Trabajo de Fin de Grado

Variedades de Riemann y flujo de Ricci

Grado en Matemáticas

Autor: Juan Guerrero Marcos
Director: Luis Ugarte Vilumbrales
Departamento de Matemáticas

Curso 2023-2024

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad Zaragoza
1542

Summary

Smooth manifolds are critical in the understanding of very different subjects, so the need of classification is clear. Smooth manifolds are topological manifolds as well and arise in the study of partial derivative equations systems, geometry and topology, among others. We have some notions like distance, volume and curvature in local neighbourhoods and would like to extend them to a whole smooth manifold and study global properties from these concepts. The natural question follows: When will it be possible to extend ideas like differenciation and curvature? What properties does one need to ask for in order to have the desired notions on a manifold?

To answer those questions, we will introduce basic ideas and definitions which will allow to understand a Riemannian manifold (M, g) as a smooth manifold with the additional structure of metric, which is a tensor field that satisfies three basic properties. Some definitions will be dedicated to give sense to this metric and make sure everything is as rigorous as it could be.

Then, the appropiate questions are whether these manifolds can exist and how common are they, if the examples are frequent and simple. To do so, it will be proven that any smooth manifold admits a Riemannian structure, for which partitions of unity will be used. After that, as it is necessary to comprehend the usefulness and the existence of a vast world of Riemannian manifolds, a few examples will be provided. In a particular fashion, Euclidean space, spheres and hyperbolic spaces will be reviewed and given at least one metric.

As these are not the only usual Riemannian manifolds, but the more common ones, we will introduce Lie groups as smooth manifolds, which can also be provided with a metric. Some of the properties of Lie groups will be stated and the Lie derivative along a vector field will be introduced.

Subsequently will come a recall to one of the previous example, because $\mathbb{S}^3$ has a natural Lie group structure (it is diffeomorphic to $SU(2)$) and, as a result, it can be seen as a Lie group and the associated Lie algebra will be computed, giving a basis and the commutation relations. This example will be useful for the remainder of this work, so constant references to it are to be expected.

At that point, two cases of manifolds with a metric that is not Riemannian will be reviewed: sub-Riemannian manifolds and pseudo-Riemannian manifolds. The former are defined from a sub-bundle instead of using the whole tangent bundle and will be exemplified with the Heisenberg group H_3, which is also a Lie group. The latter is dedicated to Lorentzian manifolds, for which the metric does not need to be positive-definite: non-degeneracy will suffice. This type of metric is important in the context of cosmology, where the Universe is modelled as a four-dimensional Lorentzian manifold.

Having seen the importance of the examples, connections and linear connections or covariant derivatives are introduced as maps that satisfy the product rule and their relations with respect to the Christoffel symbols are stated.

As it happened with the existence of a metric over a smooth manifold, a proof that every smooth manifold admits a linear connection is given, using partitions of unity. Moreover, together with the notions of symmetry and compatibility with the metric, Levi-Civita connection is defined. We show that such connection exists and that it is the only one linnear connection over a Riemannian manifold that is both symmetric and

compatible with the metric. Koszul identity is then presented as a useful resource to compute Levi-Civita connection.

We recall the Berger spheres and calculate Levi-Civita connection, with the already presented local frame of generators on the Lie group.

It is now the time to start answering one of the initial questions: what should be the curvature in an abstract manifold? The curvature (or Riemann) endomorphism will be defined as follows:

$$R(X,Y)\,Z \coloneqq \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

This expression is a $\binom{3}{1}$- tensor field and will allow to introduce Riemann curvature tensor, which is obtained by lowering the upper index of the curvature endomorphism using the metric.

A fundamental notion will then be presented: a Riemannian manifold is flat if and only if its curvature tensor is identically zero.

This endomorphism is difficult to obtain in a general case, so its symmetries will be shown to reduce calculations when they will be needed. In particular, Bianchi's identity is presented. Given the technical difficulties that computing the Riemann curvature tensor can pose, it is natural to try to extract information without losing too much of it. Ricci curvature is one of those attempts and it will be shown to be the contraction of the first and last indices of the Riemann curvature tensor. Now it can vanish and a manifold could not be flat, but Ricci curvature still gives insight of the overall curvature of a given Riemannian manifold.

Scalar curvature will be given as the trace of the Ricci curvature, which can still provide information about the evolution of a metric on a manifold, but does not retain as much information as the Ricci tensor. This will be the cause of using the different curvature morphisms altogether, because each one has a specific utility.

Catching up with the theory, the curvature of the Berger spheres is obtained: first the Riemann endomorphism and, after it, Ricci tensor and scalar curvature.

Einstein metrics are also introduced as those that verify that Ricci curvature is directly proportional to the metric, because these can be used to describe the shape of the Universe, according to general relativity.

It will be shown that, if a smooth manifold of dimension grater than three is provided with an Einstein metric, then the scalar curvature has to be a constant.

In order to give a characterization of smooth manifolds, Poincaré presented its famous conjecture:

Theorem (Poincaré Conjecture) Let M be a compact 3-manifold, connected and simple-connected. Then M is homeomorphic to the 3-sphere $\mathbb{S}^3$.

In this context, Hamilton tried to give a proof using Ricci flow equation

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2Rc\,(g_t)\,,$$

but without success. This characterization was a conjecture until 2002, when Perelman provided a complete proof also using Ricci flow equation.

With this in mind, we will present and discuss Ricci flow equation for some simple cases, such as Berger spheres, this time using a slightly different metric.

Before finishing, a last concept will be introduced: solitons, solutions of the equation

$$Rc\left(g\right) = \lambda g - \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g,$$

which turn out to be self-similar propagating solutions, shrinking or expanding (and maybe maintaining static) the metric. Again, an example over Berger Spheres will be presented and the work will be almost finished with a very different example: the four-dimensional Lie group $H_3 \times \mathbb{R}$, which is the cartesian product of known manifolds but will be considered to illustrate the huge difference in complexity with respect to previous cases. A global frame will be given and, with the soliton equation, a vector field will be found. Then the partial differential equations system that solves the problem will be presented.

Lastly, a general recapitulation of the work and future investigation paths will be discussed.

Contents

1 Introducción: motivación y objetivos

El problema de caracterización y clasificación de objetos matemáticos procura preguntas que, en muchos casos, son de difícil respuesta. En particular, las variedades diferenciables, que son a su vez variedades topológicas localmente similares al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, son objetos de intenso estudio, pues están dotadas de una estructura adicional que permite hacer uso del cálculo sobre ellas.

Esto da lugar a la posibilidad de describir aplicaciones sobre las variedades y al planteamiento de sistemas ordinarios de ecuaciones diferenciales en las mismas, por ejemplo. Además, dado que las variedades pueden embeberse en algún $\mathbb{R}^N$, sobre el que se tienen nociones geométricas y de cálulo, parece natural preguntarse cómo se pueden trasladar (y si siempre tiene sentido hacerlo) y cuáles son los requerimientos. Algunos conceptos fundamentales en geometría son las distancias, los volúmenes y la curvatura; ¿cuándo será posible escribir una distancia sobre una variedad? ¿cómo se definirá una curvatura, que se calcula de forma usual mediante diferenciación, sobre un espacio distinto de $\mathbb{R}^n$? Para definir la curvatura será necesario tener alguna noción de diferenciabilidad, pero no siempre es preciso restringirse (y de hecho resulta útil no hacerlo) a entender las variedades como subconjuntos de algún $\mathbb{R}^N$: el estudio abstracto de las variedades vistas como espacios topológicos supone libertad adicional en el entendimiento de las mismas pues, en general, un problema en dimensiones grandes puede ser innecesariamente complicado cuando se puede trasladar a una variedad de dimensión menor.

El uso de las variedades diferenciales como objetos topológicos abstractos, equipados con nociones adicionales reviste relevancia también en el campo de la Física, donde el mismo espacio-tiempo se conceptualiza como una variedad diferenciable de dimensión cuatro equipada con una métrica de Lorentz, que a su vez es pseudo-Riemanniana.

También aparecen otras variedades diferenciables en el contexto de física subatómica, donde se hace uso de grupos (siendo algunos de ellos de Lie) para dar un modelo al comportamiento de las partículas que conforman la materia y representar sus interacciones mediante la apreciación de las simetrías de cada uno de los problemas. En particular, los grupos de Lie son variedades diferenciables con estructura de grupo, de manera que también atañen a este trabajo. Más concretamente, la interacción fuerte se describe mediante la cromodinámica cuántica, que es una teoría gauge no abeliana basada en un grupo local de simetría $SU(3)$: un grupo de Lie de dimensión ocho. Así es posible observar que ciertos problemas de variedades aparecen en situaciones aparentemente sin relación, y que no están directamente contenidas en el espacio $\mathbb{R}^n$, sino que son naturalmente abstractos.

Por otra parte, se ha introducido un concepto que procede de una noción local, como puede ser la conservación de la carga de color en el ejemplo previo, pero, ¿puede establecerse algún tipo de relación entre propiedades locales y globales?

Precisamente las variedades diferenciables son un caso de estudio en ámbitos tanto locales como globales, pues se ha requerido que sean similares a $\mathbb{R}^n$ en entornos de puntos concretos y, sin embargo, cuentan con propiedades globales de gran interés y que permiten establecer paralelismos y comparaciones entre distintas variedades.

Algunas de estas propiedades, como la dimensión, la conexión y la compacidad de la variedad, clasifican las variedades: en definitiva, se busca discernir cuáles de estas variedades son homeomorfas y cuáles no. Esto es, quiere establecerse una manera de separar variedades en conjuntos en los que unas se pueden deformar a otras de forma continua y biyectiva.

La clasificación de variedades es un problema en general arduo y precisa encontrar invariantes topológicos: propiedades que no cambien cuando se apliquen los homeomorfismos para deformarlas unas a otras.

En esta circunstancia, Poincaré planteó una conjetura de clasificación que tardaría casi un siglo en obtener una demostración. La conjetura es la que sigue:

Teorema 1. *(Conjetura de Poincaré) Sea M una variedad compacta de dimensión tres conexa y simplemente conexa. Entonces M es homeomorfa a la 3-esfera $\mathbb{S}^3$.*

La esfera unidad $\mathbb{S}^3$ puede conceptualizarse como el conjunto

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \right\},$$

que puede extenderse a más dimensiones, pero $\mathbb{S}^3$ resulta particular porque es la esfera de dimensión más alta que se corresponde con un grupo de Lie, hecho que queda patente si se identifica con los cuaterniones de módulo unidad, luego se tiene una cierta versatilidad a la hora de entenderla como variedad diferenciable y como grupo compacto y no abeliano: el grupo simpléctico compacto $Sp\,(3)$.

A pesar de la dificultad de probar la conjetura de Poincaré, existe un teorema que la implica: la conjetura de geometrización de Thurston, que probó Grigori Perelman en 2002.

Teorema 2. *(Conjetura de geometrización de Thurston) Toda 3-variedad puede ser cortada a lo largo de esferas y toros π_1-esenciales de manera que sea posible asignar a cada componente una de las siguientes ocho geometrías:*

$$\mathbb{E}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \tilde{SL}\,(2, \mathbb{R})\,, \mathit{Nil}, \mathit{Sol}.$$

Con el fin de probar la conjetura de Poincaré, Hamilton introdujo la ecuación de flujo de Ricci,

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2Rc\,(g_t)\,,$$

cuyas soluciones son métricas pertenecientes a una familia uniparamétrica y que, por tanto, evolucionan con t. Gracias al método de Hamilton pudieron demostrarse estos dos resultados, de manera que se puede concluir que el entendimiento de las variedades de Riemann y en concreto, de la ecuación de flujo de Ricci, es imprescindible para alcanzar resultados tan fundamentales; de ahí su importancia.

Este trabajo no pretende ser una introducción a la demostración de la conjetura de Poincaré, pero tiene como objetivo fundamental llegar a una comprensión de conceptos como variedades de Riemann y su curvatura y procurar una presentación de la ecuación de flujo de Ricci, así como algún ejemplo práctico que ponga en perspectiva la dificultad técnica de encontrar soluciones particulares para este y otros problemas, verbigracia, hallar solitones, que se corresponden con soluciones autosemejantes que se propagan.

A lo largo de todo el trabajo se seguirá la línea argumental de [1] y se utilizará el apoyo de los textos [2] y [3].

2 Propedéutica

2.1 Definiciones previas

Definición 1. Sea M un espacio topológico. Se dirá que M es una n-variedad topológica si cumple:

1. M es Hausdorff: para dos puntos distintos p y q de la variedad existen sendos entornos abiertos disjuntos que los contienen, esto es,

$$\forall\, p, q \in M \quad \exists U, V \subseteq M \quad \ni p \in U \;\wedge\; q \in V \;\wedge\; U \cap V = \emptyset.$$

2. M es segundo numerable: existe una base numerable para la topología de M.

3. M es localmente euclídeo de dimensión n: cada punto de M tiene un entorno homeomorfo a un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Obsérvese que la tercera de las condiciones implica que pueden hallarse un abierto U que contenga a cualquier punto p de la variedad y un abierto V en $\mathbb{R}^n$ tales que exista un homeomorfismo $\varphi : U \to V$.

Definición 2. Un atlas $\mathcal{C}^k$ es una familia indexada $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ de cartas de M, es decir, $U_i \subseteq M$ abierto y $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ tales que

1. La familia de abiertos $(U_i)_{i\in I}$ es un cubrimiento abierta de M: $\bigcup_{i\in I} U_i = M$.

2. Las cartas φ_i y φ_j son compatibles cuando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, esto es,

$$\varphi_i \varphi_j^{-1} : \varphi_j \left(U_i \cap U_j\right) \to \varphi_i \left(U_i \cap U_j\right)$$

   es un homeomorfismo.

Asimismo, se dirá que $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ es un atlas de clase C^k si las funciones φ_i son de clase C^k.

Dos atlas son compatibles si su unión también es un atlas. Las uniones de todos los atlas compatibles entre sí se llamarán atlas maximales.

Definición 3. Una variedad diferenciable M es una variedad topológica equipada con un atlas de clase C^k maximal de cartas de M.

Definición 4. Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Se dice que una aplicación lineal $h : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ es una derivación en p si satisface

$$h(fg) = f(p)\, h(g) + g(p)\, h(f) \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

donde $C^\infty(M)$ es el espacio de funciones diferenciables sobre M.

Definición 5. Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Se llama espacio tangente a M en p al conjunto de todas las derivaciones de $C^\infty(M)$ en p y se denota T_pM. Éste es un espacio vectorial y a un elemento se le dirá vector tangente en p.

Definición 6. Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita y V^* su espacio dual. Se llama tensor k veces covariante y l veces contravariante o tensor de tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ a una aplicación multilineal

$$T_l^k : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ copias}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ copias}} \to \mathbb{R}.$$

Se llamará espacio de tensores de tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ sobre V al conjunto de tensores de tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ sobre V y se denotará $T_l^k(V)$.

Definición 7. Sea M un espacio topológico. Un fibrado vectorial de rango k sobre M es un espacio topológico E con una aplicación continua y suprayectiva $\pi : E \to M$ tal que

1. para cada $p \in M$, la antiimagen por π o fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ tiene estructura de espacio vectorial real de dimensión k;
2. para cada $p \in M$ existe un entorno U de p, $p \in U \subseteq M$ y un homeomorfismo

   $$\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$$

   cumpliendo

   (a) $\pi_U \circ \Phi = \pi$;

   (b) para cada $q \in U$, la restricción a E_q de Φ es un isomorfismo de espacios vectoriales de E_q a $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$.

Definición 8. Sea M una variedad diferenciable. El fibrado de tensores (o fibrado tensorial) de tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ es

$$T_l^k TM \coloneqq \bigsqcup_{p \in M} T_l^k(T_pM).$$

Definición 9. Sea M una variedad diferenciable. Un campo tensorial diferenciable A de tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ es una sección $\mathcal{C}^\infty$ de un fibrado tensorial:

$$A : M \to T_l^k TM.$$

El espacio de los fibrados tensoriales de tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ se denotará $\Gamma\left(T_l^k TM\right)$ y, si se dan coordenadas locales (x^i) ,estos campos tensoriales pueden escribirse

$$A = A_{j_1 \ldots j_l}^{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes \mathrm{d}x^{j_!} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_l}$$

haciendo uso del convenio de sumación de Einstein, realizando una suma sobre cada par de índices repetidos.

2.2 Métricas de Riemann

Definición 10. Sea M una variedad diferenciable. Una métrica g (o tensor métrico) sobre M es un campo tensorial diferenciable de tipo $\binom{2}{0}$ cumpliendo

1. g_p es simétrica;
2. g_p es bilineal;
3. g_p es no degenerada: sea $X_p \in T_pM$ distinto de cero; entonces
$$g_p\left(X_p, X_p\right) \neq 0.$$

Una métrica g se dice de Riemann si es definida positiva, esto es, siendo $X_p \in T_pM$ y $X_p \neq 0$, se cumple
$$g_p\left(X_p, X_p\right) > 0.$$
Obsérvese que la condición de ser métrica de Riemann engloba la no degeneración del campo tensorial y que ésta puede relajarse para obtener otros tipos de métrica cuya revisión también es de interés.

Definición 11. Una variedad de Riemann es una variedad diferenciable equipada con una métrica de Riemann g y se denotará (M, g).

Observación 1. La existencia de una métrica de Riemann induce sobre las variedades de Riemann una norma en cada punto:
$$\begin{array}{rccl} ||\cdot||_p : & T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & ||v||_p := \sqrt{g_p\left(v_p, v_p\right)}. \end{array}$$
De esta forma se puede asignar también a (M, g) una noción de distancia.

Observación 2. Toda métrica de Riemann puede escribirse en un sistema de coordenadas locales (x^i) como
$$g = g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$
siendo g_{ij} una matriz de funciones simples, simétrica y definida positiva.

Ahora cabe plantearse la siguiente pregunta: ¿bajo qué condiciones es posible dotar de una métrica de Riemann a una variedad dierenciable? Resulta posible ver que basta con las características que se han solicitado para decir que una variedad es diferenciable. Cale destacar que no todos los autores requieren las mismas características a la hora de definir una variedad diferenciable.

Con este fin en mente, es necesario dar una definición adicional:

Definición 12. Una partición de la unidad de un espacio topológico X es un conjunto $\{\rho_i\}_{i\in I}$ de funciones continuas de X al intervalo $[0, 1]$ tales que, para cada $p \in X$:

1. Existe un entorno de p en el que sólo un número finito de funciones ρ_i son distintas de 0.

2. La suma de todas las funciones es 1: $\sum_{i\in I}\rho_i(p)=1$.

Proposición 1. *Toda variedad diferenciable admite una métrica de Riemann.*

Demostración. Sea M una variedad diferenciable y $\{(U_k,\varphi_k)\}_{k\in I}$ un atlas de cartas de M. En cada uno de los abiertos U_k del recubrimiento existen unas coordenadas (x_i) de manera que puede construirse una métrica $g_k \coloneqq \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$.

Ahora elíjase una partición diferenciable de la unidad de M subordinada al recubrimiento $(U_k)_{k\in I}$, es decir, que cumpla sop$\rho_k \subseteq U_k$; así es forzoso que $\rho_k=0$ fuera de U_k.

Basta definir

$$g_p \coloneqq \sum_{k\in I}\rho_k(p)\,g_k.$$

Es inmediato observar que, dado que todas las funciones son diferenciables, la métrica producida también lo es. De la misma forma puede comprobarse que la forma producida es simétrica, bilineal y definida positiva: las combinaciones lineales preservan la simetría y la bilinealdad y son de coeficientes no negativos en todo M y positivo en al menos uno de los abiertos que contiene a cada p, luego la métrica propuesta es asimismo definida positiva.

3 Ejemplos de Variedades de Riemann

Algunas de las variedades de Riemann más simples (y no por ello poco importantes) son el espacio Euclídeo, las esferas y los espacios hiperbólicos.

3.1 El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Tómese $M=\mathbb{R}^n$. La métrica más simple a construir es la euclídea en coordenadas estándar: $\overline{g}\coloneqq\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$. Usualmente la métrica euclídea se escribe

$$\overline{g}=\left(\mathrm{d}x^1\right)^2+\cdots+\left(\mathrm{d}x^n\right)^2,$$

abreviando la expresión del producto tensorial simétrico de un tensor por sí mismo escribiendo $\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^i=\left(\mathrm{d}x^i\right)^2$ y prescindiendo de los paréntesis cuando los nombres de las coordenadas no puedan dar lugar a confusión. Aún más, puede escogerse cualquier espacio vectorial V de dimensión n dotado de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y dar una expresión para la métrica $g(\cdot,\cdot)\coloneqq\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Sin embargo, también es de interés el estudio de la métrica euclídea en otras coordenadas como pueden ser las coordenadas polares. Véase qué ocurre en el caso $\mathbb{R}^2$. Para ello puede sustituirse la expresión de las coordenadas en la métrica y desarrollar los términos. Siendo $x=r\cos\theta$ y $y=r\sin\theta$:

$$\overline{g}=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}\left(r\cos\theta\right)^2+\mathrm{d}\left(r\sin\theta\right)^2=\left(\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)^2+\left(\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)^2=$$

$$=\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\mathrm{d}r^2+\left(r^2\sin^2\theta\mathrm{d}r+r^2\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta^2+\left(-2r\cos\theta\sin\theta+2r\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$

$$=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2.$$

3.2 La esfera de radio R en $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^n_R$.

Es posible ver la esfera $\mathbb{S}^n_R$ como una subvariedad embebida en el espacio euclídeo de dimensión $n+1$. En consecuencia, existe una métrica inducida por aquella de $\mathbb{R}^{n+1}$, dada por el *pullback* o aplicación regradiente de la métrica en el espacio ambiente.

Un caso sencillo es el de la esfera de radio unidad $\mathbb{S}^2$: para construir una métrica y darle estructura de variedad de Riemann puede tomarse la aplicación regrediente de la métrica euclídea en coordenadas estándar. La métrica resultante se llamará métrica redonda. Para obtenerla se tomará la aplicación

$$\Phi(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

que parte de la esfera y tiene imagen en $\mathbb{R}^3$.

El jacobiano será

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, la métrica inducida es

$$\mathring{g}_{ij} \coloneqq (\Phi^* g)_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\overline{g}_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que la métrica construida es de Riemann en los puntos con valor de θ distintos de 0 y π, en los cuales no puede ser métrica, debido a la degeneración de la forma.

La métrica redonda para la esfera unidad $\mathbb{S}^3$ puede ser construida de la misma manera si se dan las coordenadas esféricas

$$\Phi(\psi,\theta,\varphi) = (\cos\psi, \sin\psi\cos\varphi, \sin\psi\sin\theta\cos\varphi, \sin\psi\sin\theta\sin\varphi),$$

obteniendo

$$\mathring{g} = \mathrm{d}\psi^2 + \sin^2\psi\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\psi\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2.$$

3.3 El espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n_R$

Tómese la hoja superior del hiperboloide en $\mathbb{R}^{n+1}$ en coordenadas estándar $(\xi^1,\dots,\xi^n,\tau)$. El hiperboloide viene dado por la ecuación $\tau^2 - |\xi|^2 = R^2$ y se escoge la métrica

$$h_R = i^* m,$$

con m la métrica de Minkowski, $m = (\mathrm{d}\xi^1)^2 + \cdots + (\mathrm{d}\xi^n)^2 - (\mathrm{d}\tau)^2$ e $i : \mathbb{H}^n_R \to \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión.

Véase cómo se ha construido una variedad de Riemann por medio de una métrica que no es definida positiva en todo $\mathbb{R}^n$, pero sí cumple la propiedad cuando se restringe a la variedad, a causa de la ecuación que la define, que comparte signatura con la métrica de Minkowski.

3.4 Grupos de Lie como variedades de Riemann

Definición 13. Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable equipada con aplicaciones diferenciables producto μ e inversión i:

$$\begin{array}{rccc} \mu: & G\times G & \to & G \\ & (x,y) & \mapsto & xy \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} i: & G & \to & G \\ & x & \mapsto & x^{-1} \end{array}.$$

Estos grupos actúan sobre sí mismos mediante traslaciones por la izquierda

$$\begin{array}{rccc} L_g: & G & \to & G \\ & x & \mapsto & gx \end{array}.$$

Un campo vectorial X se dirá invariante por la izquierda si $(\mathrm{d}L_g)(X) = X \circ L_g$ y estará determinado por su valor en la identidad del grupo, lo que permite realizar una identificación del espacio tangente a un punto con el espacio tangente en la identidad. Se denotará por $\mathfrak{g}$ el espacio tangente en la identidad:

$$\mathfrak{g} = \{X \in T(G) | \, \mathrm{d}L_g(X) = X \quad \forall g \in G\},$$

donde $T(G)$ representa el conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre G.

Para tener un álgebra resta dar una operación binaria del espacio en sí mismo, el corchete de Lie:

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

que es bilineal y satisface las propiedades

1. Alternada:
$$[x,x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g};$$
2. Identidad de Jacobi:
$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

En particular, ambas propiedades implican la anticonmutatividad del corchete.

Fijado uno de los campos vectoriales X, la aplicación dada por el corchete

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}_X: & \mathfrak{X}(G) & \to & \mathfrak{X}(G) \\ & Y & \mapsto & [X,Y] \end{array}$$

es una derivación y se conoce como derivada de Lie.

A $\mathfrak{g}$ junto con la operación dada por el corchete de Lie se le llamará álgebra de Lie de G.

Esferas de Berger. Algunas de las variedades que se han nombrado anteriormente tienen una estructura natural de grupo de Lie; en concreto, en lo referido a esferas, sólo $\mathbb{S}^1$ (la circunferencia unidad) y $\mathbb{S}^3$ pueden ser descritas como un grupo de Lie real. En concreto, el grupo de Lie $SU(2)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^3$. El álgebra de Lie está engendrada por las matrices:

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

que cumplen las siguientes relaciones:

$$[X_1, X_2] = 2X_3, \quad [X_2, X_3] = 2X_1, \quad [X_3, X_1] = 2X_2.$$

Respecto a esta base de campos vectoriales invariantes a izquierda se puede dar una métrica de Riemann dada por

$$g = \delta^{ij}\omega_i \otimes \omega_j,$$

que está representada por la matriz identidad de dimensión tres, siendo $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ la base de uno-formas invariantes por la izquierda, esto es, base de g^* y dual de la base de campos X_1, X_2, X_3.

La elección de la métrica en este caso ha sido la más simple posible. Dando una métrica distinta se producen otras variedades de Riemann. Por ejemplo, las esferas de Berger surgen al escribir una métrica modificada, dada como un elemento de una familia uniparamétrica cumpliendo:

$$g_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a > 0,$$

donde se requiere que el parámetro introducido sea positivo para que la métrica siga siendo de Riemann. Una esfera de Berger es difeomorfa a $\mathbb{S}^3$ y se puede entender como un reescalado en una de las coordenadas.

3.5 Variedades sub-Riemannianas y pseudo-Riemannianas

Una vez comprendido el especial papel de las métricas de Riemann resulta interesante introducir, aunque de forma somera, algunos tipos de métricas de especial importancia que surgen al relajar las condiciones anteriormente requeridas: las métricas sub-riemannianas y las pseudo-riemannianas.

Una métrica g se dice sub-Riemann si es una métrica definida positiva y su campo tensorial está definido a partir de un subfibrado $SM \subsetneq TM$. Esto implica que las longitudes carecen de sentido para vectores fuera de SM y sólo podrán ser medidas aquellas curvas definidas sobre M con vectores tangentes en SM.

Un ejemplo de métrica sub-Riemann puede darse para el grupo de Heisenberg, que aparece en problemas de mecánica cuántica, donde las representaciones de grupos son de crucial relevancia a la hora de entender las relaciones entre los observables, aquellas características que pueden ser medidas. Este grupo está conformado por matrices 3×3 de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

junto con el producto matricial. Los elementos x, y, z pueden pertenecer a un anillo con unidad cualquiera, pero tómense reales por simplicidad.

Una referencia local que genera el álgebra de Lie es

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

y, las 1-formas duales son

$$\omega_1 = \mathrm{d}x, \quad \omega_2 = \mathrm{d}y, \quad \omega_3 = \mathrm{dz} - x\mathrm{d}y.$$

En ese caso,

$$g = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$$

es una métrica sub-Riemann para el grupo de Heisenberg.

Se dice que una métrica g es pseudo-Riemanniana si es no degenerada, es decir, $\forall X_p \in T_pM$ cumpliendo $X_p \neq 0$, se da $g_p(X_p, X_p) \neq 0$.

La diferencia fundamental con las métricas de Riemann radica en que no se está requiriendo que sea definida positiva, hecho que implica la no degeneración. En consecuencia, todas las métricas riemannianas son no degeneradas.

Métricas de Lorentz. Un ejemplo común de métrica pseudo-Riemanniana son las métricas de Lorentz, que destacan por tener una expresión diagonal de g_{ij} con uno de los elementos negativos y el resto positivos. Juega un papel clave en la teoría de la relatividad especial de Einstein, donde, en el caso $M = \mathbb{R}^4$, la métrica de Minkowski (la más simple de las métricas de Lorentz) puede escribirse en términos de coordenadas (x^1, x^2, x^3, τ) como

$$m = \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^3\right)^2 - (\mathrm{d}\tau)^2 .$$

Las coordenadas representan tres dimensiones espaciales y una temporal, respectivamente. También dará una métrica de Lorentz más adelante, en $H_3 \times \mathbb{R}$ en la subsección 5.2. Otras métricas de Lorentz más complejas, con elementos variables punto a punto, aparecen en la teoría de la relatividad general y representan los efectos gravitacionales de la materia sobre la forma del Universo y viceversa.

4 Conexiones y morfismos de curvatura

4.1 Conexiones

Definición 14. Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial sobre una variedad M. Denótese por $\mathcal{E}(M)$ el espacio de secciones diferenciables de M. Una conexión en E es una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & T(M) \times \mathcal{E}(M) & \to & \mathcal{E}(M) \\ & (X, Y) & \mapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

cumpliendo

1. $\nabla_X Y$ es lineal sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$ en su primera entrada:

$$\nabla_{fX+gZ} Y = f\nabla_X Y + g\nabla_Z Y \qquad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M);$$

2. $\nabla_X Y$ es lineal sobre $\mathbb{R}$ en su segunda entrada:

$$\nabla_X (aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z \qquad \forall a, b \in \mathbb{R};$$

3. ∇ satisface la regla del producto que sigue:

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)\, Y.$$

A $\nabla_X Y$ también se le llama derivada covariante de Y en la dirección de X.

Una conexión se dirá lineal cuando se pueda escribir

$$\nabla : \quad T(M) \times T(M) \quad \rightarrow \quad T(M).$$

Aunque pudiera parecer que una conexión lineal se correspondiera con un campo tensorial de tipo $\binom{2}{1}$, no es lineal en su segunda entrada sobre $\mathcal{C}^\infty (M)$, propiedad que ha sido sustituida por la regla del producto expuesta.

Una vez introducida la noción de conexión, crucial para comprender el endomorfismo de curvatura que aparecerá más adelante, es preceptivo comprobar la apariencia de esta conexión en sus componentes.

Sea ahora $\{E_i\}$ un marco local de TM en un abierto $U \subseteq M$. Al formar una base del espacio tangente en cada uno de los puntos p de la variedad, pueden escribirse las imágenes de las derivadas covariantes de estos elementos como combinaciones lineales de ellos mismos, lo que propicia la siguiente definición:

Definición 15. Se definen los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k como los coeficientes de la imagen de la derivada covariante de E_j en la dirección E_i en las coordenadas del marco local:

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Mediante el uso de los símbolos de Christoffel puede reconstruirse la acción de la derivada covariante en un abierto $U \subseteq M$ pues, escogida una referencia local $\{E_i\}$, dos campos vectoriales $X, Y \in \mathcal{T}(U)$ pueden escribirse $X = X^i E_i,\ Y = Y^j E_j$ y se da

$$\nabla_X Y = \left(XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) E_k. \tag{1}$$

Tras la introducción de las conexiones cabe preguntarse sobre la posible dificultad o facilidad para encontrar alguna o si acaso es siempre posible; se presenta primero un caso sencillo:

Sea $M = \mathbb{R}^n$ y tómese la referencia local $\{\partial_i\}$. La conexión euclídea es el campo vectorial que cuenta con las derivadas direccionales de Y en dirección X por componentes:

$$\overline{\nabla}_X \left(Y^j \partial_j \right) = \left(XY^j \right) \partial_j.$$

Es inmediato percatarse de que los símbolos de Christoffel son todos nulos en el caso de la conexión euclídea, pero es posible constrir otras muchas conexiones mediante otras elecciones de dichos símbolos. De hecho, todas las conexiones pueden ser descritas al escoger los símbolos de Christoffel en la relación anterior.

Lema 1. *Sea M una variedad diferenciable cubierta por una única carta coordenada. Hay una correspondencia uno a uno entre las elecciones de n^3 funciones diferenciables $\left\{\Gamma_{ij}^k\right\}$ y las conexiones lineales sobre M. Esta relación viene dada por*

$$\nabla_X Y = \left(X^i \partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k.$$

El anterior lema es una simple comprobación y la expresión resulta equivalente a (1) cuando el marco coordenado es $\{\partial_i\}$. Así, queda claro que es posible construir una conexión sobre una variedad diferenciable, pero con la condición de que esté cubierta por una sóla carta y éste no suele ser el caso. En consecuencia, es preciso comprobar que también es posible construir una conexión lineal para cualquier tipo de variedad diferenciable. Para ello volverá a hacerse uso de las particiones de la unidad en la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 2. *Toda variedad diferenciable M admite una conexión lineal.*

Demostración. Ya se ha visto que es posible construir una conexión lineal sobre un abierto U_i de M. Sea pues, un recubrimiento U_i con cartas coordenadas partiendo de cada uno de los abiertos. Tómese una partición de la unidad $\{\rho_i\}$ subordinada a la cubierta $\{U_i\}$. De nuevo, gracias a las propiedades de la variedad es posible tomar

$$\nabla_X Y = \sum_i \rho_i \nabla^i_X Y,$$

que es lineal sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$ en X y sobre $\mathbb{R}$ en Y por ser combinación lineal de conexiones lineales. Resta comprobar que se cumple la regla del producto:

$$\nabla_X (fY) = \sum_i \rho_i \nabla^i_X (fY) = \sum_i \rho_i \left[(Xf) Y + f\nabla^i_X (Y)\right] =$$

$$\sum_i \rho_i (Xf) Y + \sum_i \rho_i f \nabla^i_X (Y) = (Xf) Y + f \sum_i \rho_i \nabla^i_X (Y) = (Xf) Y + f\nabla_X (Y).$$

Tras haberse cerciorado de la posibilidad de construir una conexión lineal sobre una toda variedad diferenciable es forzoso preguntarse si, de entre la miríada de posibilidades de elección, existe alguna conexión lineal privilegiada en algún caso; en particular, si dada una variedad de Riemann hay al menos una conexión que pueda satisfacer propiedades añadidas y que enriquezca el estudio de las mismas. Para ello, un par de nociones accesorias son requeridas.

Definición 16. Sea (M, g) una variedad de Riemann. Una conexión lineal ∇ se dice compatible con g si la siguiente regla del producto se ve satisfecha:

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M).$$

Esta es una propiedad que, en particular, satisface la conexión euclídea respecto de la métrica euclídea.

Definición 17. Se define el tensor torsión de la conexión como el campo tensorial $\binom{2}{1}$ dado por

$$\begin{array}{rccl} \tau: & \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) & \to & \mathcal{T}(M) \\ & (X, Y) & \mapsto & \tau(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{array}.$$

Se dice que una conexión lineal ∇ es simétrica si su torsión es un campo tensorial nulo:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y] .$$

Con estas últimas propiedades, la compatibilidad con la métrica y la simetría, se tiene una consecuencia fundamental sobre las variedades de Riemann que responde a la pregunta previa: existe una única conexión lineal que satisfaga ambas de manera simultánea. Para probarlo será útil un lema auxiliar:

Lema 2. *Sean (M, g) una variedad de Riemann y ∇ una conexión. Son equivalentes*

1. $\nabla g \equiv 0$;
2. ∇ es compatible con g.

Teorema 3. *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Existe una única conexión lineal ∇ sobre M que es simétrica y compatible con g. A esta conexión se le conoce como conexión Riemanniana o de Levi-Civita.*

Demostración. Véase primero que, de existir, la conexión es única: sean $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$. Si la conexión es compatible con la métrica se darán

$$X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle ;$$
$$Y \langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle ;$$
$$Z \langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle .$$

Por medio de las condiciones de simetría se tiene

$$X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle ;$$
$$Y \langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle ;$$
$$Z \langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle .$$

Sumando las dos primeras igualdades y restando la tercera puede verse

$$X \langle Y, Z\rangle + Y \langle Z, X\rangle - Z \langle X, Y\rangle = 2 \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle - \langle X, [Z, Y]\rangle .$$

Despejando $\langle \nabla_X Y, Z\rangle$ queda

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2} \left(X \langle Y, Z\rangle + Y \langle Z, X\rangle - Z \langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle\right),$$

conocida como la identidad de Koszul. Así se ha aislado en el lado izquierdo de la igualdad el único término que depende de la conexión, luego, de existir dos conexiones distintas que cumplieran la relación, ∇^1y ∇^2, se tendría

$$\left\langle \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z\right\rangle = 0 \implies \nabla^1_X Y = \nabla^2_X Y \quad \forall X, Y \implies \nabla^1_X = \nabla^2_X,$$

y, en consecuencia, ambas habrían de ser iguales, por lo que la conexión ha de ser única.

Compruébese ahora la existencia de la conexión. Será suficiente probar que existe en cada una de las cartas coordenadas, puesto que la unicidad asegura la coincidencia en los solapamientos.

Sea $(U,(x^i))$ una carta local coordenada. Los campos vectoriales coordenados tienen corchetes de Lie nulos, de manera que puede escribirse

$$\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle = \frac{1}{2}\left(\partial_i\langle\partial_j,\partial_k\rangle + \partial_j\langle\partial_k,\partial_i\rangle - \partial_k\langle\partial_i,\partial_j\rangle\right).$$

Haciendo uso de $g_{ij} = \langle\partial_i,\partial_j\rangle$ y de la definición de los símbolos de Chrsitoffel,

$$\Gamma^l_{ij}g_{lk} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right).$$

Multiplicando a ambos lados por la matriz inversa g^{km}:

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}g^{mk}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right).$$

Así, para cada carta, se ha encontrado y definido una conexión que es claramente simétrica en los índices i y j, puesto que pueden ser intercambiados sin variar el resultado. Falta comprobar que la conexión sea compatible con la métrica; entra en juego el lema previo, gracias al que sólo será necesario ver $\nabla g = 0$. Las componentes de ∇g se denotarán $g_{ij;k}$ y son

$$g_{ij;m} = \partial_m g_{ij} - \Gamma^k_{mi}g_{kj} - \Gamma^k_{mj}g_{ik}.$$

Usando las expresiones de los símbolos de Christoffel se llega a

$$\Gamma^k_{mi}g_{kj} + \Gamma^k_{mj}g_{ik} = \partial_m g_{ij}$$

de manera que $g_{ij;m} = 0$, luego $\nabla g = 0$.

Es de interés mencionar que algunos autores definen la conexión de Levi-Civita como aquella que cumple la identidad de Koszul en lugar de requerir las condiciones de simetría y compatibilidad, pero esto no supone un problema, pues se ha demostrado la unicidad de esta conexión.

Conexión de Levi-Civita en esferas de Berger. Retomando el caso de las esferas de Berger, es más sencillo obtener la conexión de Levi-Civita mediante la identidad de Koszul, en lugar de a partir de la definición de los símbolos de Christoffel, pues las relaciones de conmutación ya han sido obtenidas.

La conexión de Levi-Civita de g_a ha de satisfacer

$$2g_a(\nabla_X Y, Z) = g_a([X,Y],Z) - g_a([Y,Z],X) + g_a([Z,X],Y),$$

de donde se desprende inmediatamente que los únicos valores no nulos de los símbolos de Christoffel tendrán como índices permutaciones de los valores $1,2,3$, pero no índices repetidos. Dado que la métrica es diagonal, es claro que $\nabla_X Y$ ha de ser un múltiplo de Z.

$$2g_a(\nabla_{X_1}X_2, X_3) = g_a(2X_3,X_3) - g_a(2X_1,X_1) + g_a(2X_2,X_2) \iff$$

$$\iff 2\nabla_{X_1}X_2 = (2-2a+2)X_3 = 4-2aX_3 \iff \nabla_{X_1}X_2 = (2-a)X_3.$$

Haciendo el cálculo análogo de los restantes se llega a

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{X_1} X_2 = (2-a)\, X_3, & \nabla_{X_1} X_3 = (a-2)\, X_2, & \nabla_{X_2} X_1 = -aX_3, \\ \nabla_{X_2} X_3 = X_1, & \nabla_{X_3} X_1 = aX_2, & \nabla_{X_3} X_2 = -X_1. \end{array}$$

Tras resolver este caso, que cuenta con una métrica diagonal, es de esperar que el problema de hallar la conexión de Levi-Civita en ejemplos más generales revista una complejidad de cálculo mucho mayor, al no poder hacer uso de las simetrías que se han esgrimido en el ejemplo.

La noción de curvatura es completamente natural, pero su definición suscita algunas preguntas que no se pueden responder aún: ¿existe una generalización del concepto de curvatura para variedades de cualquier dimensión? Si es así, ¿cómo se calcula? ¿Cuándo se dirá que una variedad es plana? ¿Existen caracterizaciones de las variedades que hagan más sencillo dirimir si una variedad es plana? Para dar solución a estas preguntas es necesario introducir conceptos como el tensor de curvatura. Esta necesidad está propiciada por la abstracción con la que se han tratado las variedades de Riemann hasta ahora.

Definición 18. Sea M una variedad de Riemann. El endomorfismo de curvatura (de Riemann) es la función

$$\begin{array}{rccl} R: & \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) & \to & \mathcal{T}(M) \\ & (X, Y, Z) & \mapsto & R(X,Y)\,Z \coloneqq \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z^{\cdot} \end{array}$$

R es multilinear sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathcal{C}^{\infty}(M)$,de manera que es un campo tensorial de tipo $\binom{3}{1}$. En función de coordenadas locales (x^i) puede escribirse

$$R = R_{ijk}^{l} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \partial_l,$$

donde los coeficientes están definidos mediante

$$R(\partial_i, \partial_j)\, \partial_k =: R_{ijk}^{l} \partial_l.$$

Por otra parte, haciendo uso de los símbolos de Christoffel, también puede escribirse

$$R_{ijk}^{l} = \partial_j \Gamma_{ki}^{l} - \partial_k \Gamma_{ji}^{l} + \Gamma_{jm}^{l} \Gamma_{ki}^{m} - \Gamma_{km}^{l} \Gamma_{ji}^{m}. \tag{2}$$

Definición 19. Se define el tensor de curvatura (de Riemann) como el campo tensorial cuatro veces covariante obtenido bajando el último índice con la métrica:

$$R_{ijkl} \coloneqq g_{lm} R_{ijk}^{m}.$$

Este campo tensorial se denota $Rm(X,Y,Z,W)$ y cumple

$$Rm(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)\,Z, W \rangle\,,$$

que, en coordenadas se expresa

$$Rm = R_{ijkl} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l.$$

Una variedad de Riemann se dice plana si es localmente isométrica al espacio euclídeo. Es decir, todo punto de la variedad ha de tener un entorno isométrico a un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea.

Claramente ésta es una definición ilustrativa pero poco práctica en cuanto a cálculo se refiere: dada una variedad M resulta, en general, complicado discernir si se da esta propiedad a partir de la definición, pues requeriría comprobar los entornos abiertos de todos los puntos de la variedad. Sin embargo, se cuenta con un teorema de caracterización que reduce la tediosa comprobación al cálculo del tensor de curvatura que, no ha de ser necesariamete sencillo, pero sí más simple.

Teorema 4. *Una variedad de Riemann es plana si y sólo si su tensor de curvatura es idénticamente nulo.*

Esta doble implicación reduce el problema de decidir si una variedad es plana a una comprobación pero, nótese que, de realizar el cálculo de los coeficientes del tensor de curvatura por coordenadas, uno se halla ante n^4 coeficientes que calcular, donde n es la dimensión de la variedad. De nuevo, no resulta práctico. Afortunadamente, el tensor de curvatura tiene una serie de simetrías que redundan en más simplicidad.

Proposición 3. *Sea R_{ijkl} la expresión del tensor de curvatura mediante sus coeficientes en una base. Se dan:*

1. $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;
2. $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$;
3. $R_{ijkl} = -R_{klij}$;
4. $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$.

Donde la cuarta expresión se conoce como la identidad de Bianchi y se da para todas las permutaciones cíclicas de tres índices cualesquiera.

Aún existe otra igualdad indepenciente de las previas, que cumple la derivada covariante total del tensor de curvatura.

Proposición 4. *La derivada total covriante del tensor de curvatura satisface la siguiente identidad*

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0, \tag{3}$$

conocida como la identidad diferencial de Bianchi.

4.2 Curvatura de Ricci y curvatura escalar

Se ha construido un objeto de suma importancia para la comprensión de la curvatura en una variedad de Riemann; sin embargo, éste rebosa una complejidad inherente a ser un campo tensorial cuatro veces covariante. La existencia de una vía para condensar toda la información que contiene un objeto tan complicado favorecería tanto los cálculos como el entendimiento de los problemas que se puedan encontrar. Este problema propicia la definición de un campo tensorial dos veces covariante que resume en parte el tensor de curvatura: el tensor de Ricci o la curvatura de Ricci.

Puede obtenerse un tensor $\binom{2}{0}$ a partir de uno $\binom{4}{0}$ si se contraen dos de sus índices con la métrica. En concreto, el tensor de Ricci, es la traza del endomorfismo de curvatura en su primer y último índice.

Definición 20. Sea (M, g) una variedad de Riemann. La curvatura de Ricci, Rc, tiene componentes dadas por

$$R_{ij} := R^k_{kij} = g^{km} R_{kijm}. \tag{4}$$

Con el mismo ánimo se define la curvatura escalar a partir de la curvatura de Ricci.

Definición 21. Sea (M, g) una variedad de Riemann. La curvatura escalar es la traza del tensor de Ricci:

$$S := R^i_i = g^{ij} R_{ij} = R^j_{jii}.$$

Curvaturas de esferas de Berger Tras haber dado caracterizaciones del endomorfismo de curvatura tanto en la definición como en (2), se calculan los coeficientes para las esferas de Berger. puede verse como, a causa de las propiedades de la conexión de Levi-Civita, en los coeficientes no nulos los índices i, j, k no pueden ser todos iguales y, de ser dos de ellos idénticos, l ha de coincidir con el dispar. Aún más, habiendo comprobado que $\nabla_X X = 0$ y, dadas las relaciones de conmutación $[X, Y] \propto Z$. En consecuencia $\nabla_{[X,Y]} Z = 0$ para todas las posibles permutaciones de los índices. Por ende, el problema se reduce al cálculo de seis elementos:

$$R\,(X, Y)\,Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z.$$

$$R_{X_1X_2}X_1 = \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 - \nabla_{2X_3}X_1 = \nabla_{X_1}\left(-aX_3\right) - \nabla_{2X_3}X_1 =$$

$$= -a\,(a-2)\,X_2 - 2aX_2 = -a^2X_2.$$

Procediendo de manera análoga, se obtienen todas las relaciones:

$$\begin{array}{ccc} R_{X_1X_2}X_1 = -a^2X_2, & R_{X_1X_2}X_2 = aX_1, & R_{X_1X_2}X_3 = 0, \\ R_{X_1X_3}X_1 = -a^2X_3, & R_{X_1X_3}X_2 = 0, & R_{X_1X_3}X_3 = -aX_1, \\ R_{X_2X_3}X_1 = 0, & R_{X_2X_3}X_2 = (3a-4)\,X_3, & R_{X_2X_3}X_3 = (4-3a)\,X_2. \end{array}$$

Nuevamente, el cálculo ha resultado sencillo gracias a las relaciones preexistentes, pero un caso con métrica no diagonal puede requerir una miríada de pasos para obtener el endomorfismo de curvatura.

Una vez obtenido el endomorfismo de Riemann, resulta sencillo encontrar una expresión para los elementos no nulos del tensor de curvatura de Ricci dado por (4). Este tensor viene dado por la contracción del primer y último índice con la métrica, que es diagonal, por lo que si estos dos índices son distintos, darán lugar a un coeficiente nulo.

$$R_{11} = g^{22}R_{2112} + g^{33}R_{3113} = R_{2112} + R_{3113} = -R_{1212} + R_{1331} = -R^2_{121} + g_{11}R^1_{133} = 2a^2,$$

$$R_{22} = g^{11}R_{1221} + g^{33}R_{3223} = R^1_{122} - R_{2323} = R^1_{122} - R^3_{232} = a - 3a + 4 = 4 - 2a,$$

$$R_{33} = g^{11}R_{1331} + g^{22}R_{2332} = R^1_{133} + R^2_{233} = +a - 3a + 4 = 4 - 2a.$$

Finalmente, la curvatura escalar es la traza del tensor de Ricci, luego, sumando todos los elementos,

$$S = \frac{1}{a}R_{11} + R_{22} + R_{33} = +2a - 4a + 8 = 8 - 2a.$$

Es destacable cómo la curvatura escalar depende del valor escogido de a de tal modo que ésta cambia de signo en $a = 4$, siendo positiva para valores $a < 4$ y positiva para los superiores. Véase ahora qué ocurre cuando se imponen ciertas condiciones sobre el tensor de Ricci.

Definición 22. Sea (M, g) una variedad de Riemann. Una métrica de Riemann se dice métrica de Einstein si su tensor de Ricci es un múltiplo escalar de la métrica en todo punto.

Esto se traduce en la existencia de una función λ que cumple $Rc = \lambda g$ en toda la variedad.

A partir de esta última definición, y tomando trazas a ambos lados es inmediato comprobar que

$$S = g^{ij}R_{ij} = g^{ij}\lambda g_{ij} = \lambda\delta^i_i = \lambda \text{dim} M = \lambda n,$$

con lo que se llega a una versión más reducida de la condición de Einstein:

$$Rc = \frac{1}{n}Sg. \tag{5}$$

Proposición 5. *Sean M una variedad diferenciable conexa de dimensión $n \geq 3$ y g una métrica de Einstein sobre M. Entonces la curvatura escalar es constante.*

Demostración. Tómese la condición (5) en coordenadas:

$$R_{ij} = \frac{1}{n}Sg_{ij}.$$

Tomando la derivada covariante a ambos lados y haciendo uso de $\nabla g = 0$ queda

$$R_{ij;k} = \frac{1}{n}S_{;k}g_{ij},$$

que, tomando la traza en j, k, permite obtener

$$R^{;j}_{ij} = \frac{1}{n}S_{;i}.$$

Por otra parte, si se contrae la identidad diferencial de Bianchi (3) resulta

$$R^{;j}_{ij} = \frac{1}{2}S_{;i},$$

pero entonces se da

$$\frac{1}{2}S_{;i} = \frac{1}{n}S_{;i},$$

que implica $S_{;i} = 0$, puesto que se partía de $n \geq 3$. En ese caso, la componente de la coordenada ds es nula y S ha de ser constante en cada componente conexa. Por ser M conexa, S es constante en todo M.

Estas métricas de Einstein surgen en Física como un problema natural cuando se trata de describir el Universo. La teoría de la relatividad general de Einstein se fundamenta en la modelización del espacio-tiempo como una 4-variedad con una métrica de Lorentz, que es pseudo-Riemann, como se ha visto con anterioridad. Así, la teoría propone que la métrica de Lorentz satisface la ecuación de campo de Einstein

$$Rc - \frac{1}{2}Sg = \kappa T,$$

donde κ es una constante real conocida y T es el tensor de energía-impulso, que da cuenta de la densidad y flujo de energía y momento lineal. Si se diera $T = 0$, se obtendría la ecuación de campo del vacío; esto es el espacio, sin energía ni materia que lo habite. En ese caso, comparando la ecuación de campo de Einstein con (5), es inmediato ver que $S = 0$. A causa de esto $Rc = 0$, deduciéndose entonces que, en el espacio vacío, la curvatura de Ricci y la escalar son cero. Además se tiene que g es una métrica de Einstein tal y como se han introducido.

5 Flujo de Ricci y solitones

La ecuación aparece en el contexto de la conjetura de Poincaré, que planteaba una pregunta (sin respuesta durante casi un siglo) sobre variedades tridimensionales cerradas y conectas: si su grupo fundamental es trivial, ¿son entonces homeomorfas a la esfera tridimensional? Para responder esta pregunta se cuenta con el apoyo de [4] tanto en la presentación de los conceptos como en el ejemplo de las esferas de Berger.

5.1 La ecuación de flujo de Ricci

La respuesta, afirmativa, requirió la introducción de la ecuación de Flujo de Ricci, descrita por Hamilton, y que él mismo empleó para probar alguno de los casos particulares de la conjetura. En la prueba dada por Grigori Perelman se hace uso de la ecuación de flujo de Ricci, dando fin a la propuesta inicial de Hamilton.

Sea (M, g) una variedad diferenciable de Riemann. Si se describe una familia uniparamétrica g_t de métricas de Riemann sobre M, puede tomarse la derivada de la métrica respecto al parámetro t y asignarla a cada valor del mismo y a cada punto de la variedad $p \in M$, puesto que esta derivada es un elemento del espacio tangente a la variedad en el punto p, T_pM.

El flujo de Ricci asigna a cada valor del parámetro $t \in (a, b)$ una métrica que cumple

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2Rc\left(g_t\right), \tag{6}$$

donde Rc es el tensor de Ricci, descrito en (4). Ésta es entonces una ecuación diferencial para la métrica, asemejándose a una ecuación de flujo de calor.

Por tanto, la ecuación de flujo de Ricci da la evolución de la métrica de una variedad en función del parámetro de que depende. En particular, el flujo de Ricci variará el volumen generalmente, encogiendo la variedad si la curvatura escalar es positiva y agrandándola en caso contrario.

Debido a la construcción del tensor de Ricci, que depende de forma lineal de las derivadas de segundo orden de la métrica, se dan dos simetrías en el flujo de Ricci: invarianza por automorfismos que sean también difeomorfismos y reescalado parabólico, pues la multiplicación de la métrica por un escalar incrementa las distancias en la raíz del mismo.

Una consecuencia de la primera característica es que se preservan las simetrías previas de la variedad sobre cuya métrica se aplica el flujo.

Mediante inspección de la ecuación puede observarse que, si las métricas son constantes (no dependen de t), las soluciones cumplen $Rc\,(g) = 0$; de estas variedades se dice que son planas Ricci.

El siguiente caso más sencillo aparece al considerar una métrica de Einstein, que ha de satisfacer (5) o, equivalentemente, $Rc = \lambda g$. Es suficiente escoger un factor cuya derivada sea -2 para que sea solución de la ecuación de flujo de Ricci.

Tómese $g_t\,(1 - 2\lambda t)\,g$. Esta es una solución de la ecuación de flujo que estará definida para todos los valores de λ negativos, pero si $\lambda > 0$ siempre existe un tiempo para el que la métrica colapsa, contrayendo toda la variedad a un punto.

Un ejemplo de variedad en tres dimensiones que sufre esta contracción es la esfera $\mathbb{S}^3$, con curvatura escalar $S = 2$ y que es colapsada a un punto en $t = \frac{1}{4}$.

Si pueden construirse métricas que see vuelvan singulares en tiempo finito emerge una pregunta: ¿existe siempre solución de la ecuación de flujo de Ricci?

Hamilton demostró que, efectivamente, para cualquier métrica diferenciable g_0 existen una métrica g_t, y un intervalo $(0, T)$ para el cual g_t converge a g_0 en la topología $\mathcal{C}^\infty$ en el límite de $t \to 0$. Igualmente, se tiene el siguiente teorema de convergencia:

Teorema 5. *Sea (M, g_0) una variedad diferenciable de Riemann cerrada. Si M es de dimensión 2 o M es de dimensión 3 y g_0 tiene curvatura de Ricci positiva, entonces la ecuación de flujo de Ricci normalizada tiene solución para todo tiempo positivo y converge de forma diferenciable a una métrica de curvatura constante cuando el tiempo tiende a infinito.*

Ecuación de flujo de Ricci para esferas de Berger Véase qué ocurre al aplicar el flujo de Ricci a las esferas de Berger, tomando el parámetro a como una función de t. Se había obtenido ya el tensor de curvatura de Ricci:

$$Rc = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4-2a & 0 \\ 0 & 0 & 4-2a \end{pmatrix},$$

obteniendo una métrica que colapsa a una esfera de dimensión 2 en el caso $a \to 0$. En lugar de utilizar esta familia de esferas puede hacerse uso de unas variedades que sean más complejas pero similares (homotéticas), unas cuya métrica sea

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo es sólo un reescalado, pero un poco más interesante; su curvatura de Ricci es ahora

$$Rc = \begin{pmatrix} 2\frac{a^2}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 4-2\frac{a}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 4-2\frac{a}{b} \end{pmatrix}.$$

El flujo de Ricci da lugar a esferas de Berger escaladas de forma progresiva, con funciones a y b que cumplen

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -4\frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{\partial b}{\partial t} = -8 + 4\frac{a}{b}.$$

Éste es un sistema de ecuaciones diferenciables que resulta singular en tiempo finito. Sin embargo, si se reescala el problema, queda una métrica diagonal que se convierte en la identidad cuando $a = b$. ¿Cómo evoluciona entonces el cociente $\frac{a}{b}$?

Resulta sencillo ver que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-4\frac{a^2}{b^2}b - a\left(-8+4\frac{a}{b}\right)}{b^2} = \frac{-4\frac{a^2}{b} + 8a - 4\frac{a^2}{b}}{b^2} = 8a\frac{b-a}{b^3};$$

siendo este valor positivo si $b > a$ y negativo en caso contrario, ocurriendo que las esferas converjan si $a \to b$, esto es, la diagonal da valores asintóticos para las líneas de flujo de los parámetros.

5.2 Solitones

Tras los ejemplos de visualización de la ecuación de flujo puede introducirse el concepto de soluciones autopropagantes o solitones, que en este caso no son sino generalizaciones de las métricas de Einstein que se han discutido de forma previa. Sean g una métrica y X un campo vectorial. Los solitones serán soluciones de

$$Rc\,(g) = \lambda g - \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g \tag{7}$$

y se dirá que se expanden, son estáticos o se contraen según λ sea negativa, cero o positiva, respectivamente.

Solitones en esferas de Berger Un ejemplo de solitón que se contrae es la esfera $\mathbb{S}^3$. Véase qué ocurre si la métrica es la de las esferas de Berger. Tómese de nuevo la métrica

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

La ecuación para los solitones en las esferas de Berger es

$$\begin{pmatrix} 2\frac{a^2}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 4-2\frac{a}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 4-2\frac{a}{b} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

porque para cualquier campo vectorial, la derivada de Lie de la métrica se anula a causa de la diagonalidad y de las relaciones de conmutación de la referencia local tomada.

En consecuencia, se obtienen las dos ecuaciones

$$\begin{cases} 2\frac{a^2}{b^2} = \lambda a \\ 4 - 2\frac{a}{b} = \lambda b \end{cases} \implies \begin{cases} 2a = \lambda b^2 \\ 4b - 2a = 2a \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{2}{\lambda} = b \\ b = a \end{cases}.$$

Si se hace uso además de la ecuación de flujo de Ricci (6), se recupera la expresión ya conocida y se pueden sustituir los valores

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -4\frac{a^2}{b^2} = -4, \quad \frac{\partial b}{\partial t} = -8 + 4\frac{a}{b} = -4,$$

que son compatibles con las condiciones propuestas. Por ende, se tiene elección en un parámetro, obteniendo

$$a(t) = (c - 4t) = b(t), \quad c \in \mathbb{R}.$$

En concreto, esto supone un reescalado en todas las direcciones de una esfera con métrica identidad. Esto da lugar a solitones con forma esférica que sufren encogimiento en todas direcciones, volviéndose la métrica singular para $t = \frac{c}{4}$.

Una proposición relevante para caracterizar solitones es la que sigue:

Proposición 6. *Una métrica pseudo-Riemann g_0 es un solitón de Ricci si y sólo si g_0 es solución de la ecuación de flujo de Ricci, cumpliendo $g(t) = c(t)(\varphi_t)^* g_0$, con $c(t)$ un parámetro de escala y φ_t un difeomorfismo.*

De esta manera se ha dado una forma relativamente sencilla de encontrar solitones sin tener que verificar que se satisfaga la ecuación para todo tiempo t.

Solitones en $H_3 \times \mathbb{R}$ Tras los casos en los que se ha trabajado podría llegarse a la naíf asunción de que algunos problemas más generales son sencillamente resolubles, que encontrar solitones no es una tarea tan difícil. En cambio, quien intente plantear ejemplos en dimensión más alta, con otros grupos de Lie, por ejemplo, pronto se cerciorará de que la empresa es ardua. Por ejemplo, cabe tomar el producto cartesiano del grupo de Heisenberg de dimensión tres y $\mathbb{R}$, $H_3 \times \mathbb{R}$, un grupo de Lie de dimensión cuatro y nilpotente de orden dos y plantear condiciones para hallar soluciones a la ecuación 5. Se sigue una de las soluciones planteada en [5].

El álgebra $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ está generada por la base $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y cuenta con un conmutador no nulo: $[x_1, x_2] = x_3$.

Por otra parte, la acción de grupo en coordenadas es

$$(x, y, z, w) \cdot (x', y', z', w') = (x + x', x + y' + xz', z + z', w + w'),$$

lo que provee una elección de referencia local para la base del álgebra de Lie:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial w}.$$

En consecuencia, la coreferencia dual, en términos de uno-formas, es

$$\omega_1 = \mathrm{d}x, \quad \omega_2 = \mathrm{d}y, \quad \omega_3 = \mathrm{d}z - x\mathrm{d}y, \quad \omega_4 = \mathrm{d}w,$$

luego las dos-formas asociadas quedan

$$\mathrm{d}\omega_1 = \mathrm{d}\omega_2 = \mathrm{d}\omega_4 = 0 \quad \mathrm{d}\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Tómese una de las posibles métricas de Lorentz invariantes por la izquierda:

$$g_0^1 = \omega_1 \otimes \omega_1 + \omega_2 \otimes \omega_2 + 2\omega_3 \otimes \omega_4.$$

g_0^1 es una solución de la ecuación de solitones

$$2Rc\left(g_0^1\right) + \mathcal{L}_X g_0^1 + \alpha g_0^1 = 0,$$

para lo que el campo vectoral X ha de ser

$$X = \left(C_1 y - \frac{\alpha}{2}x + C_5\cos w + C_6 \sin w + C_2\right) X_1 - \left(C_1 x + \frac{\alpha}{2}y - C_5 \sin w + C_6 \cos w + C_3\right) X_2 + \\ + \left(\frac{C_1}{2}\left(x^2+y^2\right) + \left(C_3 + \frac{\alpha y}{2}\right)x + C_2 y - \alpha z - \frac{w}{2} + C_4\right) X_3 + C_7 X_4,$$

con $\alpha, C_i \in \mathbb{R}$. En concreto, la matriz de dos-formas de cutvatura es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega^1\wedge\omega^4 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2\wedge\omega^4 \\ -\omega^1\wedge\omega^4 & -\omega^2\wedge\omega^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el tensor de curvatura de Ricci se reduce a

$$Rc\left(g_0^1\right) = \frac{1}{2}\omega_4 \otimes \omega_4,$$

siendo la curvatura escalar nula.

Ahora, para poder obtener la derivada de Lie de la métrica en la dirección X, es forzoso descomponer en coordenadas el campo vectorial. Sea P^i la i-ésima componente de X en la base X_i y denótese con subíndices la derivada respecto a cada coordenada, entonces, la derivada de Lie es

$$\mathcal{L}_X g_1^0 = \begin{pmatrix} 2P_x & P_y^1 + P_x^2 - xP_x^4 & P_z^1 + P_x^4 & P_w^1 + P^2 + P_x^3 \\ P_y^1 + P_x^2 - xP_x^4 & 2P_y^2 - 2xP_y^4 & P_z^2 + P_y^4 - xP_z^4 & -P^1 + P_w^2 + P_y^3 - xP_w^4 \\ P_z^1 + P_x^4 & P_z^2 + P_y^4 - xP_z^4 & 2P_z^4 & P_z^3 + P_w^4 \\ P_w^1 + P^2 + P_x^3 & -P^1 + P_w^2 + P_y^3 - xP_w^4 & P_z^3 + P_w^4 & 2P_w^3 \end{pmatrix}.$$

Resta obtener las ecuaciones de los solitones. Haciendo uso de la ecuación (7), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{cases} 2P_x + \alpha = 0; \\ 2P_y^2 - 2xP_y^4 + \alpha = 0; \\ P_z^3 + P_w^4 + \alpha = 0; \\ 2P_w^3 + 1 = 0; \\ (\mathcal{L}_X g_1^0)_{ij} = 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Mediante este método se ha encontrado una forma de dar ecuaciones de solitones en un espacio en dimensión cuatro. Es reseñable la dificultad de resolver las ecuaciones en derivadas parciales que se obtienen para un grupo de Lie obtenido como el producto cartesiano de dos variedades que ya se habían estudiado: el grupo de Heisenberg y la recta real. Este es un hecho ilustrativo de la riqueza de métricas y formas que se pueden construir sobre variedades aparentemente sencillas.

6 Conclusiones y perspectivas

Tras la introducción de este trabajo se ha podido comprobar que las nociones requeridas en términos tensoriales para la introducción de objetos como los distintos morfismos de curvatura son no desdeñables, de manera que un lector no familiarizado pueda sorprenderse en los detalles técnicos; en consecuencia, desarrollar intuición en esta materia puede ser enormemente beneficioso para la comprensión y el estudio de las variedades diferenciables.

Por otra parte, se han introducido generalizaciones de la curvatura en dos y tres dimensiones y se han dado algunas herramientas muy útiles para la visualización de espacios en dimensiones mayores que en los que se suele estar acostumbrado a trabajar en un inicio.

El endomorfismo de curvatura y la existencia y unicidad de la conexión de Levi-Civita son estrictamente necesarios para tratar problemas complejos como buscar soluciones para las ecuaciones del flujo de Ricci y de los solitones en variedades, pero también revisten de utilidad a la hora de caracterizar espacios comunes, sin la obligatoriedad de hacer uso de los grandes teoremas de caracterización.

A lo largo de este trabajo se han visualizado ejemplos dispares de variedades de Riemann y algunas generalizaciones suyas, que también son de importancia en el estudio de problemas de índole física. Es más, algunas de las preguntas cruciales en la vanguardia de la física involucran la forma del Universo, equivalente a cuestionarse por la variedad diferenciable que lo gobierna y la interacción entre partículas fundamentales, como la cromodinámica cuántica, descrita mediante el grupo de Lie $SU(3)$.

También, dada la complejidad de los ejemplos más avanzados, puede entenderse cómo ha transcurrido tanto tiempo entre que se propusiera la conjetura de Poincaré y su demostración, así como la dificultad al intentar obtener soluciones de ecuaciones concretas.

De esta forma se plantean dos horizontes de estudio, tan interesantes como complejos, que son vías futuras de investigación y posible ampliación del presente trabajo: el uso de nuevos grupos de Lie como variedades de Riemann para un modelo de interacciones de física de partículas y adquirir comprensión del método de Hamilton para, haciendo uso de la ecuación de flujo de Ricci, entender la demostración de la conjetura de Poincaré.

References

[1] Lee, J. L. (1997). Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature, Springer. ISBN: 978-0-387-98322-6

[2] Lee, J. L. (2012). Introduction to Smooth Manifolds, Springer. ISBN: 978-3-319-91754-2

[3] Lee, J. L. (2018). Introduction to Riemannian Manifolds, Springer. ISBN: 978-1-489-99475-2

[4] Calegari, D. (2019). 3-Manifolds, Chapter 7: Ricci Flow, Unpublished Notes. pdf: Ricci Flow

[5] Bakhshandeh-Chamazkotishandeh, R. (2021). Lorentz Ricci solitons of 4-dimensional non-Abelian nilpotent Lie groups. DOI: arXiv:2108.11380