tipo de operación para su fabricación va a ser una extrusión (ya que se va a dibujar la sección y posteriormente, se extruirá la longitud del eje). Tal y como se muestra en la imagen siguiente.

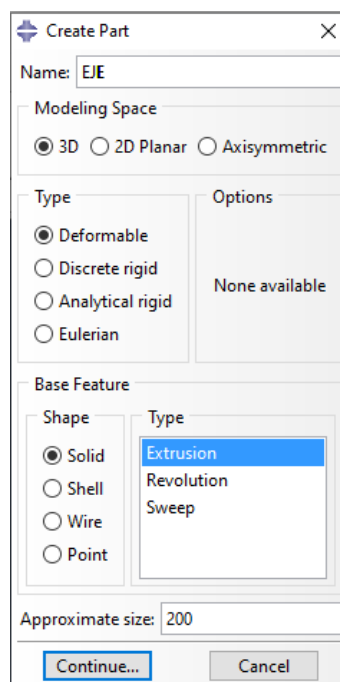


Ilustración 48. Creación del Eje

Una vez generada la parte, se dibuja la sección del eje para su posterior extrusión (todas las medidas que aparecen en el [CAPÍTULO 3](#). Cálculos Numéricos son orientativas, ya que en cada

caso de estudio puede cambiar el tamaño del eje y habrá que modificar las dimensiones para cada caso).

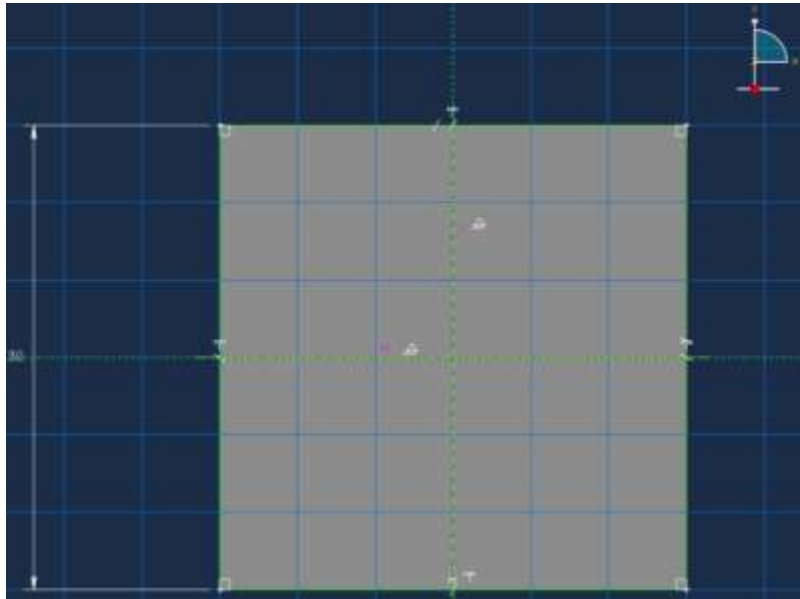


Ilustración 49. Sección del Eje Dibujado

Una vez se tiene la sección del eje, se debe extruir la longitud total del eje. Esto se realiza automáticamente al terminar de dibujar la sección, pues se ha elegido anteriormente que se realice un proceso de extrusión, como bien se observa en la Ilustración 48. Creación del Eje, teniéndose que completar únicamente la distancia que se quiere extruir.

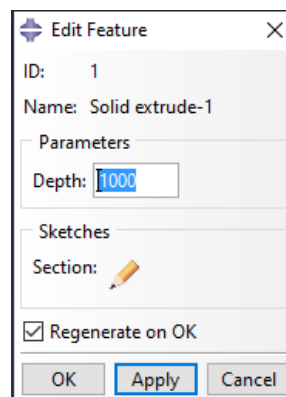


Ilustración 50. Proceso de Extrusión

Una vez extruido el eje, se deben modelar los apoyos que van a hacer la función de las ballestas, estos apoyos se fabrican mediante el mismo proceso llevado a cabo para el eje. Serán igual de largos que el ancho del eje, tendrán un espesor mínimo (ya que no interesa que interfieran en el cálculo de esfuerzos del eje) y, además, se les dará una anchura también lo más pequeña posible, porque en los cálculos analíticos se ha considerado que es un apoyo puntual (lo cual, comparando la anchura de las ballestas habitual con la longitud del eje habitual, es una simplificación del apoyo que no produce mucha diferencia con la realidad).

3.2. Material

Una vez se tienen las diferentes partes que forman el eje, se les debe asignar un material, lo cual se realiza primero creando el material (el cual, se va a considerar que es el mismo para el eje y los apoyos), creando posteriormente una sección y asignando la sección a las 3 partes.

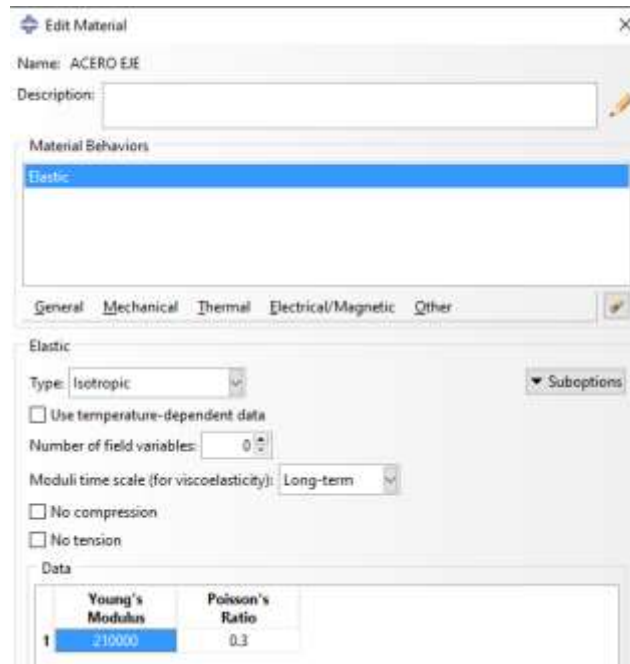


Ilustración 51. Propiedades Material

Se ha escogido para el eje un acero el cual tiene un Módulo de Young de 210 GPa (aunque en ABAQUS por las unidades escogidas hay que introducirlo en MPa) y un Coeficiente de Poisson de 0.3. La densidad no se ha definido, ya que no se va a tener en cuenta el peso propio del eje por ser despreciable la carga que produce la gravedad comparada con la carga que produce el remolque.

Una vez se tiene el material definido, hay que definir la sección, para posteriormente, asignársela a las partes. El eje es sólido y, además, el material es homogéneo, ya que no tiene anisotropía.

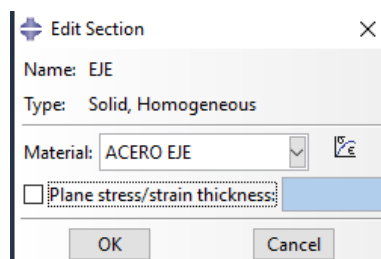


Ilustración 52. Creación Sección

Y, como ya se ha mencionado, solo faltaría asignar a las 3 piezas la sección. Esto se realiza haciendo doble clic en el árbol en “Section Assignments” para cada parte y, tras darle a “Done” habiendo seleccionado toda la pieza, se le asigna la sección “EJE”.

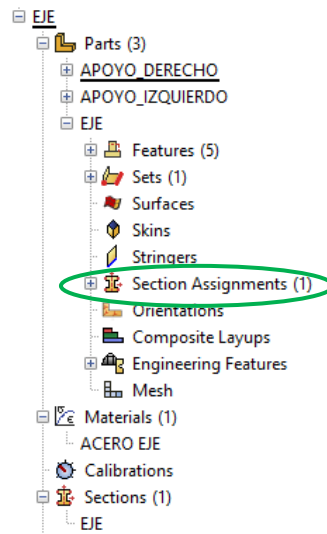


Ilustración 53. Árbol de ABAQUS

Con anterioridad a la asignación de sección, se han dividido los apoyos en 4 partes iguales para facilitar el poder situarlos mejor en su lugar correcto. Si se hiciera tras la asignación, se podría borrar alguna asignación y habría que volver a asignar. Pasa igual con la malla, al dividir la pieza se borra la malla y hay que volver a generarla (no es mayor problema, pero si se divide la pieza con anterioridad se evita tener que repetir pasos). Esta división se ha llevado a cabo creando unos planos que pasen por la mitad de la sección vertical y transversalmente y que crucen toda la pieza. En la imagen siguiente se puede observar cómo quedan las partes una vez particionadas.

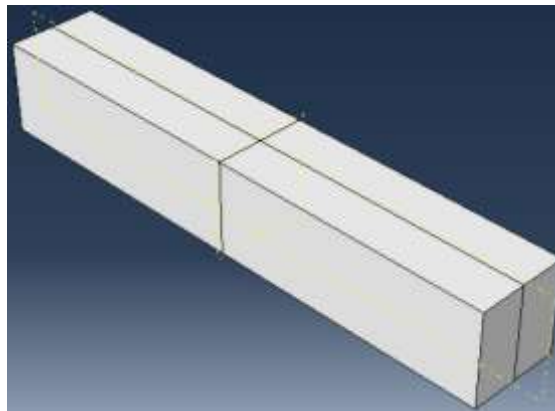


Ilustración 54. Partición de Piezas

3.3. Mallado

Para mallar las piezas, en primer lugar, hay que generar un ensamblaje de todas las piezas mediante la creación de “Instances” de las 3 partes del eje, y decidir que serán dependientes para así poder mallarlas por separado, ya que nos interesa que el mallado del eje sea más pequeño que el de los apoyos para tener mayor precisión en los resultados.

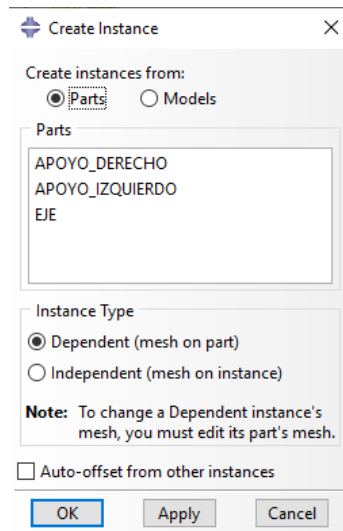
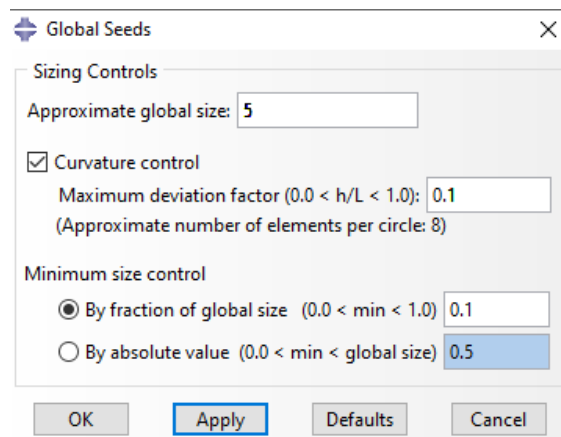


Ilustración 55. Creación de Instances

Una vez tenemos ya originadas las “Instances”, es momento de mallar las partes por separado.

Para el eje, se va a escogido un tamaño de malla de 5 mm, con un control de malla de elementos con forma hexaédrica y con una técnica estructurada para tener mayor precisión. Los elementos van a ser lineales y no se va a aplicar integración reducida porque quita precisión (aunque ahorra recursos).



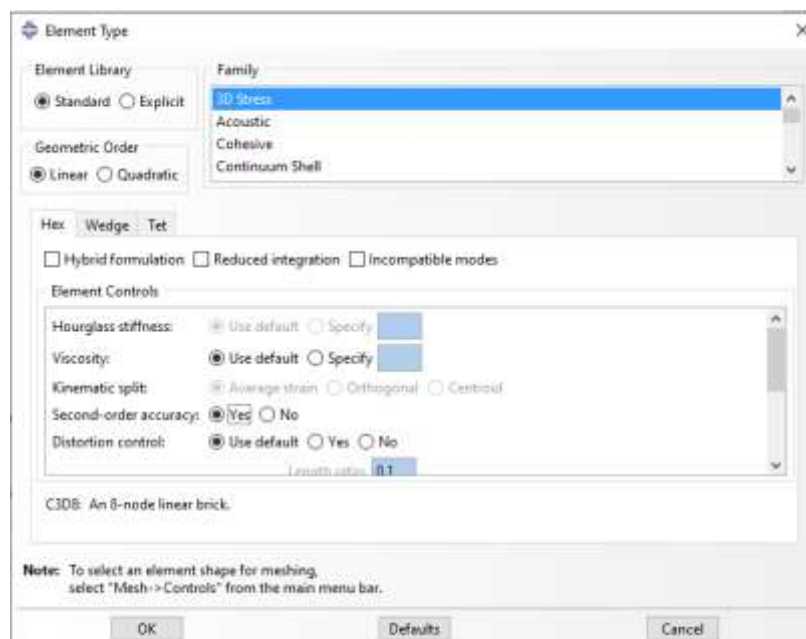
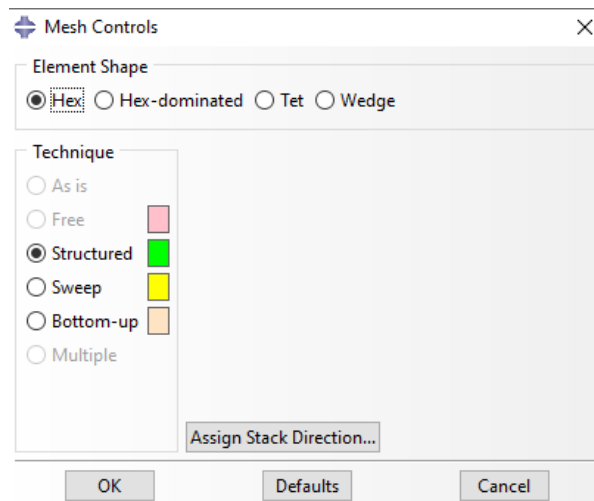


Ilustración 56. Selección de Malla del Eje

Para los apoyos, se sigue el mismo procedimiento. Pero, en este caso, el tamaño de malla es de 10 mm, ya que no se necesita gran precisión.

En la siguiente imagen, se puede observar cómo queda finalmente el mallado de las 3 piezas.

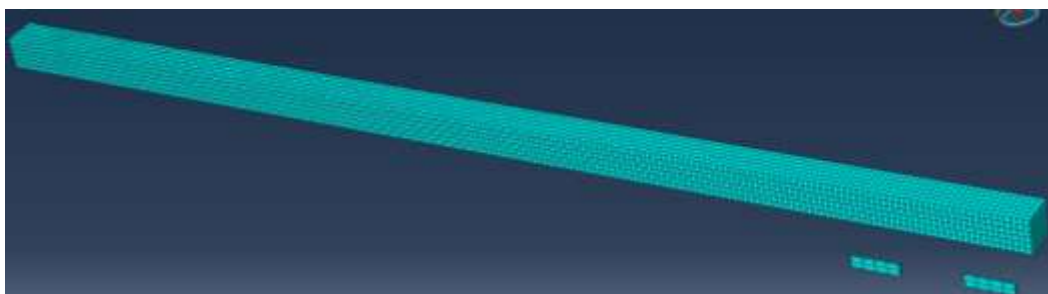


Ilustración 57. Mallado de las Piezas

3.4. Posicionamiento de las Ballestas

Para realizar el posicionamiento de los apoyos, hay que tener en cuenta a que distancia del extremo del eje se encuentran. Conociendo este dato, se puede usar un truco que, aunque parezca inadecuado, es muy útil para posicionar los apoyos fácilmente. Este truco no es otro que el de dividir el eje perpendicularmente por donde esté colocado el apoyo, para posteriormente, poder indicarle al apoyo que debe estar situado en ese lugar. Al hacer un nuevo corte, como ya se ha explicado, se borrará la malla, pero regenerarla es fácil y rápido. En la imagen siguiente, se pueden observar en amarillo los planos de corte que se han hecho para un ejemplo, estando las ballestas a 300 mm de los extremos (habrá que borrar los planos de corte, hacer otros planos de corte nuevos para cada distancia y volver a posicionar los apoyos).

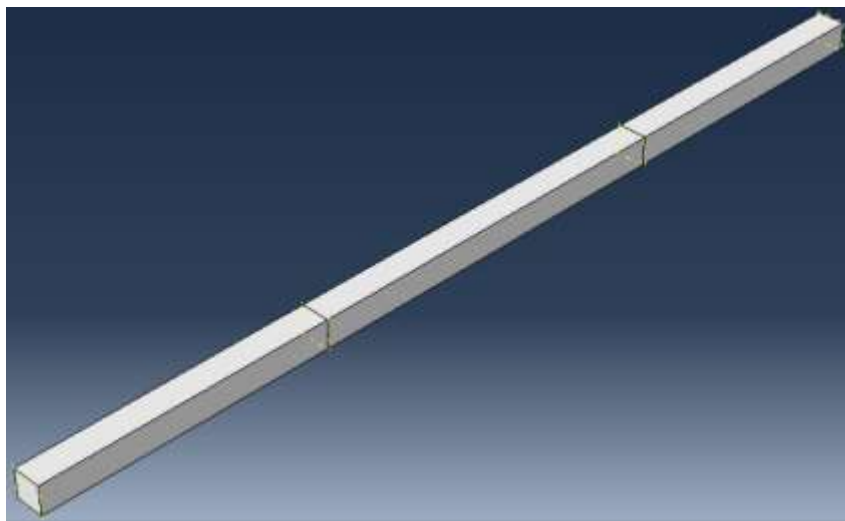


Ilustración 58. Planos de Corte Posición Ballestas

Una vez se tienen los cortes hechos, se mueven los apoyos de tal manera que los centros de estos coincidan con el corte. Así queda el eje tras el posicionamiento:

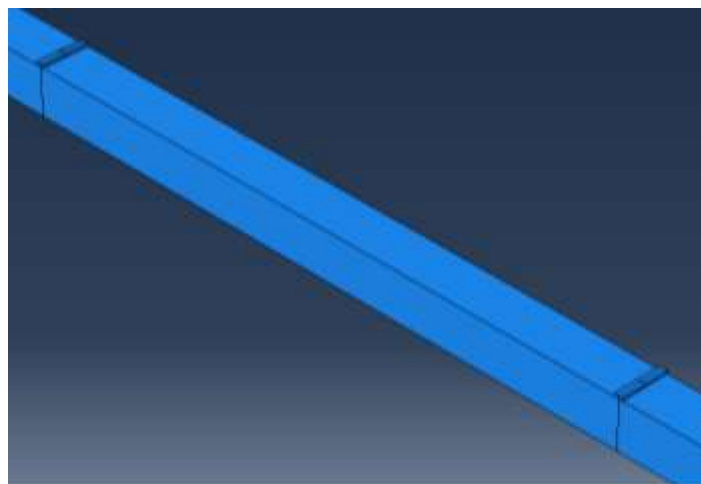


Ilustración 59. Posición Ballestas

Por último, hay que imponer que entre las ballestas y el eje no haya ningún tipo de movimiento, y esto se realiza mediante una restricción. En el árbol, se hace doble clic en “Constrains” y se elige que sea de tipo “TIE” (que es el que impone que no haya ni giros ni movimientos entre las superficies que se seleccionen). Una vez seleccionado el tipo, se debe elegir si se quiere que la restricción sea entre superficies o entre nodos, y se elige entre superficies. Posteriormente, se pide que se seleccione la superficie maestra (que será la que impondrá a la otra superficie sus movimientos para que no exista desplazamientos relativos), que en nuestro caso va a ser la superficie inferior de los apoyos, ya que el eje no se va a poder mover respecto de las ballestas. Y, por último, se selecciona la superficie esclava que va a ser la superficie superior del eje. En la siguiente imagen, en morado se ve la superficie esclava y en rojo se debería ver la superficie roja, pero al ser la parte inferior del apoyo no está visible.

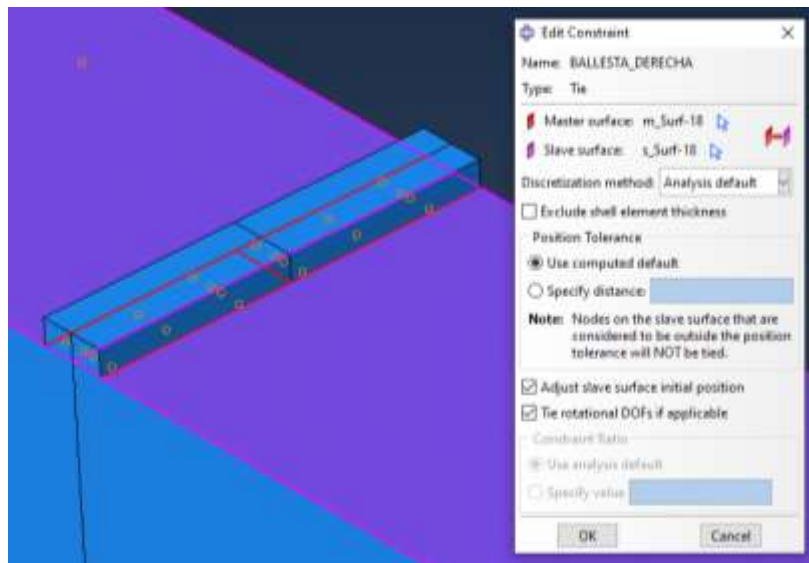


Ilustración 60. Restricciones entre Superficies

3.5. Condiciones de Contorno, Fuerzas y Momentos

Lo último que se debe realizar antes de inicializar el cálculo es imponer las condiciones de contorno y las fuerzas y momentos en los extremos, para lo cual, en primer lugar, hay que crear un “STEP” para poder imponer en él las cargas, y en el STEP que ya viene creado por defecto (step Initial) será donde se impongan las condiciones de contorno. Haciendo doble clic en el árbol en “Steps”, se abre una ventana en la que se debe poner nombre al nuevo step que se está originando, se debe elegir detrás de que step se quiere que actúe (en nuestro caso solamente hay uno que es el initial) y de qué tipo se quiere que sea (se debe elegir “Static, General”). Posteriormente, se abrirá otra pestaña en la que se deja todo por defecto y se le da a “OK”.

Una vez generado el step “CARGA”, se imponen las condiciones de contorno iniciales, las cuales van a ser una limitación de movimientos y giros en la parte superior de los apoyos (la parte que no está tocando con el eje), para que se mantengan los apoyos estáticos. Esto se realiza haciendo doble clic en “BCs”. Una vez se nos abre la pestaña, se le debe dar un nombre a la condición de contorno, se elige que se efectúe en el step Initial y posteriormente, se decide que sea de la

categoría mecánica y del tipo de desplazamiento/rotación. A continuación, se debe seleccionar la superficie en la que se quiere que actúe, que como ya se ha dicho es la parte superior de los apoyos (para una mejor claridad se decide hacer una condición de contorno para cada uno de los apoyos, pero se podría hacer con uno solo). Una vez seleccionada la superficie, se elige qué desplazamientos y rotaciones se quieren restringir, y en nuestro caso, se restringen todos los desplazamientos y giros excepto el giro en torno al eje Z (UR3), ya que este giro las ballestas no lo restringen y en el cálculo analítico tampoco se ha considerado.

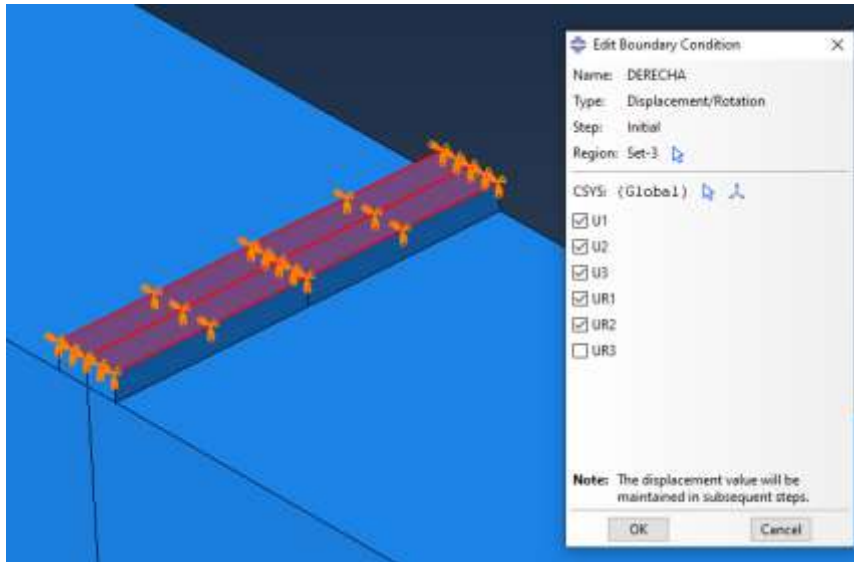


Ilustración 61. Condiciones de Contorno Apoyo

Antes de imponer las fuerzas en los extremos del eje, hay que crear una restricción de acoplamiento de todos los desplazamientos y giros de las caras de los extremos a un punto central de referencia que se coloca usando el desplegable de las herramientas. Sigue el mismo proceso que la restricción de movimiento (ahora el tipo de restricción es el “coupling”), poniendo como maestro el punto (control point) y como esclava la superficie, y eligiendo posteriormente los grados de libertad de la superficie que se quieren acoplar al punto (que en nuestro caso serán todos). En la imagen siguiente se muestra cómo queda:

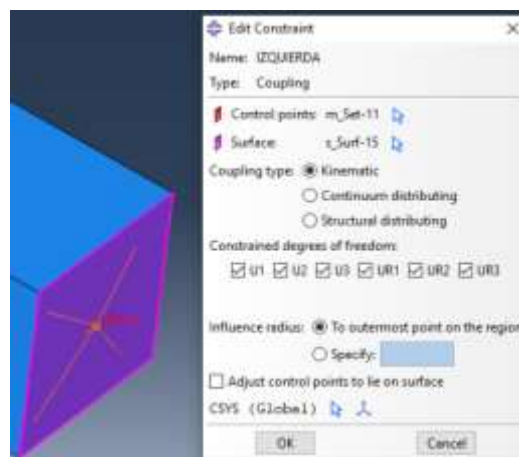


Ilustración 62. Acoplamiento de Grados de Libertad

Para imponer las fuerzas y momentos en los extremos del eje, se emplea la herramienta de “Loads” en el árbol. Una vez se hace doble clic y se abre la pestaña, se decide que la categoría de nuestras cargas es mecánica. Y ahora hay 2 caminos, para ejercer las fuerzas se debe seleccionar el tipo “Concentrated force” y para ejercer los momentos se debe seleccionar “Moment”. En ambos casos al darle a continuar se pedirá que se seleccione el punto en el que se quiere que actúe y se debe elegir el punto de referencia en el centro de los extremos del eje. Y posteriormente, se imponen las fuerzas o momentos según el caso (hay que tener cuidado con el signo fijándonos en el sentido de los ejes). En las imágenes siguientes, se puede observar un ejemplo en el que se ejerce una fuerza de 50 N en dirección Y y un momento de $10\text{ N} \cdot \text{mm}$ en dirección Z .

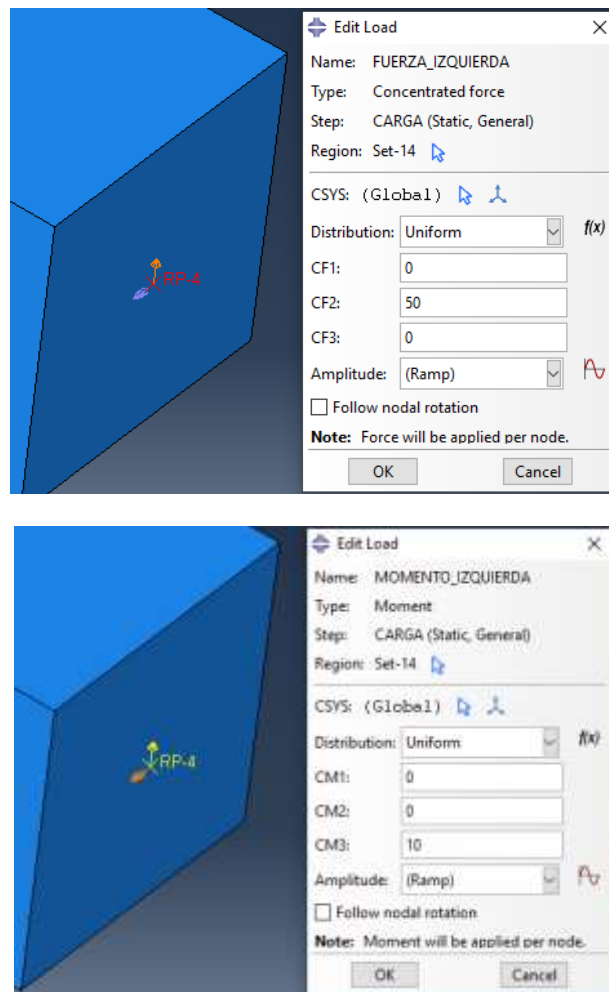


Ilustración 63. Fuerzas y Momentos Ejercidos en los Extremos del Eje


3.6. Inicialización del Cálculo

Por último, se inicializa el cálculo creando un trabajo presionando en “job”, dándole un nombre, dándole a “Continue” y dejando todo por defecto se presiona “Ok”.

Ya solo faltaría iniciar el cálculo presionando clic derecho en el job originado, presionando a “Submit” y el programa ya calculará (si no calcula, habrá que mirar qué fallos se han cometido entrando en “Monitor...” y leyendo los errores que se producen).

En este caso, la primera vez que se ejecutó, hubo un problema de condiciones de contorno en los extremos, y era porque en vez de estarse aplicando el momento flector en la cara, como ocurre con el acoplamiento antes explicado, se estaba aplicando en un solo nodo y, por tanto, daba error.

3.7. Análisis de Resultados

Una vez el cálculo ha finalizado, se da clic derecho en el job y se presiona “Results”. Se mostrarán los resultados producidos en el eje, y en nuestro caso, lo que nos interesará saber son las tensiones máximas equivalentes según Von Mises, que se consigue presionando en el siguiente botón: 

Se puede observar en la imagen siguiente, que se nos están mostrando las tensiones equivalentes de Von Mises y las tensiones máximas que se producen, las cuales están situadas en los apoyos al estar tan restringido su movimiento.

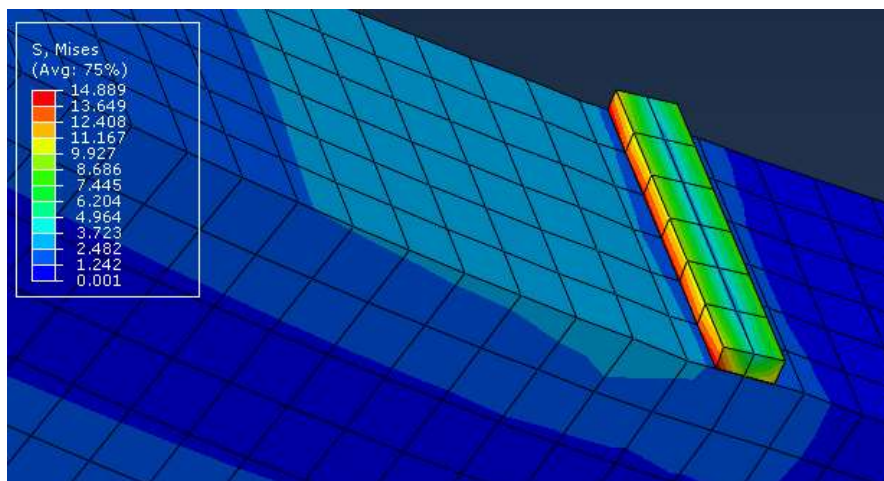


Ilustración 64. Tensión Equivalente Eje con Apoyos

Pero a nosotros nos interesan los resultados en el eje, por lo que mediante la herramienta de selección de elementos sueltos, se selecciona que solo se muestre el eje para así conocer las tensiones en el eje con mayor precisión.

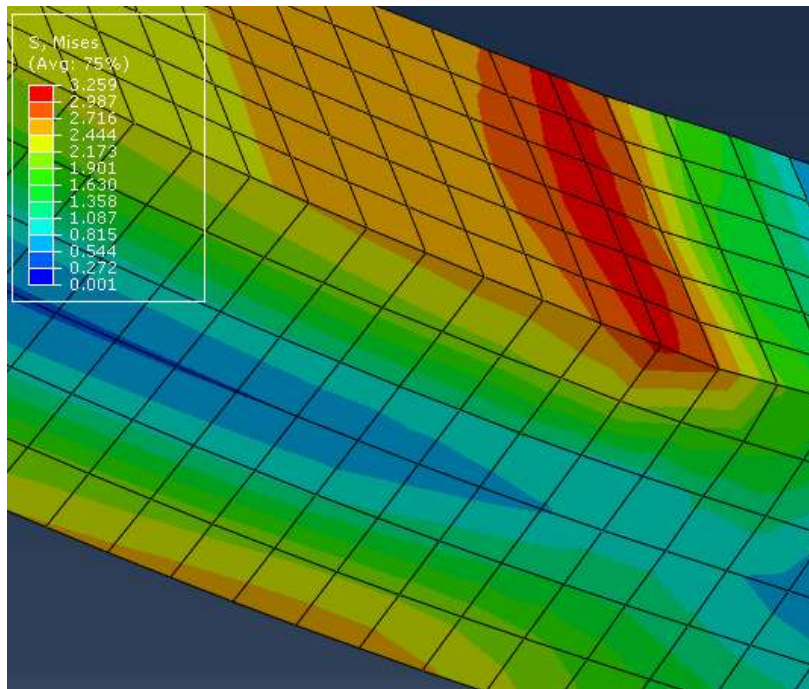


Ilustración 65. Tensión Equivalente Eje sin Apoyos

Como se puede observar, las tensiones máximas ahora se producen en la zona del eje en contacto con los apoyos, como era de esperar según los cálculos hechos en el [Capítulo 2](#). En el [Capítulo 4](#), se hará una comparación de cómo de acertados son ambos cálculos entre ellos y como de fiable es el trabajo realizado para poder usarse en el dimensionamiento y construcción tanto de remolques de 1 y 2 ejes, como de ejes de cualquier medida (en principio de sección cuadrada, pero si se modifican las ecuaciones con el Momento de Inercia de otro tipo de sección y el Área de dicha sección se podría hacer esa sección).

CAPÍTULO 4. Comparación Cálculo Analítico y Numérico

En este apartado, se va a comprobar como de correctos son entre ellos los 2 tipos de cálculos analizados en este trabajo.

La mejor manera de analizarlos es haciendo el estudio de un caso conocido, y para ello se va a calcular un remolque de 1 eje frenando a través de la Hoja de Excel y con las fuerzas en los extremos que la tabla calculará, sacaremos la tensión máxima equivalente y ejerciendo esas mismas fuerzas en el modelo de ABAQUS se revisará dónde y cuáles son esas tensiones y se verificará la veracidad de los cálculos. Se va a usar un eje del catálogo de FERRUZ por no inventarnos uno.

Datos:

masa: 5000 kg, deceleración: $0,2 \text{ m/s}^2$; coeficiente de rozamiento: 0,15; longitud eje: 1,2 m; lado eje: 50 mm; distancia ballestas a extremo eje: 0,25 m; longitud d del remolque: 1 m; longitud l del remolque: 6 m; altura h remolque: 3,5 m; altura h_E remolque: 0,5 m.

Según el cálculo analítico, sale una fuerza vertical en la rueda de 19938,27 N y una fuerza horizontal de 500 N. Estas fuerzas dan una tensión equivalente de 245,26 MPa.

Deceleración	0,2	m/s ²
Masa	5000	kg
Rozamiento	0,15	

Fi	1000	N
P	49050	N

REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vy)	19938,27	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vz)	500,00	N
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (Mz)	4984567,90	N*mm
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (My)	125000,00	N*mm

ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	2500	mm ²
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm ³
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm

Límite elástico material	355	MPa
--------------------------	-----	-----

FV,R	39876,54	N
FH,R	1000,00	N
FV,E	9173,46	N
FH,E	0,00	N

FV,rueda	19938,27	N
FH,rueda	500,00	N

TANGENCIAL	0,00	MPa
NORMAL	245,26	MPa

σ_{eq}	245,26	MPa
---------------	--------	-----

Ilustración 66. Cálculo Analítico Caso Comparación Cálculo Analítico y Numérico

El modelo numérico da una tensión equivalente máxima de 420,13 MPa estando el máximo en la esquina superior de la sección (como se había mencionado en el [Apartado 2.2.1.](#)). La discrepancia en los valores máximos es debida a que, se produce una concentración de tensiones en el eje en la zona del apoyo. Pero, como se puede observar en la imagen siguiente, en la zona pintada de verde que está alrededor de la zona de la concentración de tensiones,

existen valores de unos 247,87 MPa, lo cual está muy próximo a los resultados del cálculo analítico.

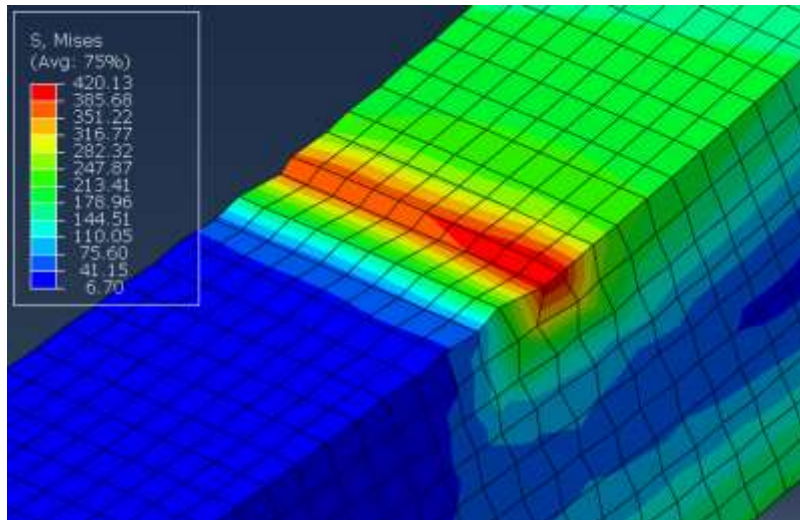


Ilustración 67. Tensión Equivalente ABAQUS Caso Comparación Cálculo Analítico y Numérico

A la vista de los resultados obtenidos, se puede decir que la precisión entre los 2 tipos de cálculo es muy alta (el error es menor a un 1%). En el cálculo analítico, no se puede modelar el fenómeno de la concentración de tensiones en la zona de contacto entre apoyo y eje, pero fuera de esa zona, como ya se ha dicho, la precisión es muy elevada.

CONCLUSIONES

Tras haber hecho tanto el Cálculo Analítico como el Cálculo Numérico, se llega a la conclusión, por lo visto en el [Capítulo 4](#), de que el análisis analítico y numérico funcionan correctamente (salvo fenómenos de concentración de tensiones), aunque son 2 formas diferentes: una calcula solo las tensiones en el punto más desfavorable (cálculo analítico) y la otra te muestra un mapa de colores las tensiones equivalentes en todo el eje (cálculo numérico); una solamente nos calcula tensiones en el eje a partir de imponerle unas fuerzas y momentos (cálculo numérico) y la otra a partir de un tipo de remolque con unas dimensiones y unas cargas nos calcula las reacciones de dicho remolque y las fuerzas y momentos en cada lado del eje y posteriormente, calcula las tensiones.

La parte analítica realizada al principio de informe es la base para, posteriormente, construir unas Hojas Excel de gran utilidad, ya que son una herramienta que simplifica el proceso de análisis a hora de fabricar remolques y ejes, ahorrando el tener que hacer operaciones matemáticas repetitivas para cada remolque o eje. Estas Hojas Excel se muestran y se prueban en los Anexos [I](#), [II](#) y [III](#), comprobándose su correcto funcionamiento en todos los casos.

Este trabajo, en conclusión, es una buena herramienta para que los constructores de remolques de 1 y 2 ejes puedan hacer un cálculo preliminar de cómo se van a repartir las cargas a lo largo del remolque, y también, les permite a estos mismos o a los fabricantes de ejes el poder analizar las tensiones que se producen en el eje cuando se le están ejerciendo unas fuerzas en sus extremos. Introduciendo un momento torsor en el eje en el caso de frenado, se podrían analizar a su vez ejes los cuales dispongan de freno en las ruedas (este caso está analizado en el [Anexo V](#)).

A su vez, como bien se puede ver el [Anexo VI](#), los fabricantes de ejes como FERRUZ, antes de lanzar sus productos al mercado, hacen estudios para que los Coeficientes de Seguridad de los productos este dentro de un rango.

Una forma de poder mejorar este trabajo podría ser el implementar las acciones que produce la flexibilidad de la ballesta a los cálculos o implementar el cambio geométrico que implica el añadir el freno.

BIBLIOGRAFÍA

1. Apuntes Asignatura “Diseño y Arquitectura de Vehículos”
2. López, L. (2013, 29 de abril). Coeficientes especiales de adherencia. Investigación y Reconstrucción de Accidentes de Tráfico. <https://causadirecta.com/especial/calculo-de-velocidades/tablas/coeficientes-especiales-de-adherencia>
3. Catálogo de ejes agrícolas de ferruz
4. Apuntes Asignatura “Cálculo de Elementos de Máquinas”
5. Apuntes Asignatura “Criterio de Diseño de Máquinas”
6. RIGUAL <https://rigual.es/wp-content/uploads/2020/12/Fichas-del-catalogo-Agricola-remolques.pdf>
7. BEGUER
8. GILI <https://giligroup.com/producto/r-galera-2-ejes/>
9. <https://www.agroptima.com/es/blog/remolques-agricolas-tipos-caracteristicas/#:~:text=Existen%20remolques%20agr%C3%ADcolas%20multifunci%C3%B3n%20de,distintas%20compuertas%20para%20la%20descarga>

ANEXOS

ANEXO I. Ejemplo de Cálculo de Caso Estático

En este anexo, se va a mostrar el aspecto de la tabla Excel que se ha creado para el Caso Estático, y se explicaran las celdas que se crean de importancia. Posteriormente, se hará un cálculo de un ejemplo y se comparará la diferencia de los resultados entre el cálculo analítico y el cálculo numérico del ejemplo.

Para el caso estático, se ha originado una única hoja de Excel para todos los remolques, al contrario que en el resto de los casos que para cada tipo remolque se ha realizado una hoja diferente por las pequeñas singularidades del cálculo de cada remolque.

Si elegimos ahora un eje del catálogo de FERRUZ para calcular sus tensiones y su Coeficiente de Seguridad, el cual tiene las siguientes dimensiones:

$H = 250 \text{ mm}$; $c = 50 \text{ mm}$ y $L = 1200 \text{ mm}$.

Tomaremos un límite elástico del material de 355 MPa (se ha escogido el acero S355). Y dependiendo del tipo de remolque, según el catálogo, se le aplica una carga u otra: Eje Simple = 3200 kg; 2 Ejes Separado = 2700 kg; 2 Ejes Tándem = 2400 kg.

Habrán unas fuerzas verticales en los extremos del eje de 1600 kg, 1350 kg y 1200 kg respectivamente (sin contar el factor dinámico). Como si cumple para el caso de 1 solo eje cumplirá para el resto solo se hace cálculo de este caso.

Según la Hoja Excel:

CARGA EJE	3200	kg
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm

REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (V)	15696,00	N
----------------------------	----------	---

MOMENTO FLECTOR MÁXIMO (Mz)	3924000	N*mm
FUERZA CORTANTE MÁXIMA (Vy)	15696	N

ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	2500	mm ²
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm ³

Límite elástico material	355	MPa
--------------------------	-----	-----

CORTANTE MÁXIMO	9,42	MPa
AXIL MÁXIMO	188,35	MPa

Tensión equivalente tangencial	16,31	MPa
Tensión equivalente normal	188,35	MPa

Cs tangencial	21,76
Cs normal	1,88

Ilustración 68. Hoja Excel Ejemplo Caso Estático

Como se puede observar, se muestran las unidades de todas las celdas para aclarar en que unidades se encuentran.

El módulo resistente W es una magnitud geométrica calculable a partir de la forma y dimensiones de una sección transversal, que representa la relación entre las tensiones máximas sobre dicha sección transversal y el esfuerzo total aplicado sobre dicha sección. Su fórmula es:

$$W = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{\frac{1}{12} \cdot c^4}{\frac{c}{2}} = \frac{c^3}{6}$$

Como se puede observar, se ejecuta el cálculo tanto de la tensión equivalente cuando la tensión tangencial es máxima (en el centro de la sección), como cuando es máxima la tensión normal (en el extremo superior o inferior de la sección), aunque ya se sabe de antemano que la tensión tangencial siempre va a ser menor a la tensión normal, y por eso, en el resto de los casos solamente se calcula el caso de axil máximo.

Se obtiene una tensión máxima equivalente de 188,35 MPa con un Coeficiente de Seguridad de 1,88. Como ya se ha mencionado en el [Apartado 2.1](#), este coeficiente de seguridad debería ser de al menos 2 para soportar fenómenos dinámicos sin problema, pero el valor obtenido no es del todo malo.

Realizando el mismo cálculo en el modelo de ABAQUS conseguimos los siguientes resultados:

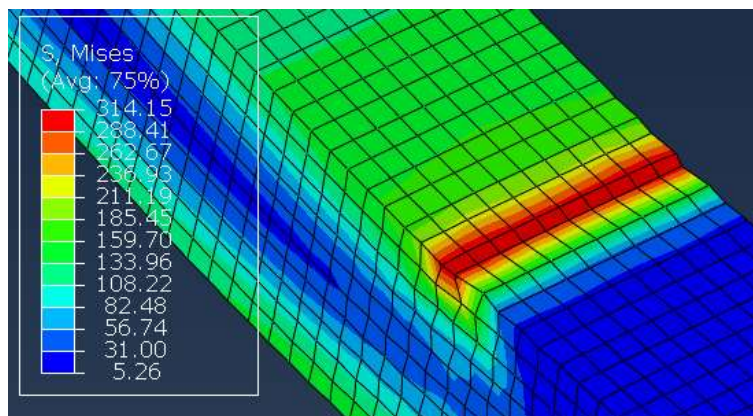


Ilustración 69. ABAQUS Ejemplo Caso Estático

Como se puede observar, se obtiene una tensión equivalente máxima de 314,15 MPa, pero esto es debido a que en el apoyo se produce una concentración de tensiones, si nos damos cuenta, en las zonas de alrededor en tonos verdes hay valores en torno a 185,45 MPa, muy próximos a los del cálculo analítico, lo que indica que ambos métodos de cálculo están acertados y coinciden entre ellos. A raíz de estar interpretando que el apoyo es puntual cuando en realidad está distribuido en un trozo del eje, hace que se formen las mencionadas concentraciones de tensiones.

ANEXO II. Ejemplo de Cálculo de Caso Frenado

En este Anexo, se llevará a cabo el análisis de las Hojas de Excel que calculan el Caso de Frenado para las 3 disposiciones de ejes. El eje que montaran los 3 tipos de remolque en todos los Casos va a ser el eje visto en el [Anexo I](#), y las dimensiones de los remolques se van a tomar iguales tanto para el Frenado, como para el Giro, como para el Giro de Radio Mínimo, para analizar lo que le ocurre al remolque en las diferentes situaciones. Las dimensiones de los remolques se van a inventar con un poco de criterio, ya que los fabricantes no suelen dar muchas dimensiones sobre sus productos, y aunque se tomen los remolques de algunos fabricantes como orientación, no van a coincidir con ninguno en particular.

Las cargas que actuarán sobre los remolques serán de 3500 kg para el caso de 1 eje y de 6000 kg para los casos de 2 ejes.

A su vez, la deceleración va a ser de $0,3 \text{ m/s}^2$ y el coeficiente de rozamiento será de 0,4.

d	300	mm
l	3000	mm
h	1450	mm
R	400	mm
hE	450	mm

Ilustración 70. Dimensiones Remolque 1 Eje

a	400	mm
b	600	mm
d	1000	mm
l	500	mm
h	2000	mm
R	400	mm
hE	450	mm

Ilustración 71. Dimensiones Remolque 2 Ejes Separados

a	200	mm
d	500	mm
l	2000	mm
h	2000	mm
hE	600	mm
R	400	mm

Ilustración 72. Dimensiones Remolque 2 Ejes Tándem

II.1. Remolque 1 Eje Frenado

En este subapartado se va a mostrar la Hoja Excel del Remolque de 1 Eje frenado con el Ejemplo ya implementado, el cual se comparará con ABAQUS.

Deceleración	0,3	m/s ²
Masa	3500	kg
Rozamiento	0,4	
Fi	1050	N
P	34335	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vy)	14411,08	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vz)	525,00	N
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (Mz)	3602771,23	N*mm
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (My)	131250,00	N*mm
ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	2500	mm ²
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm ³
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm
Límite elástico material	355	MPa
FV,R	28822,17	N
FH,R	1050,00	N
FV,E	5512,83	N
FH,E	0,00	N
FV,rueda	14411,08	N
FH,rueda	525,00	N
TANGENCIAL	0,00	MPa
NORMAL	179,23	MPa
σ _{eqv}	179,23	MPa
CS	1,98	

Ilustración 73. Hoja Excel Frenado 1 Eje

Como se puede observar, con los datos mencionados se consigue una tensión equivalente de 179,23 MPa con un coeficiente de seguridad de 1,98 lo cual no está nada mal.

Implementando en ABAQUS nos da como resultado:

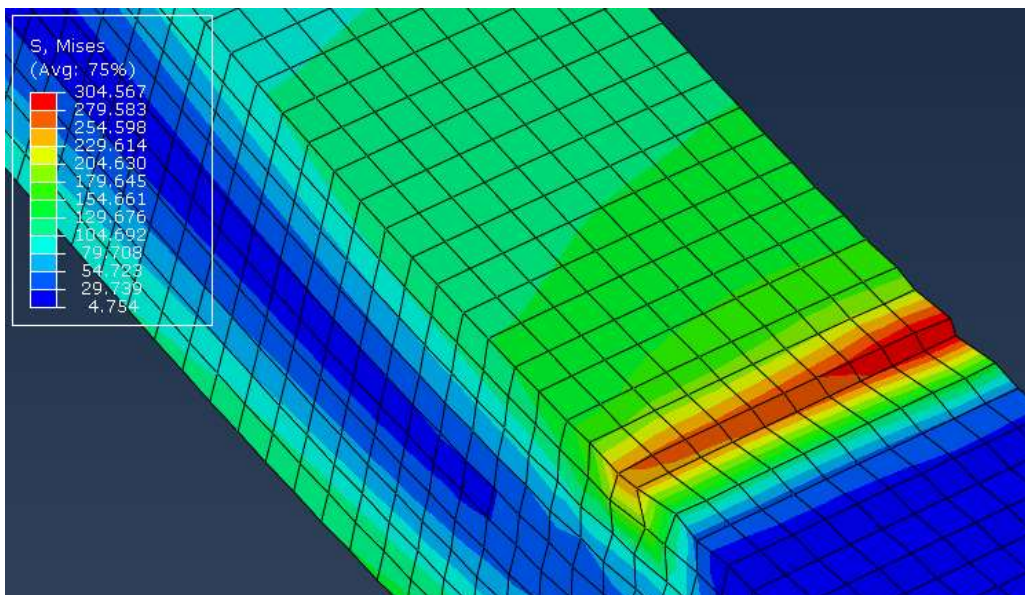


Ilustración 74. ABAQUS Ejemplo Frenado 1 Eje

Al igual que en el [Anexo I](#), hay un concentrador de tensiones, pero en las zonas de tonos verdes de alrededor se asemejan muy bien los resultados.

II.2. Remolque 2 Ejes Separados Frenando

Deceleración	0,3	m/s ²
Masa	6000	kg
Rozamiento	0,4	

Fi	1800	N
P	58860	N

REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vy)	18464,40	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vz)	564,66	N
MOMENTO FLECTOR MÁXIMO (Mz)	4616100,00	N*mm
MOMENTO FLECTOR MÁXIMO (My)	141165,14	N*mm

ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	2500	mm ²
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm ³
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm

Límite elástico material	355	MPa
--------------------------	-----	-----

FV,D	36928,80	N
FV,T	21931,20	N
FH,D	1129,32	N
FH,T	670,68	N
FH,E	0,00	N

FV,rueda	18464,40	N
FH,rueda	564,66	N

TANGENCIAL	0,00	MPa
NORMAL	228,35	MPa

σ _{eqv}	228,35	MPa
------------------	--------	-----

Cs	1,55	
----	------	--

Ilustración 75. Hoja Excel Frenado 2 Ejes Separados

En el caso de 2 ejes separados la tensión es un poco mayor llegando a 228,35 MPa y con un coeficiente de seguridad de 1,55, lo cual deja margen, pero hay que tener cuidado.

Llevando las fuerzas en el eje a ABAQUS:

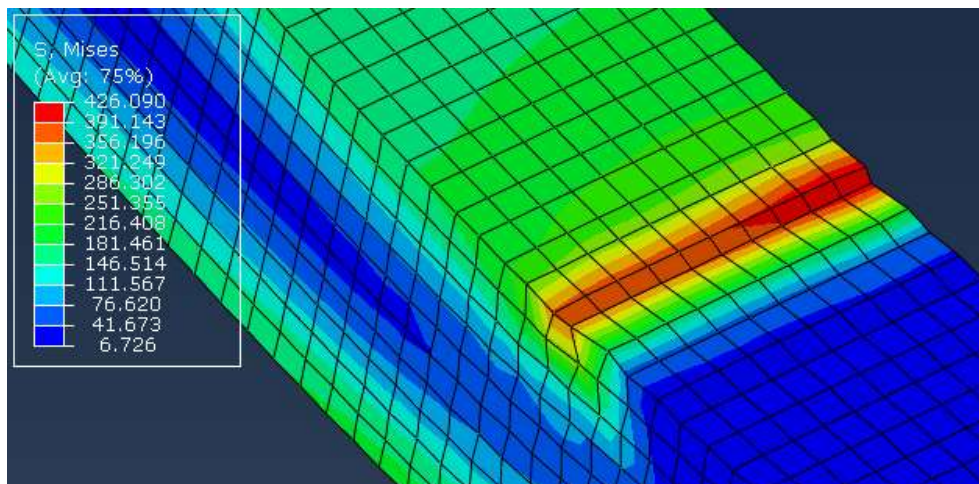


Ilustración 76. ABAQUS Ejemplo Frenado 2 Ejes Separados

Al igual que antes, nos tenemos que fijar en las zonas verdes para encontrar la zona en la que ambos cálculos coinciden en resultados, confirmándose así que ambos métodos de cálculo son correctos.

II.3. Frenado 2 Ejes Tándem Frenado

Deceleración	0,3	m/s ²
Masa	6000	kg
Rozamiento	0,4	

Fi	1800	N
P	58860	N

REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vy)	12641,20	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vz)	495,00	N
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (Mz)	3160300,00	N*mm
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (My)	123750,00	N*mm

ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	2500	mm ²
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm ³
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm

Límite elástico material	355	MPa
--------------------------	-----	-----

Rtandem	45968,00	N
FV,E	12892,00	N
FH,E	0,00	N
FV,D	25282,40	N
FV,T	20685,60	N
FH,D	990,00	N
FH,T	810,00	N

FV,rueda	12641,20	N
FH,rueda	495,00	N

TANGENCIAL	0,00	MPa
NORMAL	157,63	MPa

σ _{eqv}	157,63	MPa
------------------	--------	-----

Cs	2,25	
----	------	--

Ilustración 77. Hoja Excel Frenado 2 Ejes Tándem

En este caso, la tensión máxima equivalente sale inferior a las anteriores como es de esperar de un remolque tándem, ya que además de tener 2 ejes, parte de la carga la transmite al enganche. Proporciona una tensión equivalente de 157,63 MPa y un coeficiente de seguridad de 2,25.

Ejerciendo las fuerzas en ABAQUS:

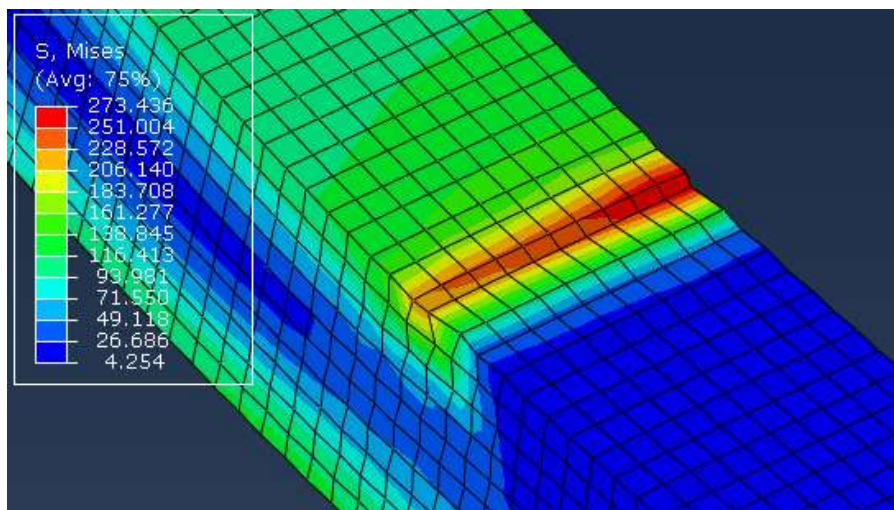


Ilustración 78. ABAQUS Ejemplo Frenado 2 Ejes Tándem

Y como no podía ser de otra manera, en este caso también se producen las concentraciones de tensiones. Y también se producen las coincidencias en las zonas verdes.

ANEXO III. Ejemplo de Cálculo de Caso Giro

Los datos para este caso van a ser los mismos que los del [Anexo I](#) y los del [Anexo II](#) y la aceleración lateral va a ser de $0,3 \text{ m/s}^2$.

III.1. Remolque 1 Eje Girando

En este subapartado, se va a mostrar la Hoja Excel del Remolque de 1 Eje girando con el Ejemplo ya implementado, el cual se comparará con ABAQUS.

Aceleración	0,3	m/s^2
Masa	3500	kg
Rozamiento	0,4	

Fi	1050	N
P	34335	N

REACCIÓN AXIL (N)	709,26	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vy)	20873,48	N
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (Mz)	4934665,39	N^*mm

ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	2500	mm^2
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm^3
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm

Límite elástico material	355	MPa
--------------------------	-----	-----

FV,D	11142,25	N
FV,I	23192,75	N
FH,E	0,00	N
FV,E	3433,50	N

FV,RD	10028,03	N
FV,RI	20873,48	N

TANGENCIAL	0,00	MPa
NORMAL	237,15	MPa

σ_{eqv}	237,15	MPa
----------------	--------	-----

Cs	1,50
----	------

FV,I	20873,48	N
FV,D	10028,03	N
FH,I	709,26	N
FH,D	340,74	N
MI	283703,36	N^*mm
MD	136296,64	N^*mm

Ilustración 79. Hoja Excel Girando 1 Eje

Como se puede observar, con los datos mencionados se consigue una tensión equivalente de 237,15 MPa con un coeficiente de seguridad de 1,5 lo cual está bastante bien tratándose de un remolque de 1 eje.

Implementando en ABAQUS nos da como resultado:

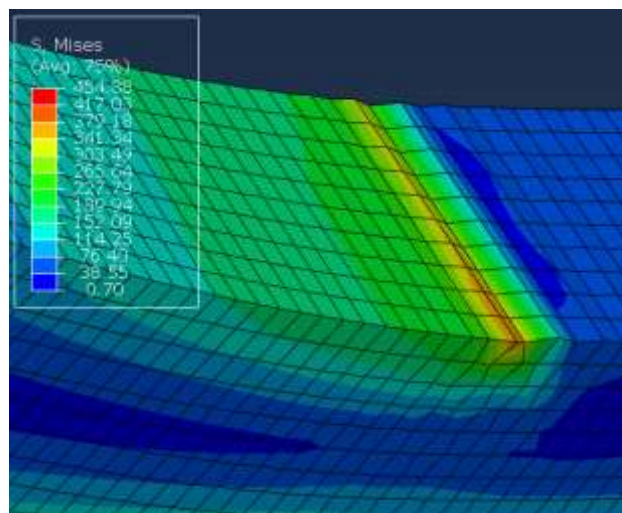


Ilustración 80. ABAQUS Ejemplo Girando 1 Eje

Al igual que en el [Anexo I](#) y [Anexo II](#) hay un concentrador de tensiones, pero en las zonas de alrededor se asemejan muy bien los resultados. Ahora la reacción en los apoyos no es igual en ambos y la mayor tensión equivalente se produce en el apoyo izquierdo.

II.2. Remolque 2 Ejes Separados Girando

Aceleración	0,3	m/s ²
Masa	6000	kg
Rozamiento	0,4	

Fi	1800	N
P	58860	N

REACCIÓN AXIL (N)	744,66	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vy)	24350,40	N
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (Mz)	5789735,78	N*mm

ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	2500	mm ²
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm ³
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm

Límite elástico material	355	MPa
--------------------------	-----	-----

FV,I	40584,00	N
FV,D	18276,00	N
FH,E	0,00	N

FV,DI	16233,60	N
FV,DD	7310,40	N
FV,TI	24350,40	N
FV,TD	10965,60	N

TANGENCIAL	0,00	MPa
NORMAL	278,21	MPa

σ _{eqv}	278,21	MPa
------------------	--------	-----

Cs	1,28
----	------

FV,I	24350,40	N
FV,D	10965,60	N
FH,I	744,66	N
FH,D	335,34	N
MI	297864,22	N*mm
MD	134135,78	N*mm

Ilustración 81. Hoja Excel Girando 2 Ejes Separados

En el caso de 2 ejes separados la tensión es un poco mayor llegando a 278,21 MPa y con un coeficiente de seguridad de 1,28 lo cual es un poco preocupante, ya que está cerca del límite elástico.

Llevando las fuerzas en el eje a ABAQUS:

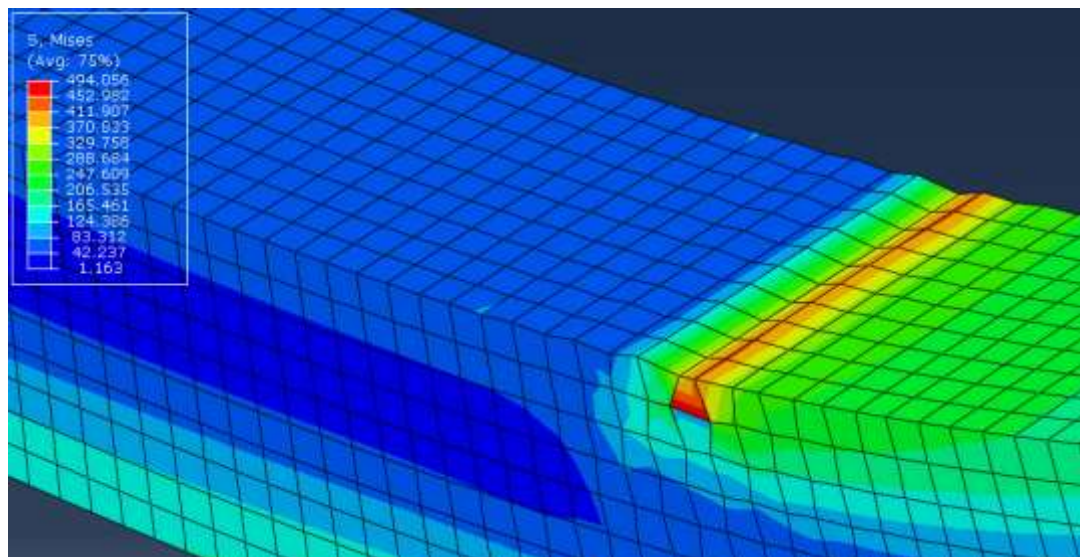


Ilustración 82. ABAQUS Ejemplo Girando 2 Ejes Separados

Al igual que antes, nos tenemos que fijar en las zonas verdes para encontrar la zona en la que ambos cálculos coinciden en resultados. Y al igual que en el caso de 1 eje, la mayor tensión equivalente está localizada en la ballesta izquierda.

II.3. Frenado 2 Ejes Tándem Girando

Aceleración	0,3	m/s ²
Masa	6000	kg
Rozamiento	0,4	

Fi	1800	N
P	58860	N

REACCIÓN AXIL (N)	582,66	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vy)	19052,88	N
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (Mz)	4530157,25	N*mm

ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	2500	mm ²
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm ³
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm

Límite elástico material	355	MPa
--------------------------	-----	-----

FV,I	43302,00	N
FV,D	15558,00	N
FH,E	0,00	N
FV,E	11772,00	N

TANGENCIAL	0,00	MPa
NORMAL	217,68	MPa

σ _{eqv}	217,68	MPa
------------------	--------	-----

Cs	1,63	
----	------	--

Rtandem,I	34641,60	N
FV,EI	8660,40	N
Rtandem,D	12446,40	N
FV,ED	3111,60	N
FV,DD	6845,52	N
FV,DI	19052,88	N
FV,TD	5600,88	N
FV,TI	15588,72	N

FV,I	19052,88	N
FV,D	6845,52	N
FH,I	582,66	N
FH,D	209,34	N
MI	233062,75	N*mm
MD	83737,25	N*mm

Ilustración 83. Hoja Excel Girando 2 Ejes Tándem

Al igual que en el [Anexo II](#), la tensión máxima equivalente sale inferior a los otros 2 tipos de remolque, como es de esperar de un remolque tándem, ya que además de tener 2 ejes, parte de la carga la transmite al enganche. Proporciona una tensión equivalente de 217,68 MPa y un coeficiente de seguridad de 1,63.

Ejerciendo las fuerzas en ABAQUS:

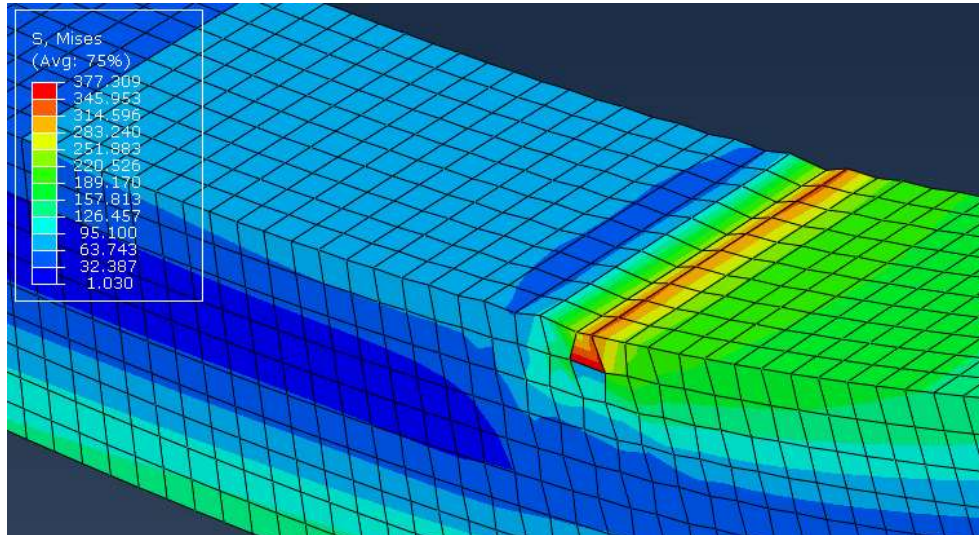


Ilustración 84. ABAQUS Ejemplo Girando 2 Ejes Tándem

Como en los otros casos, la mayor tensión se produce en el apoyo izquierdo y las tensiones máximas equivalentes están pintadas en color verde, ya que en color rojo se pinta una concentración de tensiones.

ANEXO IV. Ejemplo de Cálculo de Caso Giro de Radio Mínimo

Para este caso, aparte de los datos ya facilitados en los Anexos I y II, necesitamos saber cuál es la fuerza que ejerce el vehículo tractor para que se produzca el giro. Se ha considerado dicho valor en 2000 N.

Masa	6000	kg
Rozamiento	0,4	

Fgiro	2000	N
P	58860	N

REACCIÓN AXIL (N)	5000,00	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vy)	12949,20	N
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (Mz)	5237300,00	N

ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	2500	mm ²
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm ³
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm

Límite elástico material	355	MPa
--------------------------	-----	-----

FX,T	4000,00	N
FX,D	5000,00	N

Rtandem	47088,00	N
FV,E	11772,00	N
FV,D	25898,40	N
FV,T	21189,60	N

FV,D/2	12949,20	N
Fx,D	5000,00	N
Mz,D	2000000,00	N*mm

TANGENCIAL	0,00	MPa
NORMAL	253,39	MPa

σeqv	253,39	MPa
------	--------	-----

Cs	1,40
----	------

Ilustración 85. Hoja Excel Giro de Radio Mínimo

Como se puede observar, la tensión máxima equivalente sale muy parecida a la que aparecía en los otros casos del remolque con 2 Ejes Tándem siendo en este caso de 253,39 MPa y acarreado un factor de seguridad de 1,4. Una mayor fuerza de giro producirá una mayor fuerza horizontal en los neumáticos, siempre y cuando no se supere la fuerza máxima impuesta por el rozamiento.

Ejerciendo las fuerzas calculadas por la Hoja Excel en el modelo de ABAQUS se consiguen las siguientes tensiones:

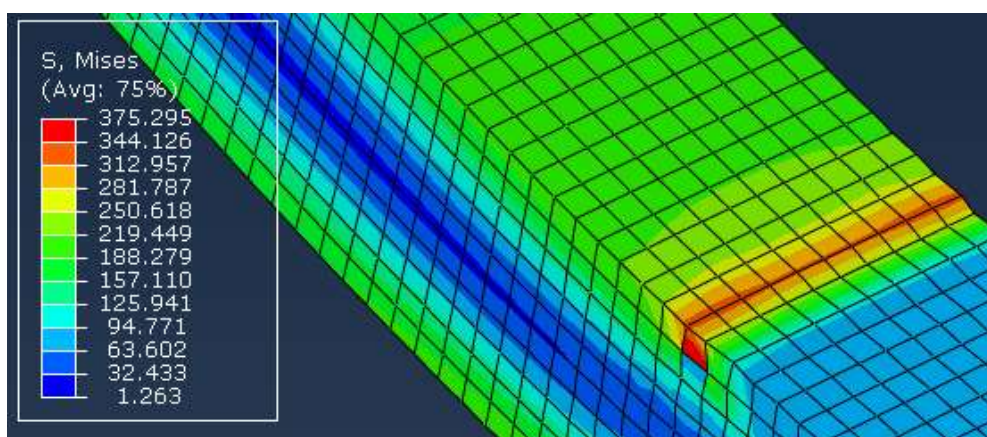


Ilustración 86. ABAQUS Ejemplo Giro de Radio Mínimo

En este caso, la tensión máxima se produce en el apoyo derecho como bien se había previsto anteriormente, y las tensiones máximas vuelven a estar pintadas de colores verdes-amarillos debido a la concentración de tensiones en las zonas rojas.

ANEXO V. Cálculo Caso Frenado con Momento Torsor

Como ya se ha mencionado durante el trabajo, el eje el cual estamos estudiando no dispone de freno y, por tanto, las ruedas pueden girar libremente en torno al eje.

En este Anexo, lo que se va a analizar son las fuerzas y momentos que actuarían en el eje si existiera dicho freno, aunque será una aproximación, ya que según el Catálogo de ejes agrícolas de ferruz, los ejes que disponen de freno tienen una morfología más compleja y difícil de analizar. En la imagen siguiente se muestra un eje con freno de dicho catálogo.

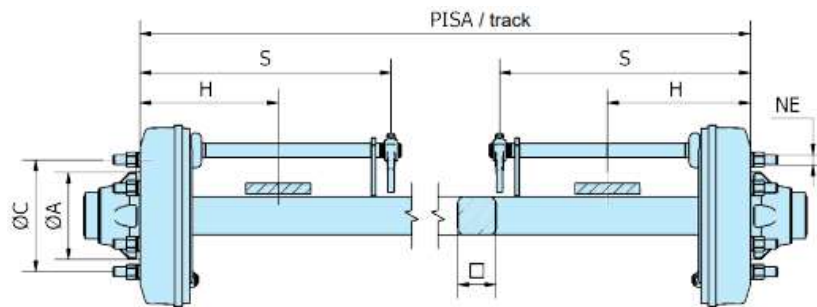


Ilustración 87. Eje con Freno

Haciendo la simplificación de que actúe el freno sobre nuestro eje sin modificarse la geometría del eje, la única fuerza que se le añade al eje es un momento torsor en sus extremos, el cual tendrá un valor de:

$$M_X = \frac{F_H}{2} \cdot R$$

Siendo F_H la fuerza horizontal actuando sobre el eje y R el radio del neumático.

Y ahora las fuerzas y momentos que actúan sobre el eje son:

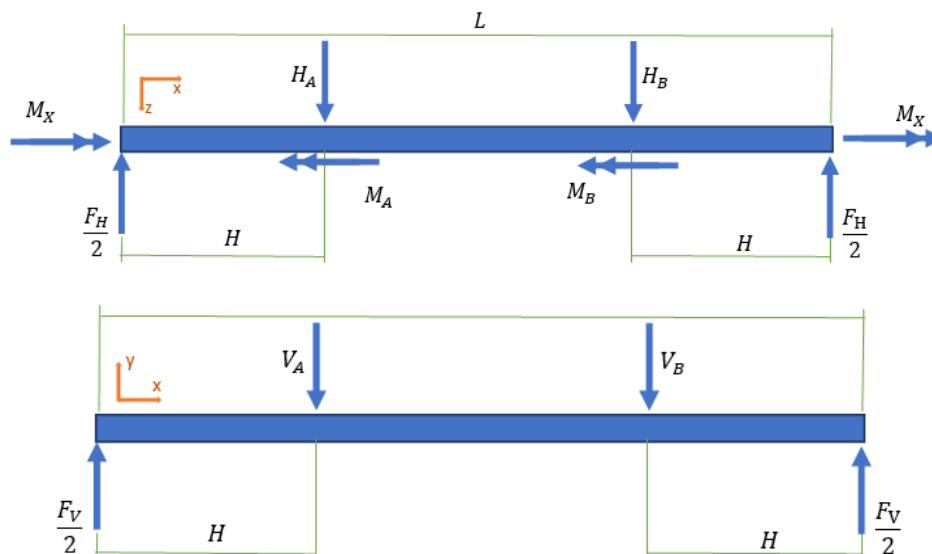


Ilustración 88. Eje Caso Frenado con Torsor

Donde:

V_A es la fuerza vertical que ejerce la ballesta derecha.

V_B es la fuerza vertical que ejerce la ballesta izquierda.

H_A es la fuerza horizontal que ejerce la ballesta derecha.

H_B es la fuerza horizontal que ejerce la ballesta izquierda.

M_X es el momento torsor actuando en cada extremo del eje.

M_A es el momento torsor actuando en la ballesta derecha.

M_B es el momento torsor actuando en la ballesta izquierda.

$F_V = \max(F_{V,D}; F_{V,T})$ y en el caso de 1 eje como es de suponer, es la fuerza vertical en él (denominada $F_{V,R}$)

$F_H = \max(F_{H,D}; F_{H,T})$

Y evidentemente, al ser $F_H = F_V \cdot \mu$ si el máximo vertical está en el eje delantero, el máximo horizontal tiene que estar en el delantero también.

Haciendo los siguientes equilibrios de fuerzas y de momentos se calculan las reacciones en las ballestas.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{F_V}{2} + \frac{F_V}{2} - V_A - V_B = 0 \rightarrow V_A = F_V - V_B$$

$$\begin{aligned} \sum M_{z,A} = 0 &\rightarrow -\frac{F_V}{2} \cdot H - V_B \cdot (L - 2H) + \frac{F_V}{2} \cdot (L - H) = 0 \rightarrow \frac{F_V}{2} \cdot (L - 2H) - V_B \cdot (L - 2H) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow V_B = \frac{F_V}{2} \end{aligned}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} - \frac{F_H}{2} + H_A + H_B = 0 \rightarrow H_A = F_H - H_B$$

$$\begin{aligned} \sum M_{y,A} = 0 &\rightarrow -\frac{F_H}{2} \cdot H - H_B \cdot (L - 2H) + \frac{F_H}{2} \cdot (L - H) = 0 \rightarrow \frac{F_H}{2} \cdot (L - 2H) - H_B \cdot (L - 2H) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow H_B = \frac{F_H}{2} \end{aligned}$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_X + M_X - M_A - M_B = 0$$

Como se llega a un problema hiperestático, se resuelve haciendo que el momento torsor en el tramo de eje entre ambas ballestas sea igual a 0. Por tanto, nos queda que:

$$M_A = M_B = M_X$$

Y sustituyendo en la primera ecuación y en la tercera ecuación:

$$V_A = F_V - \frac{F_V}{2} = \frac{F_V}{2}$$

$$H_A = F_H - \frac{F_H}{2} = \frac{F_H}{2}$$

Lo cual nos da las siguientes reacciones en el eje:

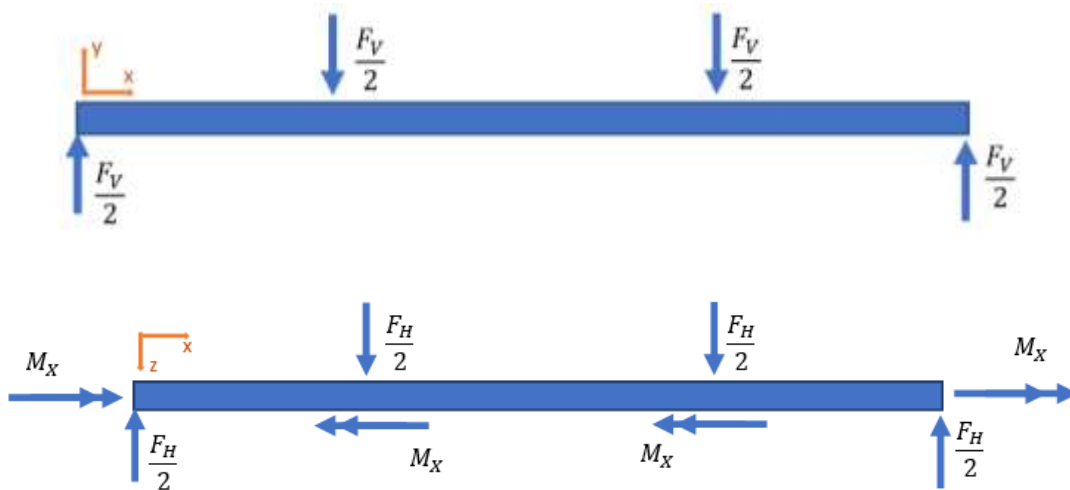


Ilustración 89. Reacciones Eje Caso Frenado con Torsor

Y con estas reacciones se realiza el cálculo de cuáles serán el esfuerzo cortante y el momento flector en cada punto del eje.

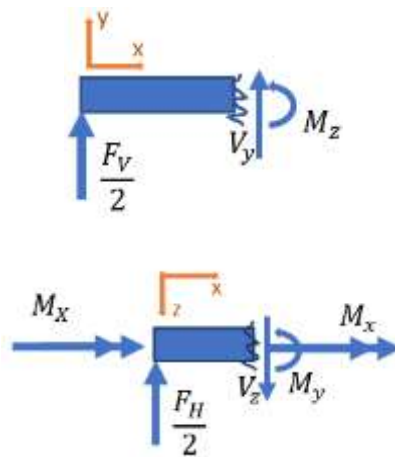


Ilustración 90. Cortante, Flector y Torsor Caso Frenado con Torsor entre Rueda Derecha y Ballesta Derecha

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow \frac{F_V}{2} + V_y = 0 \rightarrow V_y(0 \leq x \leq H) = -\frac{F_V}{2}$$

$$\sum M_Z = 0 \rightarrow -\frac{F_V}{2} \cdot x + M_z = 0 \rightarrow M_z(0 \leq x \leq H) = \frac{F_V}{2} \cdot x$$

$$M_z(x = 0) = 0; M_z(x = H) = \frac{F_V}{2} \cdot H$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} + V_z = 0 \rightarrow V_z(0 \leq x \leq H) = \frac{F_H}{2}$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} \cdot x + M_y = 0 \rightarrow M_y(0 \leq x \leq H) = \frac{F_H}{2} \cdot x$$

$$M_y(x = 0) = 0; M_y(x = H) = \frac{F_H}{2} \cdot H$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_x + M_x = 0 \rightarrow M_x(0 \leq x \leq H) = -M_x$$

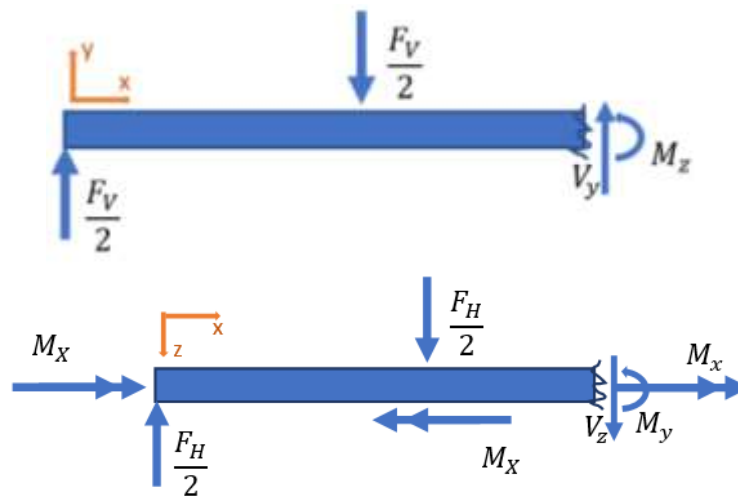


Ilustración 91. Cortante, Flector y Torsor Caso Frenado con Torsor entre Ballesta Derecha y Ballesta Izquierda

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{F_V}{2} - \frac{F_V}{2} + V_y = 0 \rightarrow V_y(H < x \leq L - H) = 0$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow -\frac{F_V}{2} \cdot x + \frac{F_V}{2} \cdot (x - H) + M_z = 0 \rightarrow M_z(H < x \leq L - H) = \frac{F_V}{2} \cdot H$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} + \frac{F_H}{2} + V_z = 0 \rightarrow V_z(H < x \leq L - H) = 0$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} \cdot x + \frac{F_H}{2} \cdot (x - H) + M_y = 0 \rightarrow M_y(H < x \leq L - H) = \frac{F_H}{2} \cdot H$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_x - M_x + M_x = 0 \rightarrow M_x(H < x \leq L - H) = 0$$

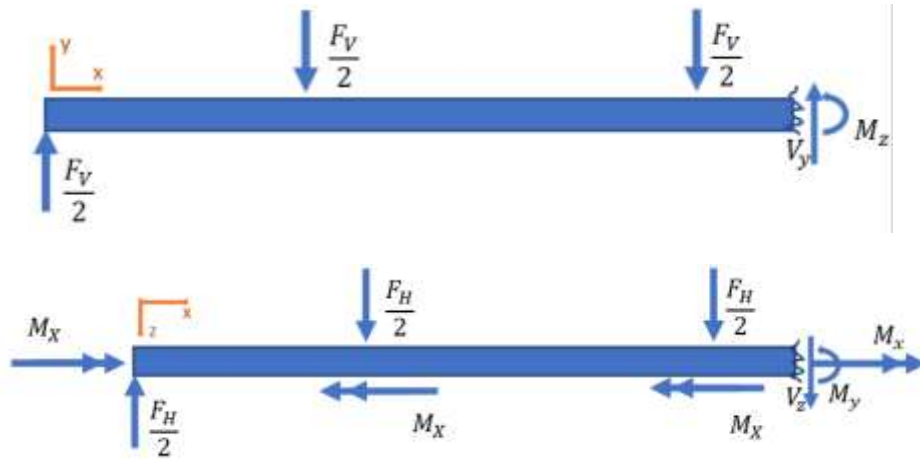


Ilustración 92. Cortante, Flector y Torsor Caso Frenado con Torsor entre Ballesta Izquierda y Rueda Izquierda

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow \frac{F_V}{2} - \frac{F_V}{2} - \frac{F_V}{2} + V_y = 0 \rightarrow V_y(L - H < x \leq L) = \frac{F_V}{2}$$

$$\sum M_Z = 0 \rightarrow -\frac{F_V}{2} \cdot x + \frac{F_V}{2} \cdot (x - H) + \frac{F_V}{2} \cdot [x - (L - H)] + M_z = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_z(L - H < x \leq L) = \frac{F_V}{2} \cdot H - \frac{F_V}{2} \cdot (x - L + H) = \frac{F_V}{2} \cdot (L - x)$$

$$M_z(x = L - H) = \frac{F_V}{2} \cdot H; M_z(x = L) = 0$$

$$\sum F_Z = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} + \frac{F_H}{2} + \frac{F_H}{2} + V_y = 0 \rightarrow V_y(L - H < x \leq L) = -\frac{F_H}{2}$$

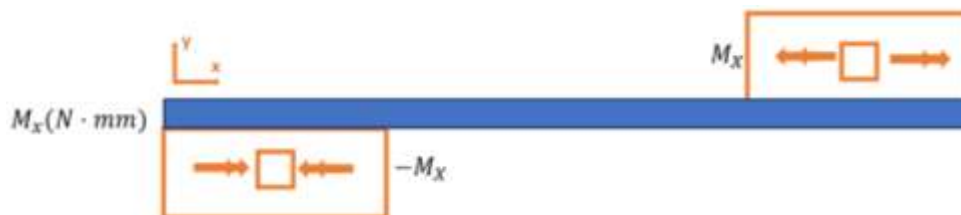
$$\sum M_Y = 0 \rightarrow -\frac{F_H}{2} \cdot x + \frac{F_H}{2} \cdot (x - H) + \frac{F_H}{2} \cdot [x - (L - H)] + M_y = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_y(L - H < x \leq L) = \frac{F_H}{2} \cdot H - \frac{F_H}{2} \cdot (x - L + H) = \frac{F_H}{2} \cdot (L - x)$$

$$M_y(x = L - H) = \frac{F_H}{2} \cdot H; M_y(x = L) = 0$$

$$\sum M_X = 0 \rightarrow M_X - M_X - M_X + M_x = 0 \rightarrow M_x(H < x \leq L - H) = M_X$$

Y a continuación se muestran los diagramas de Torsor, Cortante y Flector que se producen en el eje.



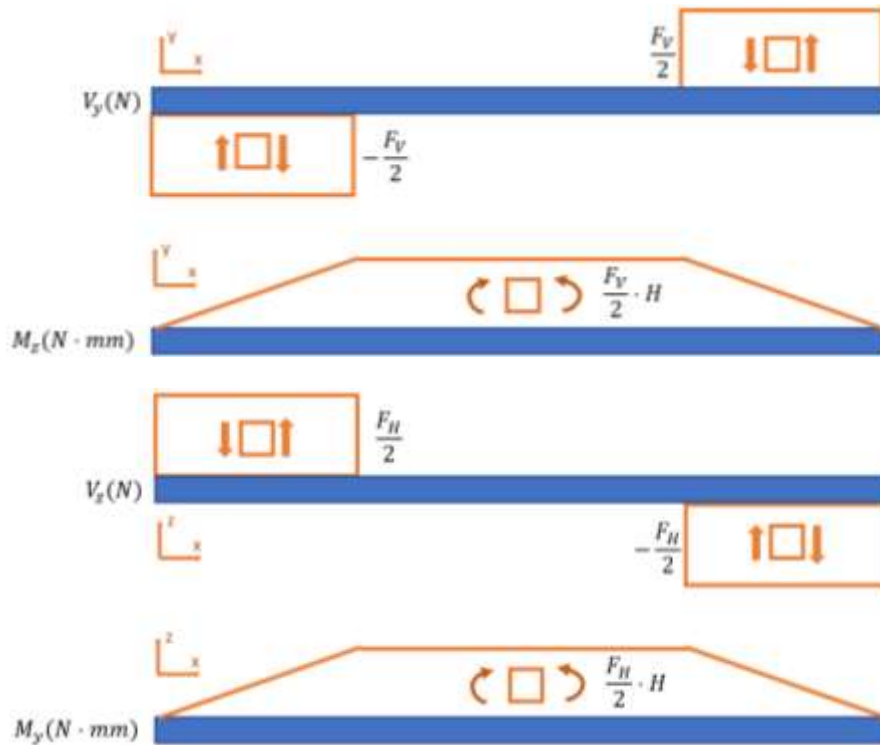


Ilustración 93. Cortante, Flector y Torsor Caso Frenado con Torsor

En este caso, el punto más desfavorable será cualquiera de los 2 apoyos de las ballestas, si es la izquierda será en su lado izquierdo y si es la derecha será en su lado derecho (hay que tener en cuenta que se están viendo de frente por lo que el lado izquierdo será el lado derecho de los diagramas y viceversa).

En este caso, se va a tener en cuenta la tensión normal producida por los momentos flectores y la tensión tangencial que produce el momento torsor.

Con estos flectores de $M_z = \frac{F_V}{2} \cdot H$ y $M_y = \frac{F_H}{2} \cdot H$ y el momento torsor $M_x = \frac{F_H}{2} \cdot R$, se calcula cuál es la tensión equivalente que soporta el eje en su punto más crítico.

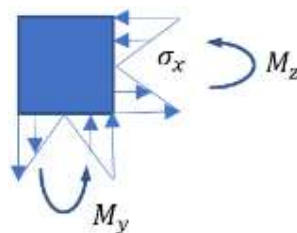


Ilustración 94. Tensión Normal debida a Momento Flector Caso Frenado con Torsor

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

Siendo M_z y M_y los momentos flectores, I_z y I_y los momentos de inercia de la sección, y la distancia desde el centro de la sección al punto más alejado verticalmente (que en nuestro caso será la mitad de la altura de la sección del eje) y z la distancia desde el centro de la sección al

punto más alejado horizontalmente (que en nuestro caso será la mitad de la anchura de la sección del eje). Como se puede observar en Ilustración 22. Tensión Normal debida a Momento Flector, la mayor tensión normal se producirá bien en la esquina superior derecha de la sección o en la esquina inferior izquierda, ya que son los 2 puntos en los que ambos flectores comprimen o traccionan el eje respectivamente.

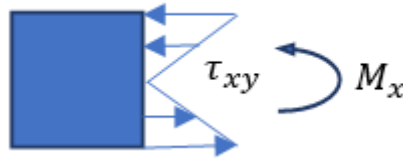


Ilustración 95. Tensión Tangencial debida a Momento Torsor Caso Frenado con Torsor

$$\tau_{xy,max} = \frac{M_x}{I_0} \cdot r$$

Siendo M_x el momento torsor, $I_0 = I_z + I_y$ y r la distancia al punto más alejado del centro de la sección del eje, el cual es cualquiera de las esquinas de la sección.

Sabiendo que la sección del eje es la mostrada en la ilustración siguiente, se calcula cuál será la tensión normal máxima de la sección.

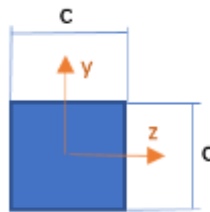


Ilustración 96. Sección Eje Caso Frenado con Torsor

$$I_z = I_y = \frac{1}{12} \cdot c \cdot c^3 = \frac{c^4}{12}$$

$$y_{max} = z_{max} = \frac{c}{2}$$

$$I_0 = \frac{c^4}{12} + \frac{c^4}{12} = \frac{c^4}{6}$$

$$r^2 = c^2 + c^2 \rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c$$

Por lo que, sustituyendo,

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_z}{\frac{c^4}{12}} \cdot \frac{c}{2} + \frac{M_y}{\frac{c^4}{12}} \cdot \frac{c}{2} = \frac{6 \cdot (M_z + M_y)}{c^3} = \frac{3 \cdot H \cdot (F_V + F_H)}{c^3}$$

$$\tau_{xy,max} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot M_x}{c^3}$$

Si además usamos la Teoría de Von Mises la cual dice que $\sigma_{eqv} = \sqrt{3 \cdot \tau_{xy}^2 + \sigma_x^2}$ nos queda que $\sigma_{eqv} = \sigma_x = \sigma_{x,max}$. Por otra parte, se define el Coeficiente de Seguridad como $CS = \frac{\sigma_F}{\sigma_{eqv}}$ siendo σ_F el límite elástico del material. Por lo que nos queda que

$$CS = \frac{\sigma_F}{\sigma_{x,max}}$$

Interesa que este coeficiente sea de por lo menos 1,5 para aguantar con seguridad.

A continuación, se muestran los resultados de las Hojas Excel de los 3 casos de frenado con el momento torsor implementado.

Deceleración	0,3	m/s ²
Masa	3500	kg
Rozamiento	0,4	
Fi	1050	N
P	34335	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vy)	14411,08	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vz)	525,00	N
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (Mz)	3602771,23	N*mm
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (My)	131250,00	N*mm
MOMENTO TORSOR (Mx)	210000,00	N*mm
ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	2500	mm ²
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm ³
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm
Límite elástico material	355	MPa

FV,R	28822,17	N
FH,R	1050,00	N
FV,E	5512,83	N
FH,E	0,00	N
FV,rueda	14411,08	N
FH,rueda	525,00	N
TANGENCIAL	7,13	MPa
NORMAL	179,23	MPa
σeqv	179,66	MPa
CS	1,98	

Ilustración 97. Frenado 1 Eje con Torsor

Deceleración	0,3	m/s ²
Masa	6000	kg
Rozamiento	0,4	
Fi	1800	N
P	58860	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vy)	18464,40	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vz)	564,66	N
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (Mz)	4616100,00	N*mm
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (My)	141165,14	N*mm
MOMENTO TORSOR (Mx)	225864,22	N*mm
ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	1600	mm ²
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm ³
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm
Límite elástico material	355	MPa

FV,D	36928,80	N
FV,T	21931,20	N
FH,D	1129,32	N
FH,T	670,68	N
FH,E	0,00	N
FV,rueda	18464,40	N
FH,rueda	564,66	N
TANGENCIAL	7,67	MPa
NORMAL	228,35	MPa
σeqv	228,73	MPa
Cs	1,55	

Ilustración 98. Frenado 2 Ejes Separados con Torsor

Deceleración	0,3	m/s ²
Masa	6000	kg
Rozamiento	0,4	

Fi	1800	N
P	58860	N

REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vy)	12641,20	N
REACCIÓN SUJECCIÓN EJE (Vz)	495,00	N
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (Mz)	3160300,00	N*mm
MOMENTO FELCTOR MÁXIMO (My)	123750,00	N*mm
MOMENTO TORSOR (Mx)	198000,00	N*mm

ALTURA EJE (c)	50	mm
SECCIÓN EJE (A)	2500	mm ²
MÓDULO RESISTENTE (W)	20833,33	mm ³
LONGITUD EJE (L)	1200	mm
DISTANCIA SUJECCIÓN EJE A CHASIS (H)	250	mm

Límite elástico material	355	MPa
--------------------------	-----	-----

Rtandem	45968,00	N
FV,E	12892,00	N
FH,E	0,00	N
FV,D	25282,40	N
FV,T	20685,60	N
FH,D	990,00	N
FH,T	810,00	N

FV,rueda	12641,20	N
FH,rueda	495,00	N

TANGENCIAL	6,72	MPa
NORMAL	157,63	MPa

oeqv	158,06	MPa
------	--------	-----

Cs	2,25
----	------

Ilustración 99. Frenado 2 Ejes Tándem con Torsor

Como se puede observar, los resultados no difieren mucho de los del [Anexo II](#), ya que la tensión tangencial que produce el momento torsor es muy pequeña, lo que nos indica que con el resultado obtenido sin tener en cuenta el freno estábamos teniendo mucha precisión a la hora de estudiar las tensiones equivalentes máximas.

ANEXO VI. Estudio de Ejes FERRUZ

En este anexo, se van a analizar el resto de los ejes del catálogo de FERRUZ según las cargas por eje que indica el fabricante para el Caso Estático. El resto de los Casos, se van a analizar sustituyendo los ejes, pero sin modificar ninguna dimensión del remolque ni las cargas respecto de las de los Anexos [I](#), [II](#) y [III](#). La forma de estudio va a ser crear una tabla en la que se mencionen las dimensiones del eje, las cargas que debe aguantar estáticamente según el fabricante y el coeficiente de seguridad que obtiene dicho eje para todos los casos de estudio.

Lado Eje (mm)	Distancia H (mm)	Longitud Eje L (mm)	Carga 1 Eje (kg)	Carga 2 Ejes Separados (kg)	Carga 2 Ejes Tándem (kg)	Coeficiente de Seguridad Estático
30	135	1000	1050	900	750	2,3
35	205	1100	1050	900	750	2,4
40	205	1100	1950	1650	1450	1,93
45	205	1100	2500	2100	1800	2,14
50	250	1200	3200	2700	2400	1,88
60	250	1600	5000	4000	3500	2,08
70	300	1700	7500	6500	6000	1,84
80	350	1800	9000	8000	7500	1,96
90	400	1800	12500	11000	9500	1,76
100	400	1800	14000	12500	11000	2,15

Ilustración 100. Coeficientes Estáticos Ejes FERRUZ

Como se puede observar, todos los ejes tienen sus mayores cargas posibles estáticamente para remolques de 1 solo eje y, por tanto, los Coeficientes de Seguridad que aparecen en la columna de la tabla de Coeficiente Estático son respecto de la carga de 1 solo eje. Todos los ejes tienen coeficientes entre 1,76 y 2,4, por lo que se podría decir que todos los ejes más o menos cumplen correctamente con el factor dinámico mencionado en el [Apartado 2.1](#).

Por otra parte, se nota que el fabricante del eje (FERRUZ), previamente a la comercialización del eje, hace análisis de sus ejes para que tengan un cierto Coeficiente de Seguridad mínimo, ya que el rango en el que se mueven los Coeficientes de Seguridad de estos ejes es bastante reducido y no puede ser fruto de una casualidad.

Lado Eje (mm)	Distancia H (mm)	Longitud Eje L (mm)	Coeficiente de Seguridad Frenado			Coeficiente de Seguridad Giro			Coeficiente de Seguridad
			1 Eje	2 Ejes Separados	2 Ejes Tándem	1 Eje	2 Ejes Separados	2 Ejes Tándem	
30	135	1000	0,79	0,62	0,9	0,6	0,51	0,64	0,42
35	205	1100	0,83	0,65	0,94	0,62	0,53	0,67	0,54
40	205	1100	1,24	0,97	1,41	0,92	0,79	1	0,81
45	205	1100	1,76	1,38	2	1,32	1,12	1,42	1,15
50	250	1200	1,98	1,55	2,25	1,5	1,28	1,63	1,4
60	250	1600	3,42	2,69	3,89	2,77	2,37	3,06	2,42
70	300	1700	4,53	3,55	5,15	3,67	3,15	4,08	3,41
80	350	1800	5,79	4,55	6,59	4,72	4,05	5,26	4,59
90	400	1800	7,22	5,67	8,21	5,85	5,02	6,53	5,95
100	400	1800	9,9	7,77	11,26	8,02	6,89	8,95	8,15

Ilustración 101. Coeficientes de Frenado, Giro y Giro de Radio Mínimo Ejes FERRUZ

A la vista de los resultados, y como sería de esperar, conforme aumenta el tamaño del eje, aumenta también el Coeficiente de Seguridad del Eje del Remolque. Esto se debe a que ni las dimensiones del remolque, ni las cargas, ni las aceleraciones varían y solamente lo hace el eje. Para elegir un eje que aguante correctamente el remolque, pero tampoco esté sobredimensionado, se debería escoger uno que tuviera un Coeficiente de Seguridad de en torno a 1,5-2. Es por esto, por lo que se ha pintado en amarillo los ejes que se deberían escoger ya que cumplen con esa condición. Se puede observar que los ejes más idóneos en casi todos los casos son el de lado 50 mm y/o el de lado 60 mm.