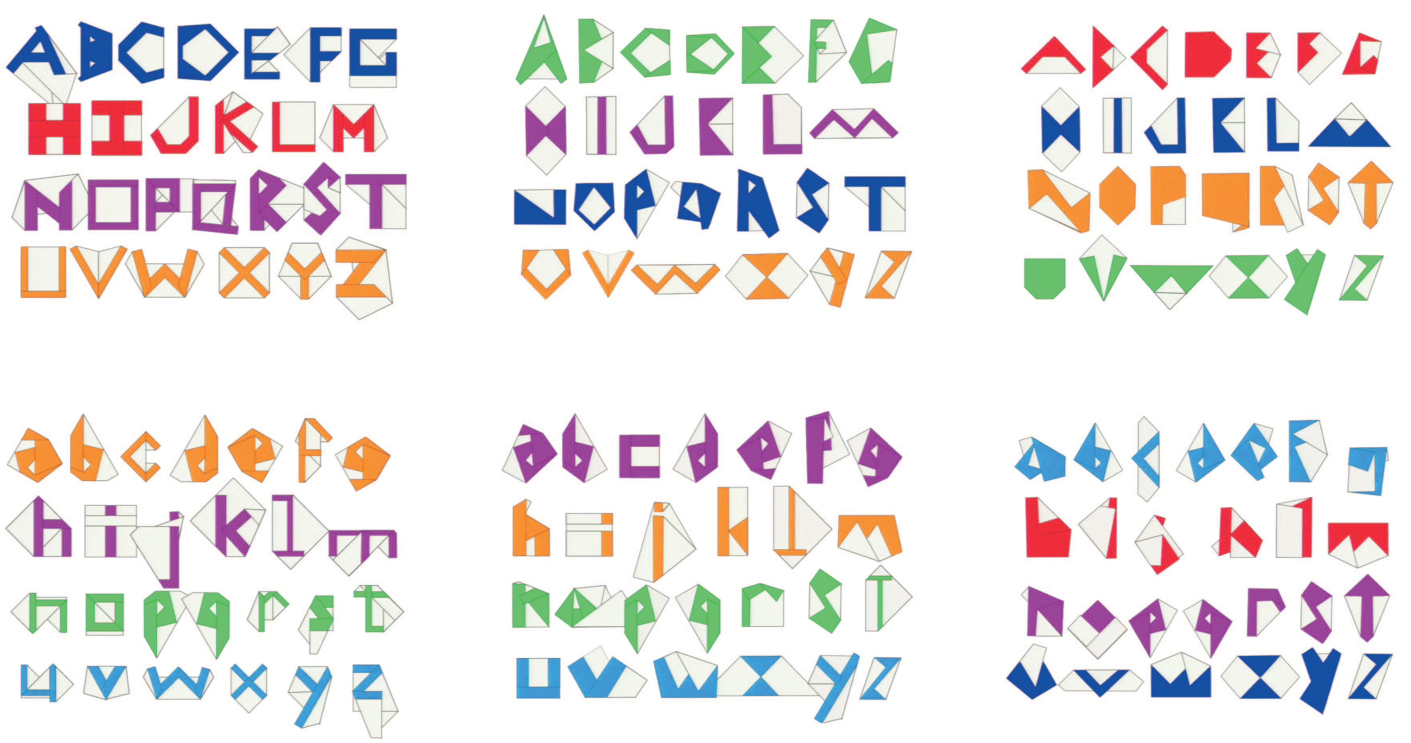
¿Un Papá Noel?, ¿en marzo?

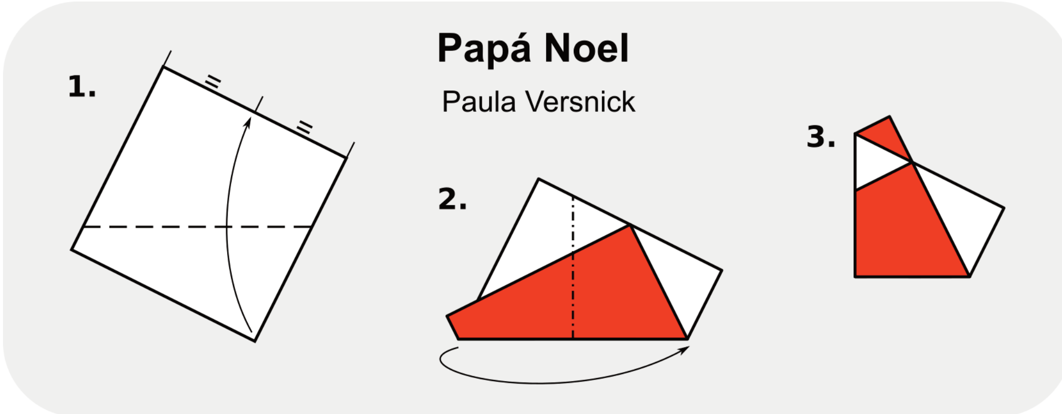
por
José Ángel Iranzo Sanz y Maider Goñi Urreta
(Universidad de Zaragoza; IES Cabañas, La Almunia de Doña Godina)

Muchas figuras de papiroflexia requieren de cientos de pasos para ser realizadas. En otras, en cambio, basta con una veintena de pliegues. Si deseamos introducir la papiroflexia en una clase de matemáticas es preferible que la figura en sí sea sencilla y, además, no suponga mucho tiempo de plegado, de manera que este pueda aprovecharse para discutir algún concepto matemático relativo a la figura de papel realizada.

En este artículo se plantean varios problemas sobre una figura minimalista que tan solo tiene dos pasos. Se trata de un caso extremo en cuanto a sencillez, pero no es único. Probablemente, la figura más famosa con menos pliegues (¡uno!) sea el estegosaurio de Joseph Wu. También son llamativos los alfabetos de la matemática e ingeniera estadounidense Jeannine Mosely: ha sido capaz de plegar cada una de las letras del alfabeto, tanto minúsculas como mayúsculas, utilizando solo 4 pliegues. Y también utilizando solo 3 pliegues. ¡Y también con solo 2 pliegues por letra!



En marzo de 2023, en uno de los talleres de la V Jornada de Educación Matemática en Aragón, enseñamos a plegar, entre otras figuras, el papá Noel diseñado por Paula Versnick. Al terminar el taller una de las asistentes contaba a sus compañeros que había aprendido a hacer un Papá Noel, a lo que uno le dice: «¿Un Papá Noel?, ¿en marzo?». Más allá de la anécdota, se trata de una figura sencilla que permite plantear problemas matemáticos a distintos niveles. Para plegarla es necesario un papel cuadrado con una cara de color rojo y otra de color blanco. Basta doblar uno de los vértices del cuadrado hasta el punto medio de uno de los lados no contiguos. Después, se realiza un pliegue perpendicular al anterior por su punto medio.



El objeto de interés en este caso no es precisamente la figura final, sino la obtenida en el paso inmediatamente anterior. En la figura 1 se ilustra dicho paso intermedio y se han denotado con letras varios puntos de interés. Esta figura permite trabajar conceptos variados: desde rectas que se cortan y que pueden verse al trasluz a procedimientos para dividir el papel en tres partes iguales, pasando por semejanza de triángulos o ternas pitagóricas. Como puede observarse, consta de tres triángulos rectángulos blancos: dos por delante y uno por detrás.

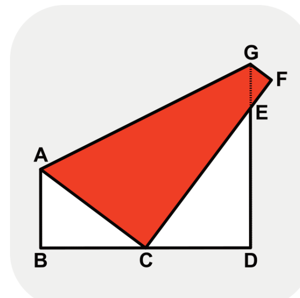


Figura 1

Semejanza de triángulos

Los tres triángulos blancos (*ABC*, *CDE* y *EFG*) son triángulos rectángulos. Deducir que, además, dichos triángulos son semejantes es sencillo si se tienen en cuenta los ángulos que los forman. Otro triángulo semejante a los anteriores es el definido por los vértices *ACE*, aunque en este caso no es tan evidente. Para comprobarlo basta utilizar las relaciones existentes entre los lados de los triángulos *ABC* y *CDE*:

$$\Delta\, ABC \text{ y } \Delta\, CDE \text{ semejantes} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{CD} \;\Rightarrow\; \frac{CE}{AC} = \frac{CD}{AB} \xrightarrow{CD\,=\,BC} \frac{CE}{AC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\xrightarrow{\Delta\, ABC \text{ y } \Delta\, CDE \text{ rectángulos}} \quad \Delta\, ABC \text{ y } \Delta\, ACE \text{ semejantes}$$

Sobre la figura final, tanto el saco como el gorro de Papá Noel son también triángulos semejantes. En dichos triángulos la suma de la hipotenusa y el cateto menor es igual al lado del cuadrado en el caso del saco e igual a la mitad del lado del cuadrado en el caso del gorro (se puede comprobar desplegando la figura). Esto permite estudiar la relación entre los perímetros de saco y gorro (uno es doble que el otro) o entre sus áreas (una es cuatro veces la del otro).

Ternas pitagóricas

El triángulo rectángulo más sencillo de construir y que, posiblemente, se utilizó para trazar ángulos rectos hace ya miles de años es aquel cuyos lados tienen las longitudes 3, 4 y 5 unidades, o cuyas medidas guardan estas proporciones. La terna (3, 4, 5) es una de las infinitas ternas pitagóricas existentes y también aparece en los triángulos de la figura 1, ya que los triángulos que ahí aparecen (*ABC*, *CDE* y *EFG*) tienen lados proporcionales a dicha terna.

Una forma sencilla de comprobarlo consiste en suponer que el lado del cuadrado original mide 8 unidades. Por tanto, en el triángulo *ABC*, el lado *BC* mide 4 unidades y los otros dos lados miden 8 unidades entre los dos. Utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene que los lados *AB* y *AC* miden 3 y 5 unidades, respectivamente.

División del papel en tres partes iguales

Para dividir el lado de un cuadrado en 2, 4, 8 o 16 partes iguales no es necesario, en principio, consultar ningún manual de papiroflexia, ya que de forma natural a uno se le ocurre dividir por la mitad una y otra vez. Sin embargo, la forma de dividir el lado del papel en 3 o 5 partes iguales no es tan evidente y, generalmente, es necesario recurrir a algún método específico. Uno de ellos se basa en los triángulos de la figura 1 y se deduce fácilmente calculando la medida del segmento DE. Continuando con los cálculos anteriores, en los que habíamos supuesto que el lado del cuadrado tenía una longitud de 8 unidades, y utilizando las propiedades de semejanza de triángulos, se obtiene que el lado DE mide $16/3$, es decir, $2/3$ de 8 unidades. Por tanto, para dividir el lado del cuadrado en tres partes iguales basta con doblar por la mitad el segmento DE.

Teorema de Haga

Como se ha visto, el primer paso para realizar el Papá Noel consiste en llevar una de las esquinas sobre la mitad de uno de los lados. Si en lugar de llevar dicha esquina al punto medio se lleva hasta cualquier punto del lado del cuadrado se obtiene, por ejemplo, un plegado como el de la figura 2, en el que se han señalado dos longitudes: x e y.

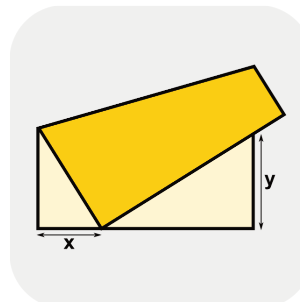


Figura 2

De acuerdo con el apartado anterior, si el lado del cuadrado mide 8 unidades y $x = 4$, entonces $y = 16/3$. Por tanto, si el lado del cuadrado mide 1 unidad y $x = 1/2$, entonces $y = 2/3$, deduciendo así un método para dividir el lado del papel en tres partes iguales.

Con un razonamiento similar al llevado a cabo previamente en este artículo se puede calcular el valor de y para cualquier valor de x sobre un cuadrado cuyo lado mida 1. En particular, se obtiene que $y = 2x/(1+x)$. En la siguiente tabla se observan los valores de y para distintos valores de x:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
y	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{5}$	$2\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{7}$	$2\frac{1}{8}$	$2\frac{1}{9}$	$2\frac{1}{10}$	$2\frac{1}{11}$

Como puede observarse, si sabemos dividir el lado del papel en partes iguales ($x = 1/n$), obtendremos que el segmento y mide $2/(n+1)$ y dividiéndolo por la mitad habremos dividido el lado del papel en $1/(n+1)$ partes iguales.

Director: Ricardo Alonso Liarte (IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

Consejo de Redacción: Alberto Elduque Palomo (Departamento de matemáticas de la Universidad de Zaragoza), Julio Sancho Rocher (IES Avempace, Zaragoza), Daniel Sierra Ruiz (CPI El Espartidero, Zaragoza).

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Octubre de 2023
ISSN: 2386-8821e