Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Probabilidad: una propuesta didáctica para 4º de ESO Opción A

Autor: Lidia Lipe Schlieper

Director: Carmen Julve Tiesto

Junio de 2014

EDUCACIÓN FACULTAD DE ZARAGOZA

Universidad Zaragoza 1542

ÍNDICE

A. DEFINICIÓN DEL OBJETO A ENSEÑAR

La siguiente propuesta didáctica tratará el objeto matemático de la Probabilidad en la asignatura de Matemáticas de 4º de Educación Secundaria Obligatoria, en la modalidad de opción A. Los objetivos serán los que marca la Orden del 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón, dentro del Bloque 6 Estadística y Probabilidad:

<< Experimentos aleatorios y sucesos. Experiencias aleatorias simples y compuestas. Asignación de probabilidades en experiencias simples mediante recuento: ley de Laplace. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad del suceso contrario. Probabilidad condicionada. Probabilidad total. Probabilidad estadística. Simulación.

Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con estudios estadísticos de poblaciones y con el azar. >>

En la tabla que se muestra a continuación aparecen los cinco Campos de Problemas que se van a enseñar con sus técnicas y tecnologías asociadas.

Campo de Problemas	Técnicas	Tecnologías
1. Exploración del espacio muestral	Visualización de los distintos resultados posibles	Definición del espacio muestral y los sucesos y sus operaciones
2. Probabilidad de sucesos simples	Mediante recuento y comprensión	Propiedades de la probabilidad y Regla de Laplace. Ley de los Grandes Números
3. Probabilidad de sucesos compuestos	Unión e intersección, compatibilidad/incompatibilidad y dependencia/independencia	Probabilidad de la unión y la intersección
4. Probabilidad condicionada	Recuento, Regla de Laplace y tablas de contingencia	Probabilidad condicionada
5. Probabilidad Total	Diagrama de árbol y visualización de las opciones posibles.	Teorema de la Probabilidad Total

B. ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD

En los libros de texto se encuentran distintos modos de introducción del cálculo de probabilidades. Los dos modos más comunes son:

a) Mediante un problema de azar con juegos de cartas, monedas, dados, etc.

b) Mediante un acercamiento histórico haciendo referencia a alguno de los precursores del campo del cálculo de probabilidad como Bernoulli, Galileo o Pascal. Este acercamiento suele también conllevar el estudio de alguno de sus problemas, que vienen a ser en juegos de azar.

Únicamente uno de los libros de texto estudiados realiza una introducción al espacio muestral y experimento aleatorio mediante la búsqueda de las distintas combinaciones que podemos encontrar al seleccionar dos corbatas y tres camisas. (**[1]** Bibliografía)**.**

La introducción del cálculo de probabilidades debería ampliarse a día de hoy con la gran cantidad de focos de información que se pueden conseguir. Un modo actual de introducir la probabilidad podría ser desde los datos deportivos, como por ejemplo la probabilidad de meter un triple en un partido de baloncesto, la probabilidad de marcar un penalti, etc.; desde datos económicos, por ejemplo, con la información de los robos cometidos en la zona en la que vivimos, comprobar si sería rentable contratar un seguro, etc. En estos casos se trabajaría con la probabilidad empírica, de modo que se enfocaría la probabilidad desde una visión distinta que la que se puede encontrar en los libros de texto, tradicionalmente trabajan con el concepto de probabilidad teórica. Páginas como la del Instituto Nacional de Estadística (www.ine.es) o el Instituto Aragonés de Estadística (www.aragón.es/iaest), permiten disponer de una gran cantidad de datos actuales con los que se podrían trabajar problemas y situaciones relacionadas con el concepto de probabilidad empírica.

Este enfoque podría resultar más motivador y beneficioso para los alumnos, ya que se encontrarían con situaciones que le pueden suceder en su día a día.

Los Campos de Problemas del cálculo de probabilidades usados en la mayor parte de los libros de texto se suelen agrupar en tres grandes categorías:

1) Los experimentos aleatorios y sucesos
2) La probabilidad de un suceso
3) Los experimentos compuestos y sus probabilidades.

En el Campo de Problemas 1 aparecen las técnicas de construcción del espacio muestral, la definición de sucesos y las operaciones que se pueden realizar con ello, unión, intersección, etc.

En el Campo de Problemas 2 aparecen técnicas de recuento de casos posibles y favorables y mediante las tablas de frecuencias. A ello van asociada la tecnología de la Regla de Laplace y las propiedades de la probabilidad, entre otras.

En el Campo de Problemas 3 se comienza a hablar de probabilidades condicionadas y dependencia e independencia de sucesos. Para ello se introducen las técnicas de conteo con la creación de tablas de frecuencias y diagramas de árbol para luego pasar a la regla del producto, Teorema de la Probabilidad Total y probabilidad condicionada, las cuales se denominan como tecnologías.

No suelen verse demostraciones sobre los métodos utilizados, será en cursos superiores dónde se ahonde en ellas.

El efecto que se busca en la enseñanza de la probabilidad vienen muy bien definido de la mano de Santaló (1977): “No se trata de conocer a fondo las teorías respectivas, cosa reservada a especialistas, sino de educar la intuición para que no parezcan cosas caprichosas ni milagrosas” (**[2]** Bibliografía). Se busca que sean capaces de distinguir entre los sucesos aleatorios y los sucesos deterministas como velocidad ($v = \frac{espacio}{tiempo}$), y que sean capaces de estudiar el comportamiento de los fenómenos aleatorios y tener información que permita tomar una decisión más razonable sobre estos sucesos. También es necesario que sepan distinguir entre la probabilidad teórica y la probabilidad empírica creada a través de la realización de múltiples repeticiones del experimento.

Nombrando a Pablo Sánchez Castillo y la importancia de la comprensión de la probabilidad, se dice que es una herramienta fundamental en el desarrollo de un individuo que va más allá de realizar experimentos aleatorios y juegos de azar, es una forma de entender el mundo, ampliar nuestra forma de pensar y acercarnos al resultado de un presunto evento para afrontarlo de tal manera que sea productivo para nosotros. Más que saber que la probabilidad de que salga cara al lanzar una moneda, es comprender e interpretar el significado de la cifra, qué se puede hacer con ese conocimiento o cómo se puede adaptar en la vida cotidiana (**[3]** Bibliografía).

A la hora de la verdad, en el propio aula, el efecto que suele producir es de apatía o incluso rechazo, debido generalmente a que el objeto aparece en los temas últimos de los libros de texto, por lo que se acaba impartiendo con prisa y desgana. Si no se le ofrece el necesario tiempo al alumno para comprender y asentar bien las bases de la probabilidad, éste acaba perdido y desorientado y no es capaz de interpretar la importancia de los contenidos adquiridos, ni ver toda la aplicación que tiene dicho objeto matemático en la vida cotidiana.

En general, los docentes tienen escaso manejo de los contenidos, basándose en los textos escolares a la hora de impartir la clase, los cuales no abarcan las realidades que viven los alumnos día a día, limitándose a abordar los contenidos desde una única perspectiva, .

Cuando a un alumno se le pregunta por el término *probabilidad*, no tiene una visión clara de su definición, lo asocia a los juegos de azar, lanzamiento de dados y monedas, etc., todo lo cual es algo altamente relacionado con la probabilidad., pero cuando se le pregunta la importancia de la probabilidad no logra establecer una respuesta concreta.

C. CONOCIMIENTOS PREVIOS

En la Orden del 9 de mayo de 2007, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria, se puede ver que a estos niveles se han iniciado en los primeros conceptos de azar y probabilidad. En el Bloque 4, denominado tratamiento de la información, azar y probabilidad, se encuentran los siguientes contenidos:

2º Ciclo

- *Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y para observar la imposibilidad de predecir un resultado correcto.*
- *Introducción al lenguaje del azar.*

3er Ciclo

- *Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y para observar la imposibilidad de predecir un resultado correcto.*
- *Presencia del azar en la vida cotidiana. Experimentos aleatorios y deterministas. Posibles resultados de un experimento aleatorio. Sucesos. Suceso imposible y seguro.*
- *Discusión de creencias e interpretaciones erróneas del azar: la suerte, el azar no tienen memoria, resultados equiprobables concebidos como imposibles, etc.*
- *Probabilidad: aproximación intuitiva. Grado de probabilidad de realización de un suceso.*
- *Aproximación a la ley de los grandes números: conjeturar probabilidades mediante tablas de resultados de experimentos aleatorios.*

Por otra parte, en la Orden del 9 de mayo de 2007 por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria se puede ver qué enseñanzas de probabilidad han tenido los alumnos en los anteriores cursos de la E.S.O. y que aparecen reflejadas en el Bloque 6, Estadística y Probabilidad, de los distintos cursos:

1º E.S.O. La única anotación que se tiene de probabilidad viene con la siguiente frase: […] *Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación* […].

2º E.S.O. No se hace especificación alguna del concepto de probabilidad, todo lo que aparece en el Bloque 6 es referido a Estadística.

3º E.S.O. En este curso sí que aparece una introducción completa en el campo de la probabilidad:

- *Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Imprevisibilidad y regularidad. Frecuencia relativa y probabilidad de un suceso: estabilidad de las frecuencias. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.*

- *Cálculo de probabilidades mediante la ley de Laplace. Utilización de distintas técnicas de recuento: tablas, diagramas de árbol, etc. Probabilidad de sucesos compatibles, incompatibles y contrarios. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.*

- *Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación.*

- *Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos. Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.*

Como se puede apreciar, en 3º E.S.O. aparece la mayor parte del temario de 4º, a falta de las experiencias compuestas y las probabilidades condicionadas; pero esto no se puede dar por sabido ya que la mayor parte de los alumnos lo habrán olvidado o ni tan siquiera lo habrán podido llegar a dar, ya que, en los libros de texto, el bloque de Estadística y Probabilidad siempre se encuentra al final, por lo que, como ya se ha especificado en el apartado A, múltiples veces no llega a impartirse o se imparte con prisas y de manera poco eficaz.

Se utilizarán los problemas de razón de ser del cálculo de probabilidades (apartado siguiente, D) para que los alumnos sean capaces de rememorar parte de los conocimientos anteriores.

D. RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

La intuición juega un papel fundamental, y sus funciones principales son ayudar al niño a entender su propio entorno por sus propios medios mucho antes de que sea capaz de comprender la complejidad del modelo matemático y preparar el conocimiento analítico posterior (**[4]** Bibliografía).

La principal razón de ser se basa en la aparición de la probabilidad en la vida cotidiana, ya que la mayor parte de los sucesos del día a día son aleatorios, comenzando con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar (cartas, lotería…) [también podemos introducirlo con el juego de Batalla naval que los alumnos seguramente conozcan] y avanzando en su estudio hasta el cálculo de probabilidades en su día a día, como sería el ejemplo de calcular la probabilidad de coger a la hora prevista el autobús (probabilidad simple), probabilidad de llegar tarde a clase habiendo cogido bien el autobús (probabilidad condicionada),etc.

A día de hoy, con toda la información que se tiene a disposición en Internet y otras fuentes, es posible la realización de muy distintas razones de ser de la probabilidad, la probabilidad de contratar un seguro de coche y que nos salga rentable, la probabilidad de padecer cierta enfermedad, y muchos otros casos.

El francés Didier Dacunha-Castelle (**[5]** Bibliografía), en su libro *Chemins de L'Aleatorie"* señala que el azar ha sido un recurso utilizado en algunas sociedades para resolver diversas situaciones y que en nuestra época hasta se ha intentado utilizar en la asignación de empleos. También agrega el aprendizaje de la duda, aprender a reconocer la incertidumbre, a saber que ella es parte del ejercicio de la ciudadanía.

"La probabilidad tiene la enorme cualidad de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales, y, por lo tanto, su conocimiento permite comprender y predecir mucho mejor el mundo en que vivimos" (**[6]** Bibliografía).

En términos del azar coincide las razones de ser históricas con las que se presentan en esta propuesta, pero no con el resto de razones de ser que se pueden introducir a día de hoy.

El primer juego de azar de la historia que se conoce pertenece a la antigua Mesopotamia, Sumerios y Asirios tallaban un hueso para que pudiera caer en cuatro posiciones distintas al que denominaban *astrágalo* o *talus* (se le considera el precursor del dado).

Se pueden encontrar algunos problemas de probabilidad en el siglo XIII de la mano de Richard de Fournival (1200-1250) en su poema *De Vetula* y de la mano de Luca Pacioli (1445-1517) con los repartos de apuestas.

Aunque los juegos de azar se han dado durante toda la historia, no fue hasta 1563 cuando se tuvo la primera constancia escrita sobre ello en el libro *"Liber de ludo alae" (Libro sobre el juego de los dados)* del italiano Girolamo Cardano (1501-1576). Se trata de un manual del jugador en el que Cardano habla, entre otros temas, de la equiprobabilidad, de la esperanza matemática y de la tabla de frecuencias.

Los matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) y Fermat (1601-1665) fueron, según los historiadores, los iniciadores de la probabilidad. Poseen obras tan interesantes como *Varia opera mathematica* de Fermat y *La Apuesta de Pascal*, en la que se presenta una discusión sobre la creencia en Dios basada en probabilidades:

- *Puedes creer en Dios; si existe, entonces irás al cielo, y si no existe no ganarás nada.*
- *Puedes no creer en Dios; si no existe, entonces tampoco ganarás nada, y si existe entonces no irás al cielo.*

El primer libro que recoge todos los problemas que se conocían hasta entonces con los resultados fue escrito por Jacques Bernoulli (1654-1705), *"Ars Conjectandi" (El arte de la conjetura) (1713)*, donde también enuncia la Ley de los Grandes Números. Su obra consta de cuatro partes: la primera contiene estudios de Huygens; la segunda variaciones, permutaciones y combinaciones; la tercera la aplicación de los teoremas de la teoría de permutaciones al cálculo de probabilidades; y la cuarta a la aplicación en la vida política y social.

Pierre-Simone Laplace (1749-1827) publicó en 1812 *Théorie Analytique des Probabilités.* En él realiza el primer intento por definir con rigor la noción de probabilidad, la que actualmente se conoce como definición clásica. También realizó una demostración formal del método de mínimos cuadrados para la combinación de observaciones numerosas.

PRIMER PROBLEMA DE CONSTRUCCIÓN DE LA RAZÓN DE SER: INTRODUCCIÓN DE PROBABILIDAD

En un campamento de natación participan los siguientes concursantes: Eduardo, Rocío, Fernando, Blanca, Carlos, Nuria, Silvia y Borja. Si se supone que cada uno de ellos tiene igual nivel, ¿te parece muy probable que Eduardo consiga la medalla de oro, Nuria la de plata y Fernando la de bronce?

El profesor planteará el problema en clase y primero los alumnos reflexionarán sobre él de modo individual. Tras el periodo de reflexión se pondrá en práctica el problema con material manipulativo en grupos de cuatro realizando aprendizaje colaborativo. En este caso será tan sencillo como escribir en pequeños trozos de papel el nombre de los concursantes y los alumnos realizarán extracciones apuntando en una hoja los nombres de los que consigan el primero, segundo y tercer puesto. Después de hacer unas 20 extracciones en grupo habrá otro periodo de reflexión dentro de aquél para responder a la pregunta del enunciado. Para finalizar, se pondrán en común todas las extracciones y los alumnos darán su resultado final. El profesor participará en el momento final para decir el resultado, que es aproximadamente un 0’003, es decir, las posiciones quedarían de este modo 3 veces de cada 1000 competiciones.

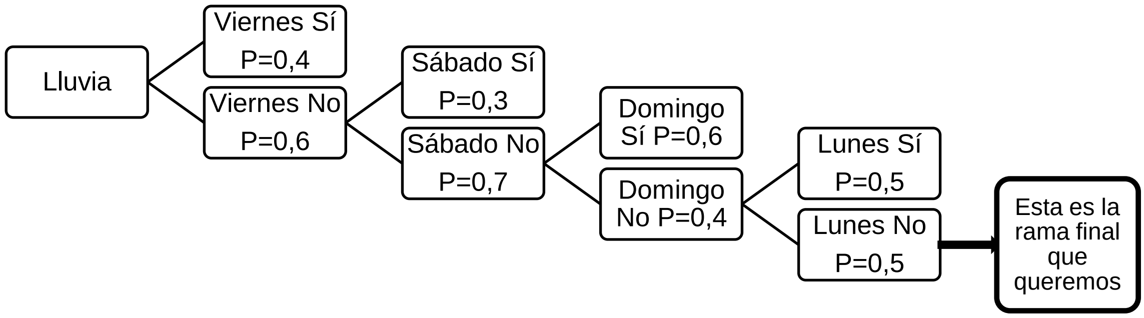
SEGUNDO PROBLEMA DE CONSTRUCCIÓN DE LA RAZÓN DE SER: ¿BUENAS VACACIONES?

Jorge se va con su familia de vacaciones a la playa este puente. El meteorólogo ha dicho que la probabilidad de que llueva el viernes es del 40%, el sábado del 30%, el domingo del 60% y el lunes del 50%. ¿Cuál es la probabilidad de que tengan unas vacaciones perfectas sin lluvia los cuatro días?

Este problema servirá para la razón de ser de encontrar las probabilidades en el día a día, en cualquier situación. Será necesario que los alumnos hayan recordado conceptos de probabilidad simple.

El profesor dividirá la clase en parejas para trabajar el ejercicio y el único material necesario será papel y bolígrafo. Los alumnos irán trabajando solos y el profesor irá dando algunas indicaciones si fuera necesario. No se darán más de 15 minutos para resolverlo, pasado este tiempo el profesor lo irá resolviéndo en la pizarra con las respuestas de los alumnos, dándoles libertad en el modo de resolución pero marcándoles un poco el camino si fuera el caso de que se desviasen.

Solución: $P\left(\text{llueva}_{\text{viernes}}^{C} \cap \text{llueva}_{\text{sábado}}^{C} \cap \text{llueva}_{\text{domingo}}^{C} \cap \text{llueva}_{\text{lunes}}^{C}\right) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}084$



E. CAMPO DE PROBLEMAS

PROBLEMA 1: ¡CUÁNTAS OPCIONES!

Para la definición del espacio muestral

¿Cuáles serían los posibles resultados de fin de partida del problema del Caballero de Meré? [Véase en el Anexo I]

Solución: Véase en el Anexo I.

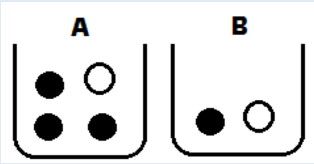
Este problema se utilizará para iniciar el tema de probabilidad, el profesor no dará ninguna indicación de cómo realizarlo. Los alumnos se posicionarán en grupos de cuatro para buscar las soluciones posibles.

Tras diez minutos de reflexión se pondrán en común los resultados y el profesor explicará el espacio muestral, los sucesos y las operaciones entre sucesos.

PROBLEMA 2: LA CAJA CORRECTA

Descubrimiento de la Regla de Laplace y comparación de probabilidades

En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca.



Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, ¿cuál de las dos cajas elegirías para hacer la extracción? ¿Por qué?

Solución: Los alumnos han de llegar a la conclusión de que si eligen la bolsa A tienen más opciones de sacar ficha negra, lo que se ve traducido en que la probabilidad de sacar ficha negra es mayor en la bolsa A, $\frac{3}{4}$ contra $\frac{1}{2}$.

Se planteará al comienzo del apartado de asignación de probabilidades de sucesos simples, de modo introductorio. Posiblemente los alumnos recordarán información de cursos anteriores, por lo que este problema se realizará de modo individual y luego una puesta en común con reflexión sobre lo realizado.

Tras la reflexión el profesor explicará el Campo de Problemas 2: Probabilidad de sucesos simples.

Con este problema se pretende modificar el pensamiento del alumno de elegir una opción sin más y, se le inculcará a la reflexión.

PROBLEMA 3: LOS SEMÁFOROS

Trabajo con unión e intersección de sucesos simples

Carlos pasa dos semáforos para ir al colegio cada mañana. El primero está verde 30 de cada 50 segundos y el segundo 30 de cada 90. ¿Qué probabilidad hay de que se pare en los dos semáforos? ¿Y de que se pare al menos en uno? ¿Y de que coja los dos en verde?

Solución: V_1~Primer semáforo en verde → $P(V_1) = {}^{3}/_{5}$

V_2~Segundo semáforo en verde → $P(V_2) = {}^{1}/_{3}$

- Probabilidad de que se pare en los dos semáforos, es decir de que los dos semáforos estén en rojo (verde contrario):

$$P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = P(\overline{V_1}) \cdot P(\overline{V_2}) = {}^{2}/_{5} \cdot {}^{2}/_{3} = {}^{4}/_{15}$$

- Probabilidad de que se pare en al menos uno:

$$P(\overline{V_1} \cup \overline{V_2}) = P(\overline{V_1}) + P(\overline{V_2}) - P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = {}^{2}/_{5} + {}^{2}/_{3} - {}^{4}/_{15} = {}^{12}/_{15}$$

otro modo es que vean y creen las tres opciones posibles: primero en rojo segundo en verde, primero en verde segundo en rojo y ambos en rojo.

- La probabilidad de que coja los dos en verde puede ser de dos modos:

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2) = {}^{3}/_{5} \cdot {}^{1}/_{3} = {}^{3}/_{15}$$

o dándose cuenta de que es el suceso contrario de la pregunta anterior.

Las operaciones con sucesos han sido explicadas ya en el Campo de Problemas 1. La clase se organizará en grupos de tres y el profesor intervendrá para ir dando información sobre la probabilidad de sucesos compuestos. Al llevar mayor complejidad este Campo, los alumnos necesitarán ese apoyo del profesor. Es importante que no todos los alumnos lleguen al resultado por el mismo camino, de modo que cuando todos hayan terminado se pueda realizar una discusión de los distintos métodos utilizados, si son correctos o no, etc.

El profesor explicará de modo claro el Campo de Problemas 3: Probabilidad de sucesos compuestos.

Con este problema se ampliará la técnica estudiada de la probabilidad simple al añadir la relación de dos sucesos y su probabilidad asociada.

PROBLEMA 4: FUMADORES Y CÁNCER

Manejo y comprensión de las tablas de contingencia. Descubrimiento de la probabilidad condicionada mediante aplicación de la Regla de Laplace en las tablas de contingencia

Se ha realizado un estudio sobre las enfermedades de pulmón. Los datos se recogen en la siguiente tabla:

	Fumador (F)	*No fumador (NF)*	*Total*
Padecer cáncer de pulmón (C)	*20*	*25*	*45*
No padecer cáncer de pulmón (NC)	*135*	*320*	*455*
Total	*155*	*345*	*500*

¿Qué informaciones nos da la tabla?

a) ¿Cuál es la probabilidad de ser fumador? ¿Y de tener cáncer? ¿Puedes explicar su significado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de, entre los fumadores, seleccionar a una persona con cáncer? ¿Y entre los no fumadores?

c) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar a una persona fumadora sin cáncer de pulmón?

d) Intenta crear una fórmula para el apartado b) con lo que conoces hasta ahora.

Solución: un primer paso es la comprensión de los datos que aparecen en la tabla, es necesario que lleguen a entender que los datos del centro son las intersecciones de dos sucesos (que ya han visto en el Campo de Problemas anterior) y que en la última fila y en la última columna aparecen probabilidades simples.

a) $\mathrm{P(F)} = \frac{155}{500} = \frac{31}{100} = 0{,}31$ es la probabilidad de seleccionar a un fumador de entre las 500 personas.

$\mathrm{P(C)} = \frac{45}{500} = \frac{9}{100} = 0{,}09$ es la probabilidad de seleccionar a una persona que padezca cáncer de pulmón entre las 500 personas.

b) $\mathrm{P(tener\ cancer\ entre\ los\ fumadores)} = \frac{20}{155} = \frac{4}{31} = 0{,}129$ es la probabilidad de seleccionar una persona con cáncer entre los fumadores.

$$\mathrm{P(tener\ cancer\ entre\ los\ no\ fumadores)} = \frac{25}{345} = \frac{5}{69} = 0{,}072$$

es la probabilidad de seleccionar una persona con cáncer entre los no fumadores.

c) $\mathrm{P(F \cap NC)} = \frac{135}{500} = \frac{27}{100} = 0{,}27$ es la probabilidad de seleccionar a una persona sin cáncer que sea fumadora entre las 500 personas.

d) Se trata de que lleguen a sacar la fórmula por ellos mismos

$$\mathrm{P(C|F)} = \frac{\mathrm{P(C \cap F)}}{\mathrm{P(F)}} = \frac{\text{intersección}}{\text{condición}}$$

Antes de dar la fórmula de la probabilidad condicionada se les planteará este problema para que piensen por sí mismo el sentido de una condición. La clase se organizará en parejas y, principalmente, el profesor no intervendrá en nada, salvo que sea necesario. En el Campo de Problemas 2 han sido explicadas las probabilidades desde frecuencias, por lo que no deberían tener complicaciones a la hora de realizar el problema.

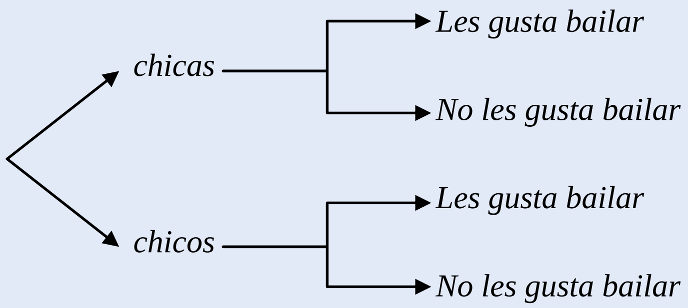
Al acabar el este problema ya estará realizada la mayor parte del Campo de Problemas 4. Si alguno de los grupos no hubiese llegado a las conclusiones esperadas serán otros de los grupos quienes saldrán a la pizarra a explicar el resultado. Para finalizar, el profesor implementará en la clase otro modo de cálculo de la intersección de sucesos desde la fórmula de la probabilidad condicionada. Es importante que los alumnos asuman que hay más de un método para conseguir buenos resultados, y que depende de los datos del problema la selección de un método u otro.

Este problema supondrá la generalización de la Regla de Laplace al caso de probabilidades condicionadas a través de una tabla de contingencia.

PROBLEMA 5: TODOS A BAILAR

Uso del diagrama de árbol y descubrimiento del Teorema de la Probabilidad Total

En mi clase hay el mismo número de chicas que de chicos. A las dos terceras partes de las chicas les gusta bailar y a una cuarta parte de los chicos también. ¿Sabrías poner las probabilidades correspondientes en el las ramas del siguiente diagrama (se llama diagrama de árbol)?



Las probabilidades que tenemos, ¿qué representan?

Si cogemos a un compañero al azar, ¿cuál sería la probabilidad de que le gustase bailar?

¿Eres capaz de ver la relación de este diagrama con las tablas de contingencia?

Solución: $\text{P(chica)} = {}^{1}\!/_{2}$ $\text{P(chico)} = {}^{1}\!/_{2}$

$\text{P(Bailar|chica)} = {}^{2}\!/_{3}$ $\text{P(NoBailar|chica)} = {}^{1}\!/_{3}$

$$P(\text{Bailar}|\text{chico}) = {}^{1}\!/_{4} \qquad P(\text{NoBailar}|\text{chico}) = {}^{3}\!/_{4}$$

$$P(\text{Bailar}) = P(\text{Bailar}|\text{chica}) \cdot P(\text{chica}) + P(\text{Bailar}|\text{chico}) \cdot P(\text{chico}) =$$

$$= {}^{2}\!/_{3} \cdot {}^{1}\!/_{2} + {}^{1}\!/_{4} \cdot {}^{1}\!/_{2} = {}^{11}\!/_{24}$$

La idea es que creen la probabilidad de bailar desde el diagrama viendo las dos opciones que aparecen. Tras ello buscarán la fórmula con las expresiones conocidas.

	Chicas	Chicos	Total
Les gusta bailar	${}^{1}\!/_{2} \cdot {}^{2}\!/_{3} = {}^{1}\!/_{3}$	${}^{1}\!/_{2} \cdot {}^{1}\!/_{4} = {}^{1}\!/_{8}$	${}^{1}\!/_{3} + {}^{1}\!/_{8} = {}^{11}\!/_{24}$
No les gusta bailar	${}^{1}\!/_{2} \cdot {}^{1}\!/_{3} = {}^{1}\!/_{6}$	${}^{1}\!/_{2} \cdot {}^{3}\!/_{4} = {}^{3}\!/_{8}$	${}^{1}\!/_{6} + {}^{3}\!/_{8} = {}^{13}\!/_{24}$
Total	${}^{1}\!/_{2}$	${}^{1}\!/_{2}$	1

De este modo verán que las tablas de contingencia también pueden crearse con las probabilidades.

La clase se dividirá en parejas, el profesor propondrá el problema a la clase y los alumnos iniciarán la investigación de la solución. Posiblemente, lo que más dificultades les cree a los alumnos sea la colocación de las probabilidades en las ramas del árbol ya que será la primera vez que trabajan con él, por lo que el profesor deberá intervenir en algunos grupos con dificultades para darles pautas de actuación. Para realizar el cálculo de la probabilidad de bailar será necesario que recuerden el primer problema para ver las dos opciones posibles y ser capaces de descubrir su creación.

En este problema serán los alumnos los que intervengan al finalizar para poner en común el resultado y la fórmula, aunque será el profesor el que le ponga nombre, Teorema de la Probabilidad Total.

El cambio de técnica que se creará en este problema será la nueva visualización de la probabilidad condicionada con el diagrama de árbol, además de ver las tablas de contingencia con probabilidades y no con frecuencias.

F. TÉCNICAS

EJERCICIOS ASOCIADOS AL CAMPO DE PROBLEMAS 1: EXPLORACIÓN DEL ESPACIO MUESTRAL

Ejercicio 1.1: Espacio muestral

Este ejercicio abarca la definición del espacio muestral de un experimento aleatorio y sirve para el entendimiento de los sucesos y la visualización de las distintas opciones posibles.

Isabel tiene una muñeca que tiene dos faldas, una roja y otra azul, y tres camisetas, una verde, una lila y una roja. ¿De cuantos modos puede vestir Isabel a su muñeca? ¿En cuántos sucesos lleva la camiseta lila?

Solución: $F_R \rightarrow$ falda roja $F_A \rightarrow$ falda azul

$C_v \rightarrow$ camiseta verde $C_L \rightarrow$ camiseta lila

$C_R \rightarrow$ camiseta roja

Espacio muestral: (F_R, C_V); (F_R, C_L); (F_R, C_R); (F_A, C_V); (F_A, C_L); (F_R, C_R)

La camiseta lila aparece en dos sucesos.

Este ejercicio se presentará tras la explicación por parte del profesor del espacio muestral y los sucesos elementales y compuestos. Los alumnos lo resolverán de modo individual y la corrección del ejercicio la realizará un alumno en la pizarra.

Ejercicio 1.2: Operaciones con sucesos

Este ejercicio sirve para ejercitar la comprensión de los sucesos compatibles e incompatibles y las operaciones con sucesos, unión, intersección y contrario.

Del experimento sacar una carta de una baraja de 40 cartas definimos los siguientes sucesos:

A=”Sacar una carta que sea oro”

B=”Sacar una carta que sea figura”

C=”Sacar una carta que sea as”

¿Son compatibles o incompatibles?

Define las siguientes operaciones con ellos y di cuántas cartas lo cumplen: A^C, $A\cup B$, $B\cup C$, $A\cap B$, $A\cap C$, $(B\cup C)^C$ *y* $(A\cap C)^C$.

<u>Solución</u>:

A y B son compatibles, A y C son compatibles y B y C son incompatibles.

A^C = ”No sacar una carta que sea oro”=”Sacar una carta que sea copas, bastos o espadas”. Hay 30 cartas que cumplen el suceso.

$A\cup B$ = ”Sacar una carta que sea oro o figura”. Hay 10 oros y 12 figuras, pero 3 figuras son otro, por lo que 19 cartas cumplen el suceso.

$B\cup C$ = ”Sacar una carta que sea figura o as”. Hay 12 figuras y 4 ases, por lo que 16 cartas cumplen el suceso.

$A\cap B$ = ”Sacar una carta que sea oro y figura”. Hay 3 figuras de oros.

$A\cap C$ = ”Sacar una carta que sea oro y as”. Sólo hay 1, el as de oros.

$(B\cup C)^C$ = ”No sacar una carta que sea figura ni as”=”Sacar una carta comprendida entre el 2 y el 7”. Hay 24 cartas que cumplen el suceso.

$(A\cap C)^C$ = ”No sacar una carta que sea oro ni as”=”Sacar cualquier carta siempre que no sea el as de oros”. Hay 39 cartas que cumplen.

Este ejercicio se expondrá al finalizar la explicación del Campo de Problemas 1. Como los alumnos ya poseerán los conocimientos necesarios, resolverán el ejercicio de modo individual y la corrección del ejercicio la realizará un alumno en la pizarra.

EJERCICIOS ASOCIADOS AL CAMPO DE PROBLEMAS 2: PROBABILIDAD DE SUCESOS SIMPLES

Ejercicio 2.1: Regla de Laplace

Este ejercicio sirve para practicar la Regla de Laplace mediante el recuento y la comprensión del ejercicio.

Si lanzamos dos dados y nos fijamos en la suma de sus cifras calcula la probabilidad de:

a) Que el resultado sea 1;

b) Que el resultado sea 7;

c) Que el resultado sea un número menor de 6;

d) Que el resultado sea menor de 3 o mayor de 10.

Solución: Para facilitarnos el conteo realizamos una tabla con la suma de los dados.

Soluciones	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$\mathrm{P}(\mathrm{Suma} = 1) = {}^{0}/_{36} = 0$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Suma} = 7) = {}^{6}/_{36} = {}^{1}/_{6}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Suma} < 6) = {}^{10}/_{36} = {}^{5}/_{18}$$

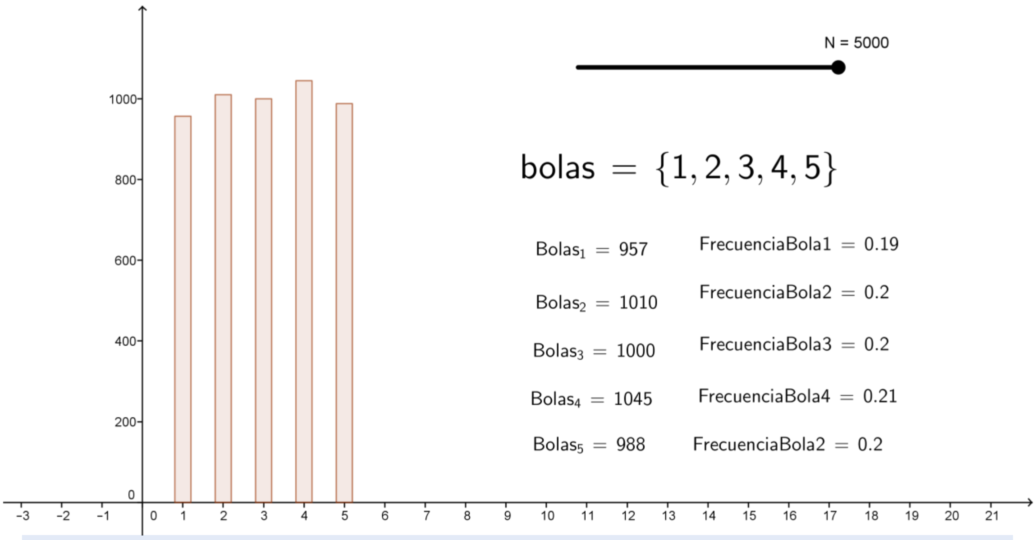
$$\mathrm{P}(\mathrm{Suma} < 3 \text{ ó } > 10) = {}^{4}/_{36} = {}^{1}/_{9}$$

El ejercicio se realizará tras la explicación de las probabilidades de los sucesos simples y la Regla de Laplace. Los alumnos se organizarán en parejas, sobre todo por la dificultad del planteamiento de la tabla de suma, y el profesor intervendrá si surge alguna dificultad. La corrección del ejercicio la realizará un alumno en la pizarra.

Ejercicio 2.2: Ley de los Grandes Números

En este ejercicio aparece la Ley de los Grandes Números y se da uso al programa GeoGebra. Con él se ejercita la comprensión de las probabilidades cuando el experimento se repite un gran número de veces.

En una bolsa hay cinco bolas numeradas del 1 al 5. Realizando extracciones con GeoGebra, hasta N=5000, ¿cuáles son las frecuencias obtenidas? ¿Y la probabilidad de obtener un múltiplo de dos?



http://www.geogebratube.org/student/m120268

Solución: las probabilidades dependerán de la muestra de cada uno, las probabilidades las tenemos en la imagen superior.

$$P(\text{múltiplo de 2}) = {(1010+1045)}/{5000} = 0{,}411$$

Este ejercicio se presentará tras la explicación de la Ley de los Grandes Números, al finalizar el Campo de Problemas 2. Para este problema los alumnos se colocarán por parejas con una *tablet* con el programa GeoGebra. Al ser la primera vez que usen GeoGebra en Probabilidad de 4º de la E.S.O. el profesor iniciará explicando los comandos necesarios para la realización del ejercicio con ejemplos sencillos. Los alumnos realizarán trabajo autónomo pudiendo preguntar al profesor en caso de duda con la utilización del programa. La corrección del ejercicio la realizará el profesor desde el ordenador.

EJERCICIOS ASOCIADOS AL CAMPO DE PROBLEMAS 3: PROBABILIDAD DE SUCESOS COMPUESTOS

Ejercicio 3.1: Uniones

Con este ejercicio se trabajan las probabilidades de las operaciones con sucesos, más concretamente la de la unión. También sirve para practicar la buena lectura, la correcta comprensión de los enunciados y la capacidad para extraer toda la información que aparece en ellos.

En una clase de 4º de la E.S.O. con 30 alumnos, hay 13 que tienen Religión y el resto no; 5 que tienen Francés y el resto Inglés; y 10 que tienen Taller de Matemáticas y el resto otra optativa. Si elegimos un alumno al azar:

a) Calcula la probabilidad de que no tenga Religión;

b) Calcula la probabilidad de que tenga Taller de Matemáticas;

c) Si sabemos que 11 alumnos tienen Inglés y Religión, ¿cuál es la probabilidad de que un alumno tenga Inglés o Religión?

Solución: El primer paso que hay que dar es extraer la información del enunciado

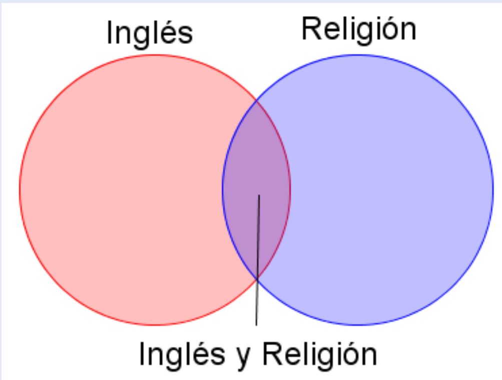
N=30 $\quad P(\text{Religión}) = {}^{13}/_{30} \quad P(\text{Francés}) = {}^{5}/_{30} = {}^{1}/_{6}$

$P(\text{Inglés}) = {}^{25}/_{30} = {}^{5}/_{6} \quad P(\text{Taller}) = {}^{10}/_{30} = {}^{1}/_{3}$

a) $P(\text{Religión}^C) = 1 - P(\text{Religión}) = {}^{17}/_{30}$

b) $P(\text{Taller de Matemáticas}) = {}^{1}/_{3}$

c)



$$P(\text{Inglés} \cap \text{Religión}) = {}^{11}/_{30}$$

$$P(\text{Inglés} \cup \text{Religión}) = P(\text{Inglés}) + P(\text{Religión}) - P(\text{Inglés} \cap \text{Religión})$$

$$= {}^{5}/_{6} + {}^{13}/_{30} - {}^{11}/_{30} = {}^{27}/_{30} = {}^{9}/_{10}$$

Se trata de sucesos dependientes.

Este ejercicio se resolverá tras la explicación de la probabilidad de la unión de sucesos. Se realizará de modo individual y la corrección del ejercicio la realizará un alumno en la pizarra.

Ejercicio 3.2: Intersecciones

Con este ejercicio se trabajan las probabilidades de las operaciones con sucesos, más concretamente la de la intersección. También sirve para practicar y distinguir los conceptos de dependencia e independencia.

La probabilidad de que un hombre padezca cierta enfermedad es $^1/_4$ *y la de que la mujer lo padezca* $^1/_3$ *. ¿Los sucesos son dependientes o independientes?*

a) Calcula la probabilidad de que ambos padezcan dicha enfermedad;

b) Calcula la probabilidad de que el hombre la padezca y la mujer no;

c) Calcula la probabilidad de que no la padezca ninguno.

Solución: Como se trata de sucesos independientes haremos uso de la regla del producto.

H → el hombre padece la enfermedad

M → la mujer padece la enfermedad

a) $P(H \cap M) = {}^1/_4 \cdot {}^1/_3 = {}^1/_{12}$

b) $P(H \cap M^C) = {}^1/_4 \cdot (1 - {}^1/_3) = {}^1/_4 \cdot {}^2/_3 = {}^1/_6$

c) $P(H^C \cap M^C) = (1 - {}^1/_4) \cdot (1 - {}^1/_3) = {}^3/_4 \cdot {}^2/_3 = {}^1/_2$

Este ejercicio se resolverá tras la explicación de la probabilidad de la intersección de sucesos, al terminar el Campo de Problemas 3. Se realizará de modo individual y la corrección del ejercicio la realizará un alumno en la pizarra.

EJERCICIOS ASOCIADOS AL CAMPO DE PROBLEMAS 4: PROBABILIDAD CONDICIONADA

Ejercicio 4.1: Creando tablas de contingencia

Este ejercicio engloba la comprensión de las probabilidades de operaciones con sucesos y la comprensión de las tablas de contingencia. También ejercitar la buena lectura y comprensión de los enunciados y la capacidad para extraer toda la información que aparece en ellos.

A una comida asisten 28 hombres y 32 mujeres. Han elegido carne 16 hombres y 20 mujeres, tomando pescado el resto. Con estos datos crea la tabla de contingencia, complétala y escribe los sucesos que representa cada dato. Si elegimos a una persona al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Probabilidad de que haya tomado pescado;

b) Probabilidad de que sea mujer y haya tomado pescado;

c) Si esa persona ha tomado carne, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

d) Y si selecciono a un hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya tomado pescado?

<u>Solución</u>: Es importante que creen bien la tabla de contingencia, esto indicará que entienden la información dada.

	Hombres	Mujeres	Total
Tomaron carne	16	20	36
Tomaron pescado	12	12	24
Total	28	32	60

Personas en la comida = 60

Hombre = 28 personas — Mujer = 32 personas

Tomaron carne = 36 personas — Tomaron pescado = 24 personas

Hombre ∩ Toma carne = 16 p. — Hombre ∩ Toma pescado = 12 p.

Mujer ∩ Toma carne = 20 p. — Mujer ∩ Toma pescado = 12 p.

a) $\mathrm{P(Pescado)} = {}^{24}/_{60} = {}^{2}/_{5}$

b) $\mathrm{P(Hombre|Carne)} = {}^{16}/_{36} = {}^{4}/_{9}$

c) $\mathrm{P(Mujer \cap Pescado)} = {}^{12}/_{60} = {}^{1}/_{5}$

d) $\mathrm{P(Pescado|Hombre)} = {}^{12}\!/_{28} = {}^{3}\!/_{7}$

Este ejercicio se expondrá tras la institucionalización de la fórmula de la probabilidad condicionada. Este trabajo se hará de modo individual y la corrección del ejercicio la realizará un alumno en la pizarra.

Ejercicio 4.2: Probabilidades con sucesos compatibles/incompatibles – dependientes/independientes

Con este ejercicio se trabaja la comprensión de las relaciones entre sucesos y en lo que ello afecta a las probabilidades. En él se ve la necesidad de conocer las fórmulas y pensar el modo en que se pueden resolver incógnitas, llegando incluso a aplicar resolución de sistemas de ecuaciones.

Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad tal que P(A∪B)=0,7 y P(A)=0,3. Calcula la probabilidad de B dados los siguientes casos:

a) Los sucesos A y B son incompatibles;

b) Los sucesos A y B son independientes;

c) P(A|B)=0,35.

Solución: Hay más de un método posible.

a) Si los sucesos A y B son incompatibles quieres decir que P(A∩B)=0, con lo que calculamos

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)} \rightarrow 0{,}7 = 0{,}3 + \mathrm{P(B)} \Rightarrow \mathrm{P(B)} = 0{,}4$$

b) Si los sucesos A y B son independientes quiere decir que P(A∩B)=P(A)·P(B) y que P(B∩A)=P(B)·P(A), por lo que

$$\text{Ecuación 1: } \mathrm{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A \cap B)} = 0{,}3 \cdot \mathrm{P(B)}$$

$$\text{Ecuación 2: } \mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B)} = 0{,}3 + \mathrm{P(B)} - 0{,}7 \Rightarrow \mathrm{P(A \cap B) = P(B)} - 0{,}4$$

Mediante igualación:

$$0{,}3 \cdot \mathrm{P(B) = P(B)} - 0{,}4 \Rightarrow -0{,}7 \cdot \mathrm{P(B)} = -0{,}4 \Rightarrow \mathrm{P(B)} = {}^{0{,}4}\!/_{0{,}7} = {}^{4}\!/_{7}$$

c) Siendo P(A|B)=0,35 los sucesos son dependientes, entonces

$$\text{Ecuación 1: } P(A|B) = {P(A \cap B)}/{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}35 * P(B)$$

$$\text{Ecuación 2: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B)$$
$$= 0{,}3 + P(B) - 0{,}7 \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) - 0{,}4$$

Mediante igualación:

$$0{,}35 \cdot P(B) = P(B) - 0{,}4 \Rightarrow -0{,}65 \cdot P(B) = -0{,}4 \Rightarrow P(B) =$$
$${0{,}4}/{0{,}65} = {40}/{65} = {8}/{13}$$

El ejercicio se implementará al finalizar la explicación del Campo de Problemas 4. La clase estará organizada en parejas para la resolución del ejercicio y el profesor no intervendrá, si alguna de las parejas presenta dificultades tendrá que preguntar a otra pareja vecina. La corrección del ejercicio la realizará un alumno en la pizarra y si alguna pareja hubiese llegado a la respuesta correcta por otro camino también lo pondrán en la pizarra para que los alumnos vean las distintas opciones.

EJERCICIOS ASOCIADOS AL CAMPO DE PROBLEMAS 5: PROBABILIDA TOTAL

Ejercicio 5.1: Creación y estudio del diagrama de árbol

Con este ejercicio se entrena la comprensión de los textos y la extracción de la información para ordenarla de modo sencillo y comprensible, mediante el diagrama de árbol. También se entrena la visualización de opciones.

Una empresa de construcción de cohetes propulsores de astronautas desea que las condiciones de seguridad en los lanzamientos sean muy altas, debido al elevado coste de los proyectos y al tiempo que se tarda en poner todo a punto de nuevo. En uno de esos cohetes hay instalados tres dispositivos de seguridad, Alfa, Beta y Gamma, para evitar un fallo en el encendido, y Beta se pone automáticamente en funcionamiento si falla Alfa, y lo mismo ocurre con Gamma si falla Beta. La probabilidad de que funcione Alfa es 0,9, la de que funcione Beta es 0,95 y la de que funcione Gamma es 0,98.

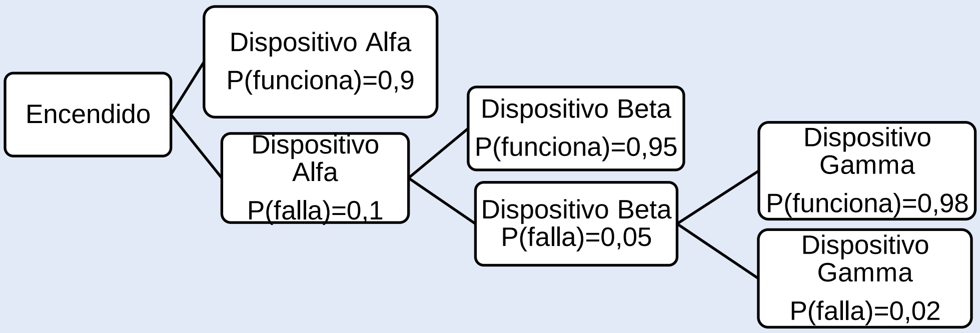
Dibuja un diagrama de árbol que lo represente y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen los tres dispositivos en el mismo lanzamiento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que encender con el dispositivo Gamma?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que encienda con cualquiera de los dispositivos?

Solución:



a) $P(\text{Alfa}_{\text{falla}} \cap \text{Beta}_{\text{falla}} \cap \text{Gamma}_{\text{falla}}) = 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}02 = 0{,}0001$

b) $P(\text{enciende con Gamma}) =$

$P(\text{Alfa}_{\text{falla}} \cap \text{Beta}_{\text{falla}} \cap \text{Gamma}_{\text{enciende}}) = 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}98 = 0{,}0049$

c) Se presentan tres opciones y dos modos posibles de realizar el cálculo

$$P[(\text{Alfa}_{\text{enciende}}) \cup (\text{Alfa}_{\text{falla}} \cap \text{Beta}_{\text{enciende}}) \cup (\text{Alfa}_{\text{falla}} \cap \text{Beta}_{\text{falla}} \cap \text{Gamma}_{\text{enciende}})] = 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}98 = 0{,}9999$$

$$P(\text{encienda}) = 1 - P(\text{Alfa}_{\text{falla}} \cap \text{Beta}_{\text{falla}} \cap \text{Gamma}_{\text{falla}}) = 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999$$

Este ejercicio se resolverá tras la explicación de la creación y estudio de los diagramas de árbol. Al ser un ejercicio un poco diferente, los alumnos se pondrán en grupos de tres para su resolución. La corrección del ejercicio la realizará un alumno en la pizarra y si alguno de los grupos lo hubiese realizado de modo diferente lo pondrá en común con el resto de la clase y se harán unos minutos de discusión sobre cuál es el mejor método, pudiendo llegar a la conclusión unánime de que los métodos son igual de correctos o no.

Ejercicio 5.2: Teorema de la Probabilidad Total y relaciones

Con este ejercicio se trabaja el pensamiento intuitivo, reforzando el método de construcción de los diagramas de árbol y la comprensión de la necesidad de uso de todos los conocimientos adquiridos hasta el momento. También se trabaja la relación entre las tablas de contingencia y el diagrama de árbol, es decir, los valores y sus frecuencias asociadas.

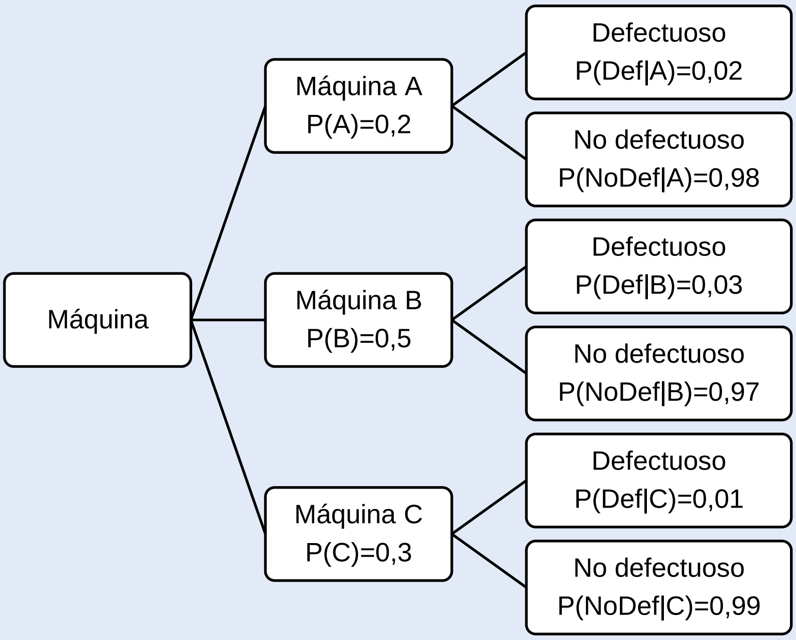
En una fábrica de enlatados se producen 5000 envases diarios con tres máquinas distintas. La máquina A produce 1000 envases, la máquina B 2500 y la máquina C 1500, pero estas máquinas tienen unas probabilidades de producir envases defectuosos del 2, 3 y 1% respectivamente. Crea el diagrama de árbol correspondiente y calcula:

a) *La probabilidad de que, elegido un envase al azar, sea defectuoso;*

b) *Si el envase seleccionado es defectuoso, ¿qué probabilidad hay de que venga de la máquina A?*

c) *Con esos 5000 envases y las probabilidades conocidas crea la tabla de contingencia asociada.*

Solución:



a) $\mathrm{P(Defectuoso)} = \mathrm{P(Def|A)} \cdot \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(Def|B)} \cdot \mathrm{P(B)} + \mathrm{P(Def|C)} \cdot \mathrm{P(C)} = 0{,}02 \cdot 0{,}2 + 0{,}03 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0{,}3 = 0{,}022$

b) $\mathrm{P(A|Def)} = {}^{\mathrm{P(A \cap Def)}}\!/_{\mathrm{P(Def)}} = {}^{[\mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(Def|A)}]}\!/_{\mathrm{P(Def)}} = {}^{0{,}2 \cdot 0{,}02}\!/_{0{,}022} = 0{,}\widehat{18}$

	Máquina A	Máquina B	Máquina C	Total
Defectuoso	20	75	15	110
No defectuoso	980	2425	1485	4890
Total	1000	2500	1500	5000

El ejercicio se realizará al finalizar la explicación del último Campo de Problemas, el 5. La realización del ejercicio será en parejas, se pondrá de manifiesto a la finalización los resultados obtenidos. Tras ello el profesor llevará a cabo una discusión con los alumnos sobre la relación existente entre las tablas de contingencia y los diagramas de árbol.

G. TECNOLOGÍAS

En la tabla creada en el apartado A, que también se muestra a continuación, aparecen las tecnologías que servirán para razonar las técnicas usadas en los distintos Campos de Problemas.

Campo de Problemas	Técnicas	Tecnologías
1. Exploración del espacio muestral	Visualización de los distintos resultados posibles	Definición del espacio muestral y los sucesos y sus operaciones
2. Probabilidad de sucesos simples	Mediante recuento y comprensión	Propiedades de la probabilidad y Regla de Laplace. Ley de los Grandes Números
3. Probabilidad de sucesos compuestos	Unión e intersección, compatibilidad/incompatibilidad y dependencia/independencia	Probabilidad de la unión y la intersección
4. Probabilidad condicionada	Recuento, Regla de Laplace y tablas de contingencia	Probabilidad condicionada
5. Probabilidad Total	Diagrama de árbol y visualización de las opciones posibles.	Teorema de la Probabilidad Total

Generalmente, el profesor es la persona sobre la que recae la responsabilidad de justificar las técnicas utilizadas, aunque esta propuesta didáctica promueve el descubrimiento de los razonamientos que van a justificar las técnicas por parte de los alumnos en determinadas ocasiones.

A continuación se exponen las tecnologías que justifican las técnicas para cada Campo de Problemas, así como la metodología a seguir en su implementación en el aula.

TECNOLOGÍAS QUE JUSTIFICAN EL CAMPO DE PROBLEMAS 1: EXPLORACIÓN DEL ESPACIO MUESTRAL

La visualización de los distintos resultados posibles se justificará de manera intuitiva aunque será el profesor el que institucionalizará la definición del espacio muestral, los distintos tipos de sucesos y sus operaciones mediante explicación directa durante la clase, tras la resolución del Problema 1 "¡Cuántas opciones!"

TECNOLOGÍAS QUE JUSTIFICAN EL CAMPO DE PROBLEMAS 2: PROBABILIDAD DE SUCESOS SIMPLES

La probabilidad de los sucesos simples se justificará mediante la Regla de Laplace y sus propiedades, que serán explicadas por el profesor antes de la realización del Ejercicio 2.1., tras la comprensión del significado de probabilidad por parte de los alumnos con el Problema 2 "La caja correcta". La justificación mediante la Ley de los Grandes Números también vendrá de mano del profesor antes de la realización del Ejercicio 2.2.

TECNOLOGÍAS QUE JUSTIFICAN EL CAMPO DE PROBLEMAS 3: PROBABILIDAD DE SUCESOS COMPUESTOS

Tras la realización del Problema 3 "Los semáforos" los alumnos serán quienes, con las probabilidades de la unión y la intersección, justificarán las probabilidades de sucesos compuestos con sus conocimientos anteriores. Tras ellos, el profesor explicará lo necesario si hubiesen quedado dudas y justificará las diferencias existentes según los tipos de sucesos, compatibles/incompatibles, dependientes/independientes, etc.

TECNOLOGÍAS QUE JUSTIFICAN EL CAMPO DE PROBLEMAS 4: PROBABILIDAD CONDICIONADA

Serán los propios alumnos quienes justificarán la probabilidad condicionada con su fórmula asociada desde la realización del Problema 4 “Fumadores y cáncer” con razonamientos y uso de la lógica. Quedará de mano del profesor la explicación concreta de la creación y manejo de las tablas de contingencia y los diferentes usos que se le puede dar a la fórmula de la probabilidad condicionada según las especificaciones que se hagan en los ejercicios. Con el Ejercicio 4.2. los alumnos justificarán por sí mismos la diferenciación de la probabilidad condicionada con distintos tipos de sucesos.

TECNOLOGÍAS QUE JUSTIFICAN EL CAMPO DE PROBLEMAS 5: PROBABILIDAD TOTAL

Serán los alumnos quienes institucionalizarán la probabilidad total y el diagrama de árbol con el Problema 5 “Todos a bailar” mediante el Teorema de la Probabilidad Total. El único trabajo del profesor será ponerle nombre y explicar todo lo relacionado con los diagramas de árbol y sus posibles conexiones con las tablas de contingencia.

H. SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

La unidad didáctica de la Probabilidad se tratará en 10 sesiones, basadas en clases de 55 minutos.

SESIÓN 1

Resolución de los dos problemas de construcción de la razón de ser del cálculo de probabilidades, especificados en el apartado D. (55 minutos)

SESIÓN 2

CAMPO DE PROBLEMAS 1: Exploración del espacio muestral.

Fase 1: Comienzo con el Problema 1: ¡Cuántas opciones! (15 minutos)

Fase 2: Explicación por parte del profesor de las diferencias entre suceso aleatorio y determinista, definición del espacio muestral y sucesos. Realización del ejercicio 1.1. “Espacio muestral”. (15 minutos)

Fase 3: Explicación por parte del profesor de los tipos de sucesos y operaciones. Realización del ejercicio 1.2. “Operaciones con sucesos”. (15 minutos)

Fase 4: Realización de más ejercicios del Campo de Problemas y ejercicios de ampliación para la atención a la diversidad. (10 minutos)

SESIÓN 3

CAMPO DE PROBLEMAS 2: Probabilidad de sucesos simples.

Fase 1: Comienzo con el Problema 2: La caja correcta. (10 minutos)

Fase 2: Explicación por parte del profesor de las propiedades de las probabilidades y de la Regla de Laplace. Realización del ejercicio 2.1. “Regla de Laplace”. (20 minutos)

Fase 3: Explicación por parte del profesor de la Ley de los Grandes Números. Realización del ejercicio 2.2. “Ley de los Grandes Números”. (15 minutos)

Fase 4: Realización de más ejercicios del Campo de Problemas y ejercicios de ampliación para la atención a la diversidad. (10 minutos)

SESIÓN 4

CAMPO DE PROBLEMAS 3: Probabilidad de sucesos compuestos.

Fase 1: Comienzo con el Problema 3: Los semáforos. (20 minutos)

Fase 2: Exposición de las justificaciones extraídas por los alumnos con el Problema 3 y explicación por parte del profesor de la probabilidad de la unión de sucesos, con la ayuda de las circunferencias de sucesos y realización del Ejercicio 3.1. “Uniones”. (15 minutos)

Fase 3: Exposición de las justificaciones extraídas por los alumnos con el Problema 3 y explicación por parte del profesor de la probabilidad de la intersección de sucesos con la ayuda de las circunferencias de sucesos y realización del Ejercicio 3.2.” Intersecciones”. (15 minutos)

Fase 4: Realización de más ejercicios del Campo de Problemas y ejercicios de ampliación para la atención a la diversidad. (5 minutos)

SESIÓN 5

CAMPO DE PROBLEMAS 4: Probabilidad condicionada (parte 1 de 2).

Fase 1: Comienzo con el Problema 4: Fumadores y cáncer. (20 minutos)

Fase 2: Justificación por parte de los alumnos de la fórmula de la probabilidad condicionada y explicación por parte del profesor de la creación y estudio de las tablas de contingencia. (20 minutos)

Fase 3: Realización de más ejercicios creación de tablas de contingencia y ejercicios de ampliación para la atención a la diversidad. (15 minutos)

SESIÓN 6

CAMPO DE PROBLEMAS 4: Probabilidad condicionada (parte 2 de 2).

Fase 1: Rememoración por parte del profesor de la probabilidad condicionada y opciones de trabajo con la fórmula y resolución del Ejercicio 4.1. “Creando tablas de contingencia”. (20 minutos)

Fase 2: Realización del Ejercicio 4.2. “Probabilidades con sucesos compatibles/ incompatibles – dependientes/independientes” y explicación por parte de los alumnos de la distinción de la probabilidad condicionada con sucesos independientes (25 minutos)

Fase 3: Realización de más ejercicios del Campo de Problemas y ejercicios de ampliación para atención a la diversidad. (10 minutos)

SESIÓN 7

CAMPO DE PROBLEMAS 5: Probabilidad Total (parte 1 de 2).

Fase 1: Comienzo con el Problema 5: Todos a bailar. (15 minutos)

Fase 2: Explicación por parte del profesor de la creación y trabajo con el diagrama de árbol y resolución el Ejercicio 5.1. “Creación y estudio del diagrama de árbol”. (30 minutos)

Fase 3: Realización de más ejercicios del Campo de Problemas y ejercicios de ampliación para atención a la diversidad. (10 minutos)

SESIÓN 8

CAMPO DE PROBLEMAS 5: Probabilidad Total (parte 2 de 2).

Fase 1: Explicación por parte del profesor del Teorema de la Probabilidad Total y de su relación con la tabla de contingencia. Realización del Ejercicio 5.2. “Teorema de la probabilidad y relaciones”. (35 minutos)

Fase 2: Realización de más ejercicios del Campo de Problemas y ejercicios de ampliación para atención a la diversidad. (20 minutos)

SESIÓN 9

Sesión dedicada al repaso de lo aprendido y corrección de ejercicios en los que los alumnos hayan encontrado dificultades. (55 minutos)

SESIÓN 10

Sesión dedicada a la realización del examen. (55 minutos)

I. EVALUACIÓN

ASPECTOS A EVALUAR

El examen abarcará todos los conceptos enseñados sobre la probabilidad en los distintos Campos de Problemas.

- ✓ Con la primera pregunta se evaluarán los conocimientos principalmente teóricos, la definición del espacio muestral, los diferentes tipos de sucesos, la comprensión de la probabilidad y sus propiedades;
- ✓ Con la segunda se evaluará la capacidad de extrapolar conocimientos ya adquiridos y la capacidad de visión gráfica;
- ✓ Con la tercera se evaluará el correcto uso de la Regla de Laplace, la probabilidad de sucesos compuestos y probabilidad condicionada;
- ✓ Con la cuarta pregunta se evaluará el manejo de las tablas de contingencia y la probabilidad condicionada, además de las probabilidades de sucesos compuestos;
- ✓ Con la quinta y última pregunta se evaluará el uso del diagrama de árbol y el Teorema de la Probabilidad Total.

EXAMEN

1ª PREGUNTA: *(2 puntos)* Responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el espacio muestral del lanzamiento de tres monedas?

b) ¿Qué quiere decir que dos sucesos sean incompatibles? Pon dos ejemplos;

c) ¿Para qué tipos de sucesos podemos aplicar la fórmula $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$?

d) ¿Es cierta la afirmación "La probabilidad de que llueva el sábado es del 70% y la probabilidad de que llueva el domingo del 60, entonces la probabilidad de que llueva el fin de semana es del 130%"? Razona tu respuesta.

2ª PREGUNTA: *(1 punto)* Sabiendo que la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, ¿Cuál sería la fórmula si añadiésemos un suceso compatible más?

3ª PREGUNTA: *(2 puntos)* De 120 personas que fueron consultadas sobre sus preferencias a la hora de realizar un deporte, 50 practicaban fútbol, 40 practicaban baloncesto y 30 practicaban ciclismo. Además, 25 personas practicaban futbol y baloncesto, 15 practicaban fútbol y ciclismo, y 12 practicaban baloncesto y ciclismo. Por último, tan sólo 5 personas practicaban los tres deportes. El resto no sabe o no contesta.

Calcula:

a) Probabilidad de practicar fútbol;

b) Probabilidad de practicar fútbol y baloncesto;

c) Probabilidad de practicar los tres deportes;

d) Probabilidad de practicar sólo ciclismo.

4ª PREGUNTA: *(2'5 puntos)* El instituto va a hacer una excursión a un museo y junto con los alumnos tienen que ir algunos padres y profesores. Con los 30 alumnos de 4º A van dos profesores y tres padres, con los 29 alumnos de 4º B van tres profesores y un padre y con los 25 alumnos de 4º C van dos profesores y dos padres.

Crea la tabla de contingencia y calcula:

a) Eligiendo una persona al azar, probabilidad de que sea padre de 4º A;

b) Eligiendo al azar, probabilidad de que sea de 4º A o de 4º C;

c) El primero que entra al museo es un profesor, ¿cuál es la probabilidad de que sea de 4º B?

d) Probabilidad de ser alumnos entre las personas de 4º C;

e) Probabilidad de ser padre de 4º A o profesor de 4º C.

5ª PREGUNTA: *(2'5 puntos)* Una empresa cuenta con tres empleados, Antonio, Bárbara y Carmen. Por las horas que trabaja cada uno Antonio atiende al 50% de los clientes, Bárbara al 35% y Carmen al resto. Cuando hablamos de ventas, Bárbara es la mejor vendedora, el 85% de sus clientes acaban comprando; de los clientes de Antonio finalizan compra el 70% y de los clientes de Carmen 8 de cada 12. (trabaja con cuatro decimales)

a) ¿Cuál es la probabilidad de que me atienda Antonio y no compre?

b) ¿Cuál es la probabilidad de no vender?

c) ¿Cuál es la probabilidad de vender si me atiende Carmen?

d) ¿Cuál es la probabilidad de venta?

e) Si soy un cliente que no ha comprado, ¿cuál es la probabilidad de que me haya atendido Bárbara?

RESPUESTA ESPERADA

1ª PREGUNTA:

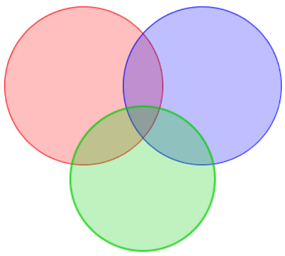
a) C → cara; X → cruz. Espacio muestral: (C,C,C), (C,C,X), (C,X,C), (C,X,X), (X,C,C), (X,C,X), (X,X,C) y (X,X,X)

b) Que dos sucesos sean incompatibles quiere decir que no pueden ocurrir a la vez, su intersección es el $\emptyset$. Ejemplos: lanzar una moneda y que sea cara y cruz y del nacimiento de un niño que sea chico y chica.

c) Para sucesos independientes.

d) No, la probabilidad no puede ser mayor que 1.

2ª PREGUNTA:



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

3ª PREGUNTA:

N=120

F=50	B=40	C=30	
F∩B=25	F∩C=15	B∩C=12	A∩B∩C=5

a) $P(F) = {}^{50}/_{120} = {}^{5}/_{12}$

b) $P(F \cap B) = {}^{25}/_{120} = {}^{5}/_{24}$

c) $P(F \cap B \cap C) = {}^{5}/_{120}$

d) $P(F^C \cap B^C \cap C) = P(C) - P(F \cap C) - P(B \cap C) + P(F \cap B \cap C) = {}^{30}/_{120} - {}^{15}/_{120} - {}^{12}/_{120} + {}^{5}/_{120} = {}^{8}/_{120} = {}^{2}/_{30}$

4ª PREGUNTA:

	Alumnos	Padres	Profesores	Total
4º A	30	3	2	35
4º B	29	1	3	33
4º C	25	2	2	29
Total	84	6	7	97

a) $P(\text{Padre} \cap 4^{\underline{o}}\text{A}) = {}^{3}/_{97}$

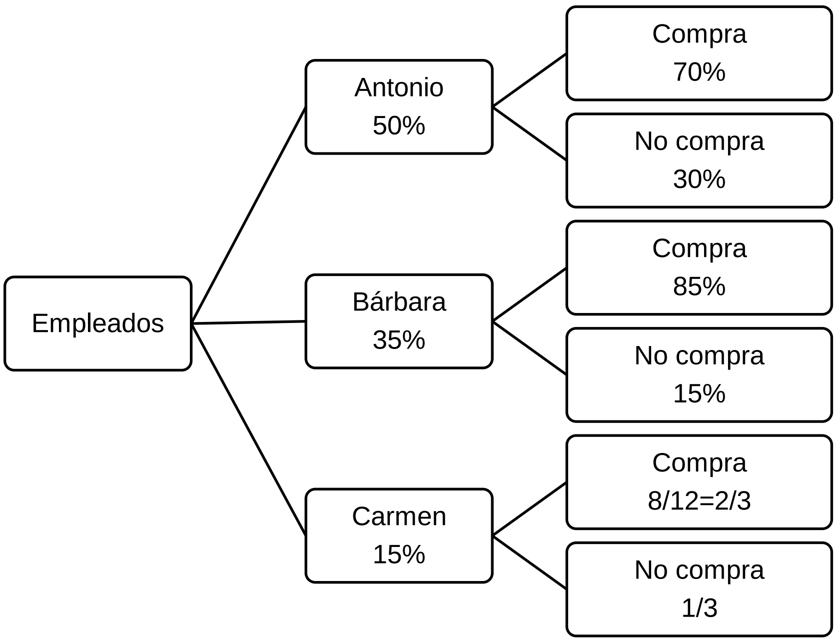
b) $P(4^{\underline{o}}\text{A} \cup 4^{\underline{o}}\text{C}) = {}^{(35+29)}/_{97} = {}^{64}/_{97}$

c) $P(4^{\underline{o}}\text{B} \mid \text{Profesor}) = {}^{3}/_{7}$

d) $P(\text{Alumno} \mid 4^{\underline{o}}\text{C}) = {}^{25}/_{29}$

e) $P[(\text{Padre} \cap 4^{\underline{o}}\text{A}) \cup (\text{Profesor} \cap 4^{\underline{o}}\text{C})] = {}^{3}/_{97} + {}^{2}/_{97} = {}^{5}/_{97}$

5ª PREGUNTA:



a) $P(\text{Antonio} \cap \text{No comprar}) = P(\text{Antonio}) \cdot P(\text{No comprar} \mid \text{Antonio}) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$

b) $P(\text{No comprar}) = P(\text{No comprar} \mid \text{Antontio}) \cdot P(\text{Antonio}) + P(\text{No comprar} \mid \text{Bárbara}) \cdot P(\text{Bárbara}) + P(\text{No comprar} \mid \text{Carmen}) \cdot P(\text{Carmen}) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}15 \cdot 0{,}35 + {}^{1}\!/_{3} \cdot 0{,}15 = 0{,}15 + 0{,}0525 + 0{,}05 = 0{,}2525$

c) $P(\text{Comprar} \mid \text{Carmen}) = {}^{2}\!/_{3}$

d) $P(\text{Comprar}) = P(\text{Comprar} \mid \text{Antontio}) \cdot P(\text{Antonio}) + P(\text{Comprar} \mid \text{Bárbara}) \cdot P(\text{Bárbara}) + P(\text{Comprar} \mid \text{Carmen}) \cdot P(\text{Carmen}) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}85 \cdot 0{,}35 + {}^{2}\!/_{3} \cdot 0{,}15 = 0{,}35 + 0{,}2975 + 0{,}10 = 0{,}7475$

$P(\text{Comprar}) = 1 - P(\text{No comprar}) = 1 - 0{,}2525 = 0{,}7475$

e) $P(\text{Bárbara} \cap \text{No comprar}) = P(\text{Bárbara}) \cdot P(\text{No comprar} \mid \text{Bárbara}) = 0{,}35 \cdot 0{,}15 = 0{,}0525$

$$P(\text{Bárbara} \mid \text{No comprar}) = {}^{P(\text{Bárbara} \cap \text{No comprar})}\!/_{P(\text{No comprar})}$$

$$= {}^{0{,}0525}\!/_{0{,}2525} = 0{,}2079$$

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

A la hora de la corrección del examen será necesaria una plantilla de corrección, preparada por el profesor, en la que apoyarse, y en la que se especificará los criterios y los posibles descuentos de puntos según los tipos de errores esperados que se realicen en los exámenes, de modo que se usen los mismos criterios para todos los alumnos.

Se valorarán las capacidades aprendidas durante el proceso, el buen uso de las técnicas y, sobre todo, la capacidad de comprensión de los contenidos y métodos: se buscará que no se trate de un proceso mecánico, sino de un proceso de fases de comprensión de las técnicas y su aplicación.

ANEXO I

GALILEO. CONSIDERAZIONE SOPRA IL GIOCO DEI DADI.

Un jugador italiano expresó a Galileo su sorpresa, por observar que al jugar con tres dados la suma 10 aparece con más frecuencia que la 9. Según el jugador los casos favorables serían:

Para 9: {126, 135, 144, 225, 234, 333}

Para 10: {136, 145, 226, 235, 244, 334}

Pero Galileo vio que estas combinaciones no se pueden considerar igualmente probables. Explica por qué y calcula las correspondientes probabilidades.

Solución:

10 Puntos		9 Puntos	
6-3-1	6	6-2-1	6
6-2-2	3	5-3-1	6
5-4-1	6	5-2-2	3
5-3-2	6	4-4-1	3
4-4-2	3	4-3-2	6
4-3-3	3	3-3-3	1
	27		25

PASCAL. PROBLEMA DE LAS PARTIDAS PROPUESTO POR EL CABALLERO DE MERÉ.

Dos jugadores A y B, apuestan uno contra otro la misma cantidad de dinero en un juego en el que el vencedor será aquel que primero gane tres partidas. Cuando el jugador A gana la primera partida, el juego se suspende por causas ajenas a los jugadores, y ante la imposibilidad de continuar se da por terminado. ¿Cómo se repartirá el total del dinero entre los dos jugadores?

Solución de Pascal:

Soluciones de las siguientes cuatro partidas donde el juego quedará tendrá vencedor (cuatro partidas como máximo)

Aparecen 16 partidas posibles de las cuales en 11 saldría vencedor A y en 5

AAAA	*AAAB*	*AABB*	*ABBB*	*BBBB*
	AABA	*ABAB*	*BABB*	
	ABAA	*ABBA*	*BBAB*	
	BAAA	*BAAB*	*BBBA*	
		BABA		
		BBAA		

saldría vencedor B. Por lo que el dinero se repartiría $\frac{11}{16}$ para A y $\frac{5}{16}$ para B.

Solución actual:

No contamos con las partidas en las que ya hay vencedor, por lo que el campo de soluciones sería:

AA	*ABBB*
ABA	*BABB*
ABBA	*BBAB*
BAA	*BBB*
BABA	
BBAA	

Aparecen 10 soluciones posibles, pero no son equiprobables.

P(AA) = $\frac{1}{4}$

P(ABA) = P(BAA) = P(BBB) = $\frac{1}{8}$

P(ABBA) = P(BABA) = P(BBAA) = P(ABBB) = P(BABB) = P(BBAB) = $\frac{1}{16}$

Con lo que:

P(gane A) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$

P(gane B) = $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$

ANEXO II

NOTAS DE INTERÉS

- El gran número de paradojas estocásticas puede confundir incluso a los expertos. Por ello, es más importante construir intuiciones correctas en el campo de la probabilidad que en ningún otro. Como seña Feller, la intuición estadística puede ser entrenada incluso en los adultos, aunque si un niño adquiere "intuiciones erróneas" cuando es muy pequeño, esto le puede impedir más tarde la adquisición de un conocimiento adecuado. Por ello parece necesario ofrecer a los niños actividades estocásticas, en forma de juego y experimentos en edad temprana. **[4]**

- El primer paso para comenzar a enseñar probabilidad es asegurarnos que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas, es decir de apreciar algunas características básicas de la aleatoriedad.

  Piaget e Inhelder (1951) defienden que la comprensión del azar por parte del niño es complementaria a la de la relación causa-efecto. Los niños concebirían el azar como resultado de la interferencia y combinación de una serie de causas, que actuando independientemente producirían un resultado inesperado. En consecuencia, hasta que el niño no comprende la idea de causa, no tiene un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios. **[4]**

- La investigación de Konold (1991) sugiere que con frecuencia tenemos dificultad de interpretar un experimento como parte de una serie de experimentos repetidos. Nos resulta difícil considerar un accidente que nos ocurre a nosotros como parte de la proporción normal de accidentes en esas circunstancias.

  La interpretación frecuencial de la probabilidad o "probabilidad empírica" se restringe a fenómenos en los que es posible repetir indefinidamente ensayos "idénticos". En estos casos, la probabilidad se estima a partir de la frecuencia relativa del suceso en una serie larga de experimentos. No podemos aplicar esta perspectiva a un experimento del que sólo hay un ensayo aislado y único, a menos que imaginariamente pueda repetirse el experimento. **[4]**

BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA

[1] E. J. Redal, M.ª D. Álvarez, A. M.ª Gaztelu, A. González (2011): ***Matemáticas 4 ESO Opción A****, Proyecto: Los Caminos del Saber. Santillana. Madrid*

[2] J. Díaz Godino, M.ª C. Batanero Bernabéu, M.ª J. Cañizares Castellano (1991): ***Matemáticas: cultura y aprendizaje. 27: Azar y Probabilidad****. Síntesis. Madrid.*

[3] Pablo Sánchez Castillo (2007): ***¿Por qué es importante estudiar probabilidades?****. (http://didactikmate.blogspot.com.es/2007/11/por-qu-es-importante-estudiar.html) Chile.*

[4] Carmen Batanero (2001): ***Didáctica de la Estadística****. Grupo de Educación Estadística Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.*

[5] Didier Dacunha-Castelle (1996): ***Chemins de L'Aleatorie. Le hasard et le risque dans la société moderne****. Champs, Flammarion. Francia.*

[6] B. R. Pérez, A. Castillo, S. de los Cobos (2000): ***Introducción a la Probabilidad****. Universidad Autónoma Metropolitanta, Unidad Iztapalapa, México.*

- ***Estadística para todos*** *(www.estadisticaparatodos.es/historia/histo_proba.html)*

- J. Cólera, I. Gaztelu, M. J. Oliveira, M. Mártinez (): ***Matemáticas 4 ESO Opción A****. Anaya. Madrid*

- Mª Concepción de la Cruz López, Carlos González García, Jesús Llorente Medrano (1993): ***Actividades sobre azar y probabilidad****, Materiales 12-16 para Educación Secundaria. Ministerio de Educación y Ciencia. Narcea. España.*

- Raúl Núñez Cabello (2007): ***Taller de estadística y probabilidad: juegos y trabajos para afianzar conceptos.*** *Publicatuslibros.com. España.*

- Revista ***SUMA*** *51. pp. 99-105. Febrero 2006.*

- E. Borrás, M.E. Carrillo, J. D'Opazo y otros (1981): ***Matemáticas de Bachillerato, curso 1. Apartado 3. El azar.*** *Grupo Cero. Editorial Teide. Barcelona.*

- J. Díaz, Mª C. Batanero, Mª J. Cañizares (1991): ***Azar y probabilidad. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Tomo 27.*** *Síntesis. Madrid.*