

# **El lema de Watson para la aproximación asintótica de integrales. Aplicación a la función Gamma Incompleta y funciones relacionadas**



**Universidad**  
Zaragoza

**Andrés López Sierra**

Trabajo de fin de grado de Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Directoras del trabajo: Chelo Ferreira González,  
Ester Pérez Sinusía  
18 de noviembre de 2024



# Abstract

This paper focuses on an in-depth study of Watson's lemma and its application in developing asymptotic approximations for complex integrals, specifically addressing the incomplete Gamma function and other related functions in applied mathematics. The study is grounded in the theoretical foundations of asymptotic analysis, examining essential methods to approximate and solve integrals that would otherwise be intractable using conventional techniques. Key methods discussed include Watson's lemma, Laplace's method, and the steepest descent method, all of which provide advanced tools to simplify complex calculations and enable the analysis of important functions across multiple scientific fields.

The work is structured into three main sections, each dedicated to the theoretical and practical development of a particular function. The first chapter delves into the principles of asymptotic theory, establishing the foundational concepts necessary to understand the role of approximations in handling complex integrals and functions. This chapter introduces the core elements of asymptotic analysis, which allow us to describe the behavior of a function as its argument approaches a specific limit. It further presents general techniques in asymptotic analysis and outlines the most relevant methods for this study, explaining the basics of Watson's lemma and Laplace's method and how they can be applied to simplify and solve integrals. A section is also dedicated to presenting the steepest descent method, an essential technique for understanding the behavior of integrals in complex domains.

The second chapter provides a deeper exploration of Watson's lemma and the exponential integral function, analyzing their theoretical structure and applications within the framework of asymptotic analysis. Watson's lemma is introduced as a fundamental approach to approximating complex integrals, detailing its properties and the conditions under which it works. Additionally, the exponential integral function is examined as a practical example to illustrate Watson's lemma's effectiveness in evaluating complex integrals. This chapter explains the approximate calculations for this function, including specific methods that simplify its evaluation when the variable takes on large values. Furthermore, graphs and tables are presented to illustrate the accuracy and efficiency of this technique.

The third chapter is dedicated to the study of the incomplete Gamma function and the confluent hypergeometric function, two of the most prominent special functions in applied mathematics. The incomplete Gamma function is frequently encountered in probability, statistics, and queuing theory, while the confluent hypergeometric function commonly appears in hypergeometric differential equations. Through a series of practical examples, this chapter examines the behavior of these functions and presents an asymptotic development based on Watson's lemma, facilitating their calculation over extensive intervals. The chapter also discusses applications of these functions in physics and engineering, where they model phenomena reliant on solutions to complex differential equations. It concludes with a comparative analysis between the asymptotic developments and exact results, demonstrating the achieved accuracy and the advantages of using Watson's lemma to optimize the computation of special functions in applied contexts.

In addition to the theoretical and practical development of the analyzed functions, this study incorporates a range of computational tools that simplify the implementation of approximation methods within a numerical environment. Throughout the research, Mathematica software is used extensively, allowing high-precision calculations and validation of the theoretical results obtained through asymptotic developments. Mathematica provides a flexible and efficient environment for symbolic and numerical computation, which is essential for confirming the accuracy of the methods and optimizing the calculation processes. The codes implemented in Mathematica, included in the appendices, illustrate the

methodology used to compute approximations and the error for each development.

As for the results, this study presents a series of graphs and tables illustrating the behavior of each function over different intervals of its variable. These visual representations clearly depict the asymptotic approximations and allow for a comparison of the precision of the developments obtained against the exact values of the functions. In particular, the graphs show how the approximations achieved through Watson's lemma closely align with the exact values over broad intervals of the variable, validating the effectiveness of these developments in practical applications. Additionally, error tables quantify the differences between the asymptotic results and exact values, allowing for an evaluation of each method's accuracy and helping to select the most suitable approximation based on context and calculation needs.

The appendix includes a series of detailed codes implemented in Mathematica that complement and extend the analysis presented in the main chapters. These codes include the implementation of the approximation models, the assessment of accuracy over different intervals, and the validation of numerical results through comparative tests.

In conclusion, this work demonstrates the efficacy and relevance of Watson's lemma in approximating complex integrals, showing how these asymptotic development methods can consistently yield positive results in practical applications. The research suggests that the use of asymptotic expansions and their implementation in specialized software can open new avenues for study in numerical analysis and facilitate the extension of these methods to other problems in applied mathematics. By providing a solid theoretical and practical foundation, this study contributes to the advancement of sophisticated techniques for solving problems in fields where precision and efficiency are essential, underscoring the importance of asymptotic analysis in optimizing calculations within scientific and engineering domains.

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción a la teoría asintótica . . . . .	1
1.2. Métodos asintóticos . . . . .	3
1.2.1. Métodos asintóticos para integrales . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	5
<b>2. El lema de Watson</b>	<b>7</b>
2.1. Lema de Watson . . . . .	7
2.2. Integral exponencial . . . . .	8
<b>3. Función gamma incompleta y funciones relacionadas</b>	<b>15</b>
3.1. Función gamma incompleta . . . . .	15
3.2. Función hipergeométrica confluyente . . . . .	19
<b>Conclusión</b>	<b>25</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>27</b>
<b>I. Código de Mathematica</b>	<b>29</b>
I.1. Función integral exponencial . . . . .	29
I.1.1. Gráficas . . . . .	29
I.1.2. Tablas . . . . .	33
I.2. Función gamma incompleta superior . . . . .	34
I.2.1. Gráficas . . . . .	34
I.2.2. Tablas . . . . .	38
I.3. Función hipergeométrica confluyente . . . . .	39
I.3.1. Gráficas . . . . .	39
I.3.2. Tablas . . . . .	42



# Capítulo 1

## Introducción

En muchas áreas de las matemáticas, física e ingeniería, y otras ramas de las ciencias, aparecen con frecuencia problemas que dependen de uno o varios parámetros. En numerosas ocasiones, alguno de estos parámetros toman valores numéricamente muy alejados del resto. Por ejemplo, en un problema cinemático, la velocidad de la luz es muy superior al resto de velocidades; en ciertos problemas de potenciales centrales, la masa o carga central toma valores muy grandes con respecto al resto de masas o cargas; en un fluido poco viscoso, el coeficiente de viscosidad es muy pequeño en comparación con el resto de constantes de la dinámica de fluidos. Por ello, resulta interesante disponer de soluciones aproximadas a dichos problemas que reflejen bien el comportamiento de la solución en ciertos límites de los parámetros. La rama de las matemáticas que se dedica a la investigación de este tipo de problemas se conoce como *asintótica* [7].

### 1.1. Introducción a la teoría asintótica

En esta sección introducimos el objetivo de la teoría asintótica, cuyo fin principal es proporcionar una aproximación de una función cuya expresión analítica es complicada (por ejemplo, cuando viene dada en términos de una integral) o incluso cuando se da de forma implícita (como en una solución de un problema de valor inicial o de contorno) en términos de funciones sencillas, válidas en un cierto límite de las variables o de los parámetros. Este tipo de aproximaciones facilita el trabajo posterior con la función, tanto desde el punto de vista analítico como numérico. Típicamente, los métodos numéricos estándar no prestan, en principio, especial atención a estos requisitos, por lo que se hace necesario disponer de métodos asintóticos que aproximen el comportamiento de la función en ciertos límites de las variables o de los parámetros.

De manera rigurosa, podemos establecer la definición formal de desarrollo asintótico de una función. Este concepto fue introducido por primera vez en 1886 por Henri Poincaré.

**Definición.** Sea  $F(z)$  una función de variable real o compleja  $z$  en un dominio  $\Omega$  no acotado. Una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$  se dice que es un desarrollo asintótico de Poincaré de  $F(z)$  y escribiremos

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad (1.1)$$

si para cada  $N > 0$  fijo, se tiene

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} + R_N(z), \quad z \rightarrow \infty,$$

con

$$R_n(z) = \mathcal{O}(z^{-n}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Donde  $\mathcal{O}$  representa la O-grande de la notación de Landau.

Una propiedad importante del desarrollo asintótico de Poincaré es que el desarrollo, si existe, es único.

Cabe destacar la siguiente observación sobre la definición anterior: No se exige que la serie asintótica sea convergente. Este aspecto no es relevante en asintótica. De hecho, en la mayoría de ejemplos prácticos interesantes, la serie es divergente. Un patrón común en asintótica es que, inicialmente, los valores absolutos de los primeros términos decrecen conforme  $n$  crece, hasta alcanzar un valor óptimo de  $n$ ; a partir de ese valor, los términos comienzan a crecer sin cota, lo que finalmente contribuye a la divergencia. Desde un punto de vista numérico, la idea radica en trabajar con una truncación adecuada de la serie para aprovechar sus primeros términos, que generalmente proporcionan una buena aproximación de la función, tratando de determinar cuántos términos debemos emplear para obtener la mejor precisión posible antes de que la serie empiece a diverger. En la práctica, un desarrollo asintótico puede ser mucho más útil que una serie convergente de convergencia lenta.

Los desarrollos asintóticos son extremadamente útiles en disciplinas como la física, la ingeniería o la estadística, donde es común el uso de funciones especiales. No existe una definición rigurosa de función especial, pero suelen tener en común que son funciones matemáticas no elementales, soluciones de una amplia variedad de problemas, generalmente formulados a través de ecuaciones funcionales, de gran importancia y significado en matemáticas y en física, con nombres y notaciones ampliamente reconocidos. Son empleadas en aplicaciones científicas y técnicas, y para ellas se conocen una gran cantidad de propiedades útiles: derivadas, integrales, representaciones integrales, desarrollos en serie de potencias, desarrollos asintóticos, ceros, etc. Algunas funciones especiales son, las funciones de Bessel, la función hipergeométrica de Gauss y las funciones elípticas de Jacobi o Weierstrass, entre otras.

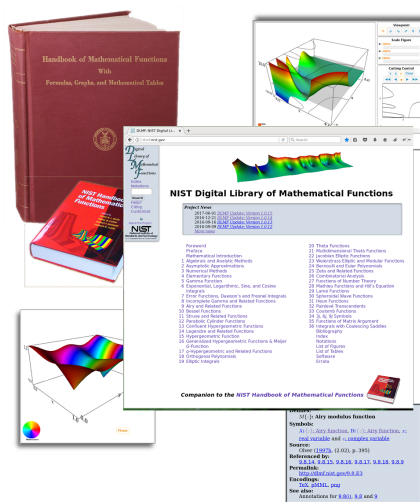


Figura 1.1: Bibliografía y librerías clásicas y modernas de funciones especiales: a la izquierda, el *Handbook of Mathematical Functions* de Abramowitz y Stegun; a la derecha, el *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, una plataforma digital que proporciona gráficos, información detallada y propiedades de las funciones especiales.

La teoría de la aproximación asintótica de integrales permite obtener información analítica y numérica sobre la solución de problemas especialmente complicados en disciplinas que precisan de un modelo matemático para describir el problema científico.

Algunos ejemplos conocidos de desarrollos asintóticos son, por ejemplo, la fórmula de Stirling para el factorial de un número



$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

o la aproximación de la función de Bessel para valores grandes del argumento, mediante funciones trigonométricas

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Otro caso interesante es el de los números armónicos, que aparecen de forma natural en el análisis de algoritmos y en el estudio de sumas de series. Los números armónicos, denotados como  $H_n$ , están definidos como

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

y su desarrollo asintótico para  $n \rightarrow \infty$  es

$$H_n \sim \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \dots,$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni.

## 1.2. Métodos asintóticos

La mayoría de los problemas en física e ingeniería en los que aparecen parámetros asintóticos están formulados mediante ecuaciones diferenciales y, en menor medida, ecuaciones integrales. Por ello, la teoría de aproximación asintótica se divide básicamente en dos campos de trabajo: la aproximación asintótica de soluciones de ecuaciones diferenciales [10, 16], y la aproximación asintótica de integrales [3, 14, 18]. El primero, aunque tiene la ventaja sobre el segundo de poder aplicarse directamente a un gran número de problemas prácticos (al no necesitar de ninguna representación integral previa), tiene el inconveniente de que, al no disponer de una representación explícita para la solución, su implementación es técnicamente más complicada.

Por otro lado, son numerosos los tipos de problemas en los que se dispone de una representación integral obtenida a través de la función de Green o vía transformada de Laplace, Fourier, Henkel, Gauss-Weierstrass, etc., o en los que aparecen integrales como elemento esencial de su formulación: integrales de tipo elíptico en mecánica espacial o en la teoría cuántica de campos, o representaciones integrales de funciones especiales (en particular, de distribuciones estadísticas o polinomios ortogonales).

En este trabajo nos centraremos en el segundo de los campos citados.

### 1.2.1. Métodos asintóticos para integrales

En general, el problema que plantea la teoría asintótica de integrales es encontrar una aproximación del tipo (1.1) de una función compleja  $F(z)$  definida mediante una integral

$$F(z) = \int_{\mathcal{C}} g(w)h(w, z)dw,$$

donde  $\mathcal{C}$  es un camino complejo y el producto  $g(w)h(w, z)$  es integrable a lo largo del mismo para  $z$  suficientemente grande, digamos  $|z| \geq z_0 > 0$  [18, Cap. 1]. No existe, sin embargo, un método general para obtener un desarrollo asintótico que se aplique a cualquier integral dada. Por el contrario, existen muchas técnicas asintóticas diferentes diseñadas para la aproximación de distintas familias de integrales. Las más conocidas son los métodos clásicos [18, Caps. 1 y 2], [14, Caps. 2-4] diseñados para obtener aproximaciones de las funciones de la física matemática. Tras estos aparecieron los métodos uniformes, que tratan problemas en los que la existencia de un parámetro invalida los desarrollos asintóticos clásicos [18, Cap. 7]. Posteriormente, surgieron otros métodos para aproximar ciertas familias de transformadas

integrales de convergencia lenta para las que los métodos clásicos no proporcionaban una respuesta satisfactoria [18, Caps. 3-6] (métodos distribucionales, técnica de la transformada de Mellin, métodos de sumabilidad, etc.).

Dentro de los métodos clásicos existe una gran cantidad de técnicas para la obtención de desarrollos asintóticos de integrales, cada una con integrandos y condiciones específicas. A continuación, describimos de manera general algunos de los métodos clásicos más conocidos.

### Lema de Watson (Watson, 1918)

El lema de Watson se emplea para obtener desarrollos asintóticos de funciones que se pueden expresar como la transformada de Laplace de una función  $g(t)$ . Su expresión más simple es

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} g(t) dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (1.2)$$

donde la función  $g(t)$  es analítica en el origen. Podemos observar que conforme  $\operatorname{Re}(z)$  crece, el valor máximo del integrando se produce en  $t = 0$  sugiriendo que la mayor contribución a la integral se produce en su entorno. Sustituyendo entonces la función  $g(t)$  por su desarrollo en serie de potencias y teniendo en cuenta el parámetro real positivo  $\lambda$  que define su comportamiento en el origen y controla el orden de crecimiento de la integral obtenemos el desarrollo asintótico de nuestra función

$$F_{\lambda}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda)}{z^{n+\lambda}}, \quad z \rightarrow \infty,$$

en el sector  $|\arg(z)| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta < \frac{1}{2}\pi$  donde  $z^{n+\lambda}$  toma su valor principal.

### Método de Laplace (Laplace, 1918)

El método de Laplace es una técnica asintótica utilizada para aproximar integrales que contienen un término exponencial decreciente. Este método, al igual que el lema de Watson, busca identificar la región donde se concentra la mayor contribución a la integral, lo que permite obtener una aproximación eficiente en el límite cuando el parámetro de la integral tiende a infinito.

Este método se aplica a integrales de la forma

$$F(z) = \int_a^b e^{-zh(t)} g(t) dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.3)$$

La idea subyacente en este método es similar a la del lema de Watson, donde buscamos la mayor contribución del integrando. Sin embargo, mientras que en el lema de Watson esa contribución se encuentra en torno a  $t = 0$ , en el método de Laplace la mayor contribución proviene del entorno donde la función  $h(t)$  alcanza un mínimo [14, Cap. 3].

En este contexto, las funciones  $h(t)$  y  $g(t)$  se consideran reales y holomorfas dentro de un dominio  $D$ ; por lo tanto, son funciones analíticas en dicho dominio. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la función  $h(t)$  presenta un cero simple en un punto  $t_0$ , contenido en la trayectoria de integración. En este punto, el integrando alcanza su mínimo, lo que implica que la mayor contribución a la integral proviene de este entorno.

Adicionalmente, el parámetro  $z$  varía a lo largo de un rayo o dentro de un sector anular en el plano complejo, definido por  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  y  $|z| \geq Z$ . Aquí,  $\theta$  se establece como  $\arg(z)$ , cumpliéndose la relación  $\theta_1 - \theta_2 < \pi$  y  $Z > 0$ . Por último,  $F(z)$  converge absolutamente y uniformemente con respecto a  $z$  en los límites de integración  $a$  y  $b$ .

Con las suposiciones anteriores llegamos al siguiente resultado.

$$F(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{zh''(t_0)}} e^{-zh(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{z^n}, \quad z \rightarrow \infty,$$

en el sector  $\theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2$ .

### Método de *steepest descent* (Debye, 1909)

El método de *steepest descent*, también conocido como el método *saddle-point*, es aplicable a integrales definidas a lo largo de un camino complejo

$$F(z) = \oint_{\Gamma} g(w) e^{zh(w)} dw, \quad z \rightarrow \infty.$$

La esencia de este método es la deformación del contorno de integración  $\Gamma$  en el dominio de analiticidad de las funciones  $g(w)$  y  $h(w)$  sin cambiar sus extremos, si no es cerrado, de tal modo que el contorno de integración  $\Gamma$  pase a través de un punto  $z_0$  tal que  $h'(z_0) = 0$  que recibe el nombre de *punto de silla* [11, Pág. 361-375]. Además, se debe cumplir que  $\text{Im } h(z) \equiv \text{Im } h(z_0)$  en un entorno de  $z_0$  contenido en el contorno  $\Gamma$ , y que  $\text{Re } h(z) < \text{Re } h(z_0)$  para todo punto  $z$  en dicho entorno. Para facilitar la comprensión, añadimos las siguientes condiciones sobre el punto de silla;  $g(z_0) \neq 0$ ,  $h(z_0) \neq 0$  y  $z_0$  no es un extremo del contorno  $\Gamma$ .

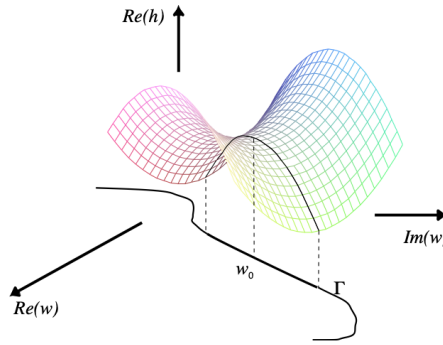


Figura 1.2: Camino de descenso rápido de la parte real de  $h(w)$  en el punto de silla  $w_0$ .

## 1.3. Objetivos

En última instancia, la aplicación de los métodos clásicos de análisis asintótico tiene como objetivo reescribir integrales complejas de manera que permitan la utilización del lema de Watson, una herramienta clave dentro de la teoría asintótica de integrales. Este enfoque no solo es una de las técnicas más potentes, sino también de las más versátiles, ya que facilita la obtención de aproximaciones asintóticas precisas en numerosos contextos matemáticos y físicos.

Así, el propósito principal de este trabajo es realizar un estudio detallado y riguroso sobre su fundamentación y aplicaciones prácticas. A lo largo del estudio, se demuestra cómo este método puede aplicarse tanto a la función Gamma incompleta, fundamental en teoría de la probabilidad y estadística, como a otras funciones especiales de importancia recurrente en las ciencias aplicadas. En particular, la función Gamma incompleta juega un papel central en este trabajo debido a su relevancia en una amplia variedad de contextos matemáticos y físicos. El análisis de su comportamiento asintótico, junto con el de otras funciones especiales a través de estas herramientas, permite no solo mejorar la comprensión teórica, sino también la capacidad de aproximar y resolver problemas concretos en diversas disciplinas.

Además, para el desarrollo de este trabajo he hecho uso del software *Wolfram Mathematica 14* [17], lo que ha permitido no solo la verificación simbólica de muchos de los resultados obtenidos, sino también el desarrollo de una habilidad fundamental en el manejo de herramientas computacionales avanzadas para el análisis de funciones especiales y su comportamiento asintótico.



## Capítulo 2

# El lema de Watson

En este capítulo se presenta y desarrolla el Lema de Watson (1918), un resultado fundamental en el campo del desarrollo asintótico. Este lema es de especial interés debido a su utilidad en el análisis de transformadas de Laplace, siendo aplicable a estas bajo ciertas condiciones. La idea clave del método radica en su capacidad para aproximar el comportamiento asintótico de cierto tipo de integrales, lo que lo convierte en una herramienta esencial dentro del análisis. Además, este lema es la base de otros métodos clásicos citados con anterioridad, como son el método de Laplace o el método de *steepest descent*. Tras introducir el lema de Watson, ilustraremos su aplicación con la función integral exponencial.

### 2.1. Lema de Watson

El lema de Watson permite obtener desarrollos asintóticos de funciones expresadas como transformadas de Laplace de funciones analíticas en el origen. La idea clave de este lema es que, cuando el parámetro asintótico tiende a infinito, la contribución principal de la integral proviene de la cercanía al origen, donde el integrando alcanza su valor máximo. Esto sugiere que la función en el integrando puede reemplazarse por su desarrollo en serie de potencias en un entorno del origen, permitiendo así una aproximación asintótica de la integral original.

El siguiente teorema recoge, de manera rigurosa, el lema de Watson.

**Teorema 2.1 (Lema de Watson).** *Consideramos la función*

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} g(t) dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

y supongamos las siguientes hipótesis:

- a) La función  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  tiene un número finito de discontinuidades.
- b) La función  $g(t)$  tiene un desarrollo asintótico en  $t = 0$  de la forma

$$g(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^{\frac{n+\lambda}{\mu}-1}, \quad t \rightarrow 0^+,$$

donde  $\lambda$  es un número real o complejo con parte real positiva,  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , y  $\mu > 0$  es un número real positivo.

- c) La integral es convergente para valores suficientemente grandes de  $\operatorname{Re}(z)$ , digamos  $\operatorname{Re}(z) \geq x_0 > 0$  con  $x_0$  fijo.

Entonces, la función  $F(z)$  admite el siguiente desarrollo asintótico para  $|z|$  grande

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right)}{z^{\frac{n+\lambda}{\mu}}}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

en el sector  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2}$ .

*Demostración.* Para la demostración ver [10, p.113].  $\square$

El lema de Watson no proporciona una cota del error, solo nos da la información del orden del error de aproximación al considerar los  $N$  primeros términos de la serie en (2.1). Por ello resulta interesante obtener, en la medida de lo posible, cotas para el error de aproximación, ya que nos permite evaluar la precisión de la aproximación. Cuando aplicamos el lema de Watson a funciones especiales, la condición a) normalmente se satisface puesto que la función  $g(t)$  suele ser analítica en un dominio que contiene el intervalo  $[0, \infty)$ .

## 2.2. Integral exponencial

Para ilustrar la aplicación del lema de Watson consideramos la función integral exponencial  $E_1(z)$  [9, ec. 6.2.1] definida como

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

La función integral exponencial tiene aplicaciones importantes tanto en matemáticas como en física. En matemáticas, se utiliza en fenómenos como el efecto Gibbs [2]. En física, la función integral exponencial aparece en diversos contextos: en la teoría de la difusión, problemas de transporte, el equilibrio radiactivo en atmósferas estelares, y en la evaluación de integrales de intercambio en mecánica cuántica [4]. También tiene aplicaciones en astrofísica [6] y en teoría electromagnética, como la radiación de un oscilador de media onda, donde se utilizan las integrales seno y coseno [8].

**Proposición 2.2.1.** *El desarrollo asintótico de la función integral exponencial  $E_1(z)$  cuando la variable  $z$  tiende a infinito es*

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \sim \frac{e^{-z}}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^n}, \quad z \rightarrow \infty,$$

en el sector  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2}$ .

*Demostración.* Consideremos la siguiente representación de la función integral exponencial  $E_1(z)$ ,

$$F(z) = ze^z E_1(z) = z \int_z^\infty \frac{e^{z-t}}{t} dt,$$

donde  $z$  es real y positivo. Para obtener el desarrollo asintótico de la integral exponencial aplicaremos el Lema de Watson. Para ello, reescribimos la integral en la forma de una integral de tipo Laplace (1.3), realizando el cambio de variable  $t = z(1+u)$

$$F(z) = z \int_0^\infty \frac{e^{-zu}}{1+u} du, \quad g(u) = \frac{1}{1+u}. \quad (2.2)$$

Podemos corroborar fácilmente que nuestra función  $F(z)$  satisface las condiciones necesarias para aplicar el Lema de Watson:

- a) La función  $g(u)$  no presenta ninguna discontinuidad en el intervalo de integración  $[0, \infty)$  de nuestra función integral  $F(z)$ .
- b) Utilizando el desarrollo en serie de la función  $\frac{1}{1-u}$  (serie geométrica), la función  $g(u)$  admite un desarrollo en serie de la forma

$$g(u) = \frac{1}{1-(-u)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-u)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n, \quad \forall u \text{ tal que } |u| < 1,$$

que es convergente en el disco centrado en el 0 y radio  $r < 1$ .

- c) Para valores suficientemente grandes de  $\operatorname{Re}(z)$ , se satisfacen para todos los valores de  $u$  sobre los que estamos integrando las desigualdades

$$\left| \frac{e^{-zu}}{1+u} \right| \leq |e^{-zu}| \leq e^{-\operatorname{Re}(z)u} \in L^1(0, \infty),$$

demostrando que  $F(z)$  es convergente.

Por lo tanto, aplicando el lema de Watson con los parámetros  $\lambda = 1$  y  $\mu = 0$ , obtenemos el siguiente desarrollo asintótico para  $F(z)$ ,

$$F(z) \sim z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{z^{n+1}}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Como  $\Gamma(n+1) = n!$ , obtenemos la representación

$$F(z) \sim z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Finalmente, despejando  $E_1(z)$  de la ecuación (2.2), obtenemos su desarrollo asintótico,

$$E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \sim \frac{e^{-z}}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^n}, \quad z \rightarrow \infty.$$

□

Extendemos los primeros términos de la serie para enfatizar que, en una aproximación asintótica, los primeros términos son los que capturan bien el comportamiento de nuestra función

$$E_1(z) \sim \frac{e^{-z}}{z} \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{3!}{z^3} + \dots \right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Con el objetivo de estudiar posibles cotas del error entre las sumas parciales del desarrollo asintótico y la función integral exponencial nos vamos a quedar únicamente con la parte correspondiente a la serie, es decir,  $F(z)$  puesto que es la que nos va a reflejar la sensibilidad a la variación en función del parámetro  $n$ .

**Proposición 2.2.2.** Una cota del error para la suma parcial de los  $N$  primeros términos del desarrollo asintótico de la función  $F(z)$  (2.3) viene dada por la expresión

$$|R_N(z)| \leq \frac{N!}{|z|^N}.$$

*Demostración.* De (2.3) obtenemos que la función  $F(z)$  admite la siguiente representación,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}} + R_N(z), \quad z \rightarrow \infty,$$

siendo  $R_N(z)$  la diferencia entre la función  $F(z)$  y la suma de los  $N$  primeros términos del desarrollo asintótico y una cantidad del mismo orden que el primer término despreciado

$$R_N(z) = F(z) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}} = \mathcal{O}(z^{-N}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Vamos a comprobar que  $R_N(z) = \mathcal{O}(z^{-N})$ :

$$g(u) = \frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n u^n + f_N(u), \quad \forall u \text{ tal que } |u| < 1,$$

donde

$$f_N(u) = \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n u^n = (-u)^N \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n = \frac{(-u)^N}{1+u}, \quad \forall u \text{ tal que } |u| < 1.$$

Con esto obtenemos una nueva forma de expresar  $R_N(z)$ , a la que aplicamos el cambio de variable  $zu = t$ ,

$$|R_N(z)| = \left| \int_0^{\infty} \frac{(-u)^N e^{-zu}}{1+u} du \right| \leq |z|^{-N} \int_0^{\infty} t^N e^{-t} dt = |z|^{-N} \Gamma(N+1) = \frac{N!}{|z|^N},$$

por lo tanto

$$|R_N(z)| \leq \frac{N!}{|z|^N}.$$

La constante  $M$  que satisface  $|R_N(z)| \leq M|z|^{-N}$  es  $M = N!$ .  $\square$

Para ilustrar la precisión proporcionada por el desarrollo asintótico, hemos representado la función  $E_1(z)$  y las sumas parciales ( $S_N(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}$ ) de los primeros términos del desarrollo asintótico para diferentes intervalos de  $z$  contenidos en el eje real.

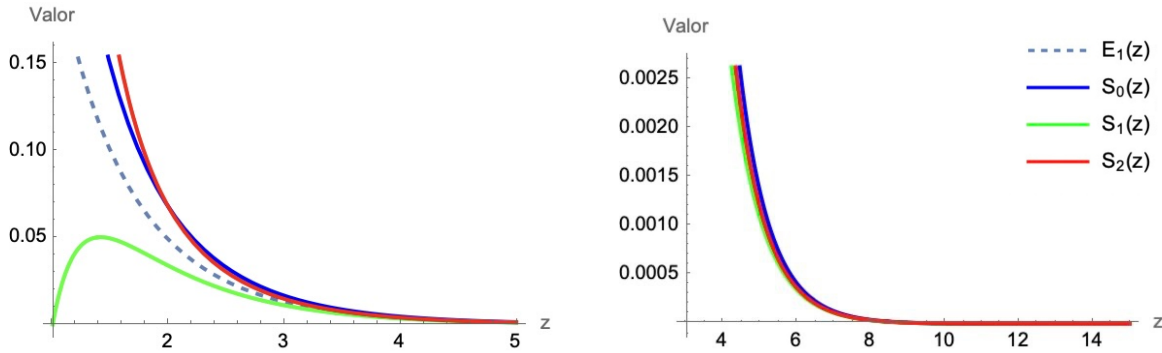


Figura 2.1: Sumas parciales para  $N = 0$ ,  $N = 1$  y  $N = 2$  del desarrollo asintótico frente a la función integral exponencial  $E_1(z)$  en los intervalos  $z \in [1, 5]$  y  $z \in [3, 15]$ .

A fin de obtener una comprensión más precisa de la exactitud del desarrollo asintótico, representaremos tanto el error relativo como el error relativo logarítmico. Este último resulta particularmente útil, ya que la escala logarítmica permite apreciar con mayor claridad las diferencias en situaciones donde los valores son extremadamente pequeños.

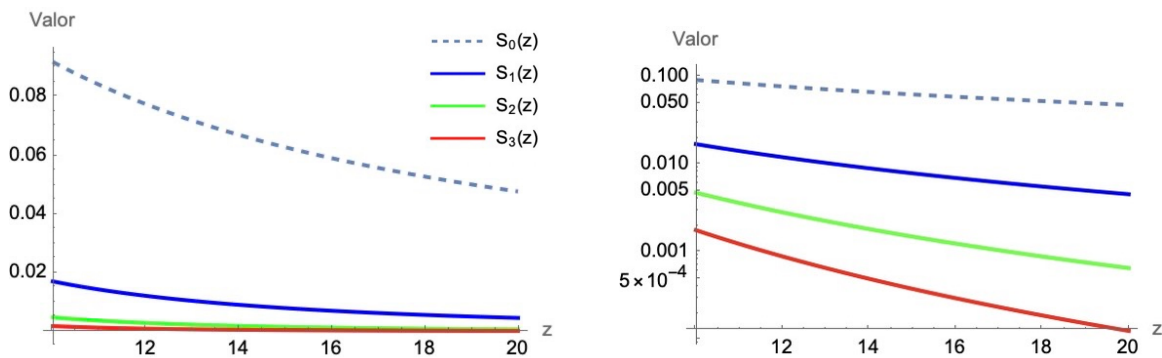


Figura 2.2: Error relativo y error relativo logarítmico del desarrollo asintótico para las cuatro primeras sumas parciales en el intervalo  $z \in [10, 20]$ .

Con el propósito de evaluar este comportamiento y comprobar la exactitud del desarrollo asintótico en estos casos, hemos calculado los errores relativos para valores de  $z$  mucho mayores que los representados en las gráficas anteriores. Estos cálculos numéricos permiten observar cómo la diferencia entre



la función exacta y las sumas parciales se reduce drásticamente a medida que  $z$  aumenta, siguiendo la tendencia prevista por el teorema.

$z/N$	1	2	3	4
10	1.70e-2	4.37e-3	1.78e-3	8.37e-4
100	1.96e-4	5.83e-6	2.31e-7	1.14e-8
1.000	2.00e-6	5.98e-9	2.39e-11	1.19e-13
10.000	2.00e-8	6.00e-12	2.84e-15	4.37e-16

Cuadro 2.1: Tabla con los errores relativos del desarrollo asintótico de la función  $F(z)$  para diferentes valores de  $N$  y  $z$ .

La cota calculada nos permite evaluar el error asociado al desarrollo asintótico una vez fijado el valor de  $z$ . En particular, representa cómo el error varía en función del número de términos considerados en la suma parcial  $S_N(z)$  de nuestra serie asintótica, pudiendo identificar el valor en el que agregar más términos deja de aportar mejoras significativas a la precisión, o incluso cuando el error empieza a estabilizarse o a aumentar ligeramente debido al crecimiento en nuestro caso de  $N!$ .

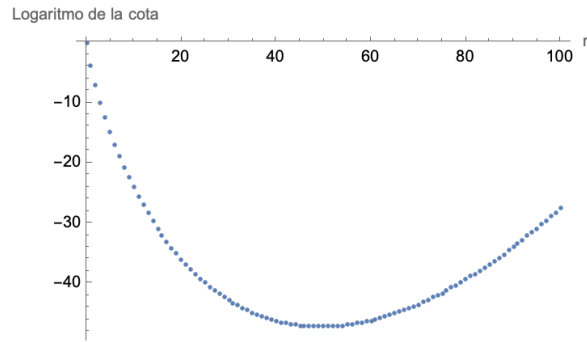


Figura 2.3: Comportamiento de la función  $\ln\left(\frac{N!}{|z|^N}\right)$ , el logaritmo de la cota del error de las sumas parciales  $S_N(z)$  para  $z = 50$  y  $N \in [0, 100]$ , donde el valor mínimo ocurre para  $N \sim z$ .

En el caso de la figura 2.3 podemos observar que el valor óptimo de truncamiento es  $N = 47$ . A partir de este valor, el error ya no disminuye y comienza a aumentar, indicando que sumar más términos empeora la aproximación.

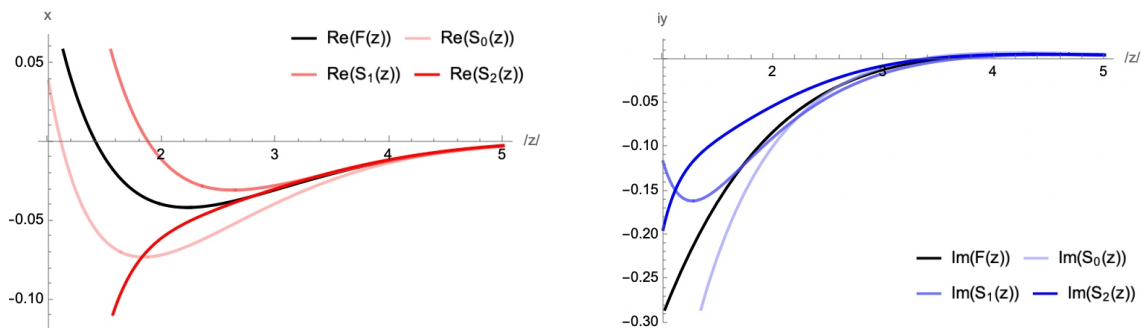


Figura 2.4: Parte real y parte imaginaria de la función  $E_1(z)$  y sus sumas parciales del desarrollo asintótico  $S_N(z)$  para  $N = 0$ ,  $N = 1$  y  $N = 2$  en el rayo complejo  $z = |z|e^{i\theta}$ , con valores de  $|z| \in [1, 5]$  y  $\theta = \pi/4$ .

Este análisis se ha centrado en valores de  $z$  contenidos en la recta real. Ahora, veamos la precisión y eficiencia dentro del plano complejo. Para ello, analizaremos valores de  $z$  contenidos en el mismo rayo, es decir,  $z = |z|e^{i\theta}$ , donde  $\theta$  el ángulo fijo del rayo. En este caso, el rayo tiene como argumento  $\theta = \pi/4$ .

Para ello, representamos gráficamente la parte real y la parte imaginaria de la función  $F(z)$  y de las sumas parciales del desarrollo asintótico  $S_N(z)$  para diferentes valores de  $N$  por separado. Estas representaciones nos permitirán observar cómo se comportan las aproximaciones asintóticas en el rayo complejo.

Además, en los gráficos correspondientes al error relativo, representaremos el módulo del error relativo entre  $F(z)$  y cada una de sus aproximaciones  $S_N(z)$ . Esto proporcionará una medida clara de la precisión de cada suma parcial  $S_N(z)$  respecto a la función original  $F(z)$  en el plano complejo.

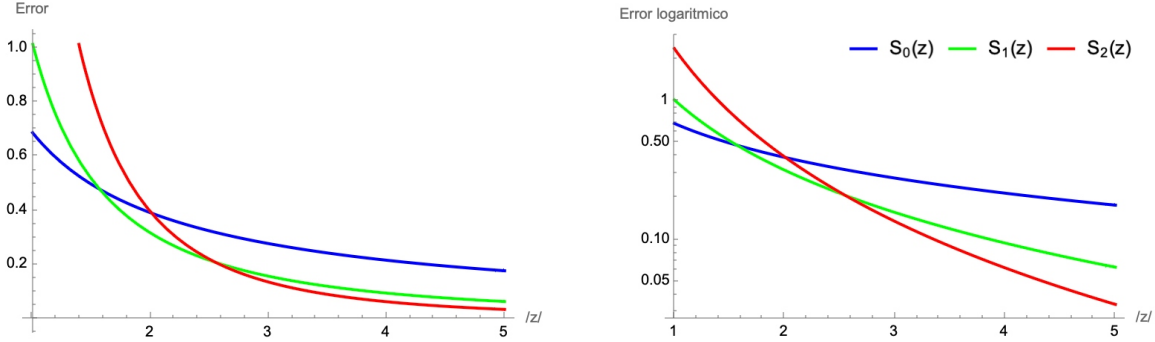


Figura 2.5: Error relativo y error relativo logarítmico del desarrollo asintótico de la función  $E_1(z)$  para las tres primeras sumas parciales  $S_N(z)$  en el rayo complejo  $z = |z|e^{i\theta}$ , con valores de  $|z| \in [1, 5]$  y  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

La siguiente tabla representa los errores relativos para valores de  $z$  contenidos en el mismo rayo complejo con argumento  $\theta = \pi/4$ , pero con módulos cada vez mayores. Estos datos permiten observar cómo varía la precisión del desarrollo asintótico de la función  $F(z)$  al incrementar el módulo de  $z$  y el número de términos  $N$  en las sumas parciales  $S_N(z)$ .

$ z  / N$	1	2	3	4
10	1.64e-2	4.61e-3	1.74e-3	8.19e-4
100	1.96e-4	5.83e-6	2.32e-7	1.15e-8
1000	2.00e-6	5.98e-9	2.39e-11	1.19e-13
10000	2.00e-8	6.00e-12	2.40e-15	1.12e-18

Cuadro 2.2: Tabla con los errores relativos del desarrollo asintótico de la función  $F(z)$  para diferentes valores de  $N$  y  $z$  en el rayo complejo con argumento  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

**Corolario 2.2.1.** *El desarrollo asintótico de la función integral exponencial nos permite obtener los desarrollos asintóticos de las integrales seno y coseno definidas de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \text{si}(z) &= - \int_z^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{z^{2n+1}}, & z \rightarrow \infty, \\ \text{Ci}(z) &= - \int_z^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{z^{2n}}, & z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.4)$$

satisfaciendo las relaciones

$$\text{si}(z) = \frac{1}{2} i (E_1(iz) - E_1(-iz)),$$

$$\text{Ci}(z) = -\frac{1}{2} (E_1(iz) + E_1(-iz)),$$

siendo válidas en el sector  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ .

Con estos ejemplos podemos observar que el desarrollo asintótico de ciertas funciones especiales pueden obtenerse a partir del desarrollo asintótico de la función integral exponencial. Para funciones oscilatorias en la recta real como las funciones integral seno e integral coseno (2.4) se necesitan representaciones asintóticas compuestas. Esto quiere decir que el comportamiento de estas funciones es más complicado en la recta real y no puede describirse con un desarrollo asintótico simple. En lugar de ello, se necesita combinar múltiples términos o aproximaciones para describir correctamente el comportamiento de las funciones cuando  $z$  es grande. Sin embargo, fuera de la recta real, en el plano complejo, se pueden obtener aproximaciones más simples.



## Capítulo 3

# Función gamma incompleta y funciones relacionadas

La función gamma incompleta y sus funciones relacionadas juegan un papel crucial en las matemáticas avanzadas y en diversas aplicaciones científicas. La función gamma incompleta,  $\Gamma(a, z)$  [9, ec. 8.2.2], es crucial en la conexión con otras funciones especiales, como la función zeta de Riemann  $\zeta(s)$  [9, ec. 25.5.1], a través de su representación integral. Estas conexiones permiten abordar problemas fundamentales, como la distribución de los números primos y la hipótesis de Riemann, así como los comportamientos asintóticos en matemáticas aplicadas.

En física y química, las funciones gamma y sus variantes son esenciales para la descripción de fenómenos complejos, desde los tiempos de relajación en sistemas no lineales hasta los cálculos en química cuántica. Asimismo, en biología y estadística, estas funciones permiten modelar comportamientos poblacionales y evaluar distribuciones de probabilidad en hipótesis estadísticas. Entre las funciones estrechamente relacionadas se encuentra la función hipergeométrica confluyente, o función de Kummer, cuyos coeficientes pueden expresarse mediante la función gamma, ampliando el marco de aplicaciones en análisis matemático y ecuaciones diferenciales complejas. En este capítulo, obtendremos el desarrollo asintótico de la gamma incompleta y la función hipergeométrica confluyente.

### 3.1. Función gamma incompleta

La función gamma incompleta  $\Gamma(a, z)$  [9, ec. 8.2.2], definida como

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt,$$

tiene un papel destacado en matemáticas avanzadas, conectada directamente con funciones especiales importantes como la función zeta de Riemann [9, ec. 25.5.1] y la función terminante  $F_p(z)$  [9, ec. 8.22.1]. En el campo de la estadística, la función gamma es esencial para evaluar funciones de distribución acumulativas, como las distribuciones gamma y chi-cuadrado, y permite obtener probabilidades acumuladas, realizar análisis de hipótesis y calcular intervalos de confianza.

En física, describe fenómenos de relajación en sistemas complejos, como materiales con comportamiento no lineal donde la respuesta disminuye lentamente en el tiempo [13]. También se emplea en química cuántica para calcular integrales con orbitales gaussianos y de Slater, fundamentales para determinar probabilidades electrónicas en regiones específicas del espacio [12]. En biología poblacional, ayuda a modelar el crecimiento y decaimiento en sistemas ecológicos, siendo útil en la comprensión de dinámicas en especies que habitan entornos cambiantes [1].

A continuación, obtenemos el desarrollo asintótico de la función gamma incompleta superior cuando  $z$  tiende a infinito.

**Proposición 3.1.1.** *El desarrollo asintótico de la función gamma incompleta  $\Gamma(a, z)$  cuando  $z$  tiende a infinito es*

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \sim z^{a-1} e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a-1}{n} \frac{n!}{z^n}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

en el sector  $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2}$ .

*Demostración.* Para obtener el desarrollo asintótico de la función gamma incompleta superior aplicamos el lema de Watson. Para ello, efectuamos en primer lugar el cambio de variable  $t = z(1+u)$  en la función gamma incompleta

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = z^a e^{-z} \int_0^\infty (1+u)^{a-1} e^{-zu} du, \quad (3.2)$$

obteniendo la función en la forma de una integral de Laplace (1.3) donde la función  $g(a, u) = (1+u)^{a-1}$ .

Comprobamos que se satisfacen las condiciones necesarias para aplicar el lema de Watson:

- a) La función  $g(a, u)$  presenta ninguna discontinuidad en el intervalo de integración de nuestra función integral  $\Gamma(a, z)$ , cuyos límites inferior y superior una vez realizado el cambio de variable son 0 y  $\infty$  respectivamente.
- b) Utilizando el desarrollo en serie de la función  $(1+u)^\alpha$  (serie binomial), la función  $g(a, u)$  admite un desarrollo en serie de la forma

$$g(a, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a-1}{n} u^n, \quad \forall u \text{ tal que } |u| < 1,$$

que es convergente en cualquier disco con centro en  $u = 0$  y radio  $r < 1$ .

- c) Analizamos la convergencia de la integral en el infinito, para  $x$  suficientemente grande tenemos:

$$\int_x^\infty |(1+u)^{a-1} e^{-zu}| du = \int_x^\infty \frac{(1+u)^{a+1}}{|e^{zu}|} \frac{1}{(1+u)^2} du \leq \int_x^\infty \frac{1}{(1+u)^2} du.$$

Esta integral es convergente en el infinito y por lo tanto nuestra función gamma incompleta también lo es.

Podemos aplicar entonces el lema de Watson obteniendo el desarrollo asintótico de la función gamma incompleta

$$\Gamma(a, z) \sim z^{a-1} e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a-1}{n} \frac{n!}{z^n}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

siendo válido en el sector  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ . □

Concluimos el desarrollo extendiendo los primeros términos de la serie para obtener una representación más visual

$$\Gamma(a, z) \sim z^{a-1} e^{-z} \left( 1 + \frac{(a-1)}{z} + \frac{(a-1)(a-2)}{z^2} + \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{z^3} + \dots \right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Como ya hicimos en el estudio de la función integral exponencial  $E_1(z)$ , para analizar el error relativo y estudiar posibles cotas del error entre las sumas parciales del desarrollo asintótico y la función gamma incompleta  $\Gamma(a, z)$  nos vamos a quedar únicamente con la parte correspondiente a la serie, definida a partir de la representación (3.2) como

$$F(a, z) = z^{-a} e^z \Gamma(a, z) = z \int_0^\infty (1+u)^{a-1} e^{-zu} du, \quad (3.4)$$

puesto que es la que nos va a reflejar la variación en función del parámetro  $N$ .

**Proposición 3.1.2.** Una cota del error para la suma parcial de los  $N$  primeros términos del desarrollo asintótico de la función  $F(a, z)$  (3.4) cuando  $a \leq N+1$  viene dada por la expresión

$$|R_N(a, z)| \leq \frac{|a-1| \cdots |a-N|}{|z|^N}. \quad (3.5)$$

*Demostración.* Definimos la diferencia entre la función  $F(a, z)$  y la suma de los  $N$  primeros términos del desarrollo como  $R_N(a, z)$ , siendo una cantidad del mismo orden que el primer término despreciado

$$R_N(a, z) = F(a, z) - z \sum_{n=0}^{N-1} \binom{a-1}{n} \frac{n!}{z^n} = \mathcal{O}(z^{-N}), \quad z \rightarrow \infty.$$

A partir de la expresión (3.2) de la función gamma incompleta calculamos el desarrollo de Taylor de la función  $g(a, u)$  centrada en  $u = 0$  y aplicamos el resto de Lagrange

$$g(a, u) = (1+u)^{a-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a, 0)}{n!} u^n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g^{(n)}(a, 0)}{n!} u^n + r_N(a, u),$$

donde  $r_N(a, u) = \frac{g^{(N)}(a, c)}{N!} u^N$  para algún  $c \in (0, u)$ . Las derivadas de nuestra función  $g(a, u)$  son

$$g(a, u) = (1+u)^{a-1},$$

$$g'(a, u) = (a-1)(1+u)^{a-2},$$

$$g''(a, u) = (a-1)(a-2)(1+u)^{a-3},$$

$$g'''(a, u) = (a-1)(a-2)(a-3)(1+u)^{a-4},$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(a, u) = (a-1)(a-2) \cdots (a-n)(1+u)^{a-n-1}.$$

Sustituimos entonces en la expresión (3.2) dicho desarrollo de Taylor de la función  $g(a, u)$  obteniendo una nueva expresión del término  $R_N(a, z)$ ,

$$F(a, z) = z \int_0^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g^{(n)}(a, 0)}{n!} u^n + r_N(a, u) \right) e^{-zu} du,$$

$$R_N(a, z) = z \int_0^{\infty} r_N(a, u) e^{-zu} du.$$

Tomamos valor absoluto y aplicamos el cambio de variable  $zu = t$  a la nueva expresión de  $R_N(a, z)$ ,

$$|R_N(a, z)| = \left| \int_0^{\infty} r_N \left( a, \frac{t}{z} \right) e^{-t} dt \right| \leq \int_0^{\infty} \left| r_N \left( a, \frac{t}{z} \right) \right| |e^{-t}| dt. \quad (3.6)$$

Vamos a hallar una cota para  $r_N(a, u)$ :

$$|r_N(a, u)| = \left| \frac{g^{(N)}(a, c)}{N!} u^N \right| \leq \frac{\max_{0 \leq c \leq t} |g^{(N)}(a, c)|}{N!} u^N = \frac{|a-1| |a-2| \cdots |a-N|}{N!} u^N, \quad a \leq N+1. \quad (3.7)$$

Utilizamos la cota en la desigualdad (3.6) demostrando la proposición,

$$|R_N(a, z)| \leq |z|^{-N} \left| \binom{a-1}{N} \right| \int_0^{\infty} t^N e^{-t} dt = \frac{|a-1| \cdots |a-N|}{|z|^N}.$$

□

Para examinar la precisión del desarrollo asintótico, se han representado gráficamente tanto la función gamma incompleta  $\Gamma(a, z)$  con el parámetro  $a = 2.5$ , como las aproximaciones parciales obtenidas en diferentes rangos de  $z$ .

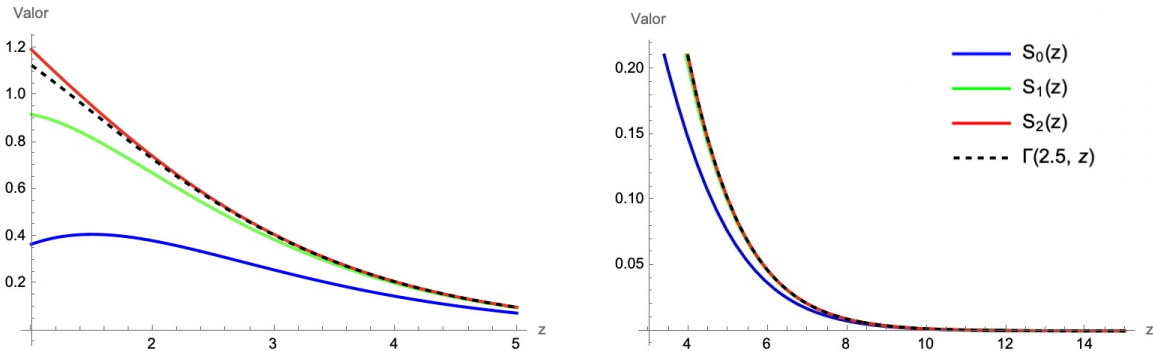


Figura 3.1: Sumas parciales para  $N = 0$ ,  $N = 1$  y  $N = 2$  del desarrollo asintótico fijando  $a = 2.5$  frente a la función gamma incompleta  $\Gamma(2.5, z)$  en los intervalos  $z \in [1, 5]$  y  $z \in [3, 15]$ .

Representamos también el error relativo y logarítmico para visualizar con mayor precisión la exactitud en diferentes valores de  $z$  determinando una vez más la eficacia de nuestra aproximación.

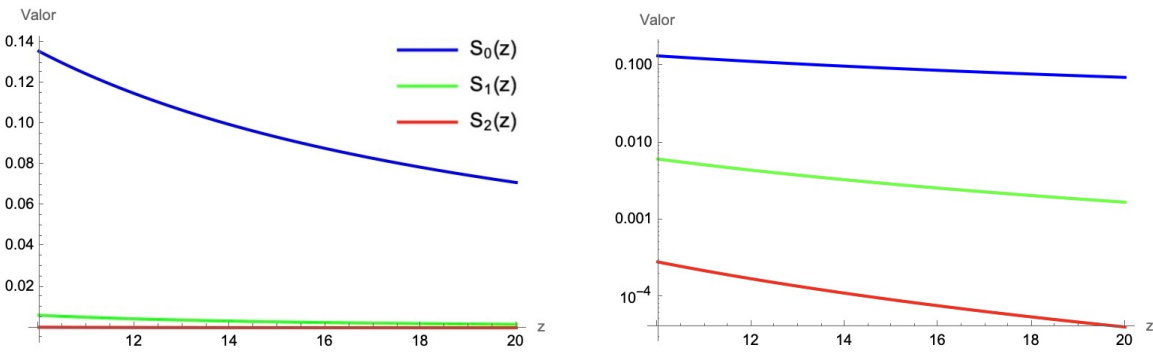


Figura 3.2: Error relativo y error relativo logarítmico del desarrollo asintótico para las tres primeras sumas parciales en el intervalo  $z \in [10, 20]$  y  $a = 2.5$ .

En la siguiente tabla se presentan los errores relativos calculados para valores de  $z$  mayores, mostrando cómo la diferencia entre la función  $F(a, z)$  y las sumas parciales disminuye considerablemente conforme  $z$  crece, en línea con la tendencia teórica.

$z / N$	1	2	3	4	5
10	6.20e-3	2.85e-4	3.94e-5	9.16e-6	2.99e-6
100	7.35e-5	3.64e-7	5.41e-9	1.34e-10	4.64e-12
1.000	7.49e-7	3.74e-10	5.60e-13	1.48e-15	1.82e-16
10.000	7.50e-9	3.75e-13	2.11e-17	2.11e-17	2.11e-17

Cuadro 3.1: Tabla con los errores relativos del desarrollo asintótico de la función  $F(2.5, z)$  para diferentes valores de  $N$  y  $z$ .

La cota nos permite, una vez más, la posibilidad de elegir el valor óptimo de truncamiento  $N$  que minimiza el error, permitiendo ajustar la serie de manera precisa y eficiente. En la siguiente gráfica, representada para  $z = 50$  podemos observar que la cota del error alcanza un mínimo en la suma parcial  $S_{50}(a, z)$ , a partir de la cual si continuamos añadiendo términos este aumenta significativamente.



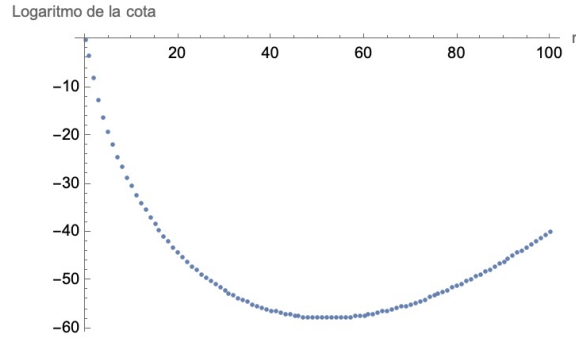


Figura 3.3: Comportamiento de la función  $\ln \left( \frac{|a-1| \cdots |a-N|}{|z|^N} \right)$ , el logaritmo de la cota del error de las series parciales  $S_N(a, z)$  para  $z = 50$ ,  $N \in [0, 100]$  y  $a = 2.5$  donde el valor mínimo ocurre para  $n \sim z$ .

Además, vamos a representar gráficamente el desarrollo asintótico para diferentes valores de  $z$  contenidos en el rayo  $z = |z|e^{i\theta}$ , con argumento  $\theta = \pi/5$  y diferentes módulos  $|z|$ , añadiendo la diferencia de que nuestro parámetro  $a$  va a estar contenido también en el plano complejo. Para ello, separamos la parte real e imaginaria.

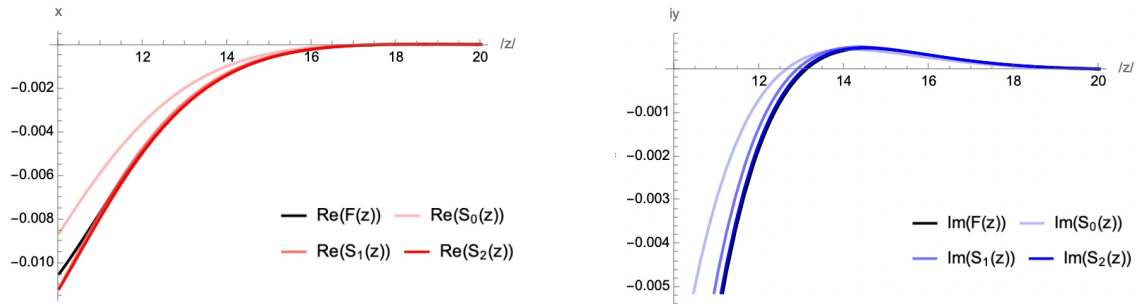


Figura 3.4: Parte real y parte imaginaria de la función  $\Gamma(a, z)$  y las sumas parciales del desarrollo asintótico  $S_N(a, z)$  para  $N = 0$ ,  $N = 1$  y  $N = 2$  en el rayo complejo  $z = |z|e^{i\theta}$ , con valores de  $|z| \in [10, 20]$ ,  $\theta = \pi/5$  y  $a = 5e^{i\pi/4}$ .

La siguiente tabla muestra los errores relativos para valores de  $z$  contenidos en el mismo rayo complejo, con argumento  $\theta = \frac{\pi}{5}$ , tomando cada vez módulos más grandes. Estos resultados permiten analizar cómo se comporta la precisión del desarrollo asintótico de la función  $F(a, z)$ , donde  $a = 5e^{i\pi/4}$ , al aumentar el módulo de  $z$  y el número de términos  $N$  en las sumas parciales  $S_N(a, z)$ .

$ z  / N$	1	2	3	4
10	5.94e-2	2.06e-2	6.66e-3	2.17e-3
100	4.50e-4	1.72e-5	6.10e-7	2.16e-8
1.000	4.37e-6	1.68e-8	6.01e-11	2.14e-13
10.000	4.35e-8	1.68e-11	6.00e-15	2.14e-18

Cuadro 3.2: Tabla con los errores relativos del desarrollo asintótico de  $F(a, z)$  para diferentes valores de  $N$ ,  $z$  y  $a = 5e^{i\pi/4}$  en el rayo complejo con argumento  $\theta = \frac{\pi}{5}$ .

### 3.2. Función hipergeométrica confluyente

Una función relacionada con la función gamma incompleta es la función hipergeométrica confluyente, también conocida como función de Kummer. Es una de las dos soluciones de la ecuación diferencial de

segundo orden denominada como ecuación de Kummer [9, ec. 13.2.1]:

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (b - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0. \quad (3.8)$$

La función hipergeométrica confluyente admite la siguiente representación integral [9, ec. 13.4.4],

$$U(a, b, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt, \quad \operatorname{Re}(a) > 0, \quad |\arg z| < \frac{1}{2}\pi, \quad (3.9)$$

en la que los coeficientes de su serie se expresan como cocientes de funciones gamma. Esta relación facilita la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones diferenciales complejas, ya que ambas funciones comparten propiedades útiles en el análisis y la física matemática. La relación viene establecida por [9, ec. 8.5.3] del siguiente modo

$$\Gamma(a, z) = e^{-z} U(1 - a, 1 - a, z) = z^a e^{-z} U(1, 1 + a, z).$$

Dentro del campo de la física, una aplicación importante se encuentra en la resolución de la ecuación de ondas en coordenadas paraboloidales, donde se pueden obtener soluciones exactas mediante separación de variables. A partir de ciertas sustituciones en la ecuación de Kummer (3.8), se obtiene la ecuación de Whittaker [9, ec. 13.14.1]. Las soluciones de la ecuación de Whittaker permiten abordar la ecuación de ondas de manera precisa [5, Capítulo 7]. Además, la función hipergeométrica confluyente tiene una conexión con las representaciones del grupo de matrices triangulares de tercer orden [9, ec. 13.27.1]. En este ámbito, las matrices diagonales actúan como operadores de multiplicación exponencial, y otras matrices del grupo se representan mediante operadores integrales, cuyas soluciones se expresan en términos de funciones de Whittaker, derivando así propiedades clave como relaciones de recurrencia y derivadas [15, cap. 8].

A continuación obtenemos el desarrollo asintótico de la función hipergeométrica confluyente.

**Proposición 3.2.1.** *El desarrollo asintótico de la función hipergeométrica confluyente  $U(a, b, z)$  cuando  $z$  tiende a infinito es*

$$U(a, b, z) \sim z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a)_n (1+a-b)_n}{n!} z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty,$$

en el sector  $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2}$ , donde  $(a)_n$  es el símbolo de Pochhammer [9, ec. 5.2], definido para un número complejo  $a$  y un entero  $n$  como el siguiente producto:

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1). \quad (3.10)$$

*Demostración.* Para obtener el desarrollo asintótico de la función hipergeométrica confluyente aplicamos el lema de Watson. Para ello, partiendo de la función hipergeométrica confluyente en su representación integral (3.9) vemos que es de la forma de una integral de Laplace (1.3), donde

$$g(a, b, t) = t^{a-1} (1+t)^{b-a-1}. \quad (3.11)$$

Comprobamos que podemos aplicar el lema de Watson a nuestra función  $U(a, b, z)$ :

- La función  $g(a, b, t)$  presenta una única discontinuidad en  $u = 0$  cuando  $a - 1 < 0$  en el intervalo de integración  $[0, \infty)$  de la función hipergeométrica confluyente.
- Utilizando de nuevo la serie binomial, la función  $g(a, b, t)$  admite un desarrollo en serie de la forma,

$$g(a, b, t) = t^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b-a-1}{n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b-a-1}{n} t^{n+a-1}, \quad \forall u \text{ tal que } |u| < 1,$$

que es convergente en el disco centrado en el 0 y radio  $r < 1$ .

- c) Analizamos la convergencia de la representación integral de  $U(a, b, z)$  en el infinito, para  $x$  suficientemente grande tenemos:

$$\int_x^\infty t^{a-1}(1+t)^{b-a-1}e^{-zt}dt = \int_x^\infty \frac{t^{a+1}(1+t)^{b-a-1}}{e^{zt}} \frac{1}{t^2(1+t)^2} \leq \int_x^\infty \frac{1}{(1+t)^2}.$$

Esta integral es convergente en el infinito y por lo tanto nuestra función gamma incompleta también lo es. En el punto de integración  $t = 0$  no tenemos problemas debido a la condición  $\operatorname{Re}(a) > 0$ , por lo que nuestra función es convergente.

Procedemos aplicando el lema de Watson a la función hipergeométrica confluyente, obteniendo su respectivo desarrollo asintótico en potencias inversas de  $z$ ,

$$U(a, b, z) \sim \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b-a-1}{n} \frac{\Gamma(n+a)}{z^{n+a}}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Aplicando la siguiente propiedad de los símbolos de Pochhammer,  $(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$  y desarrollando el número combinatorio obtenemos el desarrollo final,

$$U(a, b, z) \sim z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a)_n (1+a-b)_n}{n!} z^{-n}, \quad z \rightarrow \infty,$$

siendo válido el sector  $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2}$ . □

La extensión de los primeros términos del desarrollo es la siguiente

$$U(a, b, z) \sim z^{-a} \left( 1 - \frac{a(1+a-b)}{z} + \frac{a(a+1)(1+a-b)(2+a-b)}{2z^2} - \dots \right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Para estudiar posibles cotas del error entre las sumas parciales del desarrollo asintótico y la función hipergeométrica confluyente nos vamos a quedar únicamente con la parte correspondiente a la serie,

$$F(a, b, z) = z^a U(a, b, z),$$

puesto que es la que nos va a reflejar la sensibilidad a la variación en función del parámetro  $n$ .

**Proposición 3.2.2.** Una cota del error para la suma parcial de los  $N$  primeros términos del desarrollo asintótico de la función  $F(a, b, z)$  cuando  $a \leq N+1$  viene dada por la expresión

$$|R_N(a, b, z)| \leq \frac{(a)_N |b-a-1| |b-a-2| \cdots |b-a-N|}{N!} \frac{1}{|z|^N}.$$

*Demostración.* Partiendo de la representación integral de la función hipergeométrica confluyente (3.9), utilizamos la representación en serie de  $(1+t)^{b-a-1}$  dada por

$$(1+t)^{b-a-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{b-a-1}{n} t^n = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \binom{b-a-1}{n} t^n + r_N(a, b, t), \quad \forall u \text{ tal que } |u| < 1.$$

Sustituimos ahora en la propia función  $F(a, b, z)$ ,

$$\begin{aligned} F(a, b, z) &= \frac{z^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} \left( \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \binom{b-a-1}{n} t^n + r_N(a, b, t) \right) dt \\ &= \frac{z^a}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{N-1} \left( (-1)^n \binom{b-a-1}{n} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a+n-1} dt \right) + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} r_N(a, b, t) dt. \end{aligned}$$

Definimos  $R_N(a, b, z)$  como

$$R_N(a, b, z) = \frac{z^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} r_N(a, b, t) dt, \quad (3.12)$$

obteniendo la siguiente representación de la función  $F(a, b, z)$ ,

$$\begin{aligned} F(a, b, z) &= \frac{z^a}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{N-1} \left( (-1)^n \binom{b-a-1}{n} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a+n-1} dt \right) + R_N(a, b, z) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (a)_n \binom{b-a-1}{n} z^{-n} + R_N(a, b, z). \end{aligned} \quad (3.13)$$

En la demostración de la cota del error para la función gamma incompleta superior  $\Gamma(a, z)$ , hemos probado aplicando el resto de Lagrange que una cota del error  $r_N(a, t)$  de la función  $g(a, t) = (1+t)^{a-1}$  viene dada por la expresión (3.7) cuando  $a \leq N+1$ . Aplicando esto a nuestra función  $(1+t)^{b-a-1}$  llegamos a la siguiente cota,

$$|r_N(a, b, t)| \leq \frac{|b-a-1||b-a-2|\cdots|b-a-N|}{N!} t^N, \quad b-a \leq N+1.$$

Tomamos módulos y aplicamos el cambio de variable  $zt = u$  en la expresión (3.12),

$$|R_N(a, b, z)| = \frac{|z|^{a-1}}{\Gamma(a)} \left| \int_0^\infty e^{-u} \left( \frac{u}{z} \right)^{a-1} r_N \left( a, b, \frac{u}{z} \right) du \right| \leq \frac{|z|^{a-1}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty |e^{-u}| \left| \frac{u}{z} \right|^{a-1} |r_N \left( a, b, \frac{u}{z} \right)| du,$$

utilizamos la cota de  $r_N(a, b, t)$  y la propiedad de los símbolos de Pochhammer:

$$\begin{aligned} |R_N(a, b, z)| &\leq \frac{|z|^{-N} |b-a-1| \cdots |b-a-N|}{N! \Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-u} u^{N+a-1} du \\ &= \frac{|z|^{-N} (a)_n |b-a-1| \cdots |b-a-N|}{N!} = \frac{(a)_n |b-a-1| \cdots |b-a-N|}{N!} \frac{1}{|z|^N}, \quad b-a \leq N+1. \end{aligned}$$

□

Examinamos la precisión del desarrollo asintótico, representando gráficamente tanto la función hipergeométrica confluyente  $U(a, b, z)$ , como las sumas parciales del desarrollo asintótico para diferentes valores de  $N$ , tomando los parámetros  $a = 2.5$  y  $b = 1.8$ .

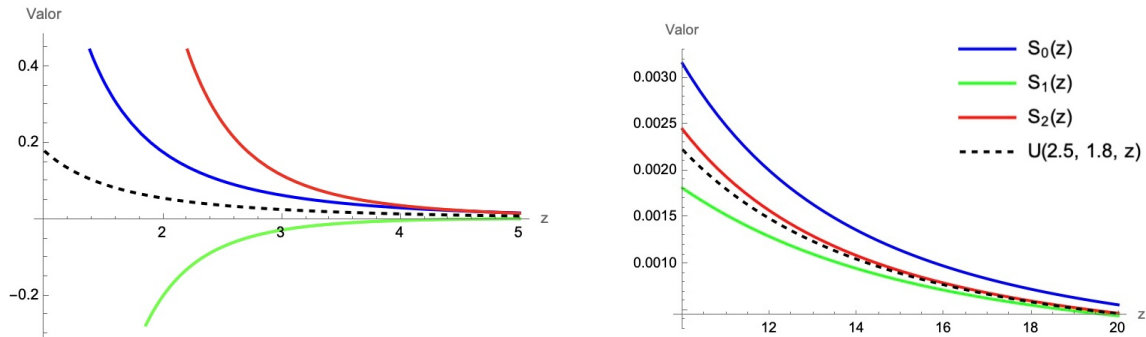


Figura 3.5: Sumas parciales para  $N = 0$ ,  $N = 1$  y  $N = 2$  del desarrollo asintótico fijando  $a = 2.5$  y  $b = 1.8$  frente a la función hipergeométrica confluyente  $U(2.5, 1.8, z)$  en los intervalos  $z \in [1, 5]$  y  $z \in [10, 20]$ .

En el análisis del error en los desarrollos asintóticos anteriores, hemos observado que, para los primeros valores positivos de  $z$  en la recta real, el error disminuye a medida que se añaden términos a la serie.

Este error sigue disminuyendo hasta alcanzar un mínimo en la suma parcial  $S_N(a, b, z)$ , cuando  $N \approx z$ . Sin embargo, en este caso, vemos que  $S_0$  proporciona la mejor aproximación para todo el rango  $z \in [1, 4]$ , donde el error es considerable. A partir de estos valores, la aproximación se vuelve mucho más precisa como podemos observar en las siguientes gráficas sobre el error relativo y el error relativo logarítmico producido por la aproximación.

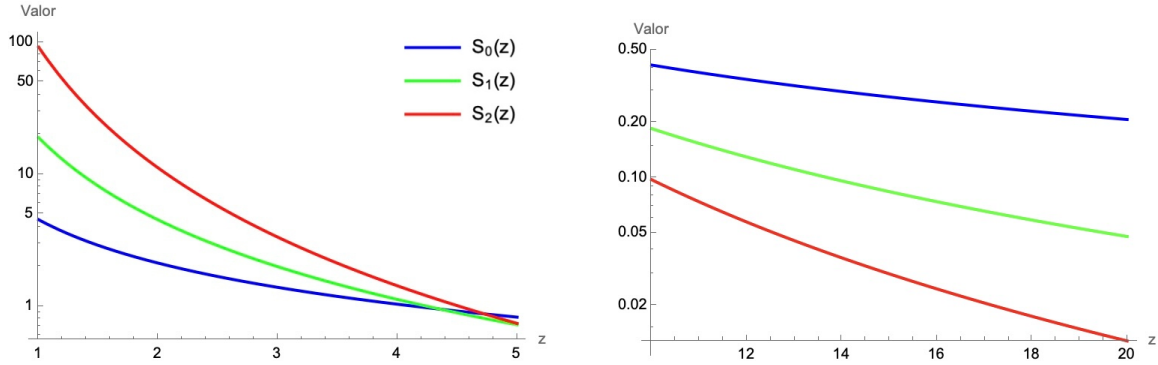


Figura 3.6: Error logarítmico del desarrollo asintótico para las tres primeras sumas parciales en los intervalos  $z \in [1, 5]$  y  $z \in [10, 20]$  y los valores  $a = 2.5$  y  $b = 1.8$ .

Realizamos también el estudio numérico en el que se presentan los errores relativos calculados para valores crecientes de  $z$  en la parte correspondiente a la serie,  $F(a, b, z) = z^a U(a, b, z)$ , demostrando que el error se reduce considerablemente a medida que  $z$  aumenta.

$z / N$	1	2	3	4
10	1.86e-1	9.79e-2	5.99e-2	4.21e-2
100	1.98e-3	1.09e-4	6.99e-6	5.14e-7
1.000	2.01e-5	1.11e-7	7.18e-10	5.32e-12
10.000	2.01e-7	1.11e-10	3.09e-13	2.36e-13

Cuadro 3.3: Tabla con los errores relativos del desarrollo asintótico de la función  $F(2.5, 1.8, z)$  para diferentes valores de  $N$  y  $z$ .

De nuevo, observamos como la cota nos permite obtener el valor óptimo de  $N$  para el truncamiento del desarrollo asintótico una vez fijado el valor de  $z$ .

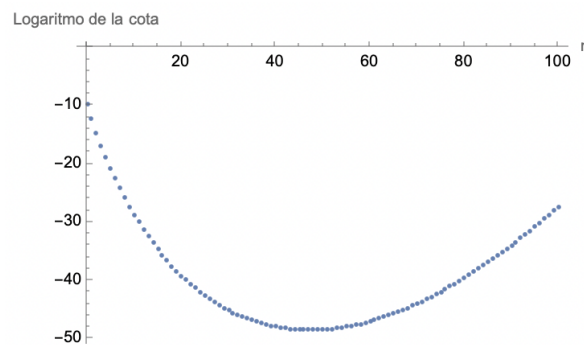


Figura 3.7: Comportamiento del logaritmo de la cota del error de las series parciales  $S_N(a, b, z)$  para  $z = 50$ ,  $N \in [0, 100]$ ,  $a = 2.5$  y  $b = 1.8$ .

Ahora vamos a ilustrar diferentes sumas parciales del desarrollo asintótico para valores de  $z$  ubicados en el rayo  $z = |z|e^{i\theta}$ , con el ángulo  $\theta = \frac{\pi}{3}$  y distintos módulos  $|z|$ . Además, incluiremos los parámetro  $a$

y  $b$  en el plano complejo.

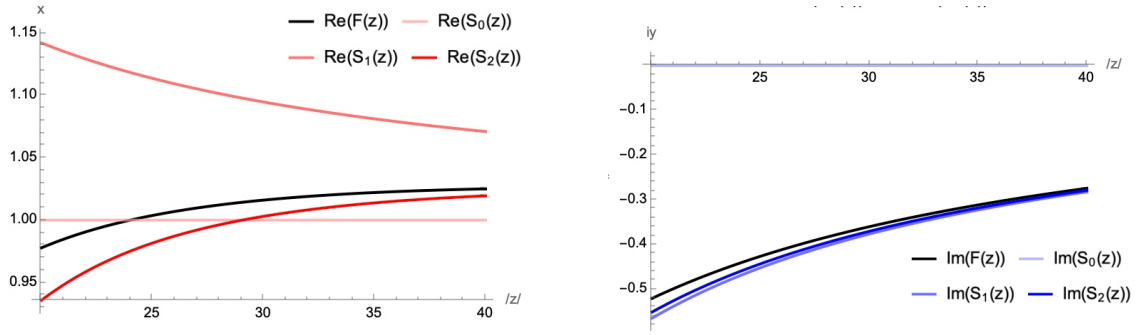


Figura 3.8: Parte real y parte imaginaria de la función  $F(a, b, z)$  y sus aproximaciones asintóticas  $S_N(a, b, z)$  para las tres primeras sumas parciales en el rayo complejo  $z = |z|e^{i\theta}$ , con valores de  $|z| \in [20, 40]$ ,  $\theta = \pi/3$ ,  $a = 5e^{i\pi/3}$  y  $b = 4e^{i\pi/6}$ .

La siguiente gráfica ilustra el error relativo y el error relativo logarítmico producido por las primeras sumas parciales del desarrollo asintótico de la figura 3.8.

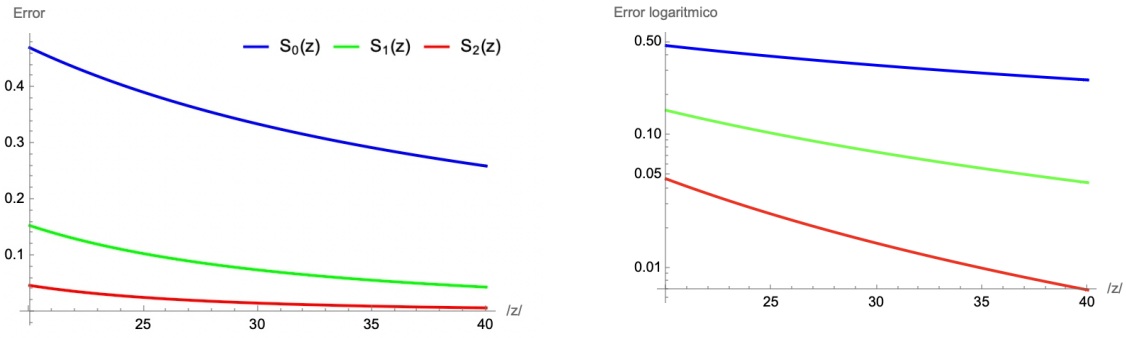


Figura 3.9: Error relativo y error relativo logarítmico de la función  $F(a, b, z)$  y sus aproximaciones asintóticas  $S_N(a, b, z)$  para las tres primeras sumas parciales en el rayo complejo  $z = |z|e^{i\theta}$ , con valores de  $|z| \in [20, 40]$ ,  $\theta = \pi/3$ ,  $a = 5e^{i\pi/3}$  y  $b = 4e^{i\pi/6}$ .

Concluimos con la tabla donde se presentan los errores relativos calculados para valores de  $z$  con un módulo mayor, mostrando como la diferencia entre la función  $F(a, b, z)$  y las sumas parciales disminuye considerablemente conforme el módulo de  $z$  se incrementa.

$ z  / N$	1	2	3	4
10	9.24e-1	6.72e-1	4.91e-1	3.85e-1
100	9.36e-2	6.91e-3	5.18e-4	4.17e-5
1.000	9.36e-3	6.94e-5	5.21e-7	4.21e-9
10.000	9.36e-4	6.94e-9	5.22e-10	4.24e-13

Cuadro 3.4: Tabla con los errores relativos del desarrollo asintótico para diferentes valores de  $N$ ,  $z$ , parámetro  $a = 5e^{i\pi/4}$  y parámetro  $b = 4e^{i\pi/6}$  en el rayo complejo con argumento  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

# Conclusión

A lo largo de este trabajo, el análisis de diferentes desarrollos asintóticos y, en particular, del lema de Watson, ha permitido una comprensión más profunda de esta herramienta matemática que nos permite aproximar funciones complejas. La motivación inicial se basaba en encontrar métodos que nos proporcionaran aproximaciones precisas en situaciones donde las soluciones exactas de este tipo de funciones son inalcanzables o difíciles de obtener. Este enfoque, aplicado a diferentes funciones especiales, me ha permitido observar cómo los desarrollos asintóticos pueden simplificar problemas en diferentes campos sin perder apenas precisión en los resultados. A través de la implementación práctica, he aprendido a manejar y ajustar los términos de las series para optimizar la precisión, reconociendo la importancia de elegir adecuadamente los términos de truncamiento. Los resultados numéricos obtenidos respaldan la teoría, haciendo de la asintótica una herramienta muy poderosa.

A través de la implementación de los métodos en el software *Wolfram Mathematica 14*, he comprendido de manera práctica el comportamiento de los desarrollos asintóticos y sus aplicaciones en problemas complejos. La posibilidad de comprobar visualmente los resultados teóricos y analizar los errores de aproximación me ha permitido no solo validar la teoría, sino también ver cómo varía la precisión de las aproximaciones en diferentes intervalos, tanto para valores reales de  $z$  como para valores en el plano complejo. El enfoque numérico, acompañado de las representaciones gráficas, me ha permitido observar cómo la precisión de los desarrollos asintóticos mejora al tomar términos adicionales de las series y, además, para identificar puntos de truncamiento para mejorar la precisión y ahorrar esfuerzo computacional.





# Bibliografía

- [1] CAMACHO, J., GUIMERÀ, R., and AMARAL, L. A. N., *Analytical solution of a model for complex food webs*. *Phys. Rev.*, E 65 (3), pp. (030901–1)–(030901–4).
- [2] CARSLAW, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*. 3rd edition, Macmillan, London, 1930.
- [3] ERDÉLYI, A., *Asymptotic Expansions*, Dover, New York, 1956.
- [4] GELLER, M. and NG, E. W., *A table of integrals of the exponential integral*, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, 73B (1969), pp. 191–210.
- [5] HOCHSTADT, H., *The Functions of Mathematical Physics*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons, Inc.], New York-London-Sydney, 1971.
- [6] VAN DE HULST, H. C., *Multiple Light Scattering. Vol. 1*, Academic Press, New York, 1980.
- [7] INSTITUTO DE MATEMÁTICAS AVANZADAS, UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA, *Introducción a la aproximación asintótica*, informe técnico, Universidad Pública de Navarra.
- [8] LEBEDEV, N. N., *Special Functions and Their Applications*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [9] NIST DIGITAL LIBRARY OF MATHEMATICAL FUNCTIONS, *NIST DLMF*, <https://dlmf.nist.gov>.
- [10] OLVER, F. W. J., *Asymptotics and special functions*, *AKP Classics*, reprint of the 1974 original [Academic Press, New York], 1997.
- [11] PETROVA, SVETLANA S. AND SOLOV'EV, ALEXANDER D., *The Origin of the Method of Steepest Descent*, *Historia Mathematica*, Vol. 24, 1997, pp. 361–375.
- [12] SHAVITT, I., *The Gaussian Function in Calculations of Statistical Mechanics and Quantum Mechanics*, Vol. 2, pp. 1–45.
- [13] SORNETTE, D., *Multiplicative processes and power laws*. *Phys. Rev.*, E 57 (4), pp. 4811–4813.
- [14] TEMME, N. M., *Asymptotic Methods for Integrals*, World Scientific, Singapore, 2015.
- [15] VILENKIN, N. JA., *Special Functions and the Theory of Group Representations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.
- [16] WASOW, W., *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Wiley, New York, 1965.
- [17] WOLFRAM RESEARCH, INC., *Mathematica, Version 14*, Champaign, IL, 2023.
- [18] WONG, R., *Asymptotic Approximation of Integrals*, Society for industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2001.



# Apéndice I

## Código de Mathematica

En este apéndice se presenta el código de Mathematica utilizado para llevar a cabo los cálculos y análisis numéricos detallados en este trabajo. Se incluyen funciones específicas desarrolladas para modelar la función integral exponencial, la función gamma incompleta superior y la función hipergeométrica confluyente. Además, se representan diferentes intervalos para observar como varía el comportamiento de estas funciones, así como las tablas de errores relativos y absolutos que permiten evaluar la precisión de los desarrollos asintóticos realizados.

### I.1. Función integral exponencial

Esta sección contiene el código correspondiente a la función integral exponencial, que se define y analiza a través de sus propiedades y desarrollos asintóticos, incluyendo tanto el código de las gráficas donde se representan los distintos desarrollos asintóticos comparados con la función original, como el de las tablas que cuantifican el error absoluto y relativo, permitiendo un análisis más detallado de la precisión de las aproximaciones obtenidas.

#### I.1.1. Gráficas

En esta subsección se representan el código de las gráficas tanto de la función integral exponencial como sus desarrollos asintóticos para diferentes valores de  $N$ . Las gráficas permiten observar cómo los desarrollos asintóticos se aproximan a la función en intervalos específicos de  $z$ , lo cual facilita el análisis visual de la precisión obtenida en cada caso. Además, se incluyen los códigos de las representaciones del error en diferentes intervalos y su variación con el desarrollo asintótico de la función.

```
(* Definimos la funcion integral exponencial *)
f[z_] := Integrate[Exp[-t]/t, {t, z, Infinity}]

(* Definimos su desarrollo asintotico *)
F[z_, n_] := Exp[-z]/z * Sum[(-1)^k * Factorial[k] / z^k, {k, 0, n}]

(* Representamos diferentes series parciales del desarrollo frente a la funcion original *)
Desarrollo15 = Plot[
  {f[z], F[z, 0], F[z, 1], F[z, 2]},
  {z, 1, 5},
  PlotStyle -> {Dashed, Blue, Green, Red},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Desarrollo315 = Plot[
  {f[z], F[z, 0], F[z, 1], F[z, 2]},
  {z, 3, 15},
  PlotStyle -> {Dashed, Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Funcion integral exponencial",
```

```

        "Desarrollo asintotico hasta N=0",
        "Desarrollo asintotico hasta N=1",
        "Desarrollo asintotico hasta N=2"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Desarrollo1020 = Plot[
  {f[z], F[z, 0], F[z, 1], F[z, 2]},
  {z, 10, 20},
  PlotStyle -> {Dashed, Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Funcion integral exponencial",
    "Desarrollo asintotico hasta N=0",
    "Desarrollo asintotico hasta N=1",
    "Desarrollo asintotico hasta N=2"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

(* Definimos la funcion del error *)
Error[z_, n_] := Abs[f[z] - F[z, n]]/Abs[f[z]]

(* Representamos el error cometido en diferentes intervalos de z *)
Error15 = Plot[
  {Error[z, 0], Error[z, 1], Error[z, 2], Error[z, 3]},
  {z, 1, 5},
  PlotStyle -> {Dashed, Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=2",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=3"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Error315 = Plot[
  {Error[z, 0], Error[z, 1], Error[z, 2], Error[z, 3]},
  {z, 3, 15},
  PlotStyle -> {Dashed, Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=2",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=3"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Error1020 = Plot[
  {Error[z, 0], Error[z, 1], Error[z, 2], Error[z, 3]},
  {z, 10, 20},
  PlotStyle -> {Dashed, Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=2",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=3"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

(* Hacemos lo mismo para el error logaritmico, que nos permite visualizar mejor
el impacto *)
ErrorLog15 = logPlot[
  {Error[z, 0], Error[z, 1], Error[z, 2], Error[z, 3]},
  {z, 1, 5},
  PlotStyle -> {Dashed, Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=2"},

```

```

        "Error del desarrollo asintotico hasta N=3"},
    AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

ErrorLog315 = logPlot[
    {Error[z, 0], Error[z, 1], Error[z, 2], Error[z, 3]},
    {z, 3, 15},
    PlotStyle -> {Dashed, Blue, Green, Red},
    PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
        "Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
        "Error del desarrollo asintotico hasta N=2",
        "Error del desarrollo asintotico hasta N=3"},
    AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

ErrorLog1020 = logPlot[
    {Error[z, 0], Error[z, 1], Error[z, 2], Error[z, 3]},
    {z, 10, 20},
    PlotStyle -> {Dashed, Blue, Green, Red},
    PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
        "Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
        "Error del desarrollo asintotico hasta N=2",
        "Error del desarrollo asintotico hasta N=3"},
    AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

(* Definimos la cota del error en terminos del parametro n *)
Cota[z_, n_] := Log[n! / z^n]

(* Representamos el valor de la cota fijando z=50 *)
TestData1 = Table[{n, Cota[50, n]}, {n, 0, 100}];

Cota50 = ListPlot[
    {TestData1},
    AxesLabel -> {"n", "Logaritmo de la cota"}
]

(* Definimos z en base a su modulo y su argumento *)
z[r_, theta_] := r * Exp[I * theta]

theta = Pi/4;

(* Parte real: Grafica de la parte real de f(z) y su desarrollo *)
graficoReal = Plot[
    {Re[f[r * Exp[I * theta]]], Re[F[r * Exp[I * theta], 0]], Re[F[r * Exp[I *
        theta], 1]], Re[F[r * Exp[I * theta], 2]]},
    {r, 1, 5},
    PlotStyle -> {
        Black,
        Directive[RGBColor[1, 0.6, 0.6], Opacity[0.7]], (* rojo mas tenue *)
        Directive[RGBColor[1, 0.3, 0.3], Opacity[0.8]], (* rojo intermedio *)
        Directive[Red, Opacity[1]] (* rojo intenso *)
    },
    AxesLabel -> {"r/z", "x"},
    PlotLegends -> Placed[
        {
            "Re(F(z))",
            Row[{Subscript["Re(S", "0"], "(z)"}]},
            Row[{Subscript["Re(S", "1"], "(z)"}]},
            Row[{Subscript["Re(S", "2"], "(z)"}]}
        ],
        Above
    ]
]

```

```

]

(* Lo mismo para la parte imaginaria *)
graficoImaginario = Plot[
  {Im[f[r * Exp[I * theta]]], Im[F[r * Exp[I * theta], 0]], Im[F[r * Exp[I *
    theta], 1]], Im[F[r * Exp[I * theta], 2]]},
  {r, 1, 5},
  PlotStyle -> {
    Black,
    Directive[RGBColor[0.6, 0.6, 1], Opacity[0.7]], (* azul mas tenue *)
    Directive[RGBColor[0.3, 0.3, 1], Opacity[0.8]], (* azul intermedio *)
    Directive[Blue, Opacity[1]] (* azul intenso *)
  },
  AxesLabel -> {"z/", "iy"},
  PlotLegends -> Placed[
  {
    "Im(F(z))",
    Row[{Subscript["Im(S", "0"], "(z)"}]],
    Row[{Subscript["Im(S", "1"], "(z)"}]],
    Row[{Subscript["Im(S", "2"], "(z)"}]]
  },
  Above
]
]

(* Definimos la funcion del error *)
error[z_, n_] := Module[{fValue, approxValue},
  fValue = Abs[f[z]];
  approxValue = Abs[f[z] - F[z, n]];
  If[fValue != 0, approxValue / fValue, Indeterminate]
]

graficoError = Plot[
  {error[r * Exp[I * theta], 0], error[r * Exp[I * theta], 1], error[r * Exp[I *
    theta], 2]},
  {r, 1, 5},
  PlotStyle->{Blue, Green, Red},
  AxesLabel -> {"z/", "Error"},
  PlotLegends -> Placed[
  {
    Row[{Subscript["S", "0"], "(z)"}]],
    Row[{Subscript["S", "1"], "(z)"}]],
    Row[{Subscript["S", "2"], "(z)"}]],
  },
  Above
]
]

graficoError = LogPlot[
  {error[r * Exp[I * theta], 0], error[r * Exp[I * theta], 1], error[r * Exp[I *
    theta], 2]},
  {r, 1, 5},
  PlotStyle->{Blue, Green, Red},
  AxesLabel -> {"z/", "Error logaritmico"},
  PlotLegends -> Placed[
  {
    Row[{Subscript["S", "0"], "(z)"}]],
    Row[{Subscript["S", "1"], "(z)"}]],
    Row[{Subscript["S", "2"], "(z)"}]],
  },
  Above
]
]

```

### I.1.2. Tablas

Aquí se muestran las tablas generadas para cuantificar el error absoluto y el error relativo en función de diferentes valores de  $z$  y  $N$ . Estas tablas ofrecen una perspectiva cuantitativa sobre la precisión de los desarrollos asintóticos al aproximarse a la función integral exponencial, lo cual complementa el análisis gráfico.

```
(* Definimos el desarrollo asintotico de la funcion con precision aumentada en
    cada termino *)
F[z_, n_] := Sum[N[(-1)^k * k! / z^k, 30], {k, 0, n}]

(* Definimos la propia funcion con alta precision y ajustes en el metodo de
    integracion *)
f[z_?NumericQ] := N[z*NIntegrate[Exp[-z*t]/(1 + t), {t, 0, Infinity},
    Method -> "LevinRule", WorkingPrecision -> 30, AccuracyGoal -> 15,
    PrecisionGoal -> 15], 20]

(* Valores de z y encabezados *)
zValues = {10, 100, 1000, 10000, 100000};
zValuesEnunciado = {"z/n", 1, 2, 3, 4};
nValues = {1, 2, 3, 4};

(* Calcula la tabla de errores absolutos y redondea los resultados *)
errorTable = Table[
    N[Abs[f[z] - F[z, n]], 10], (* Redondeo a 10 digitos significativos *)
    {z, zValues}, {n, nValues}
];

(* Organiza la tabla de errores con los encabezados *)
finalTable = Prepend[Table[
    Prepend[errorTable[[i]], zValues[[i]],
    {i, Length[zValues]-1}
], zValuesEnunciado];

(* Crea la cuadrícula con encabezado y bordes *)
errorAbsoluto = Grid[finalTable, Frame -> All]

(* Valores de z y encabezados *)
zValues = {10, 100, 1000, 10000, 100000};
zValuesEnunciado = {"z/n", 1, 2, 3, 4};
nValues = {1, 2, 3, 4};

(* Calcula la tabla de errores absolutos y redondea los resultados *)
errorTable = Table[
    N[Abs[f[z] - F[z, n]]/f[z], 10], (* Redondeo a 10 digitos significativos *)
    {z, zValues}, {n, nValues}
];

(* Organiza la tabla de errores con los encabezados *)
finalTable = Prepend[Table[
    Prepend[errorTable[[i]], zValues[[i]],
    {i, Length[zValues]-1}
], zValuesEnunciado];

(* Crea la cuadrícula con encabezado y bordes *)
errorAbsoluto = Grid[finalTable, Frame -> All]

(* Definimos el desarrollo asintotico de la funcion con precision aumentada en
    cada termino *)
F[z_, n_] := Sum[N[(-1)^k * k! / z^k, 30], {k, 0, n}]

(* Definimos la propia funcion con alta precision y ajustes en el metodo de
    integracion *)
```

```
f[z_?NumericQ] := N[z*NIntegrate[Exp[-z*t]/(1 + t), {t, 0, Infinity},
  Method -> "LevinRule", WorkingPrecision -> 30, AccuracyGoal -> 15,
  PrecisionGoal -> 15], 20]

(* Valores de z en forma polar y encabezados *)
zValues = Table[10^k * Exp[I*Pi/4], {k, 1, 5}]; (* z = 10 e^{i \[Pi]/4}, 100 e^{i \[Pi]/4}, ..., 100000 e^{i \[Pi]/4} *)
zValuesEnunciado = {"z/n", 1, 2, 3, 4};
nValues = {1, 2, 3, 4};

(* Calcula la tabla de errores absolutos y redondea los resultados *)
errorTable = Table[
  N[Abs[f[z] - F[z, n]], 10], (* Redondeo a 10 dígitos significativos *)
  {z, zValues}, {n, nValues}
];

(* Organiza la tabla de errores con los encabezados *)
finalTable = Prepend[Table[
  Prepend[errorTable[[i]], zValues[[i]]],
  {i, Length[zValues]}
], zValuesEnunciado];

(* Crea la cuadrícula con encabezado y bordes *)
errorAbsoluto = Grid[finalTable, Frame -> All]
```

## I.2. Función gamma incompleta superior

En esta sección se presenta el código de los gráficos que muestran la función y sus aproximaciones en diferentes intervalos de  $z$ . Además, se incluyen el código de las tablas de errores absolutos y relativos que permiten evaluar cuantitativamente la precisión del desarrollo asintótico, proporcionando un análisis comparativo sobre la mejora obtenida al incrementar el número de términos en la serie.

### I.2.1. Gráficas

Se muestran los códigos de las gráficas de la función gamma incompleta superior junto con sus desarrollos asintóticos en varios intervalos. Se incluyen los códigos de diferentes representaciones del error para evaluar visualmente la precisión de cada aproximación en función de  $N$  y  $z$ .

```
(* Definimos la funcion gamma incompleta superior *)
f[z_, a_] := NIntegrate[
  t^(a - 1) Exp[-t],
  {t, z, Infinity},
  WorkingPrecision -> 200,
  PrecisionGoal -> 100,
  AccuracyGoal -> 100,
  MaxRecursion -> 100
]

(* Definimos su desarrollo asintotico *)
F[z_, n_, a_] := SetPrecision[
  z^(a - 1) Exp[-z] Sum[Binoimial[a - 1, k] Factorial[k] / z^k, {k, 0, n}],
  200]

(* Representamos diferentes series parciales del desarrollo frente a la funcion original *)
a = Row[{Subscript["S", "0"], "(z)"}];
b = Row[{Subscript["S", "1"], "(z)"}];
c = Row[{Subscript["S", "2"], "(z)"}];
d = Row[{Subscript["S", "3"], "(z)"}];
desarrolloz15gamma=Plot[
```



```

{F[z, 0, 2.5], F[z, 1, 2.5], F[z, 2, 2.5], f[z, 2.5]},
{z, 1, 5},
PlotStyle -> {Blue, Green, Red, {Black, Dashed}},
PlotLegends -> {a, b, c, Style[Gamma[2.5, z], TraditionalForm]},
AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

desarrolloz315gamma=Plot[
{F[z, 0, 2.5], F[z, 1, 2.5], F[z, 2, 2.5], f[z, 2.5]},
{z, 3, 15},
PlotStyle -> {Blue, Green, Red, {Black, Dashed}},
PlotLegends -> {a, b, c, Style[Gamma[2.5, z], TraditionalForm]},
AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

desarrolloz1020gamma = desarrolloz1020gamma = Plot[
{F[z, 0, 2.5], F[z, 1, 2.5], F[z, 2, 2.5], Gamma[2.5, z]},
{z, 10, 20},
PlotStyle -> {Blue, Green, Red, {Black, Dashed}},
PlotLegends -> Placed[{
a, b, c, Style[Gamma[2.5, z], TraditionalForm]
}, Below],
AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

(* Definimos la funcion del error *)
Error[z_, n_, a_] := SetPrecision[
Abs[N[f[z, a], 200] - F[z, n, a]] / Abs[N[f[z, a], 200]],
200
]

(* Representamos el error cometido en diferentes intervalos de z *)
Errorz15gamma=Plot[
{error[z,0,2.5],error[z,1,2.5],error[z,2,2.5]},{z,1,5},
PlotStyle->{Blue, Green, Red},
PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
"Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
"Error del desarrollo asintotico hasta N=2"},
AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Errorz315gamma=Plot[
{error[z,0,2.5],error[z,1,2.5],error[z,2,2.5]},{z,3,15},
PlotStyle->{Blue, Green, Red},
PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
"Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
"Error del desarrollo asintotico hasta N=2"},
AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Errorz1020gamma=Plot[
{error[z,0,2.5],error[z,1,2.5],error[z,2,2.5]},{z,10,20},
PlotStyle->{Blue, Green, Red},
PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
"Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
"Error del desarrollo asintotico hasta N=2"},
AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

(* Hacemos lo mismo para el error logaritmico, que nos permite visualizar mejor
el impacto *)
Errorlogz15gamma=LogPlot[
{error[z,0,2.5],error[z,1,2.5],error[z,2,2.5]},{z,1,5},

```

```

PlotStyle->{Blue, Green, Red},
PlotLegends -> {"Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=0",
               "Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=1",
               "Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=2"},
AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Errorlogz315gamma=LogPlot[
  {error[z,0,2.5],error[z,1,2.5],error[z,2,2.5]},{z,3,15},
  PlotStyle->{Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=0",
                  "Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=1",
                  "Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=2"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Errorlogz1020gamma=LogPlot[
  {error[z,0,2.5],error[z,1,2.5],error[z,2,2.5]},{z,10,20},
  PlotStyle->{Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=0",
                  "Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=1",
                  "Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=2"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

(* Definimos la cota del error en terminos del parametro n *)
Cota[z_, n_, a_] := Log[z^(-a)*Pochhammer[a, n]*Product[Abs[a - k], {k, 1, n}] /
  n!*z^(n)]

(* Representamos el valor de la cota fijando z=50 *)
TestData1 = Table[{n, Cota[50, n, 2.5]}, {n, 0, 100}];

Cota50 = ListPlot[
  {TestData1},
  AxesLabel -> {"n", "Logaritmo de la cota"}
]

Clear[z] (* Limpia cualquier valor o definicion previa de z *)

(* Definimos z diferenciando modulo y argumento *)
z[r_, theta_] := r * Exp[I * theta]

(* Definimos el parametro a como un numero complejo *)
a = 5 Exp[I Pi/4]

theta = Pi/5;

(* Parte real: Grafica de la parte real de f(z) y su desarrollo *)
graficoReal = Plot[
  {Re[f[r * Exp[I * theta],a]], Re[F[r * Exp[I * theta], 0, a]], Re[F[r * Exp[I
    * theta], 1, a]], Re[F[r * Exp[I * theta], 2, a]]},
  {r, 1, 5},
  PlotStyle -> {
    Black,
    Directive[RGBColor[1, 0.6, 0.6], Opacity[0.7]], (* rojo mas tenue *)
    Directive[RGBColor[1, 0.3, 0.3], Opacity[0.8]], (* rojo intermedio *)
    Directive[Red, Opacity[1]] (* rojo intenso *)
  },
  AxesLabel -> {"z/", "x"},
  PlotLegends -> Placed[
  {
    "Re(F(z))",
    Row[{Subscript["Re(S", "0"], "(z)"}],

```

```

    Row[{Subscript["Re(S", "1"], "(z)"}]],
    Row[{Subscript["Re(S", "2"], "(z)"}]]
  },
  Above
]
]

(* Parte imaginaria: Grafica de la parte real de f(z) y su desarrollo *)
graficoImaginario = Plot[
  {Im[f[r * Exp[I * theta], a]], Im[F[r * Exp[I * theta], 0, a]], Im[F[r * Exp[I
    * theta], 1, a]], Im[F[r * Exp[I * theta], 2, a]]},
  {r, 1, 5},
  PlotStyle -> {
    Black,
    Directive[RGBColor[0.6, 0.6, 1], Opacity[0.7]], (* azul mas tenue *)
    Directive[RGBColor[0.3, 0.3, 1], Opacity[0.8]], (* azul intermedio *)
    Directive[Blue, Opacity[1]] (* azul intenso *)
  },
  AxesLabel -> {"z/", "iy"},
  PlotLegends -> Placed[
    {
      "Im(F(z))",
      Row[{Subscript["Im(S", "0"], "(z)"}]],
      Row[{Subscript["Im(S", "1"], "(z)"}]],
      Row[{Subscript["Im(S", "2"], "(z)"}]]
    },
    Above
  ]
]

(* Definimos la funcion del error *)
error[z_, n_] := Module[{fValue, approxValue},
  fValue = Abs[f[z, a]];
  approxValue = Abs[f[z, a] - F[z, n, a]];
  If[fValue != 0, approxValue / fValue, Indeterminate]
]

graficoError = Plot[
  {error[r * Exp[I * theta], 0], error[r * Exp[I * theta], 1], error[r * Exp[I *
    theta], 2]},
  {r, 1, 5},
  PlotStyle->{Blue, Green, Red},
  AxesLabel -> {"z/", "Error"},
  PlotLegends -> Placed[
    {
      Row[{Subscript["S", "0"], "(z)"}]],
      Row[{Subscript["S", "1"], "(z)"}]],
      Row[{Subscript["S", "2"], "(z)"}]],
    },
    Above
  ]
]

graficoError = LogPlot[
  {error[r * Exp[I * theta], 0], error[r * Exp[I * theta], 1], error[r * Exp[I *
    theta], 2]},
  {r, 1, 5},
  PlotStyle->{Blue, Green, Red},
  AxesLabel -> {"z/", "Error logaritmico"},
  PlotLegends -> Placed[
    {
      Row[{Subscript["S", "0"], "(z)"}]],
      Row[{Subscript["S", "1"], "(z)"}]],
    }
  ]
]

```

```

      Row[{Subscript["S", "2"], "(z)"}],
    },
    Above
  ]
]

```

## I.2.2. Tablas

El código de esta subsección presenta las tablas del error absoluto y relativo en la aproximación de la función gamma incompleta superior, permitiendo observar cómo la precisión mejora o se estabiliza según los términos del desarrollo asintótico y los valores de  $z$ .

```

(* Definicion de las funcion gamma incompleta superior con mayor precision *)
f[z_, a_] := NIntegrate[(1 + t)^(a - 1) * Exp[-z t], {t, 0, Infinity},
  WorkingPrecision -> 70, PrecisionGoal -> 30]

(* Incrementamos el numero de terminos maximos en el desarrollo asintotico de la
  funcion gamma superior incompleta para grandes valores de z *)
F[z_, n_, a_] := SetPrecision[z^(-1) * Sum[Binomial[a - 1, k] * Factorial[k] / z
  ^k, {k, 0, n}], 70]

(* Valores de z y encabezados *)
zValues = {10, 100, 1000, 10000, 100000};
zValuesEnunciado = {"z/n", 1, 2, 3, 4, 5}; (* Aumentamos el rango de n para
  verificar *)
nValues = {1, 2, 3, 4, 5};

(* Calcula la tabla de errores absolutos con mayor precision y mas terminos *)
ErrorTable = Table[
  Abs[f[z, 2.5] - F[z, n, 2.5]],
  {z, zValues}, {n, nValues}
];

(* Organiza la tabla de errores con los encabezados *)
FinalTable = Prepend[Table[
  Prepend[ErrorTable[[i]], zValues[[i]]],
  {i, Length[zValues]}
], zValuesEnunciado];

(* Crea la cuadrícula con encabezado y bordes *)
ErrorAbsoluto = Grid[FinalTable, Frame -> All]

(* Definimos la tabla fijando el parametro a y los valores de z complejos *)

(* Definicion de las funcion gamma incompleta superior con mayor precision *)
f[z_, a_] := NIntegrate[(1 + t)^(a - 1) * Exp[-z t], {t, 0, Infinity},
  WorkingPrecision -> 70, PrecisionGoal -> 30]

(* Incrementamos el numero de terminos maximos en el desarrollo asintotico de la
  funcion gamma superior incompleta para grandes valores de z *)
F[z_, n_, a_] := SetPrecision[z^(-1) * Sum[Binomial[a - 1, k] * Factorial[k] / z
  ^k, {k, 0, n}], 70]

Clear[z] (* Limpia cualquier valor o definicion previa de z *)

z[r_, theta_] := r * Exp[I * theta]
theta = Pi/5;
a = 5 Exp[I Pi/4]

(* Valores de z y encabezados *)
zValues = z[r, theta], {r, {10, 100, 1000, 10000, 100000}}
zValuesEnunciado = {"z/n", 1, 2, 3, 4, 5}; (* Aumentamos el rango de n para
  verificar *)

```

```

nValues = {1, 2, 3, 4, 5};

(* Calcula la tabla de errores absolutos con mayor precision y mas terminos *)
errorTable = Table[
  Abs[f[z, a] - F[z, n, a]]/f[z, a],
  {z, zValues}, {n, nValues}
];

(* Organiza la tabla de errores con los encabezados *)
finalTable = Prepend[Table[
  Prepend[errorTable[[i]], zValues[[i]],
  {i, Length[zValues]}
], zValuesEnunciado];

(* Crea la cuadrícula con encabezado y bordes *)
errorAbsoluto = Grid[finalTable, Frame -> All]

```

### I.3. Función hipergeométrica confluyente

A continuación, se introduce el código de la función hipergeométrica confluyente, que se aproxima mediante un desarrollo asintótico para valores elevados de  $z$ .

#### I.3.1. Gráficas

Esta subsección contiene el código de los gráficos de la función hipergeométrica confluyente y sus desarrollos asintóticos, comparándolos en intervalos específicos de  $z$ . También se incluyen los códigos de las representaciones gráficas del error, tanto en escala lineal como logarítmica, para visualizar mejor el impacto de los términos en el desarrollo.

```

(* Definimos la funcion hipergeometrica confluyente *)
f[a_, b_, z_] := (1/Gamma[a]) z^(a) NIntegrate[Exp[-z*t] t^(a - 1) (1 + t)^(b - a - 1), {t, 0, Infinity}]

(* Definimos su desarrollo asintotico *)
F[a_, b_, z_, n_] :=
  Sum[(-1)^k Pochhammer[a, k] Pochhammer[1 + a - b, k] /
  k! z^(-k), {k, 0, n}]

(* Representamos diferentes series parciales del desarrollo frente a la funcion original *)
Desarrolloz15kummer=Plot[
  {F[2.5, 1.8, z, n], F[2.5, 1.8, z, n], F[2.5, 1.8, z, n], f[2.5, 1.8, z]},
  {z, 1, 5},
  PlotStyle -> {Blue, Green, Red, {Black, Dashed}},
  PlotLegends -> {a, b, c, U(2.5, 1.8, z)},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

desarrolloz315kummer=Plot[
  {F[2.5, 1.8, z, n], F[2.5, 1.8, z, n], F[2.5, 1.8, z, n], f[2.5, 1.8, z]},
  {z, 3, 15},
  PlotStyle -> {Blue, Green, Red, {Black, Dashed}},
  PlotLegends -> {a, b, c, U(2.5, 1.8, z)},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Desarrolloz1020kummer=Plot[
  {F[2.5, 1.8, z, n], F[2.5, 1.8, z, n], F[2.5, 1.8, z, n], f[2.5, 1.8, z]},
  {z, 10, 20},

```

```

PlotStyle -> {Blue, Green, Red, {Black, Dashed}},
PlotLegends -> {a, b, c, U(2.5, 1.8, z)},
AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

(* Definimos la funcion del error *)
Error[z_, n_, a_, b_] := SetPrecision[
  Abs[SetPrecision[f[a, b, z], 200] - SetPrecision[F[a, b, z, n], 200]],
  200
]

(* Representamos el error cometido en diferentes intervalos de z *)
Errorz15kummer=Plot[
  {error[z, 0, 2.5, 1.8],error[z, 1, 2.5, 1.8],error[z, 2, 2.5, 1.8]},{z,1,5},
  PlotStyle->{Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=2"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Errorz315kummer=Plot[
  {error[z, 0, 2.5, 1.8],error[z, 1, 2.5, 1.8],error[z, 2, 2.5, 1.8]},{z
    ,3,15},
  PlotStyle->{Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=2"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Errorz15kummer=Plot[
  {error[z, 0, 2.5, 1.8],error[z, 1, 2.5, 1.8],error[z, 2, 2.5, 1.8]},{z
    ,10,20},
  PlotStyle->{Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Error del desarrollo asintotico hasta N=0",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=1",
    "Error del desarrollo asintotico hasta N=2"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

(* Hacemos lo mismo para el error logaritmico, que nos permite visualizar mejor
el impacto *)
Errorlogz15kummer = LogPlot[
  {error[z, 0, 2.5, 1.8],error[z, 1, 2.5, 1.8],error[z, 2, 2.5, 1.8]},{z,1,5},
  PlotStyle->{Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=0",
    "Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=1",
    "Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=2"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Errorlogz315kummer = LogPlot[
  {error[z, 0, 2.5, 1.8],error[z, 1, 2.5, 1.8],error[z, 2, 2.5, 1.8]},{z
    ,3,15},
  PlotStyle->{Blue, Green, Red},
  PlotLegends -> {"Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=0",
    "Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=1",
    "Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=2"},
  AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

Errorlogz1020kummer = LogPlot[

```

```

{error[z, 0, 2.5, 1.8], error[z, 1, 2.5, 1.8], error[z, 2, 2.5, 1.8]}, {z
, 10, 20},
PlotStyle -> {Blue, Green, Red},
PlotLegends -> {"Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=0",
"Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=1",
"Error logaritmico del desarrollo asintotico hasta N=2"},
AxesLabel -> {"z", "Valor"}
]

(* Definimos la cota del error en terminos del parametro n *)
Cota[z_, n_, a_, b_] := Log[(z^(-a) * Pochhammer[a, n] * Product[Abs[b - a - k],
{k, 1, n}]) / (n! * z^n)]

(* Representamos el valor de la cota fijando z=50 *)
TestData1 = Table[{n, Cota[50, n]}, {n, 0, 100}];

Cota50 = ListPlot[
{TestData1},
AxesLabel -> {"n", "Logaritmo de la cota"}
]

Clean[z]

(* Definimos z para el plano complejo, su argumento y modulo *)
z[r_, theta_] := r * Exp[I * theta]

theta = Pi/4;
a = 5 Exp[I Pi/3] (* Modulo = 5, Angulo = \[Pi]/3 *)
b = 4 Exp[I Pi/6] (* Modulo = 4, Angulo = \[Pi]/6 *)

(* Parte real: Grafica de la parte real de f(z) y su desarrollo *)
graficoReal = Plot[
{Re[f[a,b,r * Exp[I * theta]]], Re[F[a,b,r * Exp[I * theta], 0]], Re[F[a,b,r *
Exp[I * theta], 1]], Re[F[a,b,r * Exp[I * theta], 2]]},
{r, 1, 5},
PlotStyle -> {
Black,
Directive[RGBColor[1, 0.6, 0.6], Opacity[0.7]], (* rojo mas tenue *)
Directive[RGBColor[1, 0.3, 0.3], Opacity[0.8]], (* rojo intermedio *)
Directive[Red, Opacity[1]] (* rojo intenso *)
},
AxesLabel -> {"z", "x"},
PlotLegends -> Placed[
{
"Re(F(z))",
Row[{Subscript["Re(S", "0"], "(z)"}]},
Row[{Subscript["Re(S", "1"], "(z)"}]},
Row[{Subscript["Re(S", "2"], "(z)"}]}
},
Above
]
]

(* Parte imaginaria: Grafica de la parte real de f(z) y su desarrollo *)
graficoImaginario = Plot[
{Im[f[a,b,r * Exp[I * theta]]], Im[F[a,b,r * Exp[I * theta], 0]], Im[F[a,b,r *
Exp[I * theta], 1]], Im[F[a,b,r * Exp[I * theta], 2]]},
{r, 1, 5},
PlotStyle -> {
Black,
Directive[RGBColor[0.6, 0.6, 1], Opacity[0.7]], (* azul mas tenue *)
Directive[RGBColor[0.3, 0.3, 1], Opacity[0.8]], (* azul intermedio *)
Directive[Blue, Opacity[1]] (* azul intenso *)
}
]

```

```

},
AxesLabel -> {"z/", "iy"},
PlotLegends -> Placed[
{
  "Im(F(z))",
  Row[{Subscript["Im(S", "0"], "(z)"}]],
  Row[{Subscript["Im(S", "1"], "(z)"}]],
  Row[{Subscript["Im(S", "2"], "(z)"}]]
},
Above
]
]

(* Grafico del error producido por la aproximacion *)
graficoError = Plot[
{error[r * Exp[I * theta], 0], error[r * Exp[I * theta], 1], error[r * Exp[I *
theta], 2]},
{r, 1, 5},
PlotStyle->{Blue, Green, Red},
AxesLabel -> {"z/", "Error"},
PlotLegends -> Placed[
{
  Row[{Subscript["S", "0"], "(z)"}]],
  Row[{Subscript["S", "1"], "(z)"}]],
  Row[{Subscript["S", "2"], "(z)"}]],
},
Above
]
]

(* Grafico del error logaritmico *)
graficoError = LogPlot[
{error[r * Exp[I * theta], 0], error[r * Exp[I * theta], 1], error[r * Exp[I *
theta], 2]},
{r, 1, 5},
PlotStyle->{Blue, Green, Red},
AxesLabel -> {"z/", "Error logaritmico"},
PlotLegends -> Placed[
{
  Row[{Subscript["S", "0"], "(z)"}]],
  Row[{Subscript["S", "1"], "(z)"}]],
  Row[{Subscript["S", "2"], "(z)"}]],
},
Above
]
]

```

### I.3.2. Tablas

El código de las tablas aquí presenta los errores absolutos calculados para distintos valores de  $z$  y  $N$ , proporcionando una evaluación cuantitativa de la precisión en las aproximaciones de la función hipergeométrica confluyente.

```

(* Definimos el desarrollo asintotico de la funcion hipergeometrica confluyente *)
F[a_, b_, z_, n_] :=
Sum[(-1)^k Pochhammer[a, k] Pochhammer[1 + a - b, k] /
k! z^(-k), {k, 0, n}]

(* Definimos la propia funcion hipergeometrica confluyente *)
f[a_, b_, z_] := (1/Gamma[a]) z^(a) NIntegrate[Exp[-z*t] t^(a - 1) (1 + t)^(b - a
- 1), {t, 0, Infinity}]

```



```

]

(* Valores de z y encabezados *)
zValues = {10, 100, 1000, 10000, 100000};
zValuesEnunciado = {"z/n", 1, 2, 3, 4, 5}; (* Aumentamos el rango de n para
verificar *)
nValues = {0, 1, 2, 3, 4};

(* Calcula la tabla de errores absolutos con mayor precision y mas terminos *)
ErrorTable = Table[
  Abs[f[2.5, 1.8, z] - F[2.5, 1.8, z, n]],
  {z, zValues}, {n, nValues}
];

(* Organiza la tabla de errores con los encabezados *)
FinalTable = Prepend[Table[
  Prepend[ErrorTable[[i]], zValues[[i]]],
  {i, Length[zValues]}
], zValuesEnunciado];

(* Crea la cuadrícula con encabezado y bordes *)
ErrorAbsoluto = Grid[FinalTable, Frame -> All]

(* Definimos el desarrollo asintotico de la funcion hipergeometrica confluyente
*)
F[a_, b_, z_, n_] :=
  Sum[(-1)^k Pochhammer[a, k] Pochhammer[1 + a - b, k] /
    k! z^(-k), {k, 0, n}]

(* Definimos la propia funcion hipergeometrica confluyente *)
f[a_, b_, z_] := (1/Gamma[a]) z^(a) NIntegrate[Exp[-z*t] t^(a - 1) (1 + t)^(b - a
- 1), {t, 0, Infinity}]

Clear[z] (* Limpia cualquier valor o definicion previa de z *)

(* Definimos la funcion z en terminos de r y theta *)
z[r_, theta_] := r * Exp[I * theta]

(* Angulo constante en el rayo de pi/5 *)
theta = Pi/3;

(* Definimos a como un numero complejo *)
a = 5 Exp[I Pi/4];
b = 4 Exp[I Pi/6] (* Modulo = 4, Angulo = \[Pi]/6 *)

(* Valores de z con modulos especificos y el angulo theta *)
zValues = Table[z[r, theta], {r, {10, 100, 1000, 10000, 100000}}];

(* Encabezados para la tabla de salida *)
zValuesEnunciado = {"z/n", 1, 2, 3, 4, 5}; (* Encabezados de n *)
nValues = {0, 1, 2, 3, 4}; (* Valores de n *)

(* Calcula la tabla de errores en modulo *)
errorTable = Table[
  Abs[f[a, b, z] - F[a, b, z, n]]/ Abs[f[a, b, z]], (* Error en modulo *)
  {z, zValues}, {n, nValues}
];

(* Organiza la tabla de errores con los encabezados *)
finalTable = Prepend[Table[
  Prepend[errorTable[[i]], zValues[[i]]],
  {i, Length[zValues]}
], zValuesEnunciado];

```

```
(* Crea la cuadrícula con encabezado y bordes *)  
errorAbsoluto = Grid[finalTable, Frame -> All]
```