Modelos matemáticos en subastas

Cristina Padilla Apuntate
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Francisco Javier López
11 de septiembre de 2024

Abstract

Auctions are a widespread method of buying and selling any object. There are a wide variety of auctions, from face to face to online auctions.

Auctions are commonly known as a mechanism with many rules in order to decide the price and the buyer of any good, through the bids of the participants.

Auction theory is an applied field of economics, which investigates the actions of the participants as well as the actions of the seller. The equilibrium strategies of the bidders and the profit of the seller in each situation are the main issues studied.

In this project, we study the mathematical theory that characterizes four types of auctions. Moreover, we also study a new possible type of auction, giving some results with their corresponding proofs.

In chapter 1, we introduce the main concepts of auctions, such as the types we are going to study, the equivalences that exist between them, two different ways in which auctions can be carried out (valuations). In addition, we also give a brief explanation of two possible situations in auctions, one in which the seller has the right to set a minimum price for the object and another in which bidders break the rules and cooperate with each other.

Moving on to Chapter 2, we focus on one of the ways in which auctions can be carried out. We study the equilibrium strategies of the different auctions. Moreover, we describe a new type of auction and give a practical example of the profit that the seller obtains in each type of auction, comparing its expected values and variances. In addition, we give the proof of a really important theorem. Finally, a minimum price can be set by the seller and bidders can cooperate by breaking rules so we study the effects of both situations.

Chapter 3 focuses on the study of auctions but changing two features. The first section concerns the change in the attitude of bidders towards risk. We compare the effects of this new situation on the expected profit in two auctions. In the following section of the chapter, we study the equilibrium strategies of two auctions but when bidders do not know exactly the value of the object.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Según el diccionario del español jurídico de la RAE, una subasta es la venta de un bien a quien ofrezca el mejor precio entre los licitadores que concurran.

Desde la antigüedad se han utilizado las subastas como medio para vender una gran cantidad de objetos, desde antigüedades, joyas, vehículos, hasta pisos. Un uso también muy importante de estas es transferir bienes públicos a manos privadas.

Además, en estas últimas décadas ha crecido mucho el número de subastas a través de Internet. En este trabajo, vamos a estudiar por qué son tan importantes las subastas hoy en día, además de las mejores estrategias para los postores y para los vendedores.

1.1. Subastas comunes

Nos vamos a centrar principalmente en cuatro tipos de subastas; dos abiertas, como son la inglesa y la holandesa; y dos cerradas, la de oferta sellada al primer precio y la de oferta sellada al segundo precio, también llamada de Vickrey. En las abiertas, cada postor puede observar el comportamiento del resto de postores, mientras que en las cerradas no pueden observar ese comportamiento.

La inglesa o de oferta abierta ascendente es la más común y consiste en que los postores van aumentando el precio ofrecido, hasta que solo queda un postor dispuesto a pagar el precio determinado, por lo que se le adjudica a este el objeto al precio final.

La holandesa o de oferta abierta descendente consiste en que el vendedor fija un precio, normalmente bastante alto, y este precio va descendiendo hasta que aparece un postor dispuesto a pagarlo, así se le adjudica el objeto al precio final.

La sellada al primer precio consiste en que los postores ofrecen un único precio en un sobre cerrado, ganando el postor con precio más alto y pagando su propia oferta.

Por último, la de Vickrey consiste en el mismo formato que la anterior, pero ahora la persona que gana, en lugar de pagar su propia oferta, paga la del siguiente más alto. Su nombre se debe a William Vickrey, ya que este fue el primero en describir este tipo de subasta en la Universidad de Columbia en 1961, aunque había sido utilizada por coleccionistas de sellos desde 1893.

Cabe observar que la holandesa y la de primer precio son equivalentes, ya que en ambas el comprador elige su puja sin tener información útil del resto de postores y, en caso de ganar, en ambas se paga una cantidad igual a la propia oferta. La inglesa, aunque es diferente al resto tiene similitud con la de Vickrey. Más adelante estudiaremos esta similitud en profundidad.

1.2. Otras subastas

Existen una gran variedad de subastas. Hay subastas holandesas-inglesas híbridas, en las que el precio del objeto va bajando hasta que hay un postor interesado y luego los demás postores pueden superar ese precio. También, subastas en las que gana la persona que haya hecho una mayor oferta antes de un determinado día y hora. Subastas que duran un tiempo aleatorio, por ejemplo, hasta que se consume una vela.

Un tipo de subasta que también vamos a estudiar es al que hemos llamado *mixtura*, ya que es una mixtura entre la sellada al primer precio y la de Vickrey. En esta subasta, los participantes ofrecen un único precio y gana el postor con la oferta más alta, pero paga una combinación lineal convexa entre su oferta y la segunda oferta más alta.

1.3. Valoraciones

Un motivo por el que se realizan subastas es porque hay productos que no tienen una valoración única y, por tanto, un vendedor puede no tener idea sobre lo que los compradores estarían dispuestos a pagar por determinados objetos. Esta falta de información es una característica muy relevante de las subastas.

Se llama valoración al valor que para un postor tiene el objeto en venta en el momento de la subasta. Se pueden dar dos situaciones. En la primera, el valor que el postor asigna al objeto no cambia aunque el postor conociera las valoraciones que hacen los otros postores. Esta situación se denomina de "valoraciones privadas". Este tipo es más recomendable cuando el valor que cada postor asigna al objeto se basa en su propio consumo o uso.

La otra situación ocurre cuando el valor que el postor otorga al objeto cambia en función de la información que recibe de los otros postores. La forma de modelar esta situación es decir que el objeto tiene un valor común para todos los postores pero es deconocido por ellos y cada uno tiene una estimación propia de ese valor, que puede modificarse al conocer las estimaciones de otros postores. En este caso se habla de "valoraciones comunes". Este tipo es adecuado para situaciones en las que el objeto puede ser revendido tras la subasta.

1.4. Precios de reserva y colusión

Los vendedores pueden también tener un valor para el objeto que está siendo subastado. Así pues, tienen el derecho de no vender el objeto por un precio menor a una cierta cantidad $r > 0$, llamada *precio de reserva*. De esta forma, evitan que el objeto pueda ser vendido por una cantidad que ellos consideran demasiado baja.

Otra situación importante a considerar es la *colusión*, que consiste en que un grupo de postores cooperan en conjunto para obtener beneficios en la subasta. Esta situación es bastante común en las subastas y reduce los beneficios del vendedor. Una forma que tiene este de contrarrestar esa pérdida es estableciendo precios de reserva.

En el trabajo estudiaremos el efecto que tienen ambas situaciones en la ganancia esperada por el vendedor y el precio de reserva óptimo para maximizar el beneficio esperado por el vendedor.

1.5. Conceptos previos

Matemáticamente hablando, las subastas se consideran parte de la teoría de juegos. Un juego (con información completa) está formado por:

- Un conjunto de n jugadores.
- Para cada jugador $i \in N = \{1, \dots, n\}$, un conjunto no vacío de acciones A_i.
- Para cada jugador $i \in N$, una función de beneficio $u_i : A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Un *equilibrio de Nash* de un juego es un resultado del juego en el que ningún jugador se arrepiente de su decisión, dado lo que el resto de jugadores han hecho. Matemáticamente, podemos definirlo como un vector $\mathbf{a}^* \in A_1 \times \cdots \times A_n$ de acciones tal que para todo i y para todo $a_i \in A_i$,

$$u_i(\mathbf{a}^*) \geq u_i(a_i, \mathbf{a}^*_{-i}),$$

donde $(a_i, \mathbf{a}^*_{-i})$ representa el vector de acciones tales que todas son iguales a la de $\mathbf{a}^*$, excepto la del jugador i, que es igual a a_i.

En los juegos de información completa se supone que cada jugador tiene toda la información acerca de sus oponentes, en particular, su función de beneficio. En las subastas esto no ocurre porque los jugadores no tienen toda la información (no conocen los valores de los otros jugadores). Así, las subastas se consideran un juego con información incompleta. Formalmente, un juego de información incompleta consiste en:

- Un conjunto de n jugadores, en este caso los compradores.
- Para cada jugador $i \in N$, un conjunto no vacío de acciones A_i, en esta situación estas acciones son las ofertas de los compradores.
- Para cada jugador $i \in N$, un conjunto de señales $\mathcal{X}_i$. En el caso de las valoraciones privadas $\mathcal{X}_i$ es el valor del postor i; en las valoraciones comunes son las señales que poseen como información privada los postores.
- Para cada jugador $i \in N$, una función de beneficio $u_i : A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Una función de distribución F sobre el conjunto producto de señales $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$.

Definición 1. Definimos una estrategia para el jugador i como una función $\beta_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow A_i$ de clase C^1 y estrictamente creciente, que lleva señales a acciones, en nuestro caso, a ofertas.

Vamos a dar también la definición de estrategia débilmente dominante, que será de gran ayuda posteriormente.

Definición 2. Se dice que una estrategia β_i domina débilmente a β_i' si para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ y para todo $\mathbf{a}_{-i}$,

$$u_i(\beta_i(x_i), \mathbf{a}_{-i}, \mathbf{x}) \geq u_i(\beta_i'(x_i), \mathbf{a}_{-i}, \mathbf{x}),$$

con desigualdad estricta para algún $\mathbf{x}$ y $\mathbf{a}_{-i}$. La estrategia β_i es débilmente dominante si domina débilmente a cualquier otra estrategia β_i'. Es decir, una estrategia es *débilmente dominante* si al elegir esa estrategia obtenemos un resultado por lo menos tan bueno como al elegir otra estrategia, sin importar lo que el resto de jugadores hagan. Además, existen al menos un conjunto de acciones que realizan los oponentes para las que esa estrategia da un mejor resultado que el resto. Además, si cada jugador tiene una estrategia débilmente dominante β_i^*, entonces diremos que $\boldsymbol{\beta^*}=(\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ es un equilibrio (débilmente) dominante.

El concepto de equilibrio dominante es muy fuerte porque la desigualdad ha de darse para cualquier valor $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ y para cualquier $\mathbf{a}_{-i}$. Un concepto más débil es el equilibrio bayesiano de Nash, que es el que usaremos a lo largo del trabajo.

Definición 3. Un *equilibrio bayesiano de Nash* de un juego de información incompleta es un vector de estrategias $\boldsymbol{\beta^*}$ tal que para todo i, para todo $x_i \in \mathcal{X}_i$ y para todo $a_i \in A_i$,

$$E\left[u_i(\boldsymbol{\beta^*}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) | \mathcal{X}_i = x_i\right] \geq E\left[u_i(a_i, \boldsymbol{\beta^*}_{-i}(\mathbf{X}_{-i}), \mathbf{X}) | \mathcal{X}_i = x_i\right]$$

Es decir, un equilibrio bayesiano de Nash se define como una estrategia que maximiza el beneficio esperado para cada jugador, dados sus conocimientos y dadas las estrategias tomadas por el resto de jugadores. Esto es, $\boldsymbol{\beta}$ es un equilibrio bayesiano de Nash si y solo si para cada jugador i, dejando las estrategias del resto de jugadores fijas, la estrategia β_i maximiza el beneficio esperado del jugador i, dados sus conocimientos. Un equilibrio bayesiano de Nash es *simétrico* si $\beta_i = \beta_j$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Un análisis más detallado de los asuntos que vamos a tratar en el trabajo y con más información puede encontrarse fundamentalmente en [1], aunque también se han consultado y utilizado en distintas partes del trabajo [2], [3] y [4].

Capítulo 2

Valoraciones privadas

En este capítulo vamos a analizar la situación en la que las valoraciones son privadas, es decir, cada postor asigna un valor al producto y toma la decisión de pujar en función de ese valor.

En el apartado 1.1 de la Introducción hemos explicado que la subasta holandesa y la de oferta sellada al primer precio son equivalentes. Cuando las valoraciones son privadas, la inglesa y la sellada al segundo precio también lo son. Por tanto, para este capítulo es suficiente considerar las dos subastas de oferta sellada.

Una comparación superficial puede sugerir que el vendedor conseguiría más dinero por el objeto si llevase a cabo la subasta al primer precio que con la de segundo precio, ya que en la primera le pagan la oferta más grande y en la otra, la segunda más grande. En esta parte del trabajo, vamos a estudiar estrategias de equilibrio para los postores y las ganancias de los vendedores con los distintos formatos de subastas.

En primer lugar analizaremos las subastas como juegos de información completa, para más adelante pasar a la situación más realista en la que se consideran como juegos de información incompleta.

Para este capítulo, además de [1], también ha servido de gran ayuda [3].

2.1. Equilibrios de Nash de las subastas de oferta sellada

En esta sección analizaremos las subastas cerradas como juegos de información completa. Es decir, buscamos equilibrios de Nash, que son las estrategias en las que ningún postor puede aumentar su beneficio dado lo que el resto han ofertado. Si bien esta situación no es realista, nos ayuda a entender mejor las distintas estrategias. En la siguiente sección estudiaremos el caso de información incompleta.

Para el desarrollo de esta sección, he utilizado como referencia [4], donde se puede encontrar una mayor explicación sobre estos equilibrios. Vamos a empezar estudiando los equilibrios de Nash de la subasta de Vickrey.

2.1.1. Subasta de Vickrey

Empezamos desarrollando la forma que tiene la función de beneficio u_i para cada comprador. Considerando que cada postor oferta una cantidad b_i tenemos,

$$u_i(b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} x_i - \max\limits_{j \neq i} b_j & \text{si } b_i > \max\limits_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{si } b_i < \max\limits_{j \neq i} b_j \end{cases} \tag{2.1}$$

Hemos escrito la función de beneficio suponiendo que no hay empates en las ofertas; pero si lo hubiera en la puja más alta, el objeto se asigna a la persona que lo valora más.

Siendo $(x_1, \dots, x_n)$ los valores de los postores, supondremos $x_1 > \dots > x_n$. Este tipo de subasta tiene varios equilibrios de Nash.

- Un equilibrio es
$$(b_1, \dots, b_n) = (x_1, \dots, x_n),$$
es decir, las pujas de los postores son sus propias valoraciones. Como consideramos $x_1 > \dots > x_n$, el jugador 1 obtiene el objeto al precio x_2, así el beneficio de este es $x_1 - x_2 > 0$ y el beneficio de cualquier otro jugador es 0.

  Si el comprador 1 cambiase su apuesta a un $b_1' \geq x_2$, el resultado sería exactamente el mismo. Si cambiase su oferta a $b_1' < x_2$, entonces perdería la subasta y tendría un beneficio de 0.

  Si cualquier otro jugador i bajase su apuesta o la aumentase hasta un precio como mucho b_1, entonces el jugador seguiría perdiendo. Si aumentase la oferta a un $b_i' > x_1$, entonces ganaría el objeto pero obtendría un beneficio de $x_i - x_1 < 0$. Por lo que ningún jugador se arrepiente de su decisión, al no obtener mayor beneficio de ninguna otra forma.

- Otro equilibrio es
$$(b_1, \dots, b_n) = (x_1, 0, \dots, 0).$$
Aquí, el jugador 1 obtiene el objeto de manera trivial y paga la segunda oferta más alta, es decir, 0. Por tanto, obtiene un beneficio de $x_1 - 0 = x_1$. Ningún cambio del jugador 1 modifica su beneficio. Si cualquier otro jugador aumenta su oferta a $b_i' \leq x_1$, entonces obtendría el mismo beneficio. Si $b_i' > x_1$ ganaría el objeto, pero obtendría un beneficio negativo $x_i - x_1 < 0.$.

- Además, también es un equilibrio
$$(b_1, \dots, b_n) = (x_2, x_1, 0, \dots, 0),$$
aquí el jugador 2 obtiene el objeto al precio x_2 y todos los jugadores, incluyendo al jugador 2, tienen un beneficio de 0. Es un equilibrio porque si el jugador 1 aumentase su apuesta hasta x_1 o más ganaría, pero obtendría un beneficio de 0, ya que pagaría la oferta del jugador 2, x_1. Cualquier otro cambio, no afectaría el resultado.

  Si el jugador 2 cambiase su apuesta a otra mayor que x_2, el resultado no cambia. Si la cambia a x_2 o menos, perdería y su beneficio seguiría siendo de 0.

  Si cualquier otro jugador aumentase su oferta como mucho a x_1, el resultado no cambia. Si lo aumentan sobre x_1, entonces ganarían pero pagando el precio x_1 (la oferta del jugador 2), obteniendo un beneficio negativo.

Hemos visto tres equilibrios de la subasta de Vickrey. En el último equilibrio, la oferta del jugador 2 excede su valoración, $b_2 = x_1 > x_2$. Además, si el jugador 1 aumentase su oferta hasta algún valor inferior a x_1, el beneficio del jugador 2 sería negativo, obtendría el objeto a un precio superior a su valoración. Sin embargo, esta propiedad no afecta a que sea un equilibrio de Nash. Pero sugiere que ese equilibrio es menos recomendable que el primero, en el que cada jugador apuesta su valoración.

Esto son solo algunos ejemplos de equilibrios de Nash para la subasta de Vickrey, pero hay muchos otros. Por ejemplo, no es difícil obtener todos los existentes cuando $n = 2$.

2.1.2. Subasta al primer precio

En este caso, la función de beneficio u_i para cada comprador es

$$u_i(b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} x_i - b_i & \text{si } b_i > \max\limits_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{si } b_i < \max\limits_{j \neq i} b_j \end{cases} \tag{2.2}$$

Este tipo de subasta también tiene varios equilibrios de Nash. Veamos primero que en todos ellos, el ganador es el jugador que valora más el objeto, es decir, el jugador 1.

Consideremos $(b_1, \ldots, b_n)$ en el que el jugador $i \neq 1$ gana, apostando $b_i > b_1$. Si $b_i > x_2$, entonces el beneficio del jugador i será $x_i - b_i$ negativo, por lo que sería mejor reducir su oferta a 0. Si $b_i \leq x_2$, entonces el jugador 1 puede apostar b_i, en ese caso ganaría al resolverse los empates para el jugador que más valore el objeto, y aumentaría su beneficio de 0 a $x_1 - b_i$. Por lo tanto, ninguna situación en el que no gana el jugador 1 es un equilibrio de Nash.

Veamos ahora un teorema que caracteriza los equilibrios de Nash de la subasta al primer precio.

Teorema 2.1. *Un vector de ofertas $(b_1, \ldots, b_n)$ es un equilibrio de Nash de la subasta al primer precio si y solo si*

1. *Las dos ofertas más altas son iguales.*
2. *Una de esas ofertas la realiza el jugador 1*
3. *La oferta más alta es por lo menos x_2 y como mucho x_1.*

Demostración. Comencemos la demostración de izquierda a derecha, suponiendo que $(b_1, \ldots, b_n)$ es un equilibrio de Nash de la subasta al primer precio.

Un vector de ofertas en las que las dos más altas no son iguales no es un equilibrio de Nash porque el jugador con la oferta más alta la podría reducir levemente, seguiría ganando y pagaría un precio más bajo. Además, una de ellas ha de ser del jugador 1, que es el que gana, como hemos visto antes.

Por otra parte, si la oferta más alta es menor que x_2, entonces el jugador 2 puede aumentar su oferta entre la puja más alta y x_2, ganando, y obteniendo un beneficio positivo. Por lo que en equilibrio, la oferta más alta es como mínimo x_2. Si la oferta más alta excede x_1, el beneficio del jugador 1 es negativo, y puede incrementar este beneficio reduciendo su apuesta. Por lo que en equilibrio, la oferta más alta es como mucho x_1.

Ahora veamos la demostración de derecha a izquierda. Cualquier vector de ofertas $(b_1, \ldots, b_n)$ que cumple las condiciones del enunciado es un equilibrio de Nash porque:

- Si el jugador 1 aumentase su oferta, seguiría ganando y reduciría su beneficio.
- Si el jugador 1 disminuyese su oferta, perdería y obtendría un beneficio de 0.
- Si cualquier otro jugador aumenta su oferta, o no afecta al resultado, o ganaría y obtendría un beneficio negativo.
- Si cualquier otro jugador descendiese su oferta, no afectaría el resultado.

$\square$

En cualquier equilibrio en el que la oferta ganadora exceda x_2, al menos una oferta de un jugador excede su valoración. Esa oferta parece arriesgada porque le podría llevar al postor a tener un beneficio negativo si ganase. En equilibrio no hay riesgo porque esa oferta no gana, pero el hecho de que esa oferta tenga esa propiedad reduce la recomendación del equilibrio.

2.2. Formulación como un juego estratégico

Una vez hemos analizado las subastas desde el punto de vista de juego de información completa, pasamos a la situación de información incompleta, que es más realista, ya que analiza las distintas estrategias sin saber cuál va a ser la apuesta de los demás jugadores. En este caso necesitaremos, además de las funciones de beneficio, definir las señales $\mathcal{X}_i$ y su distribución aleatoria.

En las subastas, estas señales $\mathcal{X}_i$ son valores reales y las representaremos mediante variables aleatorias X_i. En este caso, al ser una subasta de valoraciones privadas, las señales son simplemente $X_i = x_i$, el valor que el jugador i le da al objeto. Podemos notar que X_i no incluye ninguna información de los jugadores $j \neq i$, recogiendo el hecho de que los jugadores no conocen (ni tienen ninguna estimación) de cuánto valoran el objeto el resto de compradores. Además, debemos dar una distribución de probabilidad a las señales; en este caso, hay que dar la distribución del vector $(X_1, \dots, X_n)$. Aunque hay muchas maneras posibles de hacerlo, sin duda la más utilizada es considerar $(X_1, \dots, X_n)$ como variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas con distribución continua F y función de densdad continua f tal que $E[X_i] < \infty$. Para todo lo que sigue utilizaremos la notación $m_i^{\boldsymbol{\beta}}(x)$ para referirnos al pago esperado que realiza el jugador i cuando tiene valor x y se sigue la estrategia $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ y $R^{\boldsymbol{\beta}}$ para referirnos a la ganancia del vendedor cuando se sigue la estrategia $(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Nos referiremos a la situación en la que la distribución de las valoraciones es la misma para todos postores como una situación en la que participan postores simétricos.

Estamos interesados en comparar los resultados del equilibrio simétrico de una subasta con los de otra. Dado que los postores son simétricos, nos preguntamos cuáles son las estrategias de equilibrio simétrico de las subastas.

2.3. Subasta de Vickrey

Cada postor presenta una oferta b_i y dadas estas ofertas, los beneficios son los mismos que en (2.1). Cabe destacar que si hay un empate entre los máximos b_i, entonces el objeto se asigna al postor que valora más el objeto. Sin embargo, como las valoraciones son variables aleatorias continuas e independientemente distribuidas, la probabilidad de que dos postores tengan la misma valoración es 0. Además, como las estrategias β son estrictamente crecientes, la probabilidad de que dos ofertas sean iguales es 0, por lo que en la práctica los empates no son un problema.

Veamos ahora un resultado de gran importancia en la teoría de las subastas.

Proposición 2.2. *En la subasta de Vickrey $\beta_i^{II}(x) = x$ es una estrategia débilmente dominante para el jugador i con $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Consideremos un postor i y sea $p_i = \max\limits_{j \neq i} b_j$ el máximo de las ofertas rivales. Al pujar x_i, este postor ganará si $x_i > p_i$ y obtendrá beneficio igual a $x_i - p_i$; y perderá si $x_i < p_i$ obteniendo beneficio 0 (el suceso $x_i = p_i$ tiene probabilidad 0, por lo que no lo consideramos). Veamos que independientemente de lo que hagan el resto de jugadores, el jugador i no se ve beneficiado al cambiar su puja.

Supongamos que puja una cantidad $z_i < x_i$. Podremos distinguir entonces tres casos, si

- $x_i > z_i > p_i$, entonces ganaría igual y el beneficio seguiría siendo $x_i - p_i$.
- $p_i > x_i > z_i$, entonces perdería de igual forma.
- $x_i > p_i > z_i$, entonces perdería la subasta, mientras que si hubiese pujado su valor x_i habría ganado y tendría un beneficio positivo.

Por tanto, pujar un valor menor que x_i nunca aumenta el beneficio y a veces lo disminuye. De forma análoga, podemos argumentar el caso en el que oferta una cantidad $z_i > x_i$ (ver Apéndice D.1). Con esto, concluimos que pujar la propia valoración x_i es una estrategia débilmente dominante. $\square$

Obtenemos directamente de la proposición anterior el siguiente corolario.

Corolario 2.3. *En una subasta de oferta sellada al segundo precio, si todos los participantes escogen la estrategia débilmente dominante de la Proposición 2.2, entonces:*

a) El postor con el valor más grande gana el objeto.

b) La ganancia del vendedor es el segundo valor más grande.

Ahora, cabe preguntarse cuánto espera pagar en equilibrio cada postor. Para ello, primero vamos a definir una notación que usaremos en lo que sigue.

Dados $(X_1, \ldots, X_n)$ variables aleatorias. Se define $Y_j^{(n)}$ como el j-ésimo valor más grande de $(X_1, \ldots, X_n)$. Es decir, $Y_1^{(n)}$ es el máximo de $(X_1, \ldots, X_n)$, $Y_2^{(n)}$ es el segundo máximo, …, $Y_n^{(n)}$ es el mínimo. Llamaremos $G_j^{(n)}$ a la función de distribución de $Y_j^{(n)}$. En el caso particular en el que $(X_1, \ldots, X_n)$ están independiente e idénticamente distribuidas con función de distribución F, se tiene

$$G_1^{(n)}(y) = P\left(Y_1^{(n)} \leq y\right) = P\left(X_1 \leq y, \ldots, X_n \leq y\right) = F(y)^n, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Vamos a calcular ahora $m_i^{II}(x)$ el pago esperado que realiza el postor i cuando su valor es x y todos siguen la estrategia débilmente dominante de la Proposición 2.2. Por simetría, tomamos $i = n$ y vemos que el pago que va a realizar el postor n es igual a

$$\text{máx}\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} \mathbb{1}_{\{\text{máx}\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} < x\}} = Y_1^{(n-1)} \mathbb{1}_{\{Y_1^{(n-1)} < x\}},$$

donde la función $\mathbb{1}_A$ representa el indicador del suceso A (con valor 1 si ocurre y 0 si no ocurre). Por tanto,

$$m_n^{II}(x) = G_1^{(n-1)}(x) E\left[Y_1^{(n-1)} \quad | \quad Y_1^{(n-1)} < x\right], \tag{2.3}$$

que es la probabilidad de ganar por la esperanza de la segunda oferta más alta condicionada a que x es la oferta más alta.

Proposición 2.4. *En la subasta al segundo precio, si todos participantes siguen la estrategia de la Proposición 2.2,*

$$E\left[R^{II}\right] = nE\left[m^{II}(X)\right] = E\left[Y_2^{(n)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} yn(n-1)F^{n-2}(y)f(y)(1-F(y))dy.$$

Demostración. Para la primera igualdad cabe observar que

$$R^{II} = m_1^{II}(X_1) + \cdots + m_n^{II}(X_n).$$

Así, es directo $E\left[R^{II}\right] = nE\left[m^{II}(X)\right]$, donde X es una variable aleatoria con distribución F.

Para la segunda igualdad podemos utilizar el apartado b) del corolario 2.3, de donde sigue que $E\left[R^{II}\right] = E\left[Y_2^{(n)}\right]$.

Para la última igualdad, desarrollamos $E\left[Y_2^{(n)}\right]$,

$$P\left(Y_2^{(n)} \leq y\right) = nF^{n-1}(y) - F^n(y)(n-1).$$

Así, la función de densidad,

$$\frac{d}{dy} P\left(Y_2^{(n)} \leq y\right) = n(n-1)F^{n-2}(y)f(y)\left(1 - F(y)\right).$$

Por lo tanto,

$$E\left[Y_2^{(n)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} yn(n-1)F^{n-2}(y)f(y)(1-F(y))dy.$$

□

Como reflexión tras haber analizado este tipo de subasta, podemos explicar mejor la equivalencia entre esta subasta y la inglesa. En la inglesa no puede ser óptimo permanecer tras haber excedido la valoración, porque solo puede causar pérdidas, ni tampoco es óptimo retirarse antes de que el precio alcance la valoración, porque entonces se puede estar renunciando a una ganancia. Además, hemos visto que en la subasta de Vickrey lo mejor es pujar la propia valoración. Por tanto, la estrategia óptima en ambos casos es pujar el valor o permanecer hasta el valor. La equivalencia es débil porque las estrategias óptimas son iguales solo si las valoraciones son privadas, como argumentaremos en el siguiente capítulo.

2.4. Subastas de oferta sellada al primer precio

Cada postor presenta una oferta b_i y dadas estas ofertas, los beneficios son los mismos que en (2.2). Los empates se resuelven como hemos explicado en la de Vickrey, pero de igual forma, no son un problema para la práctica.

Esta subasta no tiene ninguna estrategia débilmente dominante, ya que cualquier valor que decida apostar (en función de mi valoración) puede ser mejorado en función de lo que hagan los oponentes. De hecho, pujar el propio valor no proporciona ningún beneficio, por lo que no es muy buena estrategia. Vamos a empezar estudiando estrategias de equilibrio simétricas.

Supongamos que todos los postores excepto uno, digamos el n, siguen una estretegia simétrica, creciente y diferenciable de equilibrio, β. Supongamos también que el postor n tiene un valor x y puja b. Queremos determinar el b óptimo.

Podemos observar que no será óptimo escoger $b > \beta(\omega)$, ya que ganaría seguro, pero podría pagar menos y seguir ganando. Además, un postor con valor 0, no pujaría nunca un valor positivo, ya que tendría una pérdida.

Proposición 2.5. *La subasta en sobre cerrado al primer precio tiene un único equilibrio simétrico bayesiano de Nash,* $(\beta, \ldots, \beta)$. *Este equilibrio está dado por*

$$\beta(x) = E\left[Y_1^{(n-1)} \quad | \quad Y_1^{(n-1)} < x\right].$$

Demostración. Sigamos con el contexto descrito anteriormente. El postor n ganará la subasta si su oferta b es la mayor, es decir, si $\max_{j \neq n} \beta\left(X_j\right) = \beta\left(Y_1^{(n-1)}\right) < b$, donde tenemos la igualdad anterior por ser β creciente. Esa desigualdad se cumple si y solo si $Y_1^{(n-1)} < \beta^{-1}(b)$. El beneficio será $(x-b)\mathbb{1}_{\{Y_1^{(n-1)} < \beta^{-1}(b)\}}$, con esperanza $G_1^{(n-1)}\left(\beta^{-1}(b)\right)(x-b)$. Derivando esta esperanza con respecto a b, obtenemos

$$\frac{g_1^{(n-1)}(\beta^{-1}(b))}{\beta'[\beta^{-1}(b)]}(x-b) - G_1^{(n-1)}(\beta^{-1}(b)),$$

con $g_1^{(n-1)}$ la derivada de $G_1^{(n-1)}$. Si imponemos que $b = \beta(x)$ sea máximo, necesitamos que la derivada anterior se anule bajo esta condición, es decir,

$$G_1^{(n-1)}(x)\beta'(x) + g_1^{(n-1)}(x)\beta(x) = g_1^{(n-1)}(x)x,$$

que es equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(G_1^{(n-1)}(x)\beta(x)\right) = x g_1^{(n-1)}(x).$$

Como $\beta(0) = 0$, tenemos

$$\beta(x) = \int_0^x \frac{y g_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)} dy. \tag{2.4}$$

Ahora, sea J la función de distribución de la variable $Y_1^{(n-1)}$ condicionada al suceso $Y_1^{(n-1)} < x$,

$$J(y) = \begin{cases} \dfrac{G_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)} & \text{si } 0 < y \leq x \\ 1 & \text{si } y > x \end{cases}$$

Así, tenemos la función de densidad,

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \begin{cases} \dfrac{g_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)} & \text{si } 0 < y \leq x \\ 0 & \text{si } y > x \end{cases} \tag{2.5}$$

Por tanto, vemos que

$$\beta(x) = E\left[Y_1^{(n-1)} \quad | \quad Y_1^{(n-1)} < x\right].$$

Así, hemos visto que si $(\beta, \ldots, \beta)$ es un equilibrio simétrico, entonces ha de tener la forma del enunciado. Veamos que, en efecto, β con la forma anterior es un equilibrio, es decir, que es un máximo de la función de beneficio esperado.

Como β es creciente y continua, el postor con mayor valor será el que pujará más alto y ganará la subasta. Como hemos argumentado antes, el postor n deberá pujar una cantidad $b \leq \beta(\omega)$. Llamemos $z = \beta^{-1}(b)$ y calculemos el beneficio esperado $\Pi(b, x)$ de este postor que tiene valor x,

$$\Pi(b, x) = G_1^{(n-1)}(z)(x - \beta(z)) = G_1^{(n-1)}(z)x - \int_0^z y g_1^{(n-1)}(y)dy.$$

Integrando por partes, obtenemos,

$$\Pi(b, x) = G_1^{(n-1)}(z)(x - z) + \int_0^z G_1^{(n-1)}(y)dy. \tag{2.6}$$

Con esto, tenemos,

$$\begin{aligned} \Pi(\beta(x), x) - \Pi(\beta(z), x) &= \int_0^x G_1^{(n-1)}(y)dy - G_1^{(n-1)}(z)(x - z) - \int_0^z G_1^{(n-1)}(y)dy \\ &= \int_x^z \left(G_1^{(n-1)}(z) - G_1^{(n-1)}(y)\right) dy \geq 0. \end{aligned}$$

Tenemos la última desigualdad tanto cuando $z \geq x$ como cuando $z < x$ debido a que $G_1^{(n-1)}$ es creciente. Por lo tanto, hemos demostrado que si el resto de postores siguen la estrategia β, el postor n con valor x obtiene un mayor beneficio pujando $\beta(x)$ que cualquier otro valor. Así, β es una estrategia simétrica de equilibrio. □

Podemos reescribir la estrategia anterior utilizando la integración por partes como sigue,

$$\beta^I(x) = \int_0^x \frac{y g_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)} dy = x - \int_0^x \frac{G_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)} dy = x - \int_0^x \left(\frac{F(y)}{F(x)}\right)^{n-1} dy < x. \tag{2.7}$$

Podemos observar que la oferta es menor que el valor. Además, como $F(y) < F(x)$, cuando el número n de postores tienda a infinito, la estrategia $\beta^I(x)$ tiende a x.

Con todo esto, en la subasta de oferta sellada al primer precio, el pago esperado por un postor, digamos el n, con valor x y cuando todos siguen la estrategia de la Proposición 2.5 es,

$$m_n^I(x) = G_1^{(n-1)}(x) E\left[Y_1^{(n-1)} \quad | \quad Y_1^{(n-1)} < x\right].$$

Cabe observar que el pago esperado por el postor es el mismo que el obtenido para la subasta de Vickrey con la estrategia débilmente dominante de la Proposición 2.2.

2.5. Subasta mixtura

Vamos a estudiar ahora una nueva posible subasta. En esta el ganador también será el que puje la oferta más alta, pero lo que pagará lo vamos a definir como una combinación lineal convexa de su oferta y de la segunda oferta más alta, siendo $\alpha \in (0,1)$.

Así, si cada postor presenta una oferta b_i, los beneficios son,

$$u_i = \begin{cases} x_i - \alpha b_i - (1-\alpha)\max_{j\neq i} b_j & \text{si } b_i > \max_{j\neq i} b_j \\ 0 & \text{si } b_i < \max_{j\neq i} b_j \end{cases}$$

Ahora vamos a estudiar la forma de la estrategia de equilibrio simétrico.

Proposición 2.6. *Esta subasta tiene un único equilibrio simétrico bayesiano de Nash, $(\beta,\ldots,\beta)$, que está dado por*

$$\beta(x) = x - \frac{1}{\left(G_1^{(n-1)}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^x \left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}} dy. \tag{2.8}$$

Notar que los casos $\alpha \sim 0$ y $\alpha \sim 1$ corresponden a la subasta de Vickrey y a la de primer precio y la estrategia coincide. En efecto, aunque la fórmula no esté definida para $\alpha = 0$, podemos extenderla por continuidad. Si α toma valores muy cercanos a 0, entonces

$$x - \int_0^x \left(\frac{G_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} dy \sim x,$$

debido a que $G_1^{(n-1)}$ es creciente y $\frac{1}{\alpha}$ toma valores muy grandes. Por otro lado, si $\alpha \sim 1$, entonces

$$x - \int_0^x \left(\frac{G_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} dy \sim x - \int_0^x \frac{G_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)} dy,$$

que coincide con (2.7).

Demostración. Supongamos que todos los postores excepto uno, digamos el n, siguen una estrategia simétrica de equilibrio β. Supongamos también que el postor n tiene un valor x y puja b. El postor n ganará la subasta si su oferta b es la mayor, es decir, si $\max_{j\neq n} \beta(X_j) = \beta\left(Y_1^{(n-1)}\right) < b$. Esa desigualdad se cumple si y solo si $Y_1^{(n-1)} < \beta^{-1}(b)$. El beneficio será $\left(x - \alpha b - (1-\alpha)\beta\left(Y_1^{(n-1)}\right)\right) \mathbb{1}_{\{Y_1^{(n-1)} < \beta^{-1}(b)\}}$, con esperanza

$$xG_1^{(n-1)}(\beta^{-1}(b)) - \alpha b G_1^{(n-1)}(\beta^{-1}(b)) - (1-\alpha)\int_0^{\beta^{-1}(b)} \beta(y) g_1^{(n-1)}(y) dy. \tag{2.9}$$

Derivando con respecto a b, tenemos

$$x\frac{g_1^{(n-1)}(\beta^{-1}(b))}{\beta'[\beta^{-1}(b)]} - \alpha\left[G_1^{(n-1)}(\beta^{-1}(b)) + b\frac{g_1^{(n-1)}(\beta^{-1}(b))}{\beta'[\beta^{-1}(b)]}\right] - (1-\alpha)\beta(\beta^{-1}(b)) g_1^{(n-1)}(\beta^{-1}(b)) \frac{1}{\beta'[\beta^{-1}(b)]}.$$

Si imponemos que $b = \beta(x)$ sea máximo, necesitamos que la derivada anterior se anule bajo esta condición, es decir,

$$x\frac{g_1^{(n-1)}(x)}{\beta'(x)} - \alpha\left[G_1^{(n-1)}(x) + \beta(x)\frac{g_1^{(n-1)}(x)}{\beta'(x)}\right] - (1-\alpha)\beta(x) g_1^{(n-1)}(x)\frac{1}{\beta'(x)} = 0.$$

Simplificando, obtenemos la ecuación diferencial ordinaria,

$$xg_1^{(n-1)}(x) - \alpha\beta'(x)G_1^{(n-1)}(x) - \beta(x)g_1^{(n-1)}(x) = 0,$$

con solución

$$\beta(x) = x - \frac{1}{\left(G_1^{(n-1)}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^x \left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}} dy.$$

En el Apéndice A.1, se pueden encontrar los cálculos correspondientes para obtener la solución.

Hemos demostrado que si $(\beta, \ldots, \beta)$ es un equilibrio simétrico, entonces tiene que tener la forma 2.8. Veamos ahora que β con la forma del enunciado es un equilibrio.

Llamemos $z = \beta^{-1}(b)$. El beneficio esperado $\Pi(b, x)$ del postor con valor x y que puja $z = \beta^{-1}(b)$ es el calculado en (2.9),

$$\Pi(b, x) = xG_1^{(n-1)}(z) - \alpha\beta(z)G_1^{(n-1)}(z) - (1-\alpha)\int_0^z \beta(y)g_1^{(n-1)}(y)dy.$$

Sustituyendo la forma de β, realizando Fubini, resolviendo integrales y simplificando (se encuentran todos los cálculos detallados en el Apéndice A.2), la ecuación anterior se puede simplificar,

$$\Pi(b, x) = G_1^{(n-1)}(z)(x - z) + \int_0^z G_1^{(n-1)}(\tau)d\tau.$$

Observando esta ecuación, vemos que es igual a la ecuación (2.6), la del beneficio esperado en la subasta al primer precio. Por tanto, se concluiría de igual forma la demostración. □

Al pensar en este nuevo tipo de subasta, cabe plantearse si la estrategia simétrica de equilibrio también es una combinación lineal convexa de las estrategias simétricas de equilibrio de las subastas de primer y segundo precio. Más adelante veremos que no se cumple.

Estudiemos ahora la expresión que tiene el pago esperado por un postor, digamos el n, con valor x, bajo la estrategia de la Proposición 2.6. Tal como hemos visto en la demostración anterior, el beneficio esperado que obtiene el jugador con valor x es $\int_0^x G_1^{(n-1)}(\tau)d\tau$. Además, sabemos que el beneficio es el valor $x\mathbb{1}_{\{Y_1^{(n-1)}<x\}}$ menos lo que se paga. Por lo tanto, tomando esperanzas,

$$m_n^M(x) = xG_1^{(n-1)}(x) - \int_0^x G_1^{(n-1)}(\tau)d\tau = G_1^{(n-1)}(x)E\left[Y_1^{(n-1)}|Y_1^{(n-1)} < x\right],$$

que coincide con la de primer y segundo precio bajo las estrategias analizadas. En consecuencia, la ganancia esperada del vendedor $E\left[R^M\right]$ es también igual a la de $E\left[R^I\right]$ y $E\left[R^{II}\right]$ y coinciden con $E\left[Y_2^{(n)}\right]$. Como veremos más adelante, esto no es una casualidad.

2.6. Ejemplo

Vamos a comparar los tres tipos de subastas en el caso particular en el que los valores tengan distribución uniforme $[0, 1]$, es decir, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$

Empezamos calculando $\beta(x)$ para los tres tipos de subastas.

En la de Vickrey, como la estrategia débilmente dominante es el propio valor, $\beta^{II}(x) = x$.

En la de primer precio, sabíamos que la estrategia de equilibrio simétrico es

$$\beta^I(x) = E\left[Y_1^{(n-1)} \quad |Y_1^{(n-1)} < x\right] = \int_0^x \frac{yg_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)}dy = \int_0^x y(n-1)\frac{y^{n-2}}{x^{n-1}}dy = \frac{n-1}{n}x.$$

La segunda igualdad la tenemos por (2.4) y para la tercera sustituimos la función de distribución.

En la mixtura, sabíamos que la estrategia de equilibrio simétrico es de la forma,

$$\beta^M(x) = x - \frac{1}{\left(G_1^{(n-1)}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^x \left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}} dy = x - \frac{1}{(x^{n-1})^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^x (y^{n-1})^{\frac{1}{\alpha}} dy = \frac{n-1}{n-1+\alpha} x, \tag{2.10}$$

donde utilizamos que con la distribución uniforme, $G_1^{(n-1)}(x) = x^{n-1}$.

Analizando las tres estrategias de equilibrio podemos contestar la pregunta que nos había surgido de si la estrategia de la mixtura era una combinación lineal convexa de la de Vickrey y la de primer precio. Como podemos observar, la estrategia de la mixtura $\frac{n-1}{n-1+\alpha}x$ no es lineal en α, por lo tanto, no puede ser combinación lineal convexa de la de Vickrey y la de primer precio. Como en este caso particular no se cumple, en general, como es obvio, tampoco.

Podemos realizar gráficos para comparar estas tres estrategias dando valores a la n y con $\alpha = \frac{1}{3}$ y $\alpha = \frac{2}{3}$. Viendo las gráficas B.1 y B.2, que se encuentran en el Apéndice B.1 podemos destacar que cuando hay 2 postores, para cada valor x la estrategia más alta es la de Vickrey y la más baja la de primer precio, estando en el medio las de la mixtura. Observando la siguiente gráfica, en la que hay 5 compradores, vemos que el orden sigue siendo el mismo. Un aspecto a destacar es que conforme aumenta el número de postores, las estrategias de cada tipo de subasta son cada vez más próximas para cada valor de x, de hecho tienden, a la de Vickrey.

Estudiemos ahora la ganancia esperada del vendedor en los tres tipos de subastas. Como hemos argumentado anteriormente, esta ganancia esperada va a ser igual en los tres tipos de subastas, de hecho va a ser igual a $E\left[Y_2^{(n)}\right]$. En el Apéndice B.2 se encuentran los cálculos de cada una por separado para ver que efectivamente se cumple esta propiedad.

Como habíamos argumentado, la ganancia esperada del vendedor será la esperanza del segundo valor más alto, $E\left[Y_2^{(n)}\right]$. Podemos calcularla utilizando que el segundo máximo con la ley uniforme sigue una distribución $\beta(n-1,2)$.

$$E\left[Y_2^{(n)}\right] = \frac{n-1}{n+1}.$$

Además, calcularemos la varianza de la ganancia, que ya no coincidirá en las tres subastas. En la de segundo precio, la ganancia del vendedor es el segundo valor más alto, como antes, al conocer su distribución, podemos calcular la varianza

$$Var\left[Y_2^{(n)}\right] = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

En la subasta al primer precio, a partir de la estrategia de equilibrio, podemos calcular la ganancia del vendedor, que será el máximo de las pujas, $\frac{n-1}{n}$ máx$\{X_1, \ldots, X_n\}$, y sabiendo que el máximo con la ley uniforme sigue una distribución $\beta(n,1)$ podemos calcular la varianza,

$$\frac{(n-1)^2}{n^2} Var\left(Y_1^{(n)}\right) = \frac{(n-1)^2}{n(n+1)^2(n+2)}.$$

Como las ganancias esperadas del vendedor son iguales en ambos tipos de subastas, podemos comparar las varianzas para ver cuál tiene más variabilidad. Así, obtenemos

$$Var(R^I) = \frac{(n-1)^2}{n(n+1)^2(n+2)} < \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)} = Var(R^{II}).$$

Por lo que la ganancia de la subasta al segundo precio es más variable que la del primer precio.

Finalmente, vamos a realizar los cálculos con la mixtura. Ahora, la ganancia del vendedor será α veces la oferta del valor más alto más $1-\alpha$ veces la del segundo valor más alto, es decir,

$\alpha\frac{n-1}{n-1+\alpha}Y_1^{(n)} + (1-\alpha)\frac{n-1}{n-1+\alpha}Y_2^{(n)}$. Como sabemos, las distribuciones que siguen el máximo y el segundo máximo, podremos calcular la varianza de la ganancia.

$$Var\left(\alpha\frac{n-1}{n-1+\alpha}Y_1^{(n)} + (1-\alpha)\frac{n-1}{n-1+\alpha}Y_2^{(n)}\right) = \frac{(n-1)^2(\alpha^2 n + 2n - 2n\alpha - 2 + 2\alpha)}{(n-1+\alpha)^2(n+1)^2(n+2)}.$$

Los cálculos correspondientes para obtener la expresión de esta varianza se encuentran en el Apéndice B.3.

Para ver la forma que tiene esta varianza y poder compararla también, podemos considerar situaciones con distinto número de compradores. Para ello, realizamos la gráfica B.3 en función de alpha, que se encuentra en el Apéndice B.1.

A partir de la gráfica, podemos observar que la varianza de la ganancia de la mixtura es más variable que la de primer precio y menos que la de segundo precio, para todos valores de α. Lo cual tiene lógica, ya que $0 < \alpha < 1$, con $\alpha = 0$, tenemos la subasta al segundo precio, y con $\alpha = 1$ la del primer precio.

Además, también podemos decir que conforme aumenta el número de postores, la varianza de los ingresos del vendedor disminuye, en los tres tipos de subasta.

2.7. Teorema de equivalencia de ingresos

Como hemos visto en las secciones anteriores, los ingresos esperados por el vendedor son los mismos en los tipos de subastas que hemos estudiado. En esta sección, se estudian las razones que hay detrás de esta igualdad y, además, vamos a descubrir que la igualdad se exitiende a toda una clase de subastas.

Se entiende por subasta estándar a aquella que asigna el objeto a la persona que ha apostado más alto y trata las pujas con igualdad, por lo que las subastas estudiadas pertenecen a esta clase. También definimos compradores neutrales al riesgo como aquellos que buscan maximizar la función de beneficio, sin tener en cuenta el riesgo.

Denotemos cualquier formato de subasta estándar por A, el equilibrio simétrico de la subasta por β^A y el pago esperado en equilibrio por el comprador con valor x como $m^A(x)$.

Teorema 2.7 (Teorema de equivalencia de ingresos)**.** *Supongamos que los valores están independientemente e idénticamente distribuidos y todos los compradores son neutrales al riesgo. Entonces cualquier equilibrio simétrico y creciente de cualquier subasta estándar, tal que el pago esperado de un comprador con valor 0 es 0, da lugar al mismo ingreso esperado por el vendedor.*

Demostración. Utilizando la notación descrita previamente, supongamos que β^A es tal que $m^A(0) = 0$.

Consideremos, sin pérdida de la generalidad, el jugador n y supongamos que los demás siguen la estrategia de equilibrio β^A. Veamos cuál es el beneficio esperado $\Pi^A(z,x)$ de este postor con valor x, pero que apuesta $\beta^A(z)$,

$$\Pi^A(z,x) = xG_1^{(n-1)}(z) - m_n^A(z).$$

Derivando e igualando a 0,

$$\frac{d}{dz}\Pi^A(z,x) = xg_1^{(n-1)}(z) - \frac{d}{dz}m_n^A(z) = 0.$$

En equilibrio es óptimo $z = x$, y así, $yg_1^{(n-1)}(y) = \frac{d}{dy}m_n^A(y)$, para todo y. Utilizando la condición de que $m_n^A(0) = 0$, tenemos

$$m_n^A(x) = \int_0^x yg_1^{(n-1)}(y)dy = G_1^{(n-1)}(x)E\left[Y_1^{(n-1)} \quad | \quad Y_1^{(n-1)} < x\right].$$

Por tanto, como la parte derecha de la igualdad, no depende del formato de subasta A, se concluye la demostración. □

2.8. Precios de reserva

Por el teorema de equivalencia de ingresos, un vendedor neutral al riesgo cuyo objetivo fuese maximizar las ganancias esperadas sería indiferente entre cualquier subasta estándar. Sin embargo, los vendedores pueden tener un valor para dicho objeto y sería una desventaja utilizar una subasta estándar, ya que el objeto sería asignado a la persona con puja más alta, incluso aunque la apuesta fuese menor que el valor del vendedor. En muchas circunstancias, para evitar ese problema, los vendedores se reservan el derecho de no vender el producto si el precio final de la subasta es menor que una cierta cantidad $r > 0$, llamada *precio de reserva*.

Ahora vamos a estudiar el efecto que tiene este precio en las ganancias esperadas del vendedor en las subastas al primer y segundo precio, donde A hace referencia a ambos tipos de subastas.

Como el precio al que el objeto es vendido tiene que ser al menos r, ningún comprador con valor $x < r$ puede tener un beneficio positivo. Así, consideraremos a los postores con valor $x \geq r$.

2.8.1. Precios de reserva en la subasta de Vickrey

El objeto será vendido solo si el precio más alto es mayor que r y este comprador pagará $\max\{Y_2^{(n)}, r\}$. En esta situación, la función de beneficio cuando los postores apuestan b_i será,

$$u_i = \begin{cases} x_i - \max\limits_{j\neq i} b_j & \text{si } r \leq \max\limits_{j\neq i} b_j < b_i \\ x_i - r & \text{si } \max\limits_{j\neq i} b_j < r \leq b_i \\ 0 & \text{si } b_i < \max\limits_{j\neq i} b_j \text{ o si } b_i < r \end{cases}$$

En esta subasta, sigue siendo una estrategia débilmente dominante apostar el propio valor.

El pago de un postor, digamos el n, con valor r es $r\mathbb{1}_{\{Y_1^{(n-1)}<r\}}$, con esperanza $rG_1^{(n-1)}(r)$. El pago de un postor con valor $x > r$ es igual a $r\mathbb{1}_{\{Y_1^{(n-1)}<r\}} + Y_1^{(n-1)}\mathbb{1}_{\{r<Y_1^{(n-1)}<x\}}$ con esperanza igual a $m_n^{II}(x,r) = rG_1^{(n-1)} + \int_r^x yg_1^{(n-1)}dy$.

2.8.2. Precios de reserva en la subasta de primer precio

El objeto será vendido solo si la puja más alta es mayor que r y el comprador pagará su propia oferta. La función de beneficio cuando los postores apuestan b_i es,

$$u_i = \begin{cases} x_i - b_i & \text{si } b_i > \max\limits_{j\neq i} b_j \text{ y si } b_i \geq r \\ 0 & \text{si } b_i < \max\limits_{j\neq i} b_j \text{ o si } b_i < r \end{cases}$$

De manera análoga a la Proposición 2.5, obtenemos que una estrategia de equilibrio simétrica para cualquier postor, digamos el n, con valor $x \geq r$,

$$\begin{aligned} \beta^I(x) &= E\left[\max\{Y_1^{(n-1)}, r\} \quad | \quad Y_1^{(n-1)} < x\right] = \int_0^x \max(y,r)\frac{g_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)}dy \\ &= \int_0^r r\frac{g_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)}dy + \int_r^x y\frac{g_1^{(n-1)}(y)}{G_1^{(n-1)}(x)}dy = r\frac{G_1^{(n-1)}(r)}{G_1^{(n-1)}(x)} + \frac{1}{G_1^{(n-1)}(x)}\int_r^x yg_1^{(n-1)}(y)dy. \end{aligned}$$

Por tanto, el pago esperado de un comprador, digamos el n, con valor $x \geq r$ es,

$$m_n^I(x,r) = G_1^{(n-1)}\beta^I(x) = rG_1^{(n-1)}(r) + \int_r^x yg_1^{(n-1)}(y)dy.$$

Cabe destacar que al igual que antes, el pago esperado y, por tanto, los ingresos esperados son iguales.

2.8.3. Efectos de los ingresos con los precios de reserva

Para calcular la cantidad que gana el vendedor, calculamos primero la esperanza de lo que paga cada jugador (que es igual en los dos tipos de subastas).

$$\begin{aligned} E\left[m^A(X,r)\right] &= \int_r^w m^A(x,r)f(x)dx = \int_r^w rG_1^{(n-1)}(r)f(x) + \int_r^w \left(\int_r^x yg_1^{(n-1)}(y)f(x)dy\right)dx \\ &= rG_1^{(n-1)}(r)(1-F(r)) + \int_r^w yg_1^{(n-1)}(y)(1-F(y))dy, \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde hemos aplicado Fubini en la última igualdad.

A partir de la ecuación anterior, podemos calcular el valor óptimo del precio de reserva para el vendedor. Supongamos que el vendedor valora el producto en x_0, de forma que si no lo vende en la subasta, puede obtener x_0 unidades monetarias por él. Así, el vendedor va a obtener

$$R^A = \sum_{i=1}^n m_i^A(X_i,r) + x_0 \mathbb{1}_{\{X_1,\dots,X_n \le r\}},$$

con esperanza

$$E\left[R^A\right] = nE\left[m^A(X,r)\right] + x_0 G_1^{(n)}(r).$$

Utilizando la expresión (2.11) y derivando con respecto a r, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}E\left[R^A\right] &= n\left[\left(G_1^{(n-1)}(r) + rg_1^{(n-1)}(r)\right)(1-F(r)) - rG_1^{(n-1)}(r)f(r) - rg_1^{(n-1)}(r)(1-F(r))\right] \\ &\quad + x_0 nG_1^{(n-1)}(r)f(r) = nG_1^{(n-1)}(r)(1-F(r)-rf(r)) + x_0 nG_1^{(n-1)}(r)f(r). \end{aligned}$$

Ahora consideremos la función de tasa de riesgo de F, $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$. Con esto, reformulamos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}E\left[R^A\right] &= nG_1^{(n-1)}(r)(1-F(r))(1-r\lambda(r)]) + x_0 nG_1^{(n-1)}(r)(1-F(r))\lambda(r) \\ &= nG_1^{(n-1)}(r)(1-F(r))(1-(r-x_0)\lambda(r)). \end{aligned}$$

El precio óptimo debe satisfacer $\frac{d}{dr}E\left[R^A\right] = 0$, lo cual ocurre si y solo si $r - \frac{1}{\lambda(r)} = x_0$. Un análisis más en profundidad de este precio de reserva se puede encontrar en el Apéndice C.

Ejemplo 2.1: Veamos un ejemplo en el que vamos a calcular el precio de reserva óptimo y la respectiva ganancia esperada del vendedor. Para ello, vamos a tomar $x_0 = 0$, $n > 1$ y $F(x) = x$, la distribución uniforme en $[0,1]$.

Sustituyendo en la fórmula del precio de reserva, tenemos, $r - \frac{1-F(r)}{f(r)} = 0$ si $r = \frac{1}{2}$. Puede resultar llamativo, en este ejemplo y en general, que se ponga un precio de reserva positivo cuando $x_0 = 0$, es decir, cuando el vendedor se queda sin nada si no logra vender el objeto. Notemos que si pusiese $r = 0$, entones seguro que lo vendería y sacaría un beneficio positivo. Sin embargo, lo que ocurre es que la inclusión del precio de reserva hace que las pujas aumenten, por ejemplo, en el caso de primer precio de $E\left[Y_1^{(n-1)} \quad |Y_1^{(n-1)} < x\right]$ a $E\left[\max\left\{Y_1^{(n-1)}, r\right\} \quad |Y_1^{(n-1)} < x\right]$ y este aumento le da un mayor beneficio, aunque corra el riesgo de quedarse sin vender el objeto.

Calculamos ahora la ganancia total esperada por el vendedor,

$$nE\left[m^A(X,r)\right] = nr^n(1-r) + n\int_r^1 y(n-1)y^{n-2}(1-y)dy = \frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{2^n(n+1)}.$$

Podemos calcular ahora casos particulares con un determinado número de participantes. Si $n = 2$, la ganancia del vendedor es $5/12 = 0.417$. Si $n = 5$, la ganancia es $43/64 = 0.672$. Si $n = 10$, la ganancia del vendedor es $9217/11264 = 0.818$.

2.8.4. Colusión

Hasta ahora hemos estudiado propiedades de subastas suponiendo que cada postor actúa de manera independiente. Sin embargo, en la realidad, hay veces que se hacen pactos entre los postores para lograr un precio de venta más bajo. Esta práctica se considera fraudulenta y en muchos sitios es ilegal porque reduce el beneficio del vendedor. El nombre *colusión* significa "Pacto entre dos personas o grupos en contra de un tercero". En esta subsección vamos a explicar los pactos en el caso particular de las subastas de Vickrey y cómo puede defenderse el vendedor si conoce su existencia.

Supongamos, como hasta ahora, que hay n postores y que I de ellos (sin pérdida de la generalidad) los postores $1, 2, \ldots, I$ deciden pactar y formar lo que se llama *cártel de colusión*, el resto de postores actúan de manera independiente y no conocen la existencia del cártel. La forma de actuar del cártel consiste en que previamente a la subasta, cada uno dice su valor y el participante que mayor valor tiene es el que puja en la subasta, el resto de miembros del cártel hace una oferta muy baja (o nula). De esta forma, si el que ha apostado el valor máximo del cártel gana la subasta, pagará el segundo precio más alto, que será el máximo de las ofertas de los postores $I+1, \ldots, n$ (ya que los otros miembros del cártel han pujado muy bajo), en vez del máximo de los $N-1$ postores (todos menos él), que tendría que haber pagado en una subasta sin pactos. Así, los miembros del pacto se ven beneficiados. Los que no están en el pacto no se ven afectados por la existencia de este; si no ganan ahora, tampoco lo habrían hecho si se hubiesen hecho todas las ofertas de forma independiente; si ahora ganan, pagarán exactamente lo mismo que habrían pagado si no hubiera habido pacto. Así, la existencia del pacto beneficia a los que pactan y no perjudica a los que no lo hacen, por lo que la pérdida correspondiente la asume el vendedor, que puede recibir un precio más bajo.

Para analizar esta situación desde un punto de vista matemático, notemos que en la práctica solo se realizan $N-I+1$ apuestas reales, las de los $N-I$ compradores que no están en el cártel y la del que ofertado el máximo del cártel. Los valores de los $N-I$ que están fuera del cártel tienen, como siempre, distribución F; sin embargo, el valor del máximo del cártel ya no tiene distribución F, sino lo correspondiente a $Y_1^{(I)}$, el máximo de los valores de los I miembros del cártel. Es decir, tenemos $N-I+1$ postores independientes pero no todos tienen la misma distribución. Es inmediato ver que, en esta situación la estrategia de apostar cada uno su propio valor sigue siendo débilmente dominante.

Veamos cuánto va a pagar el postor del cártel si tiene valor x,

$$m_C(x) = G_1^{(n-I)}(x) E\left[Y_1^{(n-I)} | Y_1^{(n-I)} < x\right].$$

A partir de la fórmula (2.5) de la Proposición 2.5, $E\left[Y_1^{(n-I)} | Y_1^{(n-I)} < x\right] = \int_{-\infty}^{x} y \frac{g_1^{(n-I)}(y)}{G_1^{(n-I)}(x)} dy$ y, por tanto, como el jugador del cártel puja con distribución $Y_1^{(I)}$, la esperanza de lo que va a pagar es,

$$\begin{aligned}
E[m_C(X)] &= E\left[G_1^{(n-I)}(X) E\left[Y_1^{(n-I)} | Y_1^{(n-I)} < X\right]\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{(n-I)}(x) E\left[Y_1^{(n-I)} | Y_1^{(n-I)} < x\right] g_1^{(I)}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} y g_1^{(n-I)}(y) g_1^{(I)}(x) dy dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{y}^{\infty} g_1^{(I)}(x) dx\right) y g_1^{(n-I)}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - G_1^{(I)}(y)\right) y g_1^{(n-I)}(y) dy.
\end{aligned}$$

Por otra parte, lo que pagan los $N-I$ postores de fuera del cártel no varía respeto al caso en el que no haya colusión y es igual a $\int_{-\infty}^{\infty} y g_1^{(n-1)}(y)(1-G_1(y)) dy$. Por lo tanto, la ganancia esperada del vendedor en este caso es,

$$E[R] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - G_1^{(I)}(y)\right) y g_1^{(n-I)}(y) dy + (N-I) \int_{-\infty}^{\infty} y g_1^{(n-1)}(y)(1 - G_1(y)) dy.$$

Ejemplo 2.2: Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0,1]$. En este caso, el jugador del cártel paga una cantidad con valor esperado,

$$E\left[m_C(X)\right] = (n-I)\int_0^1 \left(1-y^I\right) y^{n-I}dy = (n-I)\left(\frac{1}{n-I+1}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{(n-I)I}{(n-I+1)(n+1)}.$$

Y los de fuera del cártel, $\frac{n-1}{n(n+1)}$, que se obtiene a partir del ejemplo la sección 2.6.

En efecto, el jugador del cártel paga menos que los de fuera, ya que $\frac{1}{I}\frac{(n-I)I}{(n-I+1)(n+1)} < \frac{n-1}{n(n+1)}$. Por tanto, la ganancia esperada del vendedor es

$$E\left[R\right] = \frac{(n-I)I}{(n-I+1)(n+1)} + (n-I)\frac{n-1}{n(n+1)} = \frac{(n-I)(n^2+I-1)}{n(n-I+1)(n+1)} < \frac{n-1}{n+1}, \text{ para todo } I>1,$$

por lo que la ganancia esperada del vendedor es menor que cuando los jugadores no cooperaban, como cabía esperar.

Como hemos visto, la presencia del cártel supone una pérdida para el vendedor. Una forma que tiene el vendedor de contrarrestar la pérdida es utilizar el precio de reserva adaptado a esta situación. Veamos cuál es la ganancia del vendedor cuando asigna un precio de reserva r. El objeto es vendido si y solo si el valor más alto, $Y_1^{(n)}$ es mayor que el precio de reserva r. Si además, $Z^I =$ segundo máximo de $(Y_1^I, X_{I+1}, \ldots, X_n)$ es mayor que r, entonces como estamos en la subasta de Vickrey, el objeto es vendido por Z^I; si no, es vendido por el precio de reserva r.

Denotemos H^I a la función de distribución de Z^I con función de densidad h^I.

Por simplicidad consideremos que el vendedor no recibe nada si el objeto no se vende, esto es $x_0 = 0$. El precio de venta que el vendedor recibe es $r\mathbb{1}_{\{Z^I\le r\le Y_1^{(n)}\}} + Z^I\mathbb{1}_{\{Z^I\ge r\}}$, con esperanza igual a $rP\left(Z^I \le r \le Y_1^{(n)}\right) + \int_r^\omega zh^I(z)dz$. El cálculo de la probabilidad se encuentra en el Apéndice D.2 y se obtiene $P\left(Z^I \le r \le Y_1^{(n)}\right) = H^I(r) - G_1^{(n)}(r)$. Por lo que el precio de venta esperado es,

$$r\left(H^I(r) - G_1^{(n)}(r)\right) + \int_r^\omega zh^I(z)dz.$$

El precio de reserva óptimo r debe satisfacer la ecuación de la derivada igualada a 0,

$$H^I(r) - G_1^{(n)}(r) + r\left(h^I(r) - g_1^{(n)}(r)\right) - rh^I(r) = H^I(r) - G_1^{(n)}(r) - rg_1^{(n)}(r) = 0. \tag{2.12}$$

Ejemplo 2.3: Supongamos que hay n compradores con valores X_i que están uniforme e independientemente distribuidos en $[0,1]$. Además, vamos a suponer que I de ellos participan en la colusión y cooperan juntos, sin pérdida de generalidad, los postores $1,\ldots,I$.

Supongamos que el vendedor establece un precio de reserva r. Podemos encontrar el precio óptimo resolviendo la ecuación (2.12). Para ello, primero calculemos la distribución de Z^I, que es H^I. (Los cálculos desarrollados se encuentran en el Apéndice D.3.1).

$$H^I(t) = P\left(\text{segundo máximo}\{Y_1^I, X_{I+1},\ldots,X_n\} \le t\right) = t^{n-I} + (n-I)t^{n-1}(1-t).$$

Así, podemos sustituir en la ecuación (2.12) y resolverla,

$$r^{n-I} + (n-I)r^{n-1}(1-r) - r^n - nr^n = 0.$$

Esta ecuación tiene una única raíz. Se encuentra en el Apéndice D.3.2 la demostración y un programa en R que calcula la raíz para cada valor de n y de I. También se encuentra en el Apéndice D.3.2 el precio de reserva óptimo para distintos valores de n y de I. Observándolos concluimos que el precio de reserva aumenta según aumentan los participantes que realizan colusión, como cabía esperar.

Capítulo 3

Extensiones

Hasta ahora hemos supuesto, entre otras hipótesis, neutralidad al riesgo, se busca maximizar el beneficio esperado, y valores privados, la situación en la que los valores del resto de postores no afectarían a uno concreto aunque los conociese. En este capítulo vamos a relajar estas condiciones. En la primera sección estudiaremos el efecto que tiene relajar la hipótesis de neutralidad al riesgo en la ganancia esperada en la subasta de Vickrey y al primer precio. En la segunda sección, supondremos valoraciones comunes y estudiaremos las estrategias de equilibrio en la subasta al primer precio y en la inglesa.

3.1. Compradores aversos al riesgo

Introduzcamos primero el término de *función de utilidad.* Esta función describe las preferencias en distintas cantidades de distintos bienes.

La hipótesis de neutralidad al riesgo del capítulo 2 quiere decir que la función de utilidad de cada postor es la identidad, es decir, es igual a su beneficio. Sin embargo, esto puede no ser así y la utilidad puede ser una función del beneficio que no sea la identidad. De hecho, en este caso en el que los compradores son aversos al riesgo, la función de utilidad $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es cóncava, satisfaciendo $u(0) = 0, u' > 0$ y $u'' < 0$. Además, supondremos que esta función es continua y diferenciable. Ahora, cada postor busca maximizar su utilidad esperada en lugar de sus beneficios esperados. Supondremos que todos los compradores tienen la misma función de utilidad u, de forma que en la subasta al primer precio la función de beneficio cuando apuestan b_i es,

$$u_i = \begin{cases} u(x_i - b_i) & \text{si } b_i > \max\limits_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{si } b_i < \max\limits_{j \neq i} b_j \end{cases}$$

y en la de Vickrey,

$$u_i = \begin{cases} u(x_i - \max\limits_{j \neq i} b_j) & \text{si } b_i > \max\limits_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{si } b_i < \max\limits_{j \neq i} b_j \end{cases}$$

Proposición 3.1. *Con valores simétricos e independientemente distribuidos, la ganancia esperada en la subasta al primer precio es mayor que en la de Vickrey.*

Demostración. Primero cabe notar que con aversión al riesgo la estrategia de apostar el propio valor sigue siendo débilmente dominante en la subasta de Vickrey. Por lo tanto, la ganancia esperada será la misma que en la situación de neutralidad al riesgo.

Para analizar la subasta al primer precio, supongamos que las estrategias de equilibrio en esta situación son dadas por una función creciente y diferenciable, $\gamma : [0, \omega] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\gamma(0) = 0$.

Dado un valor x, el problema de cada postor es elegir $z \in [0, \omega]$ y apostar una cantidad $\gamma(z)$ para maximizar la utilidad esperada, $G_1^{(n-1)}(z)u(x-\gamma(z))$. Para maximizar, derivamos con respecto a z,

$$g_1^{(n-1)}(z)u(x-\gamma(z)) - G_1^{(n-1)}(z)u'\left(x-\gamma(z)\right)\gamma'(z) = 0.$$

En un equilibrio simétrico debe ser óptimo, $z = x$,

$$\gamma'(x) = \frac{u(x-\gamma(x))}{u'(x-\gamma(x))}\frac{g_1^{(n-1)}(x)}{G_1^{(n-1)}(x)}. \tag{3.1}$$

Con neutralidad al riesgo tenemos $u(x) = x$ y la ecuación anterior se transforma en,

$$\beta'(x) = (x-\beta(x))\frac{g_1^{(n-1)}(x)}{G_1^{(n-1)}(x)},$$

donde $\beta(.)$ denota la estrategia de equilibrio con compradores neutrales al riesgo.

Vamos a demostrar ahora que $\frac{u(x-\gamma(x))}{u'(x-\gamma(x))} > x - \gamma(x)$.

Como u es continua en $[0, x-\gamma(x)]$ y diferenciable en $(0, x-\gamma(x))$, por el Teorema del Valor Medio,

$$\frac{u(x-\gamma(x)) - u(0)}{x-\gamma(x)} = u'(a),$$

para $a \in (0, x-\gamma(x))$.

Como $u'' < 0$, entonces u' es decreciente, así $u'(a) > u'\left(x-\gamma(x)\right)$. Teniendo en cuenta también que $u(0) = 0$,

$$\frac{u(x-\gamma(x))}{u'(x-\gamma(x))} > x - \gamma(x), \tag{3.2}$$

ya que $u' > 0$ y $x-\gamma(x) > 0$. Ahora, continuamos con la demostración y usando (3.2) obtenemos,

$$\gamma'(x) > (x-\gamma(x))\frac{g_1^{(n-1)}(x)}{G_1^{(n-1)}(x)}, \text{ para todo } x \in (0, \omega).$$

En el Apéndice D.4 se demuestra que la desigualdad anterior implica $\beta(x) < \gamma(x)$, por lo menos para un intervalo $(x_2, x_3) \subset (0, \omega)$.

Entonces, podemos concluir que en la subasta al primer precio, la aversión al riesgo causa un aumento en la estrategia de equilibrio. Como las ofertas incrementan, las ganancias esperadas también. Usando el teorema de equivalencia de ingresos y que las ganancias esperadas en la subasta al segundo precio no se ven afectadas por la aversión al riesgo, deducimos que la ganancia esperada en la subasta al primer precio es mayor que en la de al segundo precio.

$\square$

Ejemplo 3.1: Consideremos un ejemplo con dos compradores y función de utilidad $u(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$.

La estrategia simétrica de equilibrio en la subasta al primer precio es la solución de la ecuación diferencial (3.1),

$$\gamma'(x) = \frac{u(x-\gamma(x))}{u'(x-\gamma(x))}\frac{g_1^{(n-1)}(x)}{G_1^{(n-1)}(x)} = \frac{(x-\gamma(x))^\alpha}{\alpha(x-\gamma(x))^{\alpha-1}}\frac{(n-1)\left(F(x)\right)^{n-2}f(x)}{(F(x))^{n-1}}. \tag{3.3}$$

De donde obtenemos, simplificando y con $n = 2$,

$$\gamma'(x)F(x) = \left(\frac{x-\gamma(x)}{\alpha}\right)f(x).$$

Como podemos observar es una ecuación diferencial ordinaria de la forma $\gamma'(x)+p(x)\gamma(x)=q(x)$,

$$\gamma'(x)+\frac{1}{\alpha}\frac{f(x)}{F(x)}\gamma(x)=\frac{x}{\alpha}\frac{f(x)}{F(x)}.$$

Para resolverla utilizamos $F^{\frac{1}{\alpha}}(x)$ como factor integrante (obtenido en el Apéndice D.5.1) y multiplicamos toda la ecuación por este,

$$\gamma'(x)F^{\frac{1}{\alpha}}(x)+\frac{1}{\alpha}\gamma(x)F^{\frac{1}{\alpha}-1}(x)f(x)=\frac{x}{\alpha}F^{\frac{1}{\alpha}-1}(x)f(x).$$

Cabe observar que la parte izquiera de la igualdad es la derivada de la función $\gamma(x)F^{\frac{1}{\alpha}}(x)$, así reescribimos,

$$\frac{d}{dx}\left[\gamma(x)F^{\frac{1}{\alpha}}(x)\right]=\frac{x}{\alpha}F^{\frac{1}{\alpha}-1}(x)f(x).$$

Por tanto, integrando de 0 a x, y teniendo en cuenta que $\gamma(0)=0$, obtenemos

$$\gamma(x)F^{\frac{1}{\alpha}}(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x \tau F^{\frac{1}{\alpha}-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Definimos $F_\alpha=F^{\frac{1}{\alpha}}$, que es función de distribución por serlo F y podemos calcular su función de densidad $f_\alpha(x)=\frac{1}{\alpha}F^{\frac{1}{\alpha}-1}(x)f(x)$. Así, podemos reescribir la ecuación anterior,

$$\gamma(x)=\frac{1}{F_\alpha(x)}\int_0^x \tau f_\alpha(\tau)d\tau,$$

que tiene la misma forma que la estrategia simétrica de equilibrio de la subasta al primer precio con postores neutrales al riesgo, que aparece en (2.4).

Podemos concluir que la estrategia de equilibrio con 2 postores con función de utilidad $u(z)=z^\alpha$ cuyos valores siguen la distribución F es la misma que la estrategia de equilibrio con 2 postores neutrales al riesgo cuyos valores siguen la distribución F_α.

Lo que pagan los postores en la subasta al primer precio neutrales al riesgo cuando hay 2 postores y con distribución F_α es $m^N(x)=F_\alpha(x)\beta(x)$. Y lo que pagan los postores en la subasta al primer precio aversos al riesgo cuando hay 2 postores y con distribución F es $m^R(x)=F(x)\gamma(x)$. En esta situación teníamos que $\beta(x)=\gamma(x)$, pero como $F_\alpha\leq F$, tenemos que $m^N(x)\leq m^R(x)$. Así, la ganancia esperada con postores aversos al riesgo es mayor que con postores neutrales.

Ejemplo 3.2: Vamos a realizar generalizar la situación anterior con un número n de compradores, la misma función de utilidad $u(x)=x^\alpha$ con $\alpha\in(0,1)$ y ahora vamos a especificar la función de distribución, $F(x)=x$, $0<x<1$. En este caso, la ecuación a resolver a partir de (3.3) es

$$\gamma'(x)=\frac{(x-\gamma(x))}{\alpha}\frac{(n-1)}{x},\ \text{con } \gamma(0)=0.$$

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria se obtiene de manera muy similar a como lo hemos hecho en el Ejemplo anterior, el desarrollo se encuentra en el Apéndice D.6,

$$\gamma(x)=\frac{(n-1)}{n-1+\alpha}x>\frac{(n-1)}{n}x,$$

que es lo que se puja cuando no hay aversión al riesgo. Así, la ganancia esperada del vendedor en esta situación,

$$\frac{(n-1)}{n-1+\alpha}E\left[Y_1^{(n)}\right]=\frac{(n-1)}{(n-1+\alpha)}\frac{n}{(n+1)},$$

que es mayor que la ganancia cuando no hay aversión al riesgo.

Cabe destacar que, aunque no están relacionadas, la estrategia de equilibrio en este ejemplo $\gamma(x)=\frac{(n-1)}{n-1+\alpha}x$ es igual a la estrategia de equilibrio de la mixtura, que obtuvimos en la ecuación (2.10) de la sección Ejemplo 2.6.

3.2. Subastas con valoraciones comunes

En esta sección, los postores no conocen el valor exacto del objeto porque depende también de las señales del resto de postores. Para conocer el valor, tienen que realizar estimaciones durante la subasta o incluso al acabarla, debido a que en esos momentos pueden obtener información útil sobre las señales de los postores. Uno de estos eventos es el anuncio de que el postor ha ganado la subasta. Esta estructura es la de valoraciones comunes.

La información privada del postor i se resume como los valores que toma la variable aleatoria $X_i \in [0,\omega]$ y se llama la señal del postor i. Supondremos que la función de densidad conjunta de las señales f, definida en $[0,\omega]^n$, es una función simétrica en sus argumentos.

Para modelar esta situación vamos a realizar una versión sencilla. Supondremos que el valor real del objeto es común para todos los postores y se puede calcular a partir la función $u : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, de forma que sabiendo las señales de cada postor, se puede obtener el valor real del objeto $u(x_1,\ldots,x_n)$, que es aleatorio al ser aleatorias las señales de cada postor. Además, definimos la función

$$v(x,y) = E\left[u(X_1,\ldots,X_n)|X_1 = x, Y_1^{(n-1)} = y\right],$$

como la esperanza de la valoración cuando la señal que recibe el postor 1 es x y la señal más grande entre el resto de postores es y. Esta función es la misma para todos los postores.

Afiliación

En este capítulo vamos a permitir que las señales de los postores estén correlacionadas. De hecho, supondremos que las señales $X_1,\ldots,X_n$ están positivamente afiliadas. La afiliación es una forma fuerte de correlación positiva y, ampliamente, significa que si un conjunto de X_i es grande, entonces es más probable que el resto de X_j sean también grandes. Vamos a ver tres implicaciones de afiliación que nos son sufucientes para argumentar este capítulo.

- Primero, si las variables $X_1,\ldots,X_n$ están afiliadas, entonces las variables $X_1, Y_1^{(n-1)}, Y_2^{(n-1)}$, $\ldots, Y_{n-1}^{(n-1)}$ también están afiliadas.

- Sea $G_1^{(n-1)}(.|x)$ la distribución de $Y_1^{(n-1)}$ condicionada a $X_1 = x$. Entonces, el hecho de que X_1 y $Y_1^{(n-1)}$ estén afiliadas implica que si $x' > x$, entonces $G_1^{(n-1)}(.|x')$ domina $G_1^{(n-1)}(.|x)$ en términos de la tasa de riesgo inversa, esto es, para todo y,

$$\frac{g_1^{(n-1)}(y|x')}{G_1^{(n-1)}(y|x')} \geq \frac{g_1^{(n-1)}(y|x)}{G_1^{(n-1)}(y|x)}. \tag{3.4}$$

- Por último, si γ es una función creciente, entonces $x' > x$ implica

$$E\left[\gamma\left(Y_1^{(n-1)}\right)|X_1 = x'\right] \geq E\left[\gamma\left(Y_1^{(n-1)}\right)|X_1 = x\right]. \tag{3.5}$$

De la ecuación (3.4) obtenemos que $v(x,y)$ es no decreciente en x. De hecho, supondremos que es estrictamente creciente en x y que $v(0,0) = 0$.

3.2.1. Subasta al primer precio

Vamos a estudiar de forma más desarrollada la subasta al primer precio. Empezaremos estudiando la estrategia simétrica de equilibrio de este formato de subasta.

Supongamos que todos los postores, excepto, digamos el n, siguen la estrategia β creciente y diferenciable. Llamemos en esta sección $G(.|x)$ a la distribución de $Y_1^{(n-1)}$ condicionado a $X_1 = x$

y sea $g(.|x)$ la función de densidad asociada. El beneficio esperado del comprador n con señal x, y que apuesta $\beta(z)$,

$$\Pi(z,x) = \int_0^z (v(x,y) - \beta(z))g(y|x)dy = \int_0^z v(x,y)g(y|x)dy - \beta(z)G(z|x).$$

Derivando e igualando a 0,

$$v(x,z)g(z|x) - \beta'(z)G(z|x) - \beta(z)g(z|x) = 0.$$

En un equilibrio simétrico, lo óptimo será $z = x$, así,

$$\beta'(x) = (v(x,x) - \beta(x))\frac{g(x|x)}{G(x|x)}, \tag{3.6}$$

con la condición $\beta(0) = 0$. La solución de esa ecuación diferencial con la condición $\beta(0) = 0$, la recogemos en la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *La estrategia simétrica de equilibrio en la subasta al primer precio está dada por*

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x),$$

donde $L(y|x) = e^{\left(-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt\right)}$.

Demostración. Podemos encontrar en el Apéndice D.7 la demostración de que $L(.|x)$ es una función de distribución con soporte $[0,x]$.

Ahora, si $x' > x$, se tiene $L(y|x') \leq L(y|x)$. Por lo que la distribución $L(y|x')$ domina estocásticamente a la distribución $L(.|x)$.

Sabemos que $L(y|x)$ es una función de distribución, digamos de una variable aleatoria Y en $[0,x]$, así $\beta^I(x)$ es la esperanza de una función de Y. Además, como $L(.|x')$ domina estocásticamente a $L(.|x)$ cuando $x' > x$, tenemos que la esperanza de una función creciente de Y es más grande cuando Y tiene la distribución $L(.|x')$ que cuando tiene la distribución $L(.|x)$. Como $v(y,y)$ es una función creciente de Y, tenemos $\beta^I(x') > \beta^I(x)$ y así β^I es creciente en x.

Ahora consideremos a un comprador que apuesta $\beta^I(z)$ cuando su señal es x. El beneficio esperado se puede escribir como,

$$\Pi(z,x) = \int_0^z v(x,y)g(y|x)dy - \beta^I(z)G(z|x).$$

Derivando con respecto a z, tenemos,

$$\frac{d}{dz}\Pi(z,x) = v(x,z)g(z|x) - \beta^{I'}(z)G(z|x) - \beta^I(z)g(z|x).$$

Lo que es lo mismo,

$$\frac{d}{dz}\Pi(z,x) = G(z|x)\left[(v(x,z) - \beta^I(z))\frac{g(z|x)}{G(z|x)} - \beta^{I'}(z)\right].$$

Si $z < x$, debido a la afiliación tenemos, $\frac{g(z|x)}{G(z|x)} \geq \frac{g(z|z)}{G(z|z)}$. Además, si $z < x$, también $v(x,z) > v(z,z)$. Con esto, obtenemos,

$$\frac{d}{dz}\Pi(z,x) > G(z|x)\left[(v(z,z) - \beta^I(z))\frac{g(z|z)}{G(z|z)} - \beta^{I'}(z)\right] = 0,$$

por (3.6). De manera similar, si $z > x$, $\frac{d}{dz}\Pi(z,x) < 0$. Así, el beneficio se maximiza con $z = x$. □

3.2.2. Subasta inglesa

Para hacer posible el estudio de la teoría que hay detrás de la subasta inglesa en este modelo de valores comunes, en lugar de estudiar las normas de la subasta real, nos vamos a enfocar en un modelo aproximado, que nos permita un mejor estudio.

En este modelo, el vendedor fija el precio a 0 y gradualmente lo va aumentando. El precio actual es observado por todos y, además, los postores muestran su voluntad de comprar, levantando una mano, sosteniendo un cartel o presionando un botón que controla una luz. Lo más importante de esto es que en cualquier momento el grupo de postores activos es comúnmente conocido y que los postores activos tienen la información de a qué precio se han ido retirando los demás. Los postores pueden abandonar la subasta a cualquier precio, pero una vez que lo hacen no pueden volver a participar. La subasta termina cuando hay solo un postor activo.

En la vida real, en la subasta inglesa los posotres no tienen por qué saber las personas que continúan o que ya se han retirado en cada momento, ni el precio al que lo hacen. Pero, en este capítulo vamos a centrarnos en este modelo aproximado.

Con valores comunes ya no son equivalentes la subasta inglesa y la de Vickrey. La diferencia es que en la inglesa los postores saben los precios a los que los participantes se van retirando. Esto permite a los postores activos modificar sus estimaciones sobre el valor real del objeto. Sin embargo, con la subasta al segundo precio no se dispone de esta información debido a su propio formato.

Una estrategia simétrica de equilibrio es una colección $\boldsymbol{\beta}=\left(\beta^n, \beta^{n-1}, \ldots, \beta^2\right)$ de $n-1$ funciones tales que $\beta^k : [0,1] \times \mathbb{R}_+^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, para $1 < k \leq n$, donde $\beta^k(x, p_{k+1}, \ldots, p_n)$ es el precio al que el comprador k abandonará si el número de postores activos es k, su propia señal es x y los precios a los que los $n-k$ postores abandonaron son $p_{k+1} \geq p_{k+2} \geq \cdots \geq p_n$.

Ahora consideremos las siguientes estrategias para los postores, cuando todos están activos, sea

$$\beta^n(x) = u(x, \ldots, x), \tag{3.7}$$

siendo $\beta^n(.)$ continua y creciente.

Supongamos que el comprador n es el primero en abandonar la subasta al precio p_n y sea x_n la única señal tal que $\beta^n(x_n) = p_n$. Cuando este se retira, supongamos que los restantes $n-1$ postores activos siguen la estrategia

$$\beta^{n-1}(x, p_n) = u(x, \ldots, x, x_n),$$

donde $\beta^n(x_n) = p_n$. La función $\beta^{n-1}(., p_n)$ también es continua y creciente.

Así, siguiendo recursivamente para todo k tal que $2 \leq k < n$, supongamos que los postores $n, n-1, \ldots, k+1$ se han retirado de la subasta a los precios $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_{k+1}$. Los postores restantes activos siguen la estrategia

$$\beta^k(x, p_{k+1}, \ldots, p_n) = u(x, \ldots, x, x_{k+1}, \ldots, x_n), \tag{3.8}$$

donde $\beta^{k+1}(x_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_n) = p_{k+1}$.
Enunciamos sin demostración, el siguiente resultado.

Proposición 3.3. *La estrategia β definida en 3.7 y 3.8 es una estrategia simétrica de equilibrio en la subasta inglesa.*

Ejemplo 3.3: Vamos a considerar $u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, es decir, cuando los postores evalúan el objeto con valores $x_1, \ldots, x_n$, el valor "*real*" es el promedio.

Siguiendo la estrategia de la proposición anterior con $x_1 > \cdots > x_n$, dado un valor x, cuando todos están activos $p_n = \beta^n(x_n) = u(x_n, \ldots, x_n) = x_n$, por lo que el postor n se retirará cuando el precio de la subasta alcance a su valor x_n.

En cuanto al postor $n-1$, si el postor n se ha ido en $p_n(=x_n)$, entonces el postor $n-1$ se retirará cuando

$$p_{n-1} = \beta^{(n-1)}(x_{n-1}, p_n) = u(x_{n-1}, \dots, x_{n-1}, x_n) = \frac{(n-1)x_{n-1} + x_n}{n},$$

es decir, si el precio alcanza $\frac{(n-1)x_{n-1}+x_n}{n}$. El postor $n-2$ se irá en

$$p_{n-2} = \beta^{n-2}(x_{n-2}, p_{n-1}, p_n) = \frac{(n-2)x_{n-2} + x_{n-1} + x_n}{n}.$$

El postor 2 abandonará en

$$p_2 = \beta^2(x_2, p_3, \dots, p_n) = \frac{2x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n},$$

y este es el precio que pagará el postor 1, ganador de la subasta y, por tanto, lo que recibe el comprador. Es decir, la esperanza de lo que cobra el vendedor es

$$\frac{1}{n}E\left[2Y_2^{(n)} + Y_3^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}\right] = \frac{1}{n}E\left[Y_1^{(n)} + Y_2^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}\right] + \frac{1}{n}\left(-E\left(Y_1^{(n)}\right) + E\left(Y_2^{(n)}\right)\right)$$
$$= E(X) + \frac{1}{n}\left(E\left(Y_2^{(n)}\right) - E\left(Y_1^{(n)}\right)\right).$$

Si suponemos X_i uniformes en $[0,1]$ independientes, entonces la esperanza de lo que va a ganar el vendedor es igual a $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}(\frac{n-1}{n+1} - \frac{n}{n+1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}$.

Un ejemplo de la subasta inglesa dando valores reales se encuentra en el Apéndice D.8.1.

Analicemos ahora la subasta al primer precio, tenemos que cada uno apuesta

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x),$$

donde

$$L(y|x) = e^{\left(-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt\right)}.$$

Como $G(.|x)$ es la distribución condicionada de $\max(X_2, \dots, X_n)$ dado $X_1 = x$ y estamos suponiendo independencia, $G(t|t) = G(t)$, la función de distribución del máximo de $(X_2, \dots, X_n)$, es decir, $\left(G_1^{(n-1)}(t)\right)$ y

$$L(y|x) = e^{\left(-\int_y^x \frac{g(t)}{G(t)}dt\right)} = e^{\ln\left(\frac{G(y)}{G(x)}\right)} = \frac{G(y)}{G(x)}.$$

El estudio desarrollado de cuánto es $v(x,x)$ se encuentra en el Apéndice D.8.2, en el que vemos $v(x,x) = x\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)$. Por lo que,

$$\beta^I(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) y \frac{g(y)}{G(x)}dy = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) E\left[Y_1^{(n-1)} | Y_1^{(n-1)} < x\right].$$

Es decir, se apuesta como con valores privados pero multiplicando por $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$. La esperanza de lo que gana el vendedor es $E\left[\beta^I\left(Y_1^{(n-1)}\right)\right]$, que es como con valores privados pero multiplicando por $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$, es decir, $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\frac{n-1}{n+1}$, que es igual a la inglesa.

Aunque no hayamos estudiado la teoría de la subasta de Vickrey, su estrategia de equilibrio es $\beta^{II}(x) = v(x,x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)x$, que se obtiene a partir de la de primer precio. Como lo que gana el vendedor es la segunda apuesta más alta, tenemos,

$$E\left[R^{II}\right] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) E\left[Y_2^{(n)}\right] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\frac{n-1}{n+1},$$

que es igual a la de primer precio y a la inglesa. Esto se debe a que las señales son independientes.

Bibliografía

[1] Krishna, Vijay . *Auction Theory.* Academic Press, 2002.

[2] Milgrom, Paul . *Putting Auction Theory to Work.* University of Cambridge, 2003.

[3] Moreno, Diego . Auctions. *Universidad Carlos III de Madrid.* https://www.eco.uc3m.es/docencia/economiainformacion/notes/auctions.pdf.

[4] Spirakis, Paul G. . Introduction to computational game theory. *Department of Computer Science University of Liverpool.* https://cgi.csc.liv.ac.uk/~spirakis/COMP323-Fall2017/week06.pdf.

Apéndice A

Demostración equilibrio mixtura

A.1. Ecuación diferencial

Queremos resolver, en primer lugar, la ecuación diferencial ordinaria

$$xg_1^{(n-1)}(x) - \alpha\beta'(x)G_1^{(n-1)}(x) - \beta(x)g_1^{(n-1)}(x) = 0.$$

Lo que es lo mismo

$$\beta'(x) + \frac{g_1^{(n-1)}(x)}{\alpha G_1^{(n-1)}(x)}\beta(x) = \frac{xg_1^{(n-1)}(x)}{\alpha G_1^{(n-1)}(x)},$$

que tiene la forma $\beta'(x) + p(x)\beta(x) = q(x)$. En el curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, vimos que se puede resolver encontrando un factor integrante $\mu(x)$, que se puede calcular como sigue

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\left(\frac{1}{\alpha}\int \frac{g_1^{(n-1)}(x)}{G_1^{(n-1)}(x)}dx\right)} = \left(G_1^{(n-1)}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Así, multiplicamos la ecuación diferencial ordinaria por este factor, obteniendo

$$\beta'(x)\left(G_1^{(n-1)}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha}\beta(x)g_1^{(n-1)}(x)\left(G_1^{(n-1)}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{1}{\alpha}xg_1^{(n-1)}(x)\left(G_1^{(n-1)}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

Lo que es lo mismo,

$$\frac{d}{dx}\left[\beta(x)\left(G_1^{(n-1)}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = \frac{1}{\alpha}xg_1^{(n-1)}(x)\left(G_1^{(n-1)}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

Así pues,

$$\beta(x)\left(G_1^{(n-1)}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\int_0^x yg_1^{(n-1)}(y)\left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}dy.$$

Integrando por partes y despejando obtenemos la estrategia del enunciado,

$$\beta(x) = x - \frac{1}{\left(G_1^{(n-1)}(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^x \left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}}dy.$$

A.2. Ecuación de beneficio esperado

Por otra parte, el beneficio esperado $\Pi(b, x)$ del postor con valor x y que puja $z = \beta^{-1}(b)$ es el calculado en (2.9),

$$\Pi(b, x) = xG_1^{(n-1)}(z) - \alpha\beta(z)G_1^{(n-1)}(z) - (1-\alpha)\int_0^z \beta(y)g_1^{(n-1)}(y)dy.$$

Sustituyendo la forma de β,

$$\Pi(b,x) = xG_1^{(n-1)}(z) - \alpha G_1^{(n-1)}(z)\left[z - \frac{1}{\left(G_1^{(n-1)}(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^z \left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}} dy\right]$$
$$- (1-\alpha)\int_0^z \left[y - \frac{1}{\left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^y \left(G_1^{(n-1)}(\tau)\right)^{\frac{1}{\alpha}} d\tau\right] g_1^{(n-1)}(y)dy.$$

Desarrollando obtenemos,

$$\Pi(b,x) = xG_1^{(n-1)}(z) - \alpha G_1^{(n-1)}(z)z + \frac{\alpha}{\left(G_1^{(n-1)}(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z \left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}} dy$$
$$- (1-\alpha)\left[\int_0^z yg_1^{(n-1)}(y)dy - \int_0^z \frac{g_1^{(n-1)}(y)}{\left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\left[\int_0^y \left(G_1^{(n-1)}(\tau)\right)^{\frac{1}{\alpha}} d\tau\right] dy\right].$$

Realizando Fubini,

$$\Pi(b,x) = xG_1^{(n-1)}(z) - \alpha G_1^{(n-1)}(z)z + \frac{\alpha}{\left(G_1^{(n-1)}(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z \left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}} dy$$
$$- (1-\alpha)\int_0^z yg_1^{(n-1)}(y)dy + (1-\alpha)\int_0^z \left(G_1^{(n-1)}(\tau)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left[\int_\tau^z g_1^{(n-1)}(y)\left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} dy\right] d\tau.$$

Resolviendo la última integral tenemos,

$$\Pi(b,x) = xG_1^{(n-1)}(z) - \alpha G_1^{(n-1)}(z)z + \frac{\alpha}{\left(G_1^{(n-1)}(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z \left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}} dy$$
$$- (1-\alpha)\int_0^z yg_1^{(n-1)}(y)dy$$
$$+ (1-\alpha)\int_0^z \left[\frac{\alpha\left(G_1^{(n-1)}(\tau)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(G_1^{(n-1)}(z)\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha-1} - \frac{\alpha\left(G_1^{(n-1)}(\tau)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(G_1^{(n-1)}(\tau)\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha-1}\right] d\tau.$$

Desarrollando el último término,

$$\Pi(b,x) = xG_1^{(n-1)}(z) - \alpha G_1^{(n-1)}(z)z + \alpha\left(G_1^{(n-1)}(z)\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}\int_0^z \left(G_1^{(n-1)}(y)\right)^{\frac{1}{\alpha}} dy$$
$$- (1-\alpha)\int_0^z yg_1^{(n-1)}(y)dy - \int_0^z \alpha\left(G_1^{(n-1)}(\tau)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(G_1^{(n-1)}(z)\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} d\tau + \int_0^z \alpha G_1^{(n-1)}(\tau)d\tau.$$

Simplificando,

$$\Pi(b,x) = xG_1^{(n-1)}(z) - \alpha G_1^{(n-1)}(z)z - (1-\alpha)\int_0^z yg_1^{(n-1)}(y)dy + \int_0^z \alpha G_1^{(n-1)}(\tau)d\tau.$$

Ahora resolviendo la primera integral por partes,

$$\Pi(b,x) = xG_1^{(n-1)}(z) - \alpha G_1^{(n-1)}(z)z - (1-\alpha)zG_1^{(n-1)}(z) + (1-\alpha)\int_0^z G_1^{(n-1)}(\tau)d\tau$$
$$+ \int_0^z \alpha G_1^{(n-1)}(\tau)d\tau.$$

Sacando factor común y eliminando lo que se puede simplificar,

$$\Pi(b,x) = G_1^{(n-1)}(z)(x-z) + \int_0^z G_1^{(n-1)}(\tau)d\tau.$$

Apéndice B

Desarrollo de la sección Ejemplo

B.1. Gráficas del Ejemplo

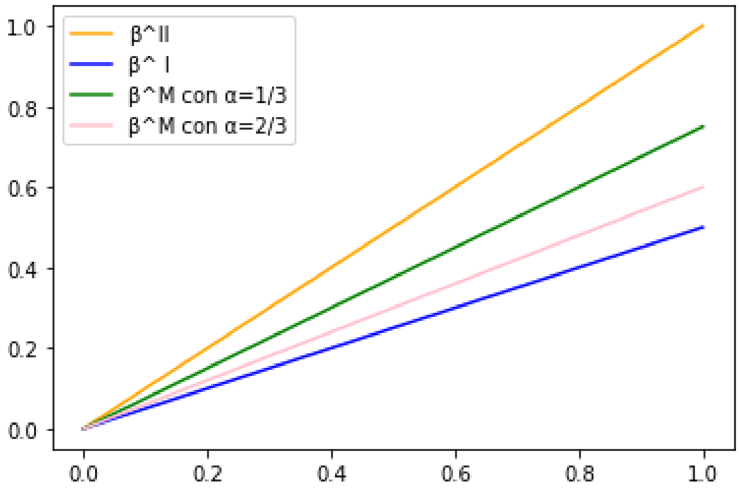

Figura B.1: Gráfica de las estrategias de los distintos tipos de subastas con 2 postores.

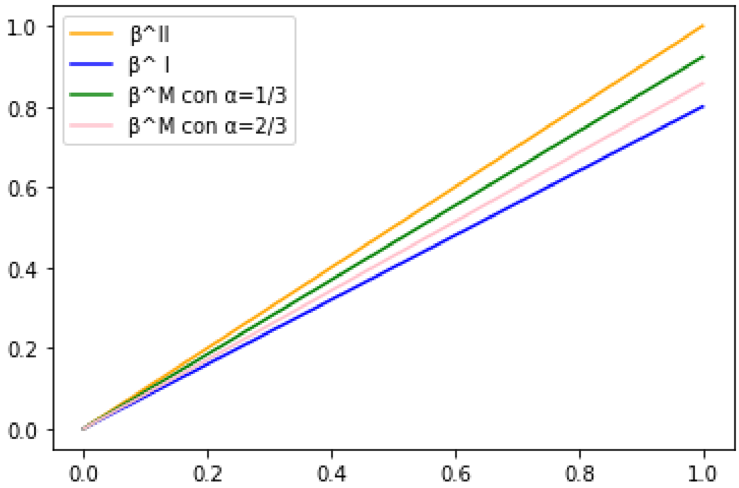

Figura B.2: Gráfica de las estrategias de los distintos tipos de subastas con 5 postores.

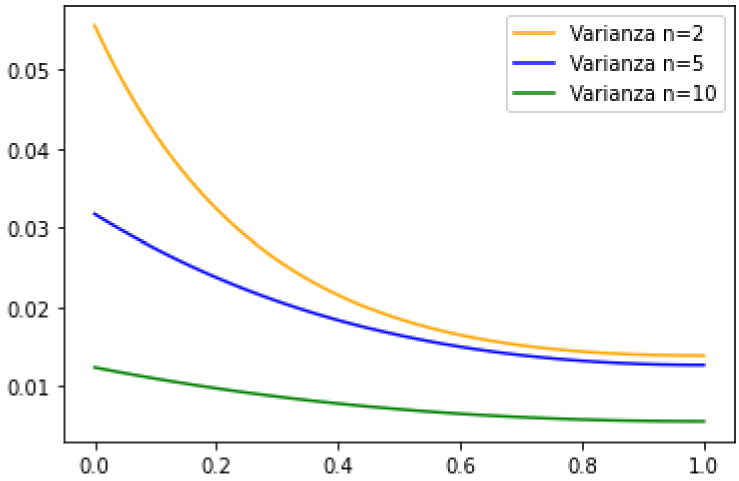

Figura B.3: Gráfica de la varianza de la ganancia del vendedor en la mixtura en función de alpha para distinto número de compradores.

B.2. Ganancia esperada

Como hemos argumentado anteriormente, la ganancia esperada del vendedor va a ser igual en los tres tipos de subastas, de hecho va a ser igual a $E\left[Y_2^{(n)}\right]$. Vamos a realizar aquí los cálculos de cada una por separado para ver que efectivamente se cumple esta propiedad.

En la subasta de Vickrey la ganancia del vendedor es el segundo valor más alto, por lo que la ganancia esperada se calcula exactamente igual que como hemos hecho argumentado en el Ejemplo.

Veamos ahora la subasta al primer precio. A partir de la estrategia de equilibrio, podemos calcular la ganancia del vendedor, que será el máximo de las pujas, $\frac{n-1}{n}\max\{X_1,\ldots,X_n\}$, y sabiendo que el máximo con la ley uniforme sigue una distribución $\beta(n,1)$, la ganancia esperada será

$$\frac{n-1}{n}E\left[Y_1^{(n)}\right]=\frac{n-1}{n+1}.$$

Finalmente, vamos a realizar los cálculos con la mixtura. Ahora, la ganancia del vendedor será α veces la oferta del valor más alto más $1-\alpha$ veces la del segundo valor más alto, es decir, $\alpha\frac{n-1}{n-1+\alpha}Y_1^{(n)}+(1-\alpha)\frac{n-1}{n-1+\alpha}Y_2^{(n)}$. Como sabemos, las distribuciones que siguen el máximo y el segundo máximo, podemos calcular la esperanza,

$$E\left[R^M\right]=\alpha\frac{n-1}{n-1+\alpha}E\left[Y_1^{(n)}\right]+(1-\alpha)\frac{n-1}{n-1+\alpha}E\left[Y_2^{(n)}\right]=\frac{n-1}{n+1}.$$

B.3. Varianza de la ganancia en la mixtura

Vamos a realizar también aquí los cálculos correspondientes para obtener la varianza de la ganancia del vendedor en la subasta mixtura. Hay que tener en cuenta que el máximo y el segundo máximo no son independientes, por tanto, debemos calcular primero la covarianza de estos dos.

$$Cov\left(Y_1^{(n)},Y_2^{(n)}\right)=E\left[Y_1^{(n)}Y_2^{(n)}\right]-E\left[Y_1^{(n)}\right]E\left[Y_2^{(n)}\right].$$

Para calcular la esperanza del producto tenemos que conocer la función de densidad conjunta,

$$f(x,y) = n(n-1)x^{n-2}\mathbb{1}_{\{x<y\}}.$$

Así,

$$E\left[Y_1^{(n)}Y_2^{(n)}\right] = \int_0^1\int_0^y xyn(n-1)x^{n-2}dxdy = \frac{n-1}{n+2}.$$

Con esto,

$$Cov\left(Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}\right) = \frac{n-1}{n+2} - \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} = \frac{n-1}{(n+2)(n+1)^2}.$$

Sabiendo la covarianza, podemos obtener de manera directa la varianza,

$$\begin{aligned}
&Var\left(\alpha\frac{n-1}{n-1+\alpha}Y_1^{(n)} + (1-\alpha)\frac{n-1}{n-1+\alpha}Y_2^{(n)}\right)\\
&= \alpha^2\frac{(n-1)^2)}{(n-1+\alpha)^2}Var(Y_1^{(n)}) + (1-\alpha)^2\frac{(n-1)^2}{(n-1+\alpha)^2}Var(Y_2^{(n)})\\
&+ \frac{2\alpha(1-\alpha)(n-1)^2}{(n-1+\alpha)^2}Cov(Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)})\\
&= \frac{\alpha^2(n-1)^2n + 2(1-\alpha)^2(n-1)^3)}{(n-1+\alpha)^2(n+1)^2(n+2)} + \frac{2\alpha(1-\alpha)(n-1)^3}{(n-1+\alpha)^2(n+1)^2(n+2)}\\
&= \frac{(n-1)^2}{(n-1+\alpha)^2(n+1)^2(n+2)}[\alpha^2n + 2n - 2n\alpha - 2 + 2\alpha].
\end{aligned}$$

Apéndice C

Análisis precio reserva

Analicemos más en profundidad el signo de $\phi(r) = 1-(r-x_0)\lambda(r)$. En primer lugar, notemos que si $r \leq x_0$, entonces $\phi(r) > 0$ y, por tanto, la ganancia esperada del vendedor es creciente en r, así que nunca se elegirá $r \leq x_0$.

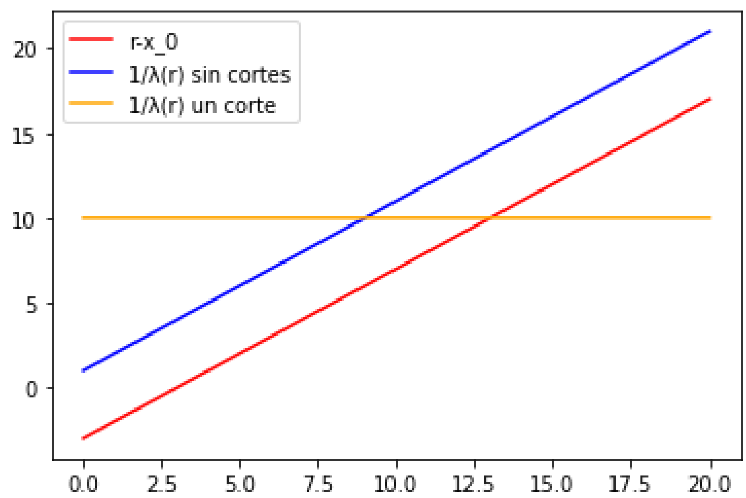

Figura C.1: Gráfica de las intersecciones de las funciones con distintos $\lambda(r)$.

Cuando $r > x_0$ el signo de $\phi(r)$ depende de $1-(r-x_0)\lambda(r)$. Veamos primero cuándo se anula esta función. Eso sucederá cuando $r - x_0$ sea igual a $\frac{1}{\lambda(r)}$. La función $\lambda(x)$ puede tener una forma arbitraria (con la condición de que sea mayor o igual que 0 y que tenga integral infinita). Por lo tanto, la igualdad anterior se puede cumplir para varias r, para una sola o para ninguna.

Para realizar la Figura C.1, hemos asignado un valor cualquiera $x_0 = 3$. Para realizar las distintas funciones $\frac{1}{\lambda(r)}$, hemos buscado funciones de distribución tales que $\frac{1}{\lambda(r)} = \frac{1-F(r)}{f(r)}$ satisfaciese alguna situación. Para la función azul, hemos utilizado $F(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$, con función de densidad $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ y $\lambda(r) = \frac{1}{r+1}$. Para la función amarilla, $F(x) = 1 - e^{-0.1x}$, $f(x) = 0.1e^{-0.1x}$ y $\lambda(r) = 0.1$.

El caso de que no se cumpla para ninguna significaría que el beneficio es creciente en r y que no se alcanzará máximo (en el caso de ω finito, la función crecerá hasta $r = \omega$, pero en ese punto es discontinua porque su ganancia esperada es 0). Este caso es el de la función azul que, como vemos en la Figura C.1, no tiene ningún punto de corte con $r - x_0$.

Ejemplo : Podemos realizar un ejemplo en el que no se alcanza máximo, utilizándose la misma función de distribución que para la gráfica de la función azul.

Sea X variable aleatoria definida en $[0,\infty)$ con función de distribución $F(x) = 1 - \frac{1}{x+1}, \quad x > 0$ (caso particular de la ditribución de Pareto) y con función de densidad $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Por tanto, tendremos $\lambda(x) = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x+1}$. Sea $x_0 = 1$, se tiene que $1 - (r - x_0)\lambda(r) = 1 - \frac{(r-1)}{r+1} = \frac{2}{r+1} > 0$ para todo r, por lo que la ganancia esperada crece con r. La razón es que la distribución de Pareto tiene cola pesada y el vendedor espera valores muy altos de las pujas, que crecen con el valor de r.

Sin embargo, si $\lambda(x)$ es no decreciente, entonces $\frac{1}{\lambda(x)}$ será decreciente o constante. En esta situación, tendremos garantizado que existe un único corte entre $r - x_0$ y $\frac{1}{\lambda(r)}$, es decir, un único valor de r que cumple la igualdad y para el que se alcanza el máximo del beneficio esperado por el vendedor; por lo menos exisistirá este r si ω es lo suficientemente grande como para que se produzca el corte entre las dos funciones. Fijándonos en la Figura C.1, vemos que la función constante, amarilla, solo corta una vez con $r - x_0$, lo mismo pasaría si la función fuese decreciente. También, cabe observar que si $\omega = 10$, entonces este corte no aparecería, por lo que no existiría precio de reserva óptimo.

Cabe destacar que el precio de reserva óptimo no depende del número de personas que participan en la subasta.

Apéndice D

Cálculos y demostraciones desarrolladas

D.1. Demstración análoga de la Proposición 2.2

Se puede argumentar de forma análoga que ofertar una cantidad $z_i > x_i$ tampoco aumenta el beneficio nunca . Podemos distinguir tres casos, si

- $z_i > x_i > p_i$, entonces ganaría de igual forma y el beneficio seguiría siendo $x_i - p_i$.
- $p_i > z_i > x_i$, entonces perdería de igual forma.
- $z_i > p_i > x_i$, entonces ganaría la subasta, pero tendría un beneficio negativo, una pérdida, ya que tendría que pagar un precio más alto que el de su valoración.

Por tanto, pujar un valor más alto tampoco aumenta nunca el beneficio y a veces lo disminuye.

D.2. Colusión con precio de reserva

Vamos a realizar el cálculo de la probabilidad $P\left(Z^I \leq r \leq Y_1^{(n)}\right)$. Para ello, llamemos $A = P\left(Y_1^{(n)} \geq r\right)$ y $B = P\left(Z^I \leq r\right)$, queremos calcular $P\left(A \cap B\right)$.

Podemos observar que $B^C \subseteq A$, así

$$P(A \cap B) = P(A) - P\left(B^C\right) = P\left(Y_1^{(n)} \geq r\right) - P\left(Z^I > r\right) = H^I(r) - G_1^{(n)}(r).$$

Por tanto, obtenemos

$$P\left(Z^I \leq r \leq Y_1^{(n)}\right) = H^I(r) - G_1^{(n)}(r).$$

D.3. Ejemplo 2.3

D.3.1. Desarrollo función $H^I(t)$

Veamos primero el desarrollo de la función de distribución $H^I(t)$.

$$\begin{aligned}
H^I(t) &= P\left(\text{segundo máximo}\{Y_1^I, X_{I+1}, \ldots, X_n\} \leq t\right) = P\left(Y_1^I \leq t, X_{I+1} \leq t, \ldots, X_n \leq t\right) \\
&+ P\left(Y_1^I > t, X_{I+1} \leq t, \ldots, X_n \leq t\right) + P\left(Y_1^I \leq t, X_{I+1} > t, \ldots, X_n \leq t\right) + \cdots \\
&+ P\left(Y_1^I \leq t, X_{I+1} \leq t, \ldots, X_n > t\right) \\
&= F^I(t)F^{n-I}(t) + (1 - F^I(t))F^{n-I}(t) + (n-I)F^I(t)F^{n-I-1}(t)(1 - F(t)) \\
&= F^n(t) + F^{n-I}(t)(1 - F^I(t)) + (n-I)F^{n-1}(t)(1 - F(t)) \\
&= F^{n-I}(t) + (n-I)F^{n-1}(t)(1 - F(t)) = t^{n-I} + (n-I)t^{n-1}(1-t).
\end{aligned}$$

D.3.2. Solución ecuación de grado n

Ahora queremos encontrar la solución de la siguiente ecuación,

$$r^{n-I} + (n-I)r^{n-1}(1-r) - r^n - nr^n = 0.$$

Veamos que esta ecuación tiene una única raíz,

$$r^{n-I}\left(1 + (n-I)r^{I-1}(1-r) - (n+1)r^I\right) = 0,$$

se cumple la igualdad a 0, si $r = 0$ o si

$$1 + (n-I)r^{I-1}(1-r) - (n+1)r^I = 0.$$

Estudiemos ahora

$$\varphi(r) = (2n - I + 1)r^I - (n-I)r^{I-1} - 1.$$

Tenemos que $\varphi(0) < 0$ y $\varphi(1) = n > 0$, por lo que, como es continua, existe al menos un $r \in (0,1)$ tal que $\varphi(r) = 0$.

Estudiemos ahora el signo de la derivada,

$$\varphi'(r) = (2n - I + 1)Ir^{I-1} - (n-I)(I-1)r^{I-2} = r^{I-2}\left((2n - I + 1)Ir - (n-I)(I-1)\right).$$

Por lo que tenemos que estudiar $(2n - I + 1)Ir - (n-I)(I-1)$. En $r = 0$, esa función es negativa; toma el valor 0 en $r_1 = \frac{nI-n-I^2+I}{2nI-I^2+I} < 1$ y luego sigue positiva. Por tanto, $\varphi(r)$ es primero decreciente, entre 0 y el punto r_1, y luego creciente. Por lo que existirá un único punto r para el que $\varphi(r) = 0$. Así, hemos argumentado que la ecuación $r^{n-I} + (n-I)r^{n-1}(1-r) - r^n - nr^n$ tiene una única raíz $r > 0$, que será el precio de reserva óptimo.

No se puede calcular de forma explícita esta raíz, pero podemos relizar un programa en R que calcule la raíz para cada valor de n y de I. El programa se puede observar en la Figura D.1.

Mediante el programa en R podemos obtener el precio de reserva óptimo para distintos valores de n y de I.

Si $n = 2$, $I = 2$, el precio de reserva óptimo es 0.577>0.5, siendo 0.5 el precio óptimo cuando los jugadores respetan las normas.

Si $n = 100$, $I = 4$, el precio óptimo es e^{-6}.

Si $n = 100$, $I = 35$, el precio óptimo es e^{-6}.

Si $n = 100$, $I = 60$, el precio óptimo es 0.92.

Si $n = 100$, $I = 80$, el precio óptimo es 0.944.

```
> funval=function(x,n,i)
+ {
+     return(x^(n-i)+(n-i)*x^(n-1)*(1-x)-(n+1)*x^n)
+ }
>
> valorn=10
> valori=4
> ropt=uniroot(funval,interval=c(0.000001,0.999999),n=valorn,i=valori)
> ropt$root
[1] 0.6109205
```

Figura D.1: Programa en RStudio para el cálculo de la raíz de la ecuación para cada valor de n y de I.

D.4. Parte demostración Proposición 3.1

Sea $\phi(x) = \gamma(x) - \beta(x)$ una función de clase C^1 que verifica $\phi(0) = 0$. Además, para todo $x \in (0, \omega)$ se tiene

$$\beta'(x) = (x - \beta(x))\frac{g_1^{(n-1)}(x)}{G_1^{(n-1)}(x)}$$
$$\gamma'(x) > (x - \gamma(x))\frac{g_1^{(n-1)}(x)}{G_1^{(n-1)}(x)},$$

de donde $\phi'(x) > -\phi(x)\frac{g_1^{(n-1)}(x)}{G_1^{(n-1)}(x)}$ para todo $x \in (0, \omega)$. Veamos en primer lugar que $\phi(x) \geq 0$ para todo $x \in (0, \omega)$. Supongamos que es falso y existe un $x_1 \in (0, \omega)$ con $\phi(x_1) < 0$. Como ϕ es continua, $\phi^{-1}(-\infty, 0)$ es abierto y, por tanto, existe un entorno de x_1 tal que $\phi(x) < 0$ en ese entorno. Sea $x_0 = \sup\{x < x_1 : \phi(x) \geq 0\}$. El conjunto anterior es no vacío y, por continuidad, $\phi(x_0) = 0$ y $x_0 \geq 0$. Así, tenemos el intervalo $[x_0, x_1]$, que cumple $\phi(x_0) = 0$, $\phi(x) < 0$ para todo $x \in (x_0, x_1]$. Como teníamos $\phi'(x) > -\phi(x)\frac{g_1^{(n-1)}(x)}{G_1^{(n-1)}(x)}$ y $\phi(x) < 0$, debe ser $\phi'(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, x_1]$, lo que es una contradicción porque

$$\phi(x_1) = \phi(x_0) + (x_1 - x_0)\phi'(x) > 0, \text{ para algún } x \in (x_0, x_1).$$

Por lo tanto, no existe ningún $x_1 \in (0, \omega)$ tal que $\phi(x_1) < 0$. Con esto, hemos probado que $\phi(x) \geq 0$ para todo $x \in (0, \omega)$. Ahora vamos a probar que existe un intervalo (x_2, x_3) tal que $\phi(x) > 0$ para todo $x \in (x_2, x_3)$, que es suficiente para que la ganancia esperada sea mayor.

Para ver que existe tal intervalo, en primer lugar, sabiendo que $\phi(x) \geq 0$ para todo $x \in (0, \omega)$, descartamos $\phi(x) = 0$ para todo $x \in (0, \omega)$ porque en ese caso, $\phi'(x) = 0$, lo que contradice $0 = \phi'(x) > -\phi(x)\frac{g_1^{(n-1)}(x)}{G_1^{(n-1)}(x)} = 0$.

Sea entonces $y \in (0, \omega)$ tal que $\phi(y) > 0$. Razonando como antes, por ser ϕ continua, $\phi^{-1}(0, \infty)$ es un abierto y, por tanto, existe un entorno de y, $(x_2, x_3) \in \phi^{-1}(0, \infty)$, es decir, $\phi(x) > 0$ para todo $x \in (x_2, x_3)$.

D.5. Cálculo factor integrante Ejemplo 3.1

En esta sección del Apéndice vamos a calcular dos factores integrantes, que usaremos distintas partes del trabajo.

Estudiemos la ecuación diferencial del Ejemplo 3.1. Tenemos la siguiente ecuación

$$\gamma'(x) + \frac{1}{\alpha}\frac{f(x)}{F(x)}\gamma(x) = \frac{x}{\alpha}\frac{f(x)}{F(x)},$$

que tiene la forma $\gamma'(x) + p(x)\gamma(x) = q(x)$. Por lo que, como antes, se puede encontrar el factor integrante,

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\frac{1}{\alpha}\int \frac{f(x)}{F(x)}dx} = F^{\frac{1}{\alpha}}(x).$$

D.6. Ejemplo 3.2

Tenemos la ecuación diferencial ordinal con la forma $\gamma'(x) + p(x)\gamma(x) = q(x)$,

$$\gamma'(x) + \frac{(n-1)}{\alpha}\frac{\gamma(x)}{x} = \frac{n-1}{\alpha}.$$

Por lo tanto, para resolverla calculamos el factor integrante $\mu(x)$,

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\frac{n-1}{\alpha}\int \frac{1}{x}dx} = x^{\frac{n-1}{\alpha}}.$$

Por lo que multiplicando toda la ecuación por el factor integrante $x^{\frac{n-1}{\alpha}}$,

$$\gamma'(x)x^{\frac{n-1}{\alpha}} + \frac{(n-1)}{\alpha}\gamma(x)x^{\frac{n-1}{\alpha}-1} = \frac{n-1}{\alpha}x^{\frac{n-1}{\alpha}},$$

lo que se simplifica a

$$\frac{d}{dx}\left(\gamma(x)x^{\frac{n-1}{\alpha}}\right) = \frac{n-1}{\alpha}x^{\frac{n-1}{\alpha}}.$$

Integrando a ambos lados,

$$\gamma(x)x^{\frac{n-1}{\alpha}} = \frac{n-1}{\alpha}\int_0^x \tau^{\frac{n-1}{\alpha}}d\tau = \frac{(n-1)}{n-1+\alpha}x^{\frac{(n-1)}{\alpha}+1}.$$

Y así,

$$\gamma(x) = \frac{(n-1)}{n-1+\alpha}x.$$

D.7. $L(.|x)$ función de distribución

Veamos que $L(.|x)$ es una función de distribución con soporte $[0, x]$.

Debido a la propiedad de la tasa de riesgo inversa de la afiliación, tenemos para todo $t > 0$,

$$\frac{g(t|t)}{G(t|t)} \geq \frac{g(t|0)}{G(t|0)}.$$

Así pues,

$$-\int_0^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt \leq -\int_0^x \frac{g(t|0)}{G(t|0)}dt = \ln G(0|0) - \ln G(x|0) = -\infty,$$

de donde podemos deducir, $L(0|x) \leq e^{-\infty} = 0$ y $L(0|x) = 0$.

Además, $L(x|x) = 1$ y $L(.|x)$ es no decreciente, por lo que podemos decir que $L(.|x)$ es una función de distribución.

D.8. Ejemplo 3.3

D.8.1. Ejemplo con valores reales

Podemos realizar un ejemplo concreto dando valores reales. Por ejemplo, supongamos que hay 5 postores participando en la subasta, cuyas señales son x_1 =0.8, x_2 =0.77, x_3 =0.53, x_4 =0.35, x_5 =0.12. Entonces, podemos calcular los precios a los que abandonaría la subasta cada postor.

Como hemos visto el postor 5 se retira cuando $p_5 = x_5$, por tanto $p_5 = 0.12$.

Para el postor 4 recalculamos,

$$p_4 = \frac{4x_4 + x_5}{5} = 0.304.$$

El postor 3 abandonará con,

$$p_3 = \frac{3x_3 + x_4 + x_5}{5} = 0.412.$$

Y el postor 2,

$$p_2 = \frac{2x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 0.508.$$

Este es el precio que pagaría el postor 1 al ganar la subasta.

D.8.2. Cálculo de $v(x,x)$

Veamos cómo se obtiene la expresión de $v(x,x)$. Sabemos que
$v(x,y) = E\left[u(X_1,\dots,X_n)|X_1 = x, Y_1^{(n-1)} = y\right]$ y, como $u(X_1,\dots,X_n) = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$,

$$
\begin{aligned}
v(x,x) =& E\left[\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\middle| X_1 = x, \text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} = x\right] = \\
& E\left[\frac{X_1}{n}\middle| X_1 = x, \text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} = x\right] \\
& + E\left[\frac{X_2+\dots+X_n}{n}\middle| X_1 = x, \text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} = x\right] \\
& = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} E\left[X_2 \middle| \text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} = x\right] \\
& = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} E\left[X_2 \middle| \text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} = x, \text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} = X_2\right] \\
& P\left(\text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} = X_2 \middle| \text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} = x\right) \\
& + \frac{n-1}{n} E\left[X_2 \middle| \text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} = x, \text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} > X_2\right] \\
& P\left(\text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} > X_2 \middle| \text{máx}\{X_2,\dots,X_n\} = x\right) \\
& = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} x \frac{1}{n-1} + \frac{n-1}{n} \frac{x}{2} \frac{n-2}{n-1} = \frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \frac{x(n-2)}{2n} = x\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$