

FACULTAD DE CIENCIAS



**Universidad Zaragoza**

# SIMULANDO LA EVOLUCIÓN DE LA MATERIA OSCURA

*Trabajo de Fin de Grado*

Autor:

Víctor Martínez Pérez

Tutor:

Dr. Javier Redondo Martín

Grado de Física.  
2023-2024

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Inestabilidad gravitacional en el régimen lineal</b>	<b>3</b>
2.1. Aproximación Newtoniana . . . . .	3
2.2. Teoría de perturbaciones en Relatividad General . . . . .	7
<b>3. Caso no lineal. Simetría esférica</b>	<b>10</b>
<b>4. Simulaciones con GADGET-4</b>	<b>13</b>
4.1. Test del caso esférico . . . . .	14
4.2. Simulación de la estructura de gran escala del Universo . . . . .	22
<b>5. Conclusiones</b>	<b>25</b>

# 1. Introducción

La mayor parte de la materia y la energía que existe en el universo es invisible. Los componentes que podemos detectar forman parte de menos del 5 % del total, el resto está presente en forma de energía oscura y materia oscura.

En 1933 Fritz Zwicky se encontraba estudiando galaxias del Cúmulo de Coma cuando se dio cuenta de que sus velocidades eran mayores a las esperadas [1]. Para explicar la estabilidad del cúmulo tuvo que introducir una forma extra de materia no visible, materia oscura. Posteriormente durante los años 70 Vera Rubin y sus colaboradores midieron con precisión la velocidad de rotación de los gases de hidrógeno en los exteriores de galaxias [2]. Encontraron altas velocidades que podían ser explicadas si estaban compuestas de materia oscura más allá de las expectativas. Hoy en día encontramos claras evidencias de la existencia de materia oscura en las lentes gravitacionales que se observan en el fondo cósmico de microondas (CMB), donde las grandes estructuras cósmicas desvían los fotones que provienen del fondo. Este efecto ha sido medido por el satélite Planck [3], junto con las observaciones de la abundancia de elementos ligeros, que sugieren una cantidad insuficiente de materia ordinaria bariónica, siendo necesaria la existencia de materia oscura no bariónica. La cantidad de materia oscura que es necesaria para justificar estas observaciones coincide con la requerida para explicar la formación de grandes estructuras cósmicas a partir de pequeñas inestabilidades del fondo cósmico de microondas, unas cinco veces más que la materia bariónica. Este será el eje central del trabajo.

Las inicialmente diminutas fluctuaciones de densidad presentes en el fondo cósmico de microondas crecen hasta generar el Universo altamente inhomogéneo de hoy en día debido a la atracción gravitatoria. Nuestro objetivo en este trabajo es estudiar la evolución de esas pequeñas inhomogeneidades para entender cómo pueden dar lugar a las grandes estructuras cósmicas que observamos actualmente, como las galaxias o los cúmulos de galaxias. Una parte de esta evolución se puede describir analíticamente, concretamente cuando las fluctuaciones son lo suficientemente pequeñas, sin embargo a medida que crecen es tal la complejidad del problema que son necesarias soluciones numéricas a partir de otros métodos. En concreto en este TFG estudiaremos el método de simulación numérica de N-cuerpos, donde sustituiremos el campo continuo de materia por un set de N-partículas, de manera que sustituimos el difícil problema de modelizar un fluido bajo la interacción gravitatoria y la expansión del universo, por N pequeños problemas individuales, que son mucho más sencillos de resolver.

Comenzaremos familiarizándonos con los conceptos básicos que nos aporta el desarrollo teórico de las perturbaciones, tanto con el formalismo Newtoniano como con la relatividad general, para más tarde realizar simulaciones con el programa GADGET-4, un software de código abierto ideal para el estudio de la formación de estructuras cósmicas. Primero estudiaremos un caso aislado para demostrar la validez del programa y entender correctamente los resultados de las simulaciones, una vez hayamos conseguido esto nos centraremos en la evolución de condiciones iniciales realistas, donde podremos obtener las características más importantes de los cúmulos de materia oscura o halos, que forman las semillas iniciales de las galaxias.

## 2. Inestabilidad gravitacional en el régimen lineal

Vamos a describir la evolución de fluctuaciones de densidad mediante un resultado analítico. Para ello consideraremos las perturbaciones iniciales suficientemente pequeñas como para mantenernos en un régimen lineal. Usaremos inicialmente un formalismo Newtoniano, que será válido para la materia oscura fría en escalas del radio de Hubble. Posteriormente trataremos la teoría de perturbaciones lineales en Relatividad General, que extiende su resultado para cualquier escala.

### 2.1. Aproximación Newtoniana

Aunque las propiedades microscópicas de la materia oscura son desconocidas, sus efectos no parecen influir demasiado en el comportamiento del conjunto a gran escala, esto significa que podemos describir la evolución de las fluctuaciones como las de un fluido ideal. La materia oscura es un fluido no relativista con una densidad de masa  $\rho$ , presión  $P \ll \rho$  y velocidad  $\vec{u} \ll c$ . Comencemos desarrollando esta situación bajo los efectos de la gravedad de Newton mediante un potencial  $\Phi$ . Luego introduciremos la expansión del universo. Utilizamos 3 ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 , \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi, \quad (2.2)$$

$$\nabla^2 = 4\pi G \rho . \quad (2.3)$$

La primera es la ecuación de continuidad del fluido, que refleja el hecho de que la cantidad de partículas en un volumen fijo sólo puede verse modificada si existe flujo no nulo a través del área que lo contiene. La segunda es la ecuación de Euler, que es simplemente la segunda ley de Newton para un fluido. La tercera es la ecuación de Poisson, que determina el potencial a partir de la densidad local. Por último tenemos la ecuación de estado que relaciona la presión con la densidad y nos permite cerrar el sistema de ecuaciones, en nuestro caso consideramos un fluido barotrópico, donde la presión depende únicamente de la densidad,  $P = P(\rho)$ . Para un fluido estático, ( $\vec{u} = 0$ ), las ecuaciones anteriores implican una densidad y presión constante,  $\rho = \bar{\rho}$  y  $P = \bar{P}$ . Sin embargo este resultado implica  $\nabla \Phi = 0$ , que no es consistente con la ecuación de Poisson (2.3). Esto simplemente refleja el hecho de que no puede existir un fluido infinito estático que gravita sobre sí mismo.

Aunque no tenemos una solución consistente del fondo introducimos perturbaciones alrededor de él de la forma,

$$\rho(t, \vec{x}) = \bar{\rho} + \delta\rho(t, \vec{x}) , \quad (2.4)$$

$$P(t, \vec{x}) = \bar{P} + \delta P(t, \vec{x}) , \quad (2.5)$$

$$\Phi(t, \vec{x}) = \bar{\Phi} + \delta\Phi(t, \vec{x}) . \quad (2.6)$$

Para describir perturbaciones pequeñas podemos linealizar las ecuaciones, es decir expandir en serie de Taylor en función de  $\delta\rho$ ,  $\delta P$ ,  $\delta\Phi$  y despreciar términos de orden  $\delta\rho^2$ ,  $\delta P^2$ ,  $\delta\Phi^2$  y superior. Desarrollando y combinando nuestras ecuaciones principales según (2.4), (2.5) y (2.6) obtenemos finalmente,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 - 4\pi G \bar{\rho} \right) \delta \rho = 0 . \quad (2.7)$$

Esta es una ecuación de ondas donde  $c_s^2 = \partial P / \partial \rho$  es la velocidad del sonido en el fluido, es conveniente entonces escribir la ecuación en función de los modos de Fourier,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho} \right) \delta \rho(\vec{k}, t) = 0 . \quad (2.8)$$

Vemos que existe un número de onda crítico llamado la escala de Jeans,  $k_J = \sqrt{4\pi G \bar{\rho}} / c_s$ , para el que la frecuencia de las oscilaciones es cero. La naturaleza de nuestra solución depende del tamaño del número de onda respecto  $ak_J$ . En longitudes de onda pequeñas (número de ondas grande)  $k \gg k_J$  la presión domina y las perturbaciones se propagan como ondas de sonido en el fluido. Sin embargo a gran escala,  $k \ll k_J$  las soluciones para la perturbación son de la forma  $\delta \rho \propto \exp(\pm t \cdot \sqrt{4\pi G \bar{\rho}})$ . Este crecimiento exponencial se conoce como Inestabilidad de Jeans.

Ahora debemos tener en cuenta que el universo no es estático sino que está en expansión debido a las condiciones iniciales. Este es un resultado que proviene de aplicar la métrica FRW (Friedmann-Robertson-Walker) para un universo homogéneo e isótropo en las ecuaciones de Einstein. La expansión del universo no solo afecta a nuestras ecuaciones sino que también va a determinar las épocas y momentos clave en los que vamos a estudiar la evolución de las perturbaciones de materia oscura en este trabajo. En la Figura 2.1 se muestra una línea temporal con instantes importantes en cosmología en términos de *redshift*,  $z$ , esta variable mide el corrimiento al rojo producido por la expansión del universo en los fotones que vienen de las estructuras que podemos observar en el cosmos. Es útil expresar el tiempo en función del redshift y el factor de escala,  $a(t) = 1/(z + 1)$ .

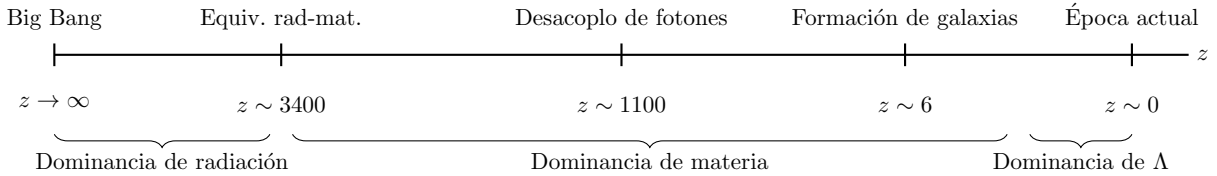


Figura 2.1: Línea temporal en redshift  $z$  de la evolución del universo con algunos momentos clave.

Para nuestro estudio es fundamental la separación en época de dominancia de radiación y época de dominancia de materia pues vamos a ver que nos permite tomar aproximaciones para dar con soluciones a la evolución de las perturbaciones. Resulta conveniente entonces expresar las ecuaciones en función de las coordenadas comóviles,  $\vec{x}$ ,  $\vec{v}$

$$\vec{r} = a(t) \vec{x} , \quad \vec{u} = \dot{\vec{r}} = H \vec{r} + \vec{v} , \quad (2.9)$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho , \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3P}{c^2} \right) \quad (2.10)$$

El factor de escala  $a = a(t)$  de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker describe la expansión del Universo y las coordenadas comóviles factorizan esa expansión. En (2.10) vemos las

ecuaciones de Friedmann, derivadas de resolver las ecuaciones de Einstein con esta métrica. En la velocidad, el término  $H\vec{r}$  representa el flujo de Hubble (es decir la expansión homogénea e isotrópica que resulta en una velocidad proporcional a la distancia con factor de proporcionalidad  $\dot{a}/a$  mientras que  $\vec{v}$  es la velocidad "peculiar". Ahora nuestras ecuaciones principales se ven modificadas en gran medida debido a que  $\partial_t$  y  $\nabla$  ya no son independientes. De manera que  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - H\vec{x} \cdot \nabla\right]$  y  $\nabla_{\vec{r}} = a^{-1}\nabla_{\vec{x}}$ . A partir de ahora denotaremos  $\nabla \equiv \nabla_{\vec{x}}$ , pues las coordenadas comóviles son más apropiadas para describir el universo a gran escala. Nuestras ecuaciones pasan a ser

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{a} \cdot \nabla\right)\vec{u} = -\frac{1}{a}\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{1}{a}\nabla\Phi. \quad (2.12)$$

Si consideramos la velocidad peculiar  $v = 0$  y resolvemos obtenemos las ecuaciones de fondo, es decir, cómo evoluciona el fluido y el potencial gravitatorio bajo la expansión del universo, podemos introducir las perturbaciones en torno a esas soluciones, expresando  $\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}$  como el contraste de densidad.

$$\bar{\rho} \propto a^{-3}, \quad \vec{u} = Ha\vec{x}, \quad \bar{P} = 0, \quad \nabla\bar{\Phi} = -\ddot{a}a\vec{x}, \quad (2.13)$$

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta), \quad \vec{u} = Ha\vec{x} + \vec{v}, \quad P = \bar{P} + \delta P, \quad \Phi = \bar{\Phi} + \delta\Phi, \quad (2.14)$$

expandiendo nuestras ecuaciones (2.11) y (2.12) a orden lineal obtenemos

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{a}\nabla \cdot \vec{v}, \quad (2.15)$$

$$\dot{\vec{v}} + H\vec{v} = -\frac{1}{a\bar{\rho}}\nabla\delta P - \frac{1}{a}\nabla\delta\Phi. \quad (2.16)$$

Y finalmente combinando ambas ecuaciones podemos expresar

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \left(\frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2 + 4\pi G\bar{\rho}(t)\right)\delta = 0. \quad (2.17)$$

Esta es la ecuación principal que describe el crecimiento de las perturbaciones en un universo en expansión. Es de nuevo una ecuación de ondas, así que para estudiarla más a fondo escribámosla en el espacio de Fourier, introduciendo el número de onda físico de Jeans  $k_J^2(t) \equiv 4\pi G\bar{\rho}(t)/c_s(t)^2$ .

$$\ddot{\delta}(\vec{k}, t) + 2H\dot{\delta}(\vec{k}, t) + c_s^2\left(\frac{k^2}{a^2} - k_J^2\right)\delta(\vec{k}, t) = 0, \quad (2.18)$$

A pequeñas escalas,  $k/a \gg k_J$ , (2.18) toma la forma de un oscilador armónico amortiguado por el término  $2H\dot{\delta}$ . Las soluciones son ondas cuya amplitud va decreciendo debido a la expansión del universo. En escalas grandes,  $k/a \ll k_J$ , podemos despreciar el término de presión del fluido y vemos que de no ser por la expansión del universo las perturbaciones crecerían exponencialmente. En un universo en expansión el amortiguamiento hace que el crecimiento no sea exponencial sino potencial, y dependiendo de la evolución del factor de escala será de una forma u otra.

Para la materia bariónica, la velocidad del sonido es prácticamente  $c/3$  antes de la recombinación y no hay crecimiento de las perturbaciones a ninguna escala apreciable. Sin embargo para la materia oscura la velocidad del sonido es despreciable ( $v \ll c$ ,  $\bar{P} \sim 0$ ), por tanto las fluctuaciones empiezan a crecer antes de la recombinación, adquiriendo gran importancia en la formación de estructuras. Para saber cómo cambia este crecimiento respecto al tiempo, podemos escribir las soluciones de (2.18) como

$$\delta(\vec{k}, t) = \delta_+(\vec{k})D_+(t) + \delta_-(\vec{k})D_-(t) , \quad (2.19)$$

donde  $\delta_{\pm}(t)$  son los modos de Fourier del campo de densidad inicial y  $D_{\pm}(t)$  son los modos de crecimiento y decaimiento, que dependen de la evolución del fondo.

En el caso de perturbaciones en un universo cuya expansión está dominada por materia, según las ecuaciones de Friedmann (2.10) obtenemos  $P \sim 0 \rightarrow a \propto t^{2/3}$ ,  $H(t) = 2/(3t)$ ,  $4\pi G\bar{\rho}_m = 3H^2/2$  y según (2.18) y (2.19),

$$\ddot{D} + \frac{4}{3t}\dot{D} - \frac{2}{3t^2}D = 0 , \quad (2.20)$$

siendo sus soluciones

$$D_-(t) \propto t^{-1} \propto a^{-2/3} , \quad (2.21)$$

$$D_+(t) \propto t^{2/3} \propto a . \quad (2.22)$$

En (2.22) vemos como la expansión del universo suaviza el crecimiento exponencial a una ley de potencia. En el caso de perturbaciones en un universo dominado por la radiación  $a \sim t^{1/2}$  y  $H = 1/(2t)$ . Debido a que la densidad de radiación es mucho mayor que la de materia oscura, podemos despreciar también el último término de (2.18), por lo que en este caso obtenemos

$$\ddot{D} + \frac{1}{t}\dot{D} = 0 , \quad (2.23)$$

y sus soluciones son

$$D_-(t) \propto \text{const} , \quad (2.24)$$

$$D_+(t) \propto \ln t \propto \ln a . \quad (2.25)$$

Hemos encontrado que durante la era de radiación las fluctuaciones de materia oscura pueden crecer como  $\log a$  mientras que las fluctuaciones de la materia bariónica no crecen debido a su alta velocidad del sonido. Cuando el universo pasa a estar dominado por la materia, las fluctuaciones de materia oscura pueden crecer como  $\propto a$  directamente, mientras que las de la materia bariónica siguen estando bloqueadas hasta la recombinación. Cuando por fin los bariones se desacoplan del CMB, caen en los pozos de potencial de la materia oscura y rápidamente sus fluctuaciones se igualan a la de esta, habiendo crecido mucho más de lo que habrían podido sin la materia oscura.

## 2.2. Teoría de perturbaciones en Relatividad General

La teoría de perturbaciones en relatividad general nos va a permitir describir la evolución de las pequeñas fluctuaciones en el plasma primordial, desde sus condiciones iniciales aparentemente congeladas a gran escala hasta su complejo comportamiento a pequeñas escalas tras entrar en el horizonte cosmológico. Debemos recordar sin embargo que este comportamiento es no lineal y nos lleva a cálculos altamente complejos, por tanto debemos linealizar las ecuaciones, y observar qué consecuencias podemos deducir para la evolución de la materia oscura.

La principal diferencia de este tratamiento con el anterior es que en este caso la gravedad está representada por 10 componentes de la métrica  $g_{\mu\nu}$  del espacio, cuya variación viene descrita a través de las ecuaciones de Einstein por el tensor energía-impulso  $T_{\mu\nu}$ , que representa la materia y energía en el universo.

Comencemos definiendo las perturbaciones lineales, en este caso debemos perturbar la métrica y el tensor de energía-impulso

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) , \quad (2.26)$$

$$T_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}(t, \vec{x}) . \quad (2.27)$$

La evolución de la métrica la dictamina la ecuación de Einstein,  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ , mientras que la evolución de las perturbaciones de masa siguen la conservación del tensor energía-impulso,  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ . Expandiendo estas ecuaciones a orden lineal en las perturbaciones y resolviéndolas obtendremos el resultado que esperamos.

Antes de definir explícitamente la perturbación de la métrica debemos tener en cuenta la elección del sistema de coordenadas, es decir, el *gauge*. Aquí aparece un problema, si nuestra elección de coordenadas no es correcta, pueden aparecer perturbaciones ficticias incluso aunque el fondo sea perfectamente homogéneo. Para solucionar este problema, podemos elegir las perturbaciones de manera que no transformen bajo un cambio de coordenadas, lo que se conoce como las variables de Bardeen (REF), o también podemos fijar el gauge y realizar un seguimiento de todas las perturbaciones en la métrica y en la materia. Si consideramos la métrica de fondo como la de un universo FWR plano, podemos escribir la perturbación del espacio-tiempo como

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2A)d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta + (\delta_{ij} + 2E_{ij})dx^i dx^j \right] , \quad (2.28)$$

donde  $A$ ,  $B_i$  y  $E_{ij}$  son funciones del espacio y el tiempo conforme  $\eta$  (definido como  $dt = a(t)d\eta$ ), con el que trabajaremos a partir de ahora. Los factores 2 son introducidos por conveniencia. Nos será útil realizar una descomposición SVT (scalar-vector-tensor) del vector  $B_i$  y el tensor  $E_{ij}$  en 4 modos escalares, 4 vectoriales y 2 tensoriales, lo que nos permitirá resolver las ecuaciones de Einstein separadamente para cada tipo de modo. Si ahora fijamos el gauge a un gauge newtoniano, es decir, hacemos nulos dos de los cuatro modos escalares, la ecuación (6.2) se vuelve

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ -(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 - 2\Phi)dx^i dx^j \right] , \quad (2.29)$$

donde  $\Psi$  y  $\Phi$  son los modos escalares restantes escritos como variables de Bardeen. El gauge Newtoniano hace que la métrica sea diagonal, lo cual no solo simplifica los cálculos, sino que también nos muestra una física transparente. Además de esta manera las ecuaciones resultantes serán lo más parecidas posibles a las encontradas en la aproximación Newtoniana.



Pasemos ahora a definir las perturbaciones en  $T_{\mu\nu}$ , donde nos va a ser conveniente considerar las perturbaciones con subíndices y superíndices mezclados

$$T^0_0 \equiv -(\bar{\rho} + \delta\rho) , \quad (2.30)$$

$$T^0_i \equiv (\bar{\rho} + \bar{P})v_i , \quad (2.31)$$

$$T^i_j \equiv (\bar{P} + \delta P)\delta^i_j + \Pi^i_j , \quad (2.32)$$

aquí  $v_i$  es la velocidad total y  $\Pi^i_j$  corresponde a la presión o tensión generada por las anisotropías de la materia. Hay que tener en cuenta que si existen contribuciones de diferentes especies, los términos se suman. En este caso también es útil desarrollar una descomposición SVT y además escribiremos las perturbaciones de densidad en términos del contraste de densidad  $\delta$  al igual que hicimos anteriormente. Así pues las perturbaciones escalares vienen descritas por cuatro variables:  $\delta$ ,  $\delta P$ ,  $v$  y  $\Pi$ . Al igual que con la métrica nos encontramos con el mismo problema en la elección del sistema de coordenadas, vamos a definir una combinación de variables de la métrica y la materia que nos será útil más adelante

$$\bar{\rho}\Delta \equiv \delta\rho + \bar{\rho}'(v + B) , \quad (2.33)$$

donde  $\Delta$  es el llamado contraste de densidad comóvil. Una vez hemos definido bien las perturbaciones, es hora de computar las ecuaciones principales. Para la ecuación de conservación del tensor energía-impulso

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} T^\mu_\alpha , \quad (2.34)$$

necesitamos recalcular los coeficientes de la conexión afín según la nueva métrica. Aproximando linealmente el resultado obtenemos que para  $\nu = 0$

$$\delta' = - \left( 1 + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \right) (\nabla \cdot \vec{v} - 3\Phi') - 3\mathcal{H} \left( \frac{\delta P}{\delta\rho} - \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \right) \delta , \quad (2.35)$$

que es la ecuación de continuidad describiendo la evolución del contraste de densidad. Notar que en el límite  $P \ll \rho$  recuperamos la ecuación Newtoniana (2.15) escrita en tiempo conforme, pero con una corrección relativista que proviene de la tasa de expansión, en este caso perturbada. Esta corrección será despreciable en escalas sub-Hubble reproduciendo así la aproximación Newtoniana.

Haciendo  $\nu = i$  en (6.60) obtenemos la ecuación de Euler relativista en tiempo conforme

$$v'_i = - \left( \mathcal{H} + \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho} + \bar{P}} \right) v_i - \frac{1}{\bar{\rho} + \bar{P}} (\partial_i \delta P - \partial^j \Pi_{ij}) - \partial_i \Psi , \quad (2.36)$$

que podemos comparar a (2.16) si  $P \ll \rho$  y  $\Pi_{ij} = 0$ . De hecho, podemos combinar estas ecuaciones considerando un fluido no relativista en los límites mencionados y obtenemos

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' = \nabla^2 \Psi + 3(\Phi'' + \mathcal{H}\Phi') . \quad (2.37)$$

Nos damos cuenta de que las variables  $\Phi$  y  $\Psi$  son potenciales gravitacionales de la métrica, además (2.37) es muy similar a (2.17) salvo por las correcciones de estos potenciales. Es importante ver que aquí es donde encontramos la mayor separación entre la aproximación Newtoniana

y la relatividad general, pues para entender a partir de (2.37) la evolución de las perturbaciones en materia oscura (y de el resto de especies), necesitamos entender cómo evolucionan nuestros potenciales, además en este caso la tasa de expansión  $\mathcal{H}$  también está perturbada, por lo que los resultados se extienden más allá del horizonte. Es aquí donde resolvemos la ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT^\mu{}_\nu . \quad (2.38)$$

Necesitamos calcular el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y el escalar de Ricci  $R$  para (2.29), y podemos computar (2.38) hasta orden lineal. Obtenemos que la parte temporal de la ecuación es

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi Ga^2\delta\rho . \quad (2.39)$$

Esta es la generalización relativista de la ecuación de Poisson. Podemos ver que para escalas menores al radio de Hubble recuperamos el límite Newtoniano. A continuación observamos la parte puramente espacial, donde

$$\Phi - \Psi = 8\pi Ga^2\Pi . \quad (2.40)$$

Podemos considerar las anisotropías de las especies como despreciables en las escalas que vamos a tratar aquí, por tanto (2.40) implica  $\Psi \approx \Phi$ . La parte espacio-temporal de la ecuación de Einstein nos lleva a que (2.39) pueda ser escrito como

$$\nabla^2\Phi = 4\pi Ga^2\bar{\rho}\Delta , \quad (2.41)$$

es decir que en términos del contraste de densidad comóvil la ecuación de Poisson relativista es de la misma forma que en la aproximación Newtoniana, pero ahora es válida para cualquier escala. Por último si escribimos la traza de la parte puramente espacial obtenemos que

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi Ga^2\delta P . \quad (2.42)$$

Con estos resultados y con (2.37) tenemos un sistema cerrado de ecuaciones y podemos describir al completo la evolución de cualquiera de las especies en régimen lineal en cualquier escala. En concreto nosotros vamos a considerar perturbaciones de materia oscura sin presión y despreciamos anisotropías. Comencemos por estudiar la época de dominancia de materia. Primero necesitamos saber cómo evoluciona el potencial. Si el universo está dominado por un fluido cuya ecuación de estado  $w$  se mantiene constante podemos escribir

$$\Phi'' + 3(1+w)\mathcal{H}\Phi' - w\nabla^2\Phi = 0 . \quad (2.43)$$

Durante la dominación de materia, tenemos que  $w \approx 0$ , por tanto las soluciones de (2.43) para los modos de crecimiento y decaimiento son

$$\Phi(a, \vec{k}) = C_1(\vec{k}) + C_2(\vec{k})a^{-5/2} . \quad (2.44)$$

Vemos que el crecimiento del potencial es una constante durante esta época. Además como la materia oscura domina el universo, de (2.40) escribimos  $\nabla^2\Phi \approx 4\pi Ga^2\bar{\rho}_m\Delta_m$ . Usando (2.44) y que  $a^2\bar{\rho}_m \propto a^{-1}$  obtenemos finalmente

$$\Delta_m(a, \vec{k}) = -\frac{k^2 \Phi}{4\pi G a^2 \bar{\rho}_m} = \tilde{C}_1(\vec{k})a + \tilde{C}_2(\vec{k})a^{-3/2} . \quad (2.45)$$

Igual que en (2.21) y (2.22), sin embargo ahora es válido para todas las escalas, de hecho la dependencia con  $a$  se extiende fuera del horizonte, algo que no contemplábamos en la sección anterior.

En la era de radiación vamos a trabajar con la ecuación (2.37) pero en concreto para  $\delta_m$ , donde  $\Phi = \Phi_r + \Phi_m$  tiene dos fuentes, la radiación y la materia. La contribución de la radiación oscila rápidamente en escalas sub-horizonte, mientras que la de la materia es constante. La materia no puede reaccionar entonces al rápido cambio de potencial de la radiación, y por tanto  $\delta_m$  está condicionada por  $\Phi_m$  incluso en la era profunda de radiación. Usando  $\Phi \approx \Phi_m$  y  $\Phi'' = \Phi' \approx 0$  obtenemos

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' - 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_m \approx 0 , \quad (2.46)$$

donde usando como variable temporal  $y \equiv a/a_{eq}$ , siendo  $a_{eq} = \Omega_r/\Omega_m$  el factor de escala en el momento de equivalencia, la ecuación (2.46) pasa a ser la llamada ecuación de Mészáros,

$$\frac{d^2 \delta_m}{dy^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \frac{d\delta_m}{dy} - \frac{3}{2y(1+y)} \delta_m = 0 , \quad (2.47)$$

cuyo modo de crecimiento es  $\delta_m \propto (1 + \frac{3}{2}y) \ln \left( \frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1} \right) - 3\sqrt{1+y}$ , que para  $y \ll 1$  equivale a  $\delta_m \propto \ln y \propto \ln a$ . Es decir, las fluctuaciones de masa solo crecen logarítmicamente en la era de radiación.

Por tanto hemos cumplido nuestro objetivo, hemos desarrollado la teoría de perturbaciones en relatividad general y no solo hemos conseguido replicar los resultados anteriores en el límite Newtoniano, sino que también hemos obtenido el mismo comportamiento de las fluctuaciones de materia oscura a lo largo del tiempo, esta vez para cualquier escala.

### 3. Caso no lineal. Simetría esférica

Hasta ahora hemos conseguido obtener soluciones generales para la evolución de las perturbaciones de materia oscura a orden lineal, válidas para pequeñas fluctuaciones  $\delta \ll 1$ . Sin embargo nos preguntamos qué ocurre para perturbaciones que se salen del régimen lineal y que no son perceptibles a gran escala en el CMB pero podrían existir, como los minicúmulos de axiones, que desde el principio tienen  $\delta \gg 1$  [4].

Para poder computar una solución sencilla a este problema, vamos a establecer un alto grado de simetría. Consideremos una esfera de radio  $r$  sobre un fondo homogéneo de materia oscura y radiación, de forma que la esfera representa una sobredensidad  $\delta\rho$  en el espacio, como se ve en la Figura 3.1. Según el teorema de Birkhoff sabemos que al imponer esta simetría esférica la esfera solo sentirá la gravedad de sí misma y la expansión del universo, por tanto deducimos que al principio aumentará su tamaño por la presión de la expansión para después encogerse y colapsar por efecto de su gravedad.

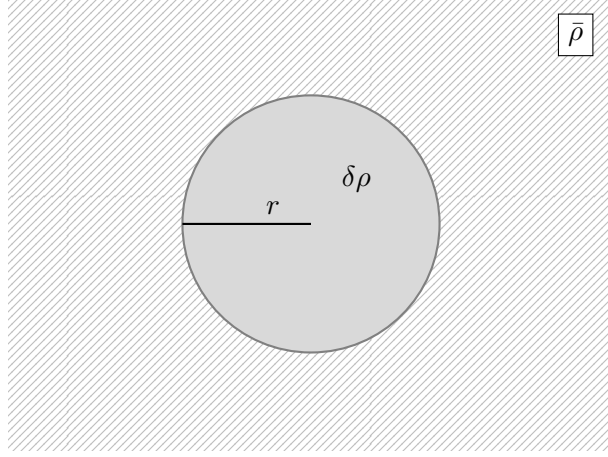


Figura 3.1: Descripción del modelo de simetría esférica.

Además podemos modelizar la evolución de esta perturbación dividiendo la esfera en capas cuya ecuación de movimiento vendrá dada por la masa total contenida dentro de la capa [5]. Si consideramos un universo plano con materia sin presión y radiación homogénea, podemos escribir la evolución del radio  $r$  a partir de la segunda ecuación de Friedmann como

$$\ddot{r} = -\frac{8\pi G}{3}r\rho_R - \frac{GM_{TOT}}{r^2}, \quad (3.1)$$

donde hemos escrito la contribución de la masa explícitamente en  $M_{TOT}$  para destacar que sólo depende de la masa en el interior de  $r$ . A continuación vamos a cambiar a tiempo conforme  $\eta$  por conveniencia, y redefinimos  $r$  tal que  $r = a(\eta)R_\xi(\eta)\xi$ , donde  $a$  es el factor de escala,  $\xi$  es la distancia comóvil a una capa y  $R_\xi$  es el desviamiento de la capa respecto a la expansión dada por la ley de Hubble que sigue el factor de escala (determinado por el universo en conjunto). Según las soluciones de  $a(\eta)$  para este tipo de universo, (3.1) es

$$aR'' + a'R' + \left( \frac{GM_{TOT}}{\xi^3 R^2} - \frac{4\pi G}{3}a^3\rho_M R \right) = 0. \quad (3.2)$$

Recordemos que  $M_{TOT}$  depende del contraste de densidad  $\delta$  en el interior del casquete  $\xi$  tal que

$$M_{TOT} \equiv \frac{4\pi}{3}\rho_{EQ}a_{EQ}^3[1 + \delta(\xi)]\xi^3, \quad (3.3)$$

que sustituyendo en (3.2) y cambiando a la variable temporal  $x \equiv a/a_{EQ}$  resulta en

$$x(1+x)\frac{d^2 R}{dx^2} + \left(1 + \frac{3}{2}x\right)\frac{dR}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\delta}{R^2} - R\right) = 0. \quad (3.4)$$

Esta es la ecuación que debemos resolver para obtener cómo evoluciona  $R$  en función del tiempo, es decir el tamaño de la esfera. Sabemos que la esfera eventualmente va a encogerse hasta llegar a colapsar, aún así esta ecuación no tiene solución analítica y utilizaremos una resolución numérica en código Python para resolverla. En la Figura 3.1 se muestran los resultados de la resolución numérica de (3.4) para distintos valores de  $\delta$ , donde hemos tomado  $R'(x_0) = 0$ ,  $R(x_0) = 1$ ,  $x_0 \ll 1$ . Lo primero que podemos notar es que, tal y como obtuvimos en la anterior sección,

para valores pequeños de  $\delta$  el colapso no es efectivo hasta que la materia no domina ,  $x > 1$ , sin embargo vemos que si la densidad de contraste se sale del rango lineal, las fluctuaciones crecen mucho antes, y por tanto podemos llegar a tener objetos muy densos de materia oscura antes de la equivalencia. Otra característica fundamental que podíamos predecir, y que se hace evidente en la figura, es que la esfera crece con la expansión del universo durante un tiempo hasta que se detiene y empieza a encogerse, al momento donde  $\dot{r} = 0$  se le conoce como *turn around*, y más adelante podremos observarlo con más claridad, pues será el instante donde las estructuras empiecen a colapsar.

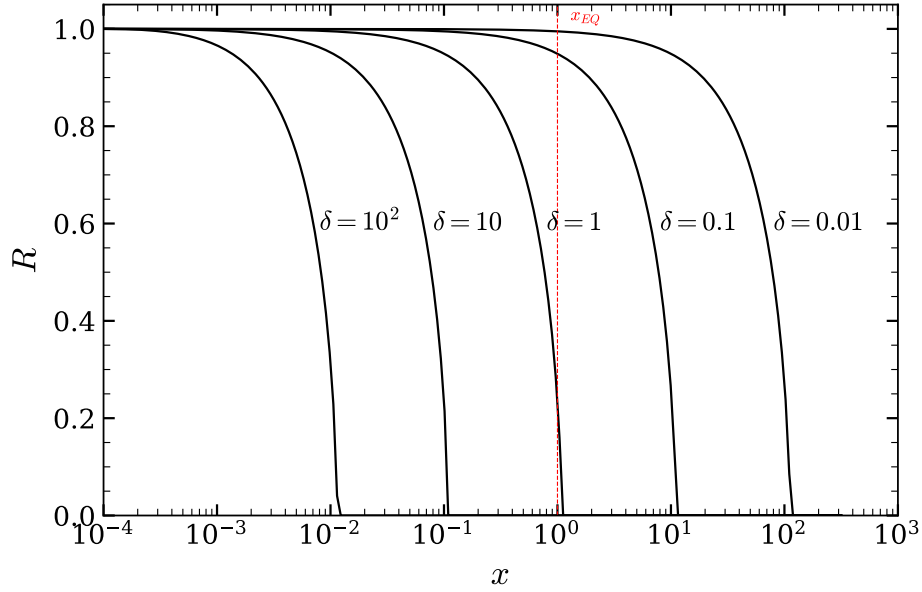


Figura 3.2: Soluciones numéricas de (3.9) para diferentes  $\delta$ .

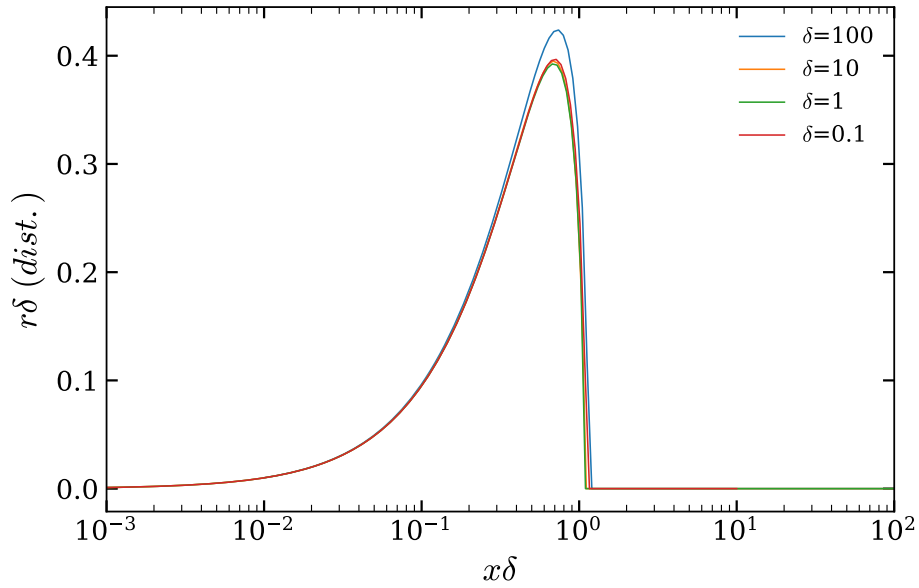


Figura 3.3: Soluciones de  $r\delta$  en función de  $\delta x$ .

Algo que notamos a simple vista también es cómo la evolución del radio es muy similar en forma para todos los valores de  $\delta$ . Esto lo mostramos en la Figura 3.3, donde reescalamos la variable tiempo (factor de escala) y la variable distancia física  $r$  multiplicándolas por  $\delta$ , vemos que

$$x_{TA} \approx 0.7/\delta \quad , \quad x_{Col} \approx 1/\delta. \quad (3.5)$$

. Aunque los resultados que hemos obtenido para una perturbación no lineal son muy interesantes y consecuentes con los desarrollos teóricos previos en el régimen lineal. Naturalmente, en la práctica las fluctuaciones de materia oscura no son esféricamente simétricas. Partículas situadas a la misma distancia del centro de gravedad sentirán una fuerza distinta y colapsarán a tiempos ligeramente distintos difuminando el proceso de colapso, si bien esperamos que el resultado fundamental visto en (3.5) se mantenga para alguna definición efectiva de  $\delta$ . Una vez la fluctuación ha colapsado la aproximación de capas en la esfera deja de ser válida e intentar encontrar si quiera una buena ecuación que describa esa situación, ya no digamos con una solución analítica, es extremadamente complejo.

Sin embargo podemos afirmar que el colapso resultará en un conjunto de partículas de materia oscura gravitacionalmente ligadas en un halo. Si esperamos unos cuantos tiempos dinámicos, o lo que es lo mismo, damos tiempo a que las partículas realicen unas órbitas (el tiempo dinámico corresponde al tiempo de caída libre, es decir, al tiempo dado por  $x_{TA}, x_{Col}$ ) las partículas habrán podido interaccionar con las fluctuaciones de densidad y transformarlas, virializándose el sistema. En este límite termodinámico, se puede calcular que la energía cinética media es la mitad de la gravitatoria. Si asumimos que nuestro halo está aislado y no recibirá aportes de masa posteriores al colapso, podemos escribir

$$T_{vir} + V_{vir} = \frac{1}{2} V_{vir} = V_{turn} . \quad (3.6)$$

Esto implica que el radio del objeto virializado es la mitad que el que posee en el momento de turn around, por tanto su densidad será ocho veces mayor. En principio un halo realista tras colapsar verá como parte de la materia del fondo está acretando hacia él y por tanto estos resultados previsiblemente no se cumplirán, sin embargo comprobaremos esta virialización de otra manera. La mejor forma que tenemos para describir las perturbaciones, más allá de generalidades en momentos concretos de la evolución temporal, es dividir el campo continuo de materia en pequeños elementos, y ver cómo sumando la evolución de cada uno de ellos por separado podemos observar la formación de halos en el conjunto completo. Pasamos a realizar simulaciones de N-cuerpos.

## 4. Simulaciones con GADGET-4

Para realizar las simulaciones de N-cuerpos utilizaremos el software **GADGET-4** (**GA**laxies with **D**ark matter and **G**as int**E**rac**T**). Este software de código abierto fue creado por Volker Springel en el año 2000 y es utilizado para realizar simulaciones cosmológicas sobre formación de galaxias y materia oscura a gran escala, por tanto es perfecto para nuestro estudio [6].

El programa considera un espacio tridimensional  $L_x \times L_y \times L_z$  con condiciones de contorno periódicas que evitan sesgos y replican adecuadamente un universo homogéneo a gran escala. Una característica importante además de las partículas que no colisionan, es el suavizado gravitacional, en el cálculo de la fuerza entre partículas considera el potencial de cada una como el de una pequeña distribución de masa, esto ayuda a evitar divergencias si la distancia entre cuerpos es muy pequeña, y es una aproximación más realista del campo continuo que estamos intentando replicar. Las simulaciones pueden ejecutarse también sobre coordenadas comóviles dado que el programa puede considerar una cosmología arbitraria.

Para poder realizar cálculos con  $N$  muy grande, GADGET-4 implementa tanto en el cálculo temporal como en el de fuerzas una combinación de algoritmos muy optimizados, destacando el uso de algoritmos de árbol y **FFT**(Fast Fourier Transform), que se adaptan a la dinámica de grupos de partículas en función de la precisión de cálculo que necesiten, reduciendo el coste computacional enormemente. Una forma de ver esto es que para grupos de partículas muy próximos y con una alta interacción el cálculo del potencial es más preciso, y el paso temporal es más corto, que para grupos más alejados que se pueden considerar en masas equivalentes y que no necesitan tanta precisión. Por último comentaremos también dos funcionalidades importantes para el estudio de formación de estructuras, estas son el algoritmo **FOF**(Friends-Of-Friends) y el algoritmo **SUBFIND**, el primero identifica grupos de partículas por su distancia entre sí o longitud de enlace, lo que nos permitirá encontrar halos, el segundo en cambio identifica subestructuras que no sólo están próximas sino que además están ligadas gravitacionalmente. Esta adaptación dinámica junto con las técnicas para el estudio de grandes estructuras hace de este software libre una valiosa herramienta en simulaciones cosmológicas.

#### 4.1. Test del caso esférico

Antes de lanzarnos a simular un caso con condiciones iniciales realistas vamos a demostrar la validez del software tratando el caso de simetría esférica, que hemos estudiado anteriormente. Para preparar las condiciones iniciales que replicarán lo que vemos en la Figura 3.1 distribuimos inicialmente  $128^3$  partículas de forma aleatoria sobre un espacio cúbico con  $L = 50$  ( $Mpc$ ) con velocidad inicial nula, esto lo podemos ver en la Figura 4.1, donde se muestra una proyección de la posición de un quinto de todas las partículas para mejor visualización. Para poder crear nuestra sobredensidad esférica sin alterar la densidad del universo en su conjunto haremos lo siguiente: 1) definimos nuestra esfera, en este caso de radio  $r = 15$  ( $Mpc$ ), 2) definimos la densidad de contraste inicial deseada, que aquí será  $\delta = 0.1$ , 3) por último colocamos la esfera en la distribución de la Figura 4.1 y rellenamos su interior de partículas aleatorias del exterior hasta alcanzar la sobredensidad que queremos de esta manera no hemos variado la densidad global del universo ni hemos alterado la homogeneidad de este. El resultado final lo observamos en la Figura 4.2, donde en rojo se muestran las partículas que forman parte de la esfera.

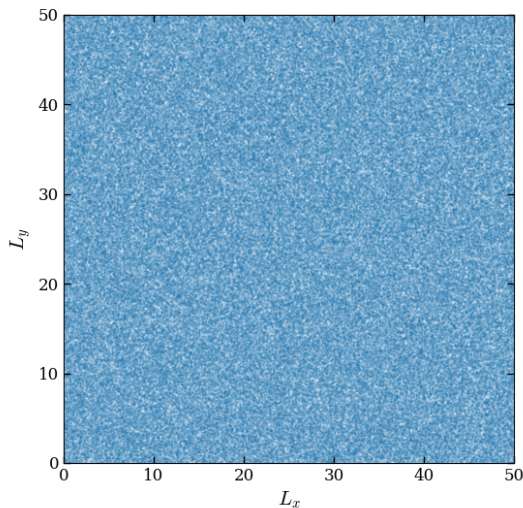


Figura 4.1: Proyección 2D de la distribución homogénea de partículas.

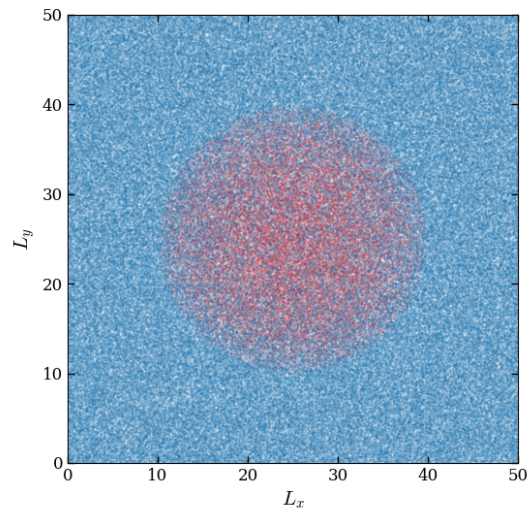


Figura 4.2: Proyección 2D de la distribución de partículas con la sobredensidad en rojo.

Ahora que tenemos definidas las condiciones iniciales, las introducimos en GADGET-4 y comen-

zamos la simulación. Comentar que hemos introducido una pequeña variación del código para tener en cuenta la radiación del universo en la evolución. Como nuestro objetivo es comparar el resultado de la simulación con la curva de la Figura 3.2, elegimos un factor de escala inicial  $a_i = 2.9 \cdot 10^{-5}$  y un factor final  $a_f = 2.9 \cdot 10^{-2}$ .

Dado que no tenemos una capa definida, sino un set de partículas, podríamos seguir la evolución de la partícula más alejada del centro de la esfera, sin embargo aquí debemos tener en cuenta que nuestras condiciones iniciales no son ideales, y que el límite entre la esfera y el resto del espacio no es perfecto. Aunque globalmente hemos distribuido homogéneamente las partículas, a pequeña escala aparecen pequeñas inhomogeneidades que tanto aquí como más adelante habrá que tener en cuenta. En este caso, esto se traduce en que en la superficie de la esfera habrá algunas partículas que interaccionen más que otras por proximidad entre sí. Esto va a ocasionar que los cuerpos que en principio pertenecen a la misma capa tengan desviaciones en sus trayectorias respecto del resto. Para definir lo mejor posible la curva aproximada de la capa más externa calculamos la media de las trayectorias de las 150 partículas más alejadas del centro, escogemos en concreto ese número debido a que es el que mejor se ajusta a lo esperado, si utilizamos un grupo muy amplio podríamos salirnos de la última capa, pero si no es suficiente la muestra no será representativa. Las evoluciones individuales de las partículas se muestran en la Figura 4.3 donde vemos que aunque la tendencia general es similar en conjunto, llega a haber una diferencia en  $R$  de 0.4. En la Figura 4.4 se presenta la media de las evoluciones de las partículas.

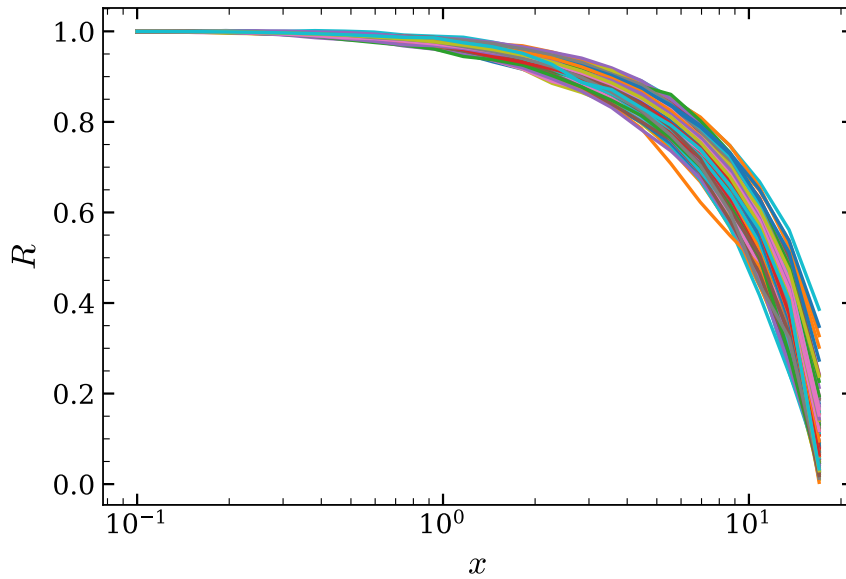


Figura 4.3: Evolución de  $R$  con  $\delta = 0.1$  para las 150 partículas más alejadas del centro de la esfera.



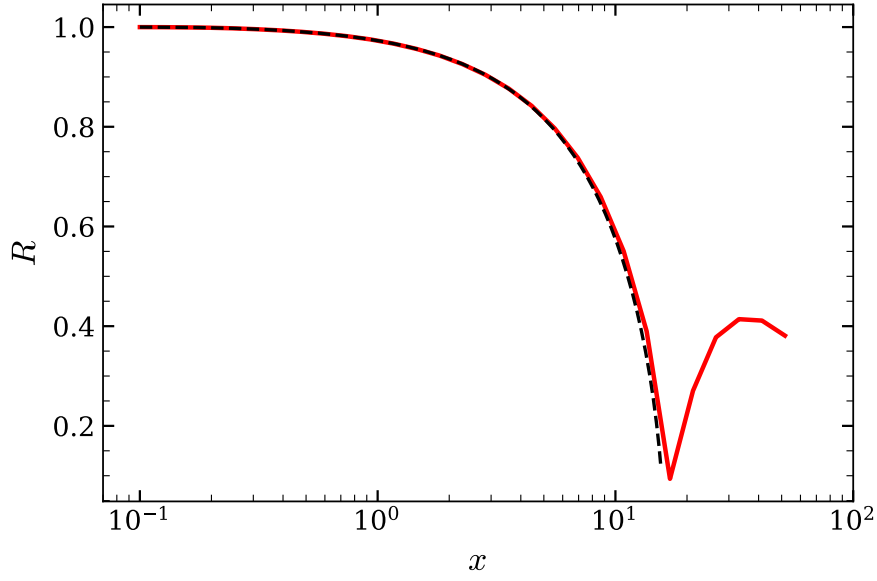


Figura 4.4: Evolución media de  $R$  para las partículas de la última capa aproximada de la esfera. En línea discontinua la evolución teórica según la sección 3.

Vemos entonces que la simulación satisface nuestro resultado teórico visto en la sección 3. Dado que  $\delta = 0.1 \ll 1$  la perturbación no colapsa hasta después del tiempo de equivalencia  $x = 1$ , concretamente en  $x = 16.96$  o en términos de redshift  $z = 202.29$ . Podemos notar cómo la simulación se aleja sutilmente de la predicción cuando  $R$  empieza a acercarse a 0. Esto puede ser debido a varios efectos que resultan de la discretización en N-cuerpos. Por ejemplo, el centro de la esfera de partículas aleatorias no es exactamente el centro de la distribución teórica y aquí hemos calculado  $r$  como la distancia al centro de la esfera. Otro posible efecto es que el suavizado de la gravedad a cortas distancias produce que la gravedad sea más débil de lo real cuando las distribuciones se comprimen mucho. Como estos efectos y nuestra desviación son pequeños, no hemos ahondado más en el tema.

En esta última gráfica observamos la evolución de la esfera más allá del colapso, es decir cuando empieza a virializar. Parece que la esfera aumenta de tamaño tras colapsar y luego vuelve a encogerse, suponemos que esto se debe a que algunas partículas describen una órbita tras colapsar expandiendo el tamaño de la esfera y vuelven a introducirse en el cúmulo estabilizando esas órbitas hasta que el objeto se ha virializado. Observemos nuestra simulación en varios instantes de tiempo en la Figura 4.5. Presentamos la distribución como un mapa de color donde la densidad de partículas en escala logarítmica dicta el color del espacio. Los 4 instantes pertenecen todos a la época de dominancia de materia, es decir, cuando la esfera ya está colapsando, para poder percibir bien la sobredensidad. De hecho en la primera imagen la esfera sigue siendo poco perceptible, pero nos sirve para demostrar en este ejemplo cómo efectivamente a pesar de partir de un universo homogéneo, que contiene una pequeña perturbación que apenas podemos ver, obtenemos en la imagen final un universo inhomogéneo.

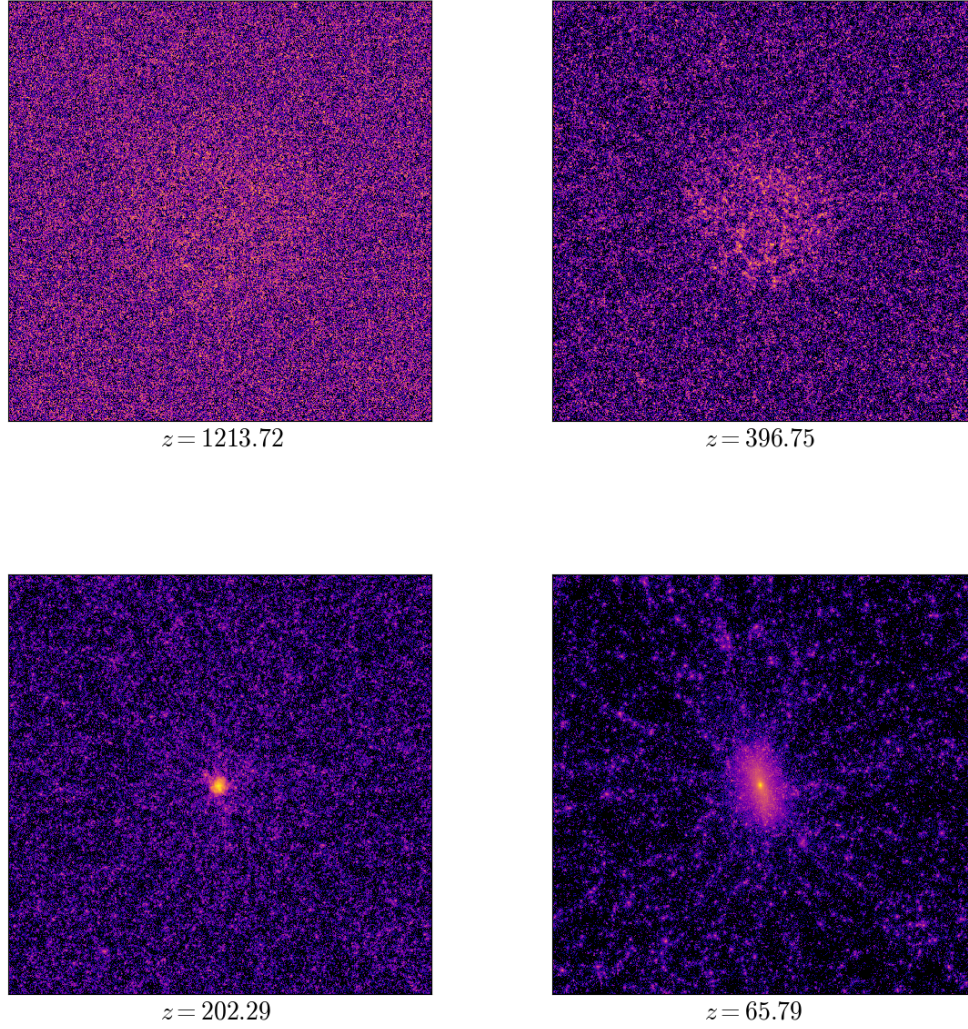


Figura 4.5: Evolución de la sobredensidad esférica de  $\delta = 0.1$  a lo largo de  $z$ .

En la tercera figura se muestra nuestro universo en el momento del colapso, se pueda apreciar como la esfera pasa a ser un pequeño cúmulo de muy alta densidad o halo. En la última imagen vemos como una gran cantidad de materia del fondo está acretando al cúmulo central, además se perciben pequeños halos en el fondo que se han formado a partir de las pequeñas inhomogeneidades de nuestro universo inicial, cuya materia o partículas no estaban idealmente distribuidas. En esta parte estudiaremos principalmente el gran cúmulo central, viendo qué características podemos obtener sobre él.

Nos centramos por tanto en el último instante de nuestra simulación para  $z = 65.79$ , donde suponemos que el objeto ya ha virializado o está muy cerca de hacerlo, la virialización con un set de partículas se puede entender como un momento en el que las órbitas de las partículas son estables, y por tanto el objeto en conjunto también lo es. En la Figura 4.6 se muestra el resultado del algoritmo FOF del programa, recordemos que este algoritmo sólo identifica grupos por la distancia de las partículas entre sí. El grupo que se muestra es el más grande de la simulación y evidentemente corresponde a nuestro halo de materia oscura.

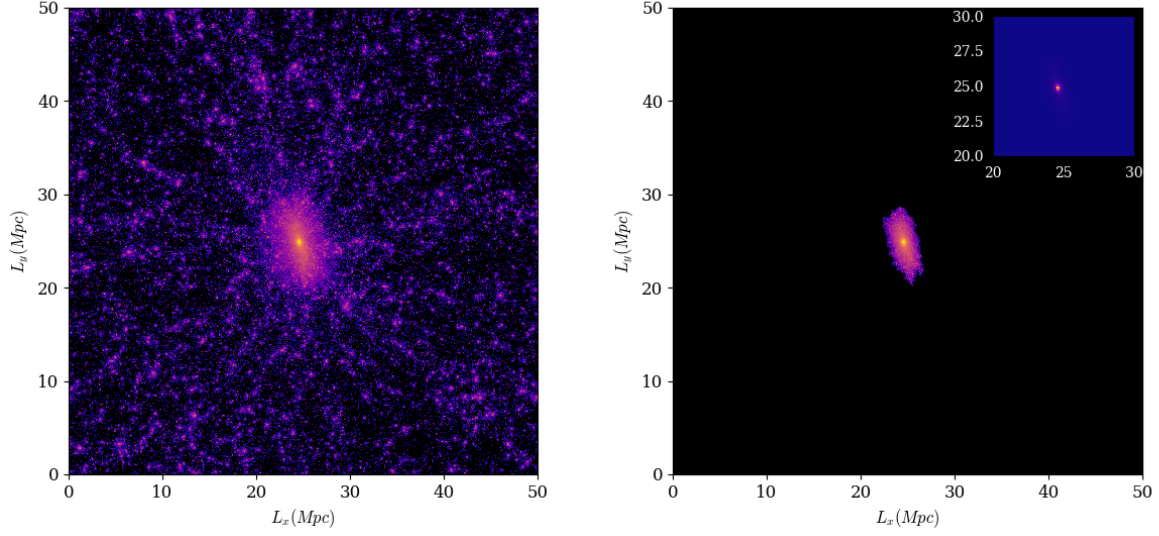


Figura 4.6: A la izquierda, la simulación en  $z = 65.79$ . A la derecha, el mismo instante pero sólo con el halo encontrado por el algoritmo FOF.

A la hora de caracterizar un halo de materia oscura encontramos un problema fundamental, ¿cuál es el límite de nuestro halo? Es complicado definir dónde empieza y dónde acaba un halo, en primer lugar porque la distribución de partículas no termina bruscamente, y en segundo porque representa una estructura extendida de forma continua donde la densidad va disminuyendo. De hecho en la segunda gráfica vemos una densidad rosada de partículas con forma elipsoidal que en realidad representa una masa mínima del halo real (coloreado en amarillo y con forma más esférica) dado que la escala de colores es logarítmica. Esto se ve más claramente en la pequeña figura de la esquina donde la escala de colores es lineal. Es complicado definir con precisión las magnitudes características de un halo, en concreto para la masa se utiliza una definición algo distinta, en vez de contabilizar el número de partículas que nuestro algoritmo ha encontrado, definimos la masa crítica  $200 M_{200}$  como la masa contenida en el radio desde el centro de masas del halo encontrado, donde la densidad promedio es 200 veces la de la densidad crítica del universo, esto se hace así debido a que en muchas simulaciones los halos tienden a estabilizarse en ese umbral, y por tanto se usa esta definición más estandarizada.

En concreto para nuestro halo tenemos que  $M_{200} = 2.46 \cdot 10^5 (10^{10} M_{\odot})$  y  $R_{200} = 3.25 (Mpc)$ , mientras que la masa sumada de todas las partículas es  $M = 2.26 \cdot 10^5 (10^{10} M_{\odot})$ , es decir el halo definido mediante  $M_{200}$  es algo mayor en tamaño. Otra definición estandarizada es  $M_{500}$ , análoga a la anterior pero en este caso la densidad debe ser 500 veces la de la densidad crítica, por tanto el radio definido es menor, por ejemplo en nuestro caso  $R_{500} = 2.21 (Mpc)$ . La masa de nuestra esfera inicial era de  $M_{CI} = 1.33 \cdot 10^5 (10^{10} M_{\odot})$ , por tanto vemos que nuestro cúmulo ha absorbido otras partículas durante su evolución, esto no nos permite realizar la aproximación que vimos anteriormente en (3.5), pues la masa no se conserva, y consecuentemente el radio es mucho menor del esperado.

Veamos también los resultados del algoritmo SUBFIND[7]. Este algoritmo se basa en encontrar estructuras ligadas dentro del halo definido con FOF, para ello computa una estimación de la densidad local de cada partícula y reconoce los candidatos a subgrupo en regiones con sobre-densidades. Una vez ha definido las partículas del candidato se lleva a cabo una selección más física y se descartan las partículas con energía positiva, situando el centro del halo en la posición de la partícula con energía más negativa (más ligada). Finalmente se recalcula el potencial y la

velocidad física respecto a este centro y si un mínimo de partículas están ligadas, se considera como subhalo. En la Figura 4.7 presentamos la subestructura más grande encontrada dentro de nuestro halo. Este algoritmo es muy útil para detectar subestructuras ligadas dentro de los grandes halos de materia oscura, como galaxias o sistemas de galaxias. En este caso tal y como esperábamos el subhalo hallado es un cúmulo de materia que es prácticamente equivalente al halo principal, lo mostramos con cierto zoom para visualizarlo mejor. Podemos ver en detalle como la forma de la densidad efectiva el halo es esférica.

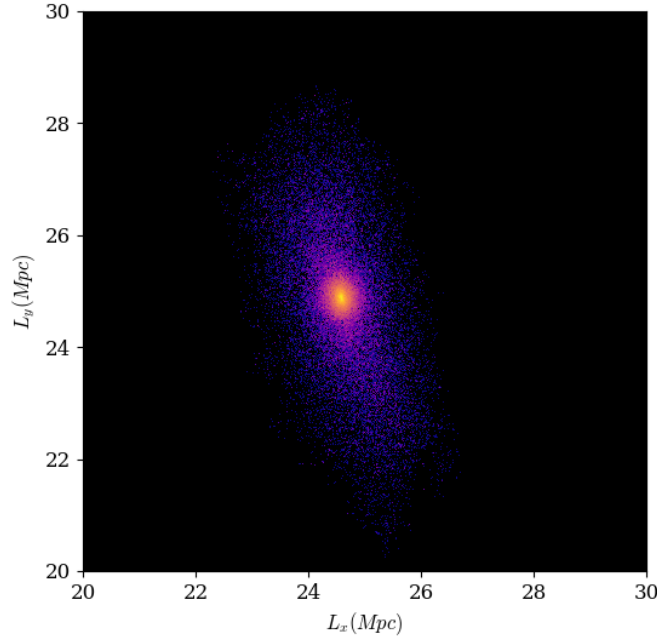


Figura 4.7: Estructura subfind principal o subhalo dentro del halo, zoom aplicado para enfocar mejor la estructura.

Fijémonos ahora en la evolución de los halos que el programa ha ido encontrando a lo largo del tiempo para hacer un análisis más cuantitativo de lo comentado en la Figura 4.5. En la Figura 4.8 se muestra, en la parte de arriba, la densidad de halos en función de su masa para tres instantes de la simulación. Inicialmente existe un gran número de minicúmulos con masas del orden de 10 y 100, el histograma central corresponde al instante en el que, según la Figura 4.4, nuestra sobredensidad colapsa, el último histograma es en el último instante de nuestra simulación. En las figuras de la segunda fila se muestran las posiciones de un quinto de los halos para cada división del histograma, se muestran con circunferencias de radio  $R_{200}$  y coloreadas según su masa. En el primer gráfico vemos que los cúmulos mayoritarios de menor masa son los que aparecen debido a las inhomogeneidades de nuestras condiciones iniciales y también se concentran en la sobredensidad, estos últimos se agrupan en el halo central en amarillo cuando colapsa la estructura. Finalmente el halo central aumenta de masa que ha ido acretando hacia él y vemos como el resto de minicúmulos se redistribuyen en halos más masivos, tal y como se ve en el último histograma.



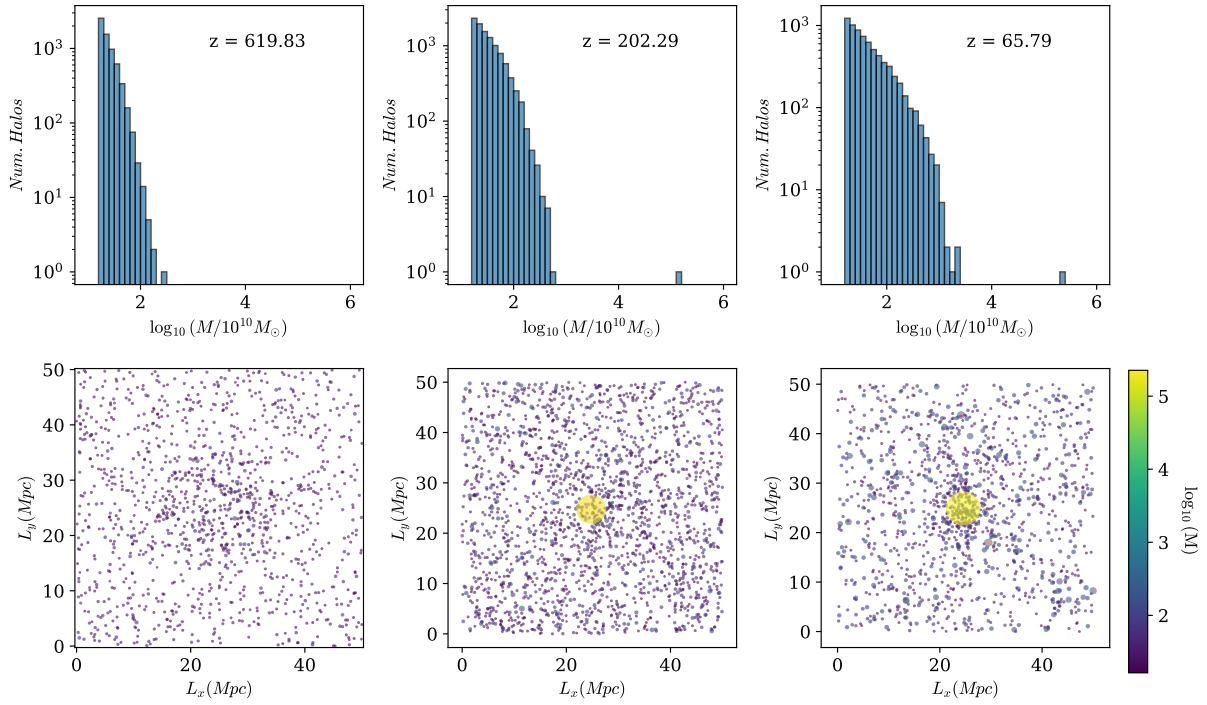


Figura 4.8: Arriba, función de distribución en masa de los halos. Abajo, posición de un quinto de los halos por división de masa como circunferencia de radio  $R_{200}$  y color en función de su masa.

Para acabar con este caso observemos una descripción más concreta de la evolución del halo central. Comencemos viendo en la Figura 4.9 la masa del halo mas grande en función de  $z$ . Debemos tener en cuenta que el halo más grande a lo largo de la simulación no tiene por qué ser el central, la línea discontinua morada muestra el instante de colapso del halo principal de la simulación, y vemos como el salto en masa es mucho más grande que el resto, creciendo poco desde ese momento. Por tanto esos últimos puntos son los que corresponden al halo central. Esto también puede verse en la segunda gráfica de la Figura 4.8.

Así pues en la Figura 4.10 ahora sí presentamos en la izquierda la masa del halo central en función del redshift en escalas lineales, la línea verde discontinua es la masa de la sobredensidad esférica inicial y la línea morada es el momento de colapso del halo. El primero punto corresponde fielmente a la esfera colapsada, ya que vemos que la masa es muy similar a la inicial. Inmediatamente después del colapso la masa se reduce, lo cual es bastante extraño. Para explicarlo deberemos volver al fenómeno de virialización. En los instantes después del colapso las partículas orbitan alrededor del centro de gravedad lo que puede hacer que el halo se expanda por unos momentos y luego volver a colapsar. Lo que estamos viendo en la figura es como en el instante posterior al colapso casi una cuarta parte de la masa del halo se ha salido del grupo, sin embargo hay que recordar que la materia del fondo está acretando hacia el halo, y posiblemente por eso en el siguiente instante la masa aumente un poco. Finalmente en los siguientes instantes el cúmulo se está estabilizando mientras absorbe masa del fondo y por eso su masa aumenta mucho más.

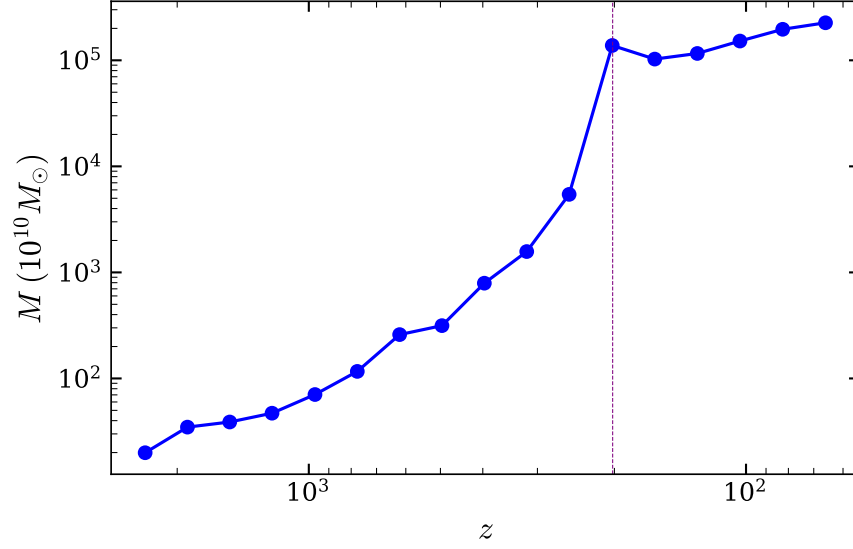


Figura 4.9: Masa del halo más masivo en función de  $z$ . En morado el momento de colapso del cúmulo.

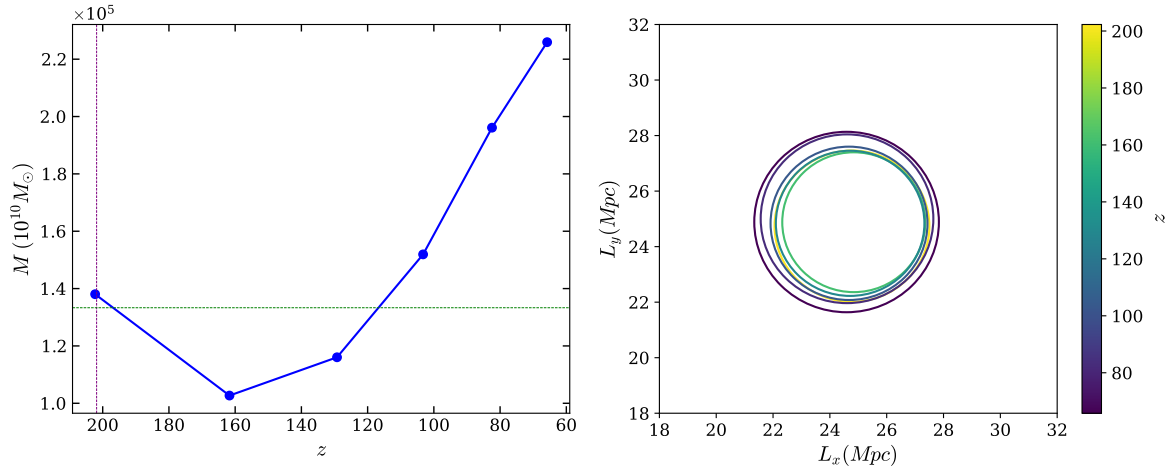


Figura 4.10: A la izquierda la masa del halo central en función del tiempo. A la derecha, tamaño del halo y posición durante su evolución.

A la derecha se muestra la evolución de la posición del halo, dibujada en circunferencias de radio  $R_{200}$  y donde el color refleja el redshift correspondiente, vemos que el radio del halo disminuye tras el instante inicial para posteriormente aumentar de tamaño debido a que su densidad y su masa crecen. También se puede apreciar cómo la posición del centro de masas del halo se desvía ligeramente a medida que crece, algo que puede tener su origen en las fuerzas de marea de las partículas del fondo, que en conjunto tienen una masa considerable y no están perfectamente distribuidas.

## 4.2. Simulación de la estructura de gran escala del Universo

Vamos a aplicar los técnicas de análisis que hemos utilizado en la anterior sección pero esta vez en una simulación con condiciones iniciales realistas que se asemejen a las del universo primitivo, de esta forma el resultado podrá ser comparado con lo que esperaríamos encontrar en nuestro universo. Para generar estas condiciones iniciales vamos a utilizar una funcionalidad incluida en GADGET-4, que está basada en el código de NGenIC [8], también creado por Volker Springel. El programa crea una red de partículas e introduce pequeños desviamientos según el  $z$  inicial de la simulación, de manera que las perturbaciones de densidad sean consistentes con las observadas y derivadas del estudio del CMB. En la Figura 4.11 vemos una proyección de estas condiciones iniciales. A gran escala parecen una red cristalina, pero si nos acercamos podemos comprobar como a lo largo del eje las partículas están desplazadas.

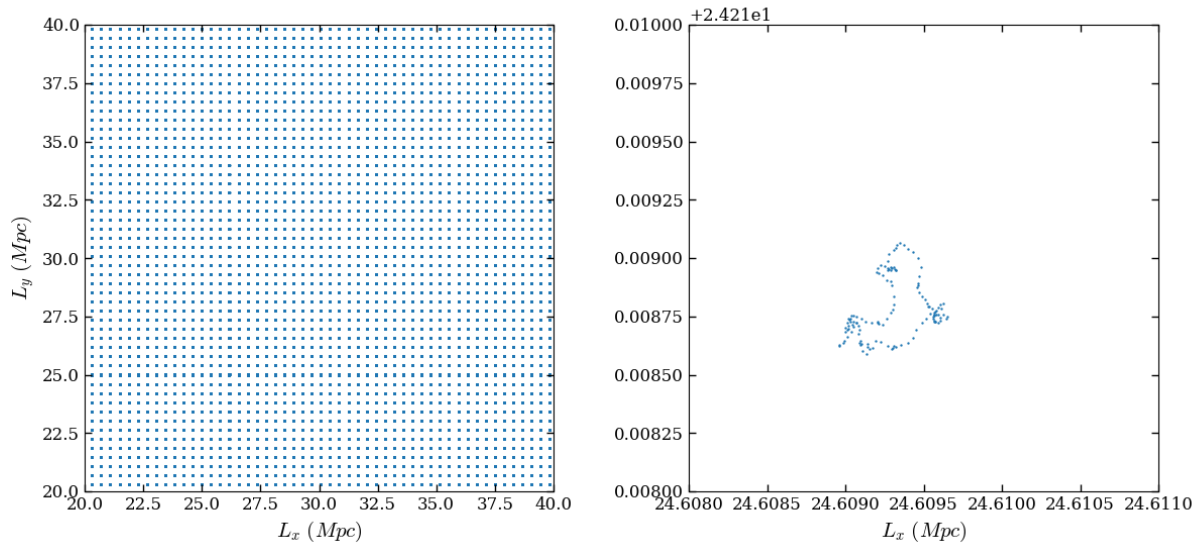


Figura 4.11: A la izquierda, set inicial de cúmulos de partículas en red regular a tiempo  $z = 34481.76$ . A la derecha zoom en uno de los cúmulos, para observar la dispersión inhomogénea.

A partir de este universo comenzamos nuestra simulación, en este caso no hemos utilizado la variación del código que tiene en cuenta la radiación ya que estudiaremos sólo la época de dominancia de materia para ver la formación de estructuras. Vamos a comenzar la simulación en  $z_i = 81.88$  y acabará en este caso en  $z_f = 2.45$ .

En la Figura 4.12 se muestra la evolución de nuestro set inicial de materia oscura a lo largo del tiempo de simulación, en un mapa de colores idéntico al que usamos en la Figura 4.5. Podemos observar como las pequeñas perturbaciones que inicialmente no son apreciables se amplifican hasta formar los halos de gran densidad que vemos al final, generando un universo inhomogéneo con grandes estructuras, que es similar al que observamos actualmente. En las tres últimas imágenes se puede apreciar como se van definiendo los halos, sin embargo al igual hicimos en la sección anterior vamos a analizar más profundamente esta formación a partir de la función de masas de los halos. En concreto para esta simulación el momento donde el código encuentra los primeros halos es en  $z = 9.47$ , por tanto vamos a estudiar esta propiedad en varios instantes previos al final de la simulación, es lo que vemos en la Figura 4.13.

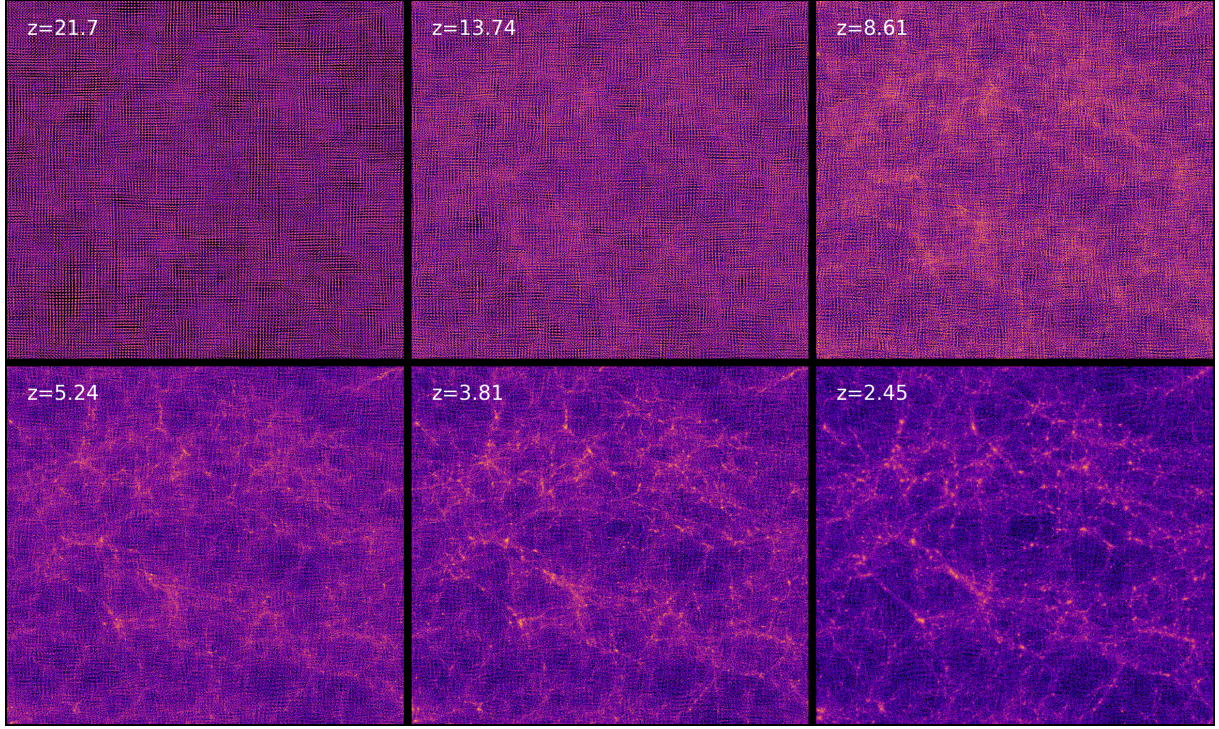


Figura 4.12: Evolución de nuestro set inicial de materia oscura a lo largo del tiempo.

La teoría de Press-Schechter realiza un tratamiento estadístico de la formación de halos [5]. En ella se divide el espacio en esferas de cierto radio y se calcula la distribución de fluctuaciones de densidad en función del tiempo y la masa (radio de la esfera). Esta teoría predice que la varianza de las fluctuaciones disminuye con la masa, lo que implica que a pequeña escala existen contrastes de densidad mayores, que como hemos visto colapsan antes, por tanto las pequeñas estructuras se forman primero y se van agrupando para dar lugar a halos más grandes. Este tipo de formación de estructuras se conoce como *bottom-up*. Además según esta teoría el número de halos en función de la masa sigue una ley potencial para masas pequeñas, con un decaimiento exponencial en grandes masas. En la figura podemos ver claramente como inicialmente se forma un gran número de halos de pequeñas masas que van dando lugar a un número menor de halos más masivos. En rojo se muestra el ajuste a la dependencia potencial que hemos comentado, señalando el exponente que en general está en torno a  $x \sim -1$ . En este caso no observamos el *fall-off* de la función de masas para masas grandes, quizá aún no se han formado los suficientes como para apreciar este efecto.

En los instantes posteriores a los que se ven en la gráfica el universo estará dominado por la constante cosmológica  $\Lambda$  y la expansión acelerada del universo dificultará la formación de estructuras. Esta es la razón por la que el universo que observamos este estructurado principalmente en galaxias, pues tienen una masa similar a la de las fluctuaciones mayoritarias en *zeq*, que han podido colapsar y formar cuerpos antes de entrar en la época de  $\Lambda$ . Según la figura esa masa está alrededor de  $M_{Gal} \approx 10^{12} M_{\odot}$ . Si nos fijamos en cambio en la Figura 4.8 vemos que existe en general un número mayor de halos de pequeña masa. Esto se debe evidentemente a las condiciones iniciales consideradas, en el primer caso la distribución aleatoria de partículas crea accidentalmente fluctuaciones pequeñas que colapsan antes que en el segundo caso.



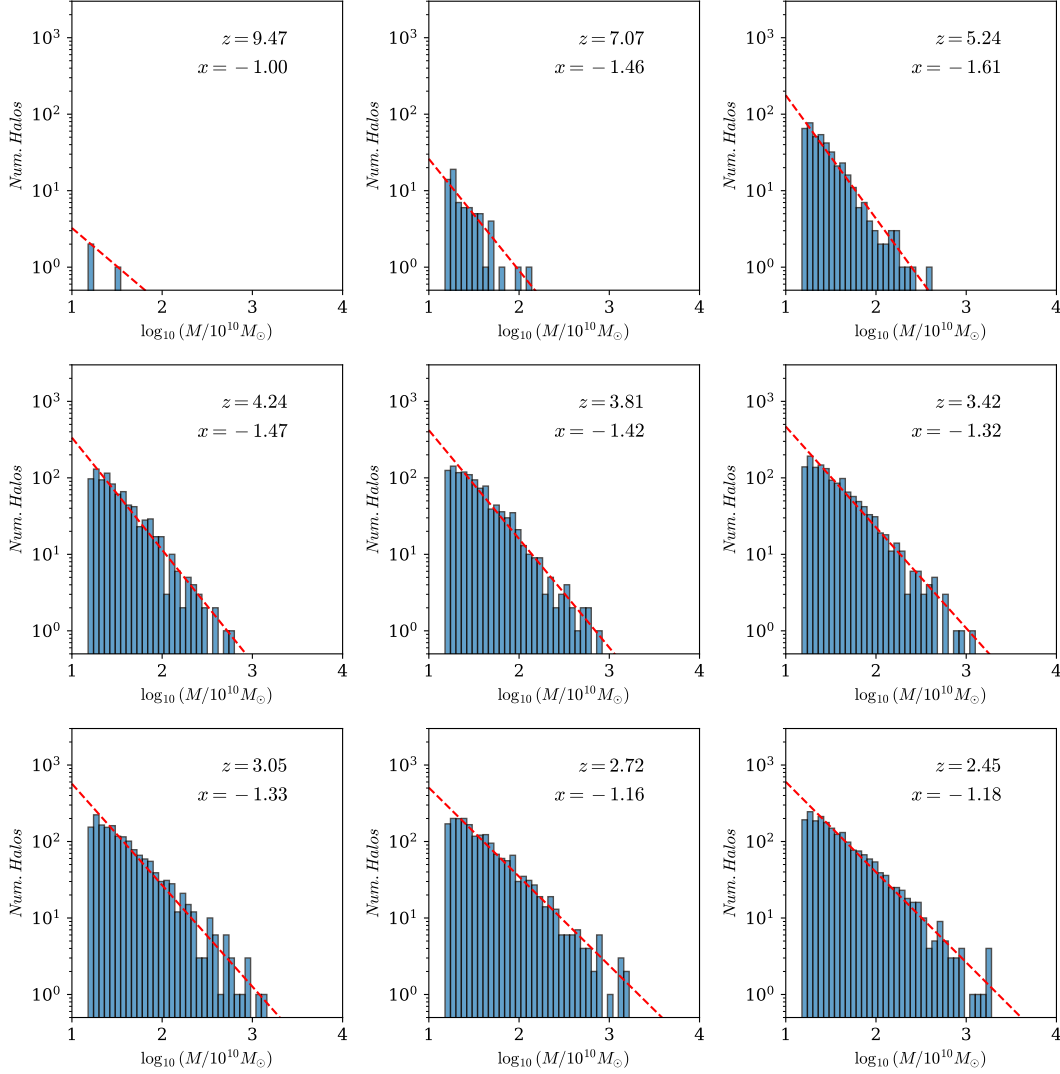


Figura 4.13: Función de masa de los halos para la simulación en los últimos instantes, donde se empiezan a formar estructuras. En rojo el ajuste a la función  $N_{halos} = A \cdot M^x$ .

Es ahora interesante fijarse en las estructuras ligadas que se han formado dentro de los halos, pues son las que van a dar lugar a las galaxias y a los cúmulos de galaxias. Vamos a centrarnos en el último instante de nuestra simulación, en concreto en el halo más masivo y vamos a observar con el algoritmo SUBFIND las principales estructuras ligadas dentro de él. En la Figura 4.14, a la izquierda, se muestran las dos subestructuras de este halo, una de ellas es el pequeño cúmulo que se observa en la cabeza del resto de materia, que es la segunda subestructura. A diferencia del subhalo que mostramos en la Figura 4.7, este es más pequeño y menos masivo, pero veamos de qué distancias y masas estamos hablando realmente, comparándolas con las magnitudes del halo de materia oscura de nuestra galaxia, la Vía Láctea. El pequeño cúmulo tiene un tamaño físico aparentemente de unos  $D \approx 0.3/h$  ( $Mpc$ ), donde  $h$  es una magnitud relacionada con la constante de Hubble, según distintas observaciones el valor estimado de esta magnitud es  $h \approx 0.7$  [10]. Por tanto posee un diámetro físico de  $D \approx 0.43$  ( $Mpc$ ) y una masa  $M = 23.51$  ( $10^{10} M_\odot$ ) mientras que el halo de materia oscura de la Vía Láctea se estima que tiene un diámetro de  $D_{VL} \approx 0.2$  ( $Mpc$ ) y una masa que se encuentra entre  $M_{VL} = 100 - 150$  ( $10^{10} M_\odot$ ), por tanto este pequeño halo podría ser comparable en magnitudes al de una galaxia como la nuestra.

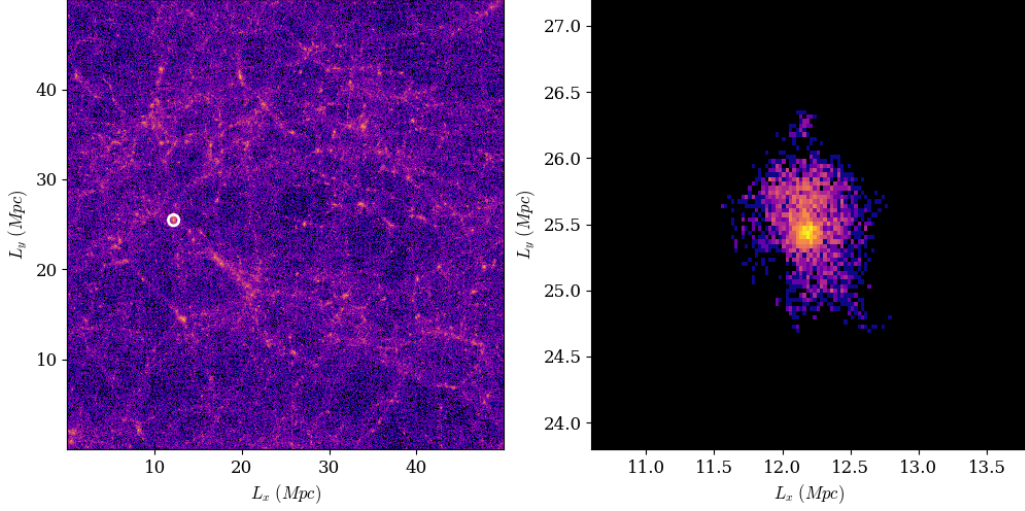


Figura 4.14: A la izquierda, el universo en el último instante de nuestra simulación,  $z = 2.45$ , el círculo blanco señala el halo más masivo detectado y su radio es el definido por  $R_{200}$ . A la derecha, las dos estructuras reconocidas por SUBFIND, que están ligadas gravitacionalmente.

## 5. Conclusiones

En este trabajo hemos empezado demostrando mediante la gravedad de Newton y mediante la teoría de perturbaciones de la Relatividad General, junto con la expansión del universo según la métrica de Friedmann-Robertson-Walker que las pequeñas fluctuaciones  $\delta \ll 1$  de materia oscura fría en el fondo cósmico de microondas (CMB) no evolucionan significativamente hasta la época de dominancia de materia. Para estudiar también las fluctuaciones no lineales hemos considerado un caso con alta simetría esférica que nos permite computar una solución numérica, obteniendo que efectivamente estas perturbaciones colapsan antes, y hemos definido las estructuras finales que llamamos *halos*. A continuación utilizamos una simulación de N-partículas para replicar este caso, corroborar las soluciones teóricas y ahondar en las características de los halos, como la función de masa o su virialización. Finalmente utilizamos este programa para hacer una simulación de la formación de estructuras a gran escala en el universo a partir de unas condiciones iniciales que contienen perturbaciones consistentes con las observaciones del CMB, y que por nos muestran resultados que podemos suponer similares a los que observamos actualmente.

En concreto la función de masa de los halos, junto con la teoría de Press-Schechter, nos da interesante información acerca de por qué las principales estructuras que observamos en el universo inhomogéneo son galaxias o cúmulos de galaxias. Las galaxias tienen un tamaño aproximado correspondiente al máximo de fluctuaciones cuando se inició la época de dominación de materia, por tanto han podido colapsar y formar abundancia de estructuras que son las que observamos mayoritariamente hoy en día.

En conclusión hemos estudiado la evolución de la materia oscura hasta donde la teoría nos ha permitido y luego hemos utilizado un set de N-cuerpos para realizar simulaciones que facilitan su estudio, obteniendo resultados importantes en cosmología.

## Referencias

- [1] F. ZWICKY, *Helv. Phys. Acta*, **6** (1933) 110-127
- [2] V. RUBIN & J.FORD, W. *Astrophys. J.* **159** (Feb., 1970) 379.
- [3] N. AGHANIM *et al.*, [Planck Collaboration], *Astron. Astrophys.*, **641** (2020) A8
- [4] HOGAN, C. J. & REES, M. J. *AXION MINICLUSTERS*, *Phys. Lett. B* **205**, 228-230, 1988
- [5] EDWARD W. KOLB & IGOR I. TKACHEV, *Large amplitude isothermal fluctuations and high density dark matter clumps*, *Phys.Rev.D*, **50**, (1994) 769-773
- [6] VOLKER SPRINGEL *et al.*, *Simulating cosmic structure formation with the Gadget-4 code*, arXiv:2010.03567 [astro-ph.IM], 18 Aug 2021
- [7] VOLKER SPRINGEL *et al.*, *Populating a cluster of galaxies - I. Results at  $z=0$* , arXiv:astro-ph/0012055, 3 Dec 2000
- [8] VOLKER SPRINGEL *et al.*, *Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars*, *Nature*, 435, 628 (2005)
- [9] W. PRESS & P. SCHECHTER, *Astrophys. J.* **187** (1974) 1-19
- [10] ADAM G. RIESS *et al.*, *A 2.4 % Determination of the Local Value of the Hubble Constant*, arXiv:1604.01424 [astro-ph.CO], 9 Jun 2016