



UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Física de la Materia Condensada

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Hamiltonianos efectivos para comunicar qubits

Autora: Victoria Garicano Pérez

Director: David Zueco Lainez

Grado en Física

Curso académico 2023-2024

Índice general

1. Introducción	1
2. Modelización de una línea de transmisión	2
2.1. Acoplamiento de un circuito LC	7
3. Resolución del hamiltoniano	10
3.1. Solo un emisor	10
3.2. Dos emisores	14
3.3. Hamiltoniano efectivo	16
4. Resultados	18
4.1. Solo un emisor	18
4.2. Dos emisores	20
5. Conclusiones	24
Bibliografía	25

Capítulo 1

Introducción

Uno de los retos de la computación cuántica es la comunicación entre nodos, típicamente sistemas de dos niveles o qubits, sin pérdidas de información [4]. Una de las plataformas experimentales más prometedoras en este aspecto son los circuitos superconductores [5]. En concreto, un ejemplo paradigmático para realizar conexiones entre qubits distantes son las líneas de transmisión superconductoras. Al estudio de las interacciones entre estos dos sistemas se le denomina electrodinámica cuántica en guías de onda [6].

Este trabajo de fin de grado se basa en el estudio de la interacción entre guías de onda superconductoras y circuitos LC, que actuarán como qubits. En concreto, se ha enfocado en el uso de la aproximación Markoviana [5], la cual es muy común para describir la conexión entre qubits [1, 6], y en los límites de su validez.

Para hacerlo, compararemos resultados numéricos exactos con la solución analítica dada por la aproximación Markoviana para un emisor y dos emisores en el mismo punto y a distancia finita de la guía.

En el Capítulo 2, comenzaremos obteniendo el hamiltoniano clásico del oscilador LC para luego proceder a su cuantización, demostrando la similitud que tiene con el oscilador cuántico armónico. A continuación, aplicaremos este mismo proceso a una línea de transmisión, lo que nos permitirá describir el hamiltoniano de una línea de transmisión acoplada a un qubit.

En el Capítulo 3, nos enfocaremos en la evolución del estado excitado del qubit utilizando la ecuación de Schrödinger. Este análisis también se extenderá al caso de dos qubits acoplados, donde veremos cómo la introducción del hamiltoniano efectivo facilita el estudio de la evolución del estado excitado en sistemas más complejos.

Finalmente, en el Capítulo 4 se presentarán los resultados de la simulación del sistema, considerando un qubit con diferentes frecuencias y acoplos a la línea de transmisión. Además, se analizará el efecto de la distancia entre dos qubits sobre el decaimiento del estado excitado.

Capítulo 2

Modelización de una línea de transmisión

En este primer capítulo se introducirá el modelo de este trabajo. Primero se realizará una descripción hamiltoniana de los subsistemas que lo componen, un oscilador LC y una línea de transmisión, para luego proceder a su cuantización. A continuación, se presentará el modelo a estudiar, un circuito donde se acoplan uno o más LCs a la línea y se cuantizará el sistema completo.

Una línea de transmisión en el contexto de la electrodinámica cuántica de circuitos (cQED) es un modelo idealizado compuesto únicamente por osciladores LC acoplados. Un oscilador LC es un circuito superconductor formado únicamente por un condensador y un inductor como muestra la figura (2.1). Trabajar con estos elementos permite no tener pérdidas de energía, ya que son elementos no disipativos, lo que hace posible emplear el formalismo hamiltoniano, como se explicará más adelante. En este modelo, cada inductor se caracteriza por su inductancia, que representa la capacidad del sistema para almacenar energía en un campo magnético. De manera similar, cada condensador está caracterizado por su capacitancia, que refleja la capacidad para almacenar energía en un campo eléctrico.

Antes de llegar al marco cuántico, es necesario realizar una descripción clásica del sistema. Para ello, utilizamos las leyes de Kirchhoff para describir la corriente y el voltaje en cada nodo de la línea de transmisión. Sin embargo, en lugar de enfocarnos únicamente en la corriente y el voltaje, nos interesa relacionar estas magnitudes con el flujo, ya que será precisamente esta cantidad la que se cuantificará.

Para entender mejor la relación entre la intensidad de corriente y el flujo en los nodos del circuito, es útil analizar primero los casos del condensador y el inductor. En el caso del condensador, la intensidad (I) está relacionada con el flujo (ϕ) mediante la ecuación

$$I = C \frac{dV}{dt} = C \ddot{\phi}, \quad (2.1)$$

donde C es la capacitancia y V es el voltaje a través del condensador. La expresión indica que la corriente a través del condensador es proporcional a la derivada segunda temporal del flujo.

Por otro lado, para un inductor, la relación entre el voltaje y la corriente tiene la forma $V = L \frac{dI}{dt}$, donde L es la inductancia. De esta relación, se deduce que el flujo está directamente relacionado con la corriente mediante

$$\phi = LI. \quad (2.2)$$

Esto muestra cómo en un inductor, el flujo es una medida directa de la corriente que pasa a través de él.

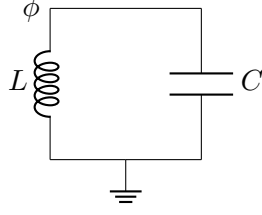


Figura 2.1: Representación de un oscilador LC, formado por un inductor con inductancia L y un condensador con capacitancia C . En el circuito, se señala el flujo del nodo como ϕ .

Podemos aplicar la ley de Kirchoff de corrientes (KCL) al oscilador LC mostrado en la figura (2.1) utilizando las ecuaciones (2.1) y (2.2) en el nodo del circuito, obteniendo

$$C\ddot{\phi} = \frac{1}{L}\phi. \quad (2.3)$$

Para recuperar la ecuación del movimiento de la ley de Kirchoff (2.3) mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.4)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}, \quad (2.4)$$

el lagrangiano de nuestro circuito debe ser

$$\mathcal{L} = \frac{C}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{\phi^2}{2L}. \quad (2.5)$$

Como veremos más adelante, es útil trabajar en el formalismo hamiltoniano y por ello utilizamos la transformada de Legendre, introduciendo el momento conjugado (p), que en nuestro circuito coincide con la carga del condensador ($Q = CV = C\dot{\phi}$).

$$Q = p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} = C\dot{\phi}. \quad (2.6)$$

El hamiltoniano del oscilador LC se puede expresar por tanto como

$$\mathcal{H} = Q\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}C\omega^2\phi^2. \quad (2.7)$$

El hamiltoniano resultante es análogo al de un oscilador mecánico, con la diferencia de que aquí trabajamos con flujo y carga en lugar de momento y posición. En este caso, la capacitancia tiene el papel de la masa en el oscilador clásico, mientras que la constante de fuerza es $\frac{1}{L}$, lo que nos lleva a una frecuencia de $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Procedemos a la cuantización de este circuito y en concreto se utiliza la cuantización canónica, donde imponemos relaciones de conmutación, transformando así las variables de carga y flujo en operadores cuánticos ($Q \rightarrow \hat{Q}$ y $\phi \rightarrow \hat{\phi}$). Como ya se podía ver con el hamiltoniano (2.7), nuestro sistema es análogo a un oscilador armónico, por lo que, sus relaciones de conmutación

deben seguir sus reglas de conmutación [5].

$$\begin{aligned}\frac{1}{2C}\hat{Q}^2 + \frac{1}{2L}\hat{\phi}^2 &\Longleftrightarrow \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \\ [\hat{\phi}, \hat{Q}] = i\hbar &\Longleftrightarrow [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Con estas relaciones de conmutación, podemos resolver el sistema de la misma manera que lo hacemos en el oscilador armónico cuántico, utilizando los operadores de creación y aniquilación. Estos operadores definen un espacio de Fock que contiene una base de autoestados ($|n\rangle$) del oscilador, los cuales describen el número de excitaciones que tiene el sistema. El operador de creación (\hat{a}^\dagger) excita el estado, mientras que el operador de aniquilación (\hat{a}) lo desexcita [5].

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \dots\}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Estos operadores obedecen las relaciones de conmutación bosónicas $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Dado que hemos definido nuestro problema en función del flujo y la carga, podemos escribir los operadores en función de estas variables.

$$\hat{\phi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2C\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \hat{Q} = i\sqrt{\frac{\hbar C\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (2.10)$$

Sustituyendo en el hamiltoniano, se obtiene

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{1}{2}C\omega^2\hat{\phi}^2 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}). \quad (2.11)$$

El hamiltoniano presenta niveles de energía discretos, determinados por el número de fotones en el sistema, dado por el operador $\hat{a}^\dagger\hat{a}$.

Procedemos, entonces, a describir la línea de transmisión mostrada en la figura (2.2).

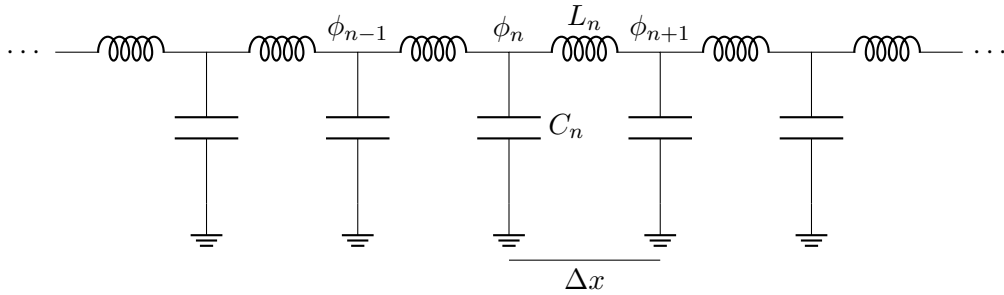


Figura 2.2: Representación de la línea de transmisión, formada por una serie de N osciladores LC acoplados. Cada oscilador LC está compuesto por un inductor con inductancia L_n y un condensador con capacidad C_n . En el circuito, se señala el flujo en cada nodo entre inductores, denotado como ϕ_n , así como la distancia entre nodos, representada como Δx .

Para conocer el hamiltoniano de la línea de transmisión, comenzamos de la misma manera que en el caso del oscilador LC, aplicando la ley de Kirchhoff para corrientes en el nodo n , lo que nos permite obtener

$$C_n\ddot{\phi}_n + \frac{1}{L_{n-1}}(\phi_n - \phi_{n-1}) = \frac{1}{L_n}(\phi_{n+1} - \phi_n). \quad (2.12)$$

El lagrangiano para un sistema con N nodos debe tener la forma

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} C_n \dot{\phi}_n^2 - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2L_n} (\phi_{n+1} - \phi_n)^2. \quad (2.13)$$

Nuestro siguiente objetivo es introducir el formalismo hamiltoniano. Para ello, definimos el momento conjugado asociado a $\dot{\phi}_n$. En nuestro sistema, el momento conjugado p_n se define como $p_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_n} = C_n \dot{\phi}_n$, que corresponde a la carga de los condensadores ($Q_n = C_n V = C_n \dot{\phi}_n$), de manera similar a lo que ocurre en el oscilador LC. A partir de ahora, utilizaremos esta notación.

Por lo tanto, el hamiltoniano se expresa de la forma

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N Q_n \dot{\phi}_n - \mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \frac{Q_n^2}{2C_n} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2L_n} (\phi_{n+1} - \phi_n)^2. \quad (2.14)$$

Con el objetivo de diagonalizar nuestro hamiltoniano (2.14), hacemos una descomposición de Fourier discreta, esto no es más que hacer un cambio al espacio recíproco. De forma general, para cualquier nodo con flujo ϕ y la carga de los condensadores Q , en la posición x lo podremos descomponer como

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikx} \phi_k; \quad Q(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikx} Q_k. \quad (2.15)$$

La transformación de Fourier introducida define un conjunto de modos indexados por su número de onda k . Vamos a tomar unas condiciones periódicas de contorno en nuestro sistema ($\phi_{N+1} = \phi_1$), que como resultado dan una restricción en el número de ondas $k = 2\pi n/D$ dónde $D = n\Delta x$ es la longitud total de la línea de transmisión

Al introducir la transformación (2.15) en nuestro hamiltoniano (2.14) la expresión completa se vuelve compleja, por lo que veamos primero como transforma el término de la carga. Además, se va a tomar que para todos los condensadores tenemos la misma capacitancia ($C_n = C$) y todos los inductores tienen la misma inductancia ($L_n = L$).

$$\sum_n \frac{Q_n^2}{2C_n} = \frac{1}{N} \frac{1}{2C} \sum_n \sum_{k,k'} Q_k Q_{k'} e^{-i(k+k')x_n} = \frac{1}{2C} \sum_k Q_k Q_{k'} \delta_{k'=-k} = \frac{1}{2C} \sum_k Q_k Q_{-k}. \quad (2.16)$$

Se ha utilizado que, al tratarse de un sistema unidimensional con espaciamiento uniforme, se puede expresar x_n como $x_n = n\Delta x$. Ahora pasamos al término de las inductancias.

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{(\phi_n - \phi_{n+1})^2}{2L_n} &= \frac{1}{2L} \sum_n (\phi_n - \phi_{n+1})^2 \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{n,k,k'} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikx_n} \phi_k - \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikx_{n+1}} \phi_k \right) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{ik'x_n} \phi_{k'} - \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ik'x_{n+1}} \phi_{k'} \right) \\ &= \frac{1}{2L} \sum_k \left(2 - e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x} \right) \phi_k \phi_{-k} = \frac{1}{2L} \sum_k (2 - 2\cos(k\Delta x)) \phi_k \phi_{-k}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por tanto, el hamiltoniano nos queda

$$\mathcal{H} = \sum_k \frac{1}{2C} Q_k Q_{-k} + \sum_k \frac{C\omega_k^2}{2} \phi_k \phi_{-k}, \quad (2.18)$$

donde definimos $\omega_c^2 = \frac{1}{LC}$ y $\omega_k^2 = \omega_c^2(2 - 2(\cos(k\Delta x)))$.

Para cuantizar el hamiltoniano de la línea de transmisión volvemos a utilizar la cuantización canónica transformando el flujo y la carga en operadores. En nuestro caso las relaciones de conmutación [5] son

$$[\hat{\phi}_k, \hat{\phi}_{k'}] = [\hat{Q}_k, \hat{Q}_{k'}] = 0; \quad [\hat{\phi}_k, \hat{Q}_{k'}] = \delta_{k,k'}. \quad (2.19)$$

De nuevo, volvemos a tener que definir los operadores (2.9). Por ello, para cada modo de oscilador armónico k en el sumatorio, introducimos los operadores de creación (\hat{a}_k^\dagger) que excita el modo k y aniquilación (\hat{a}_k) que lo desexcita. Estos operadores deben cumplir las relaciones de conmutación bosónicas $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0$ y $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$. Los operadores escaleras deben estar definidos en función del flujo y la carga

$$\hat{a}_k = \sqrt{\frac{C\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{\phi}_k + \frac{i}{C\omega_k} \hat{Q}_{-k} \right), \quad \hat{a}_k^\dagger = \sqrt{\frac{C\omega_k}{2\hbar}} \left(\hat{\phi}_{-k} - \frac{i}{C\omega_k} \hat{Q}_k \right). \quad (2.20)$$

O lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_k &= \sqrt{\frac{\hbar}{2C\omega_k}} (\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger); & \hat{Q}_k &= i\sqrt{\frac{\hbar C\omega_k}{2}} (\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_{-k}); \\ \hat{\phi}_{-k} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2C\omega_k}} (\hat{a}_{-k} + \hat{a}_k^\dagger); & \hat{Q}_{-k} &= i\sqrt{\frac{\hbar C\omega_k}{2}} (\hat{a}_{-k}^\dagger - \hat{a}_k). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sustituyendo el hamiltoniano nos queda

$$\mathcal{H} = \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{4} (+\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \underbrace{\hat{a}_{-k} \hat{a}_{-k}^\dagger}_{\hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k+1}} + \underbrace{\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger}_{\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k+1}} + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k}) = \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{4} (2\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + 2\hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} + 2). \quad (2.22)$$

Nos damos cuenta que $\sum_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \sum_k \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k}$ y conseguimos finalmente la forma simplificada del hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_k \hbar\omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}). \quad (2.23)$$

Como se verá más adelante, tanto (2.11) como (2.23), serán parte del hamiltoniano final del sistema. El hamiltoniano nos permite estudiar la relación de dispersión de la línea de transmisión, donde la velocidad de grupo (v_g) describe cómo se propagan los fotones a lo largo de la guía. Esta velocidad se define como $v_g = \frac{d\omega_k}{dk}$.

En los cálculos de la siguiente sección pasaremos del espacio discreto al continuo ($N \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$) obteniendo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \omega_k = \omega_c \sqrt{2 - 2 \left(1 - \frac{k^2 \Delta x^2}{2} + O(\Delta x)^2 \right)} \approx \omega_c \sqrt{k^2 \Delta x^2} = \omega_c \Delta x |k| = v_g |k|. \quad (2.24)$$

Este paso implica una aproximación a una línea de transmisión óhmica con una relación de dispersión lineal. En la figura (2.3), se muestra la comparación entre las relaciones de dispersión discreta y continua en una guía de transmisión. Observamos que la aproximación lineal (línea azul) es adecuada para modos bajos, pero comienza a desviarse de la relación de dispersión

(línea cian) al cruzar el valor de ω_c (línea naranja). Esta aproximación y la restricción impuesta por ω_c se analizarán más adelante.

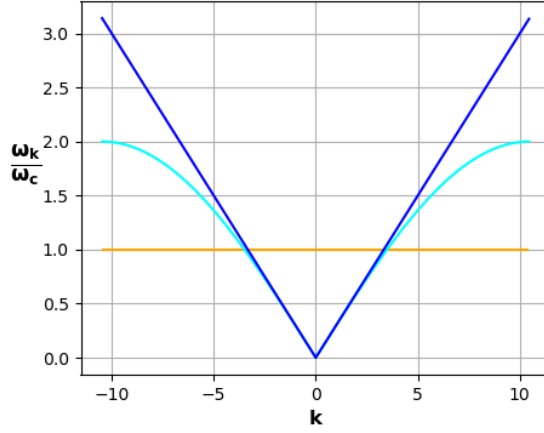


Figura 2.3: Comparación entre la relación de dispersión lineal (línea azul) y la de nuestro sistema ω_k (línea cian) para un sistema con $N = 1000$ nodos y una separación $\Delta x = 0,3$. La línea naranja indica el valor de corte ω_c .

2.1. Acoplamiento de un circuito LC

Con la línea de transmisión cuantizada, vamos a acoplar los dos sistemas ya estudiados añadiendo un emisor (oscilador LC) al nodo 0 como se muestra en la figura (2.4).

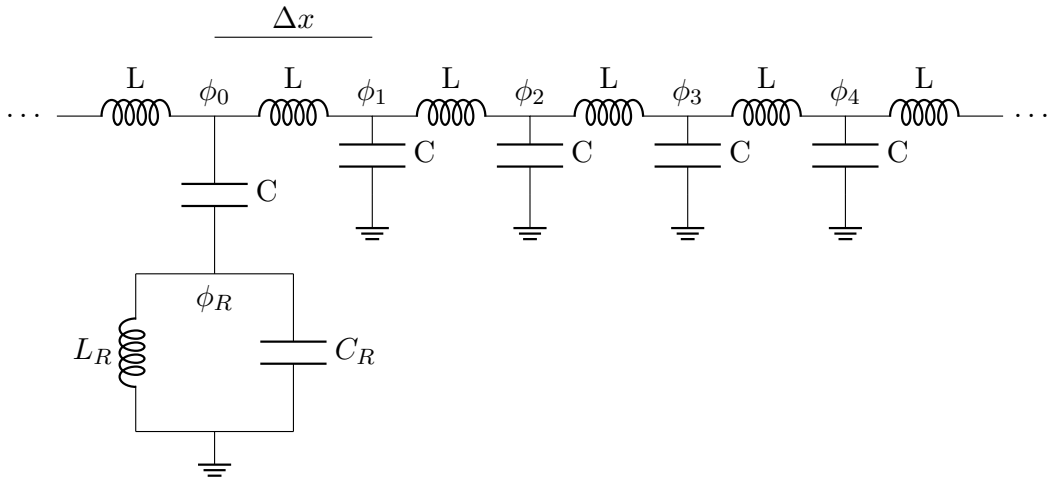


Figura 2.4: Representación de la línea de transmisión acoplada a un oscilador LC. La línea de transmisión está formada por una serie de N circuitos LC acoplados. Cada circuito LC está compuesto por un inductor con inductancia L y un condensador con capacidad C . En el circuito, se señala el flujo en cada nodo entre inductores, denotado como ϕ_n , así como la distancia entre nodos, representada como Δx . Se ha unido un oscilador LC externo que contiene un condensador con capacidad de C_R y un inductor con inductancia L_R , se señala el flujo del circuito LC como ϕ_R .

De la misma manera que se hizo para las figuras (2.1) y (2.2), se quiere hacer uso de la ley de Kirchoff de corrientes para conseguir llegar al lagrangiano del sistema. Sin embargo, ya tenemos

la descripción de todos los nodos salvo uno, el nodo 0 donde se ha añadido el oscilador LC. Sobre la línea de transmisión, todos los nodos excepto el 0, tendrán el lagrangiano descrito en (2.13), mientras que el nodo del oscilador LC acoplado cumple el lagrangiano (2.5). Por tanto, solo nos queda hacer una descripción del nodo 0 donde se ha acoplado el oscilador LC. Aplicando la ley de Kirchoff para este nodo nos queda

$$C(\ddot{\phi}_0 - \ddot{\phi}_R) + \frac{1}{L}(\phi_0 - \phi_{N-1}) = \frac{1}{L}(\phi_1 - \phi_0). \quad (2.25)$$

El lagrangiano de este sistema nos queda finalmente

$$\mathcal{L} = \sum_{n \neq 0} \frac{C\dot{\phi}_n^2}{2} - \sum_n \frac{(\phi_n - \phi_{n+1})^2}{2L_n} + \frac{C(\dot{\phi}_0 - \dot{\phi}_R)^2}{2} - \frac{\phi_R^2}{2L_R} + \frac{C_R\dot{\phi}_R^2}{2}. \quad (2.26)$$

Pasamos al formalismo hamiltoniano utilizando la transformada de Legendre y definiendo los momentos conjugados

$$Q_{n \neq 0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{n \neq 0}} = C\dot{\phi}_{n \neq 0}; \quad Q_0 = C(\dot{\phi}_0 - \dot{\phi}_R); \quad Q_R = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_R} = (C_R + C)\dot{\phi}_R - C\dot{\phi}_0. \quad (2.27)$$

Pudiendo despejar la derivada primera de los distintos flujos $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi}_{n \neq 0} = \frac{Q_{n \neq 0}}{C}; \quad \dot{\phi}_R = \frac{Q_0 + Q_R}{C_R}; \quad \dot{\phi}_0 = \frac{Q_0}{C} + \frac{Q_0 + Q_R}{C_R}. \quad (2.28)$$

El hamiltoniano nos queda expresado como

$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_n \frac{Q_n^2}{2C} + \sum_n \frac{(\phi_n - \phi_{n+1})^2}{2L_n}}_{(2.14)} + \underbrace{\frac{Q_R^2}{2C_R} + \frac{\phi_R^2}{2L_R}}_{(2.7)} + \frac{Q_0 Q_R}{C_R} + \frac{Q_0^2}{2C_R}. \quad (2.29)$$

No sorprende que el hamiltoniano que hemos obtenido lo podamos visualizar como tres partes. Los dos primeros términos, corresponden al hamiltoniano obtenido en la sección anterior de la línea de transmisión (2.14). El tercer y cuarto término corresponden al hamiltoniano del oscilador LC (2.7) que hemos acoplado en el nodo 0 de la línea de transmisión. Por último, el quinto y sexto término resultan de la interacción entre los dos sistemas.

Recurrimos nuevamente a la descomposición de Fourier discreta definida en (2.15) para obtener la forma diagonal del hamiltoniano final. Realizando las mismas operaciones que se hicieron en (2.16) y (2.17) e introduciendo la transformación en los términos de acoplo obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \underbrace{\sum_k \frac{Q_k Q_{-k}}{2C} + \sum_k \frac{[2 - 2\cos(k\Delta x)]\phi_k \phi_{-k}}{2L}}_{(2.18)} + \underbrace{\frac{Q_R^2}{2C_R} + \frac{\phi_R^2}{2L_R}}_{(2.7)} \\ & + \sum_k \frac{Q_R Q_k e^{ikx_0}}{2C_R \sqrt{N}} + \sum_{k,k'} \frac{Q_k Q_{k'} e^{i(k-k')x_0}}{NC_R}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se deben definir los operadores (2.9) e imponer las relaciones de conmutación bosónicas (2.19) para llegar a cuantizar el sistema. Hacemos uso de nuevo de las definiciones (2.21) donde definimos $\omega_c^2 = \frac{1}{LC}$ y $\omega_k^2 = \omega_c^2(2 - 2(\cos(k\Delta x)))$. Igualmente para el emisor acoplado tenemos

que definir los operadores creación y aniquilación y la frecuencia $\omega_R^2 = \frac{1}{L_R C_R}$

$$\hat{\phi}_R = \sqrt{\frac{\hbar}{2C_R\omega_R}}(\hat{b}_R + \hat{b}_R^\dagger); \quad \hat{Q}_R = i\sqrt{\frac{\hbar C_R\omega_R}{2}}(\hat{b}_R^\dagger - \hat{b}_R).$$

Introduciendo la cuantización en (2.30), el término (2.18) se transformará como lo hizo (2.22), por su parte el término (2.7) transformará como lo hizo (2.11). Sin embargo, solo nos interesarán los términos que contienen los operadores escalera ya que el otro término solo representa los niveles de energía del estado fundamental. El hamiltoniano nos queda

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hbar\omega_R \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_R - \sum_k \frac{\hbar\sqrt{C_R C \omega_k \omega_c}}{2C_R\sqrt{D}} e^{ikx_0} (\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_{-k}) (\hat{b}_R^\dagger - \hat{b}_R) \\ & - \sum_{k,k'} \frac{\hbar C \sqrt{\omega_k \omega_{k'}}}{N D C_R} e^{i(k-k')x_0} (\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_{-k}) (\hat{a}_{k'}^\dagger - \hat{a}_{-k'}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para llegar a nuestro hamiltoniano de estudio definimos el acoplo entre línea de transmisión y oscilador LC como $g_k = \frac{\hbar\sqrt{C_R C \omega_k \omega_c}}{2C_R\sqrt{D}} = g\sqrt{\frac{\omega_k}{2D}}$. El último término en (2.31) tiene una dependencia con el acoplo $\propto g_k g_{k'}$. Al trabajar con acoplos pequeños, el término es negligible frente el resto. Además, utilizando la aproximación de onda rotante [5], los términos $a_k^\dagger b_R^\dagger$ y $a_{-k} b_R$ son despreciables

$$\mathcal{H} = \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hbar\omega_R \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_R + \sum_k g_k e^{ikx_0} (\hat{a}_k^\dagger \hat{b}_R + \hat{a}_{-k} \hat{b}_R^\dagger). \quad (2.32)$$

Como se ha utilizado anteriormente, los sumatorios en k son tanto en valores positivos como en negativos, por lo tanto, cambiando el término $\sum_k \hat{a}_{-k} = \sum_k \hat{a}_k$, obtenemos

$$\mathcal{H} = \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hbar\omega_R \hat{b}_R^\dagger \hat{b}_R + \sum_k g_k e^{ikx_0} \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_R + g_k^* e^{-ikx_0} \hat{a}_k \hat{b}_R^\dagger. \quad (2.33)$$

A partir de ahora trabajaremos en unidades naturales, donde $\hbar = 1$. Nos damos cuenta de que el cambio al espacio recíproco no solo se realiza para llegar a la forma diagonal del hamiltoniano, sino que además permite que cada modo de onda con un número de onda k puede tratarse de manera independiente. En lugar de resolver una ecuación diferencial global difícil de resolver, como en el caso de la ecuación de Schrödinger en el espacio real, se va a resolver una ecuación diferencial para cada k , lo que simplifica considerablemente el problema.

Podemos generalizar (2.33) a un número de M emisores

$$H = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \omega_R \sum_n b_n^\dagger b_n + \sum_{k,n} g_k e^{ikx_n} a_k^\dagger b_n + g_k^* e^{-ikx_n} a_k b_n^\dagger. \quad (2.34)$$

Capítulo 3

Resolución del hamiltoniano

Para describir la dinámica del sistema en el régimen cuántico utilizaremos la ecuación de Schrödinger (3.1)

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle. \quad (3.1)$$

Ya tenemos la descripción de cuál es nuestro hamiltoniano (2.34), pero ahora debemos pensar en cómo debe ser la función de onda cuya evolución queremos analizar. En nuestro caso, las funciones de ondas que nos interesan tienen algunas propiedades que podemos explotar a la hora de formular su expresión.

Como el hamiltoniano conserva el número de excitaciones, podemos trabajar en una sección del espacio de Hilbert con un número de excitaciones constante. En nuestro caso nos limitaremos al espacio de una excitación. La función de onda que nos interesa conocer tiene que ser aquella que excita una vez el campo. Como los operadores de creación son justamente los que excitan los modos, estos operadores deberán estar actuando sobre el estado vacío (el de no tener excitaciones), por tanto, nuestra función de onda será de la forma

$$|\Psi\rangle = \sum_k c_k \hat{a}_k^\dagger |0\rangle + \sum_n d_n \hat{b}_n^\dagger |0\rangle.$$

Los coeficientes que aparecen en la expresión (c_k) describen las amplitudes de un estado excitado en cada uno de los modos k de la línea de transmisión y d_n describe el estado excitado del resonador n .

Como solo estamos trabajando en el espacio de una excitación, solo tenemos dos niveles $|0\rangle$ y $|1\rangle$ y por lo tanto los emisores se comportan como sistemas de dos niveles o qubits si quieres.

En esta sección se quiere hacer un análisis de la evolución del sistema con el acoplo de uno y dos circuitos LC a nuestra línea de transmisión.

3.1. Solo un emisor

Para un solo emisor el hamiltoniano es de la forma (2.33), la función de onda con la que trabajaremos será por tanto

$$|\Psi\rangle = \sum_k c_k \hat{a}_k^\dagger |0\rangle + d \hat{b}^\dagger |0\rangle.$$

Con todo esto, la ecuación de Schrödinger nos queda de la forma

$$\begin{aligned} \sum_k c_k \hat{a}_k^\dagger |0\rangle + \hat{d} \hat{b}^\dagger |0\rangle = & -i \left(\sum_{kk'} \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k c_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger |0\rangle + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{d} \hat{b}^\dagger |0\rangle + \sum_k c_k \omega_R \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{a}_k^\dagger |0\rangle \right. \\ & + \omega_R \hat{d} \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}^\dagger |0\rangle + \sum_{k,k'} g_k e^{ikx} \hat{a}_k^\dagger \hat{b} c_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger |0\rangle + \sum_k g_k e^{ikx} \hat{a}_k^\dagger \hat{b} \hat{d} \hat{b}^\dagger |0\rangle \\ & \left. + \sum_k g_k^* e^{-ikx} \hat{a}_k \hat{b}^\dagger c_{k'} \hat{a}_{k'}^\dagger |0\rangle + \sum_k g_k^* e^{-ikx} \hat{a}_k \hat{b}^\dagger \hat{d} \hat{b}^\dagger |0\rangle \right). \end{aligned}$$

Queremos encontrar una expresión que nos indique cómo evoluciona el circuito LC. Esto se logra proyectando la ecuación de Schrödinger sobre $\langle 0 | \hat{b}$, lo que nos permite analizar la dinámica del resonador LC, representada por el coeficiente d . Utilizando las respectivas relaciones de conmutación para obtener el orden normal, obtenemos

$$\dot{d} = -i\omega_R d - i \sum_k g_k e^{ikx_R} c_k. \quad (3.2)$$

Vemos que hay una dependencia con los coeficientes c_k , por lo que debemos proyectar $\langle 0 | \hat{a}_k$ para obtener su dependencia, que de nuevo aplicando las relaciones de conmutación nos queda

$$\dot{c}_k = -i\omega_k c_k - ig_k^* e^{-ikx_R} d. \quad (3.3)$$

Para simplificar el cálculo hacemos el cambio $\tilde{d} = d e^{i\omega_R t}$ y $\tilde{c}_k = c_k e^{i\omega_k t}$, obteniendo una expresión para \tilde{d} y una \tilde{c}_k genérica

$$\dot{\tilde{d}} = -i \sum_k g_k^* e^{-ikx_R} \tilde{c}_k e^{i(\omega_R - \omega_k)t}, \quad (3.4)$$

$$\dot{\tilde{c}}_k = -ig_k e^{ikx_R} \tilde{d} e^{i(\omega_k - \omega_R)t}. \quad (3.5)$$

Integramos la ecuación (3.5),

$$\tilde{c}_k = -ig_k e^{ikx_R} \int_0^t dt' \tilde{d}(t') e^{i(\omega_k - \omega_R)t'}. \quad (3.6)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación (3.4), obteniendo

$$\dot{\tilde{d}}(t) = - \sum_k |g_k|^2 \int_0^t \tilde{d}(t') e^{i(\omega_R - \omega_k)(t-t')} dt'. \quad (3.7)$$

Vamos a hacer un cambio de variable, siendo este $\tau = t - t'$, que nos da como resultado

$$\dot{\tilde{d}}(t) = - \sum_k |g_k|^2 \int_0^t \tilde{d}(t - \tau) e^{i(\omega_R - \omega_k)\tau} d\tau. \quad (3.8)$$

Esta ecuación nos está describiendo la evolución del estado excitado del emisor. Nos está diciendo que el estado del emisor en el tiempo t depende de su estado en todos los tiempos anteriores $t - \tau$. Debido a su complejidad, vamos a tomar lo que se llama la aproximación Markoviana. Esta aproximación nos dice que la dinámica de la línea de transmisión ocurre en

una escala de tiempo mucho más corta que el decaimiento del estado excitado. Esto implica que podemos hacer una descripción del oscilador LC sin tener en cuenta las interacciones pasadas con la línea de transmisión.

Al tomar esta aproximación, el límite de la integral de t es ahora infinito, ya que $t \gg \tau$ y la amplitud es aproximadamente $\tilde{d}(t - \tau) \approx \tilde{d}(t)$. Para resolver el límite y la integral se va a introducir una parte imaginaria a la diferencia de frecuencias y que luego se hará tender a cero. Con esto conseguimos que el límite del tiempo esté bien definido.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{i(\omega_R - \omega_k)\tau} d\tau &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{i(\omega_R - \omega_k + i\epsilon)\tau} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{i(\omega_R - \omega_k + i\epsilon)t}}{i(\omega_R - \omega_k + i\epsilon)} \right]_0^t \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{i(\omega_R - \omega_k)t} e^{-\epsilon t}}{i(\omega_R - \omega_k) - \epsilon} - \frac{1}{i(\omega_R - \omega_k + i\epsilon)} \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{i}{(\omega_R - \omega_k) + i\epsilon} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{i[(\omega_R - \omega_k) - i\epsilon]}{(\omega_R - \omega_k)^2 + \epsilon^2} \right] \\
&= i \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{(\omega_R - \omega_k)}{(\omega_R - \omega_k)^2 + \epsilon^2} \right]}_{\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega_R - \omega_k}\right)} + \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\epsilon}{(\omega_R - \omega_k)^2 + \epsilon^2} \right]}_{\pi\delta(\omega_R - \omega_k)}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Y por definición, la parte imaginaria es el valor principal de la integral \mathcal{P} y la parte real es una delta de Dirac. Por tanto, nuestra solución es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau e^{i(\omega_R - \omega_k)\tau} = \pi\delta(\omega_R - \omega_k) + i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega_R - \omega_k}\right). \tag{3.10}$$

La ecuación de la evolución del estado excitado del emisor ahora nos queda como

$$\dot{\tilde{d}}(t) = -\tilde{d}(t) \sum_k |g_k|^2 \left[\pi\delta(\omega_k - \omega_R) + i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega_R - \omega_k}\right) \right] = -\tilde{d}(t) \left[\frac{\Gamma}{2} + i\Delta \right], \tag{3.11}$$

donde hemos definido Γ y Δ respectivamente como $\Gamma = 2 \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega_k - \omega_R)$ y $\Delta = L/2\pi\mathcal{P} \int (|g_k|^2 / \omega_R - \omega_k)$. El término $\Gamma/2$ provoca un decaimiento exponencial en la amplitud $\tilde{d}(t)$ como resultado de la interacción con la línea de transmisión. Por otro lado, la parte imaginaria Δ representa un desplazamiento en la frecuencia del sistema. Esto significa que, en lugar de oscilar a la frecuencia ω_R , el sistema oscilará a una frecuencia corregida por Δ . A este desplazamiento se le conoce como el desplazamiento de Lamb.

Obtenemos la dinámica después de aplicar la aproximación Markoviana resolviendo (3.8)

$$\tilde{d}(t) = \tilde{d}(0) e^{-t(\frac{\Gamma}{2} + i\Delta)}; \quad d(t) = d(0) e^{-t(\frac{\Gamma}{2} + i(\Delta + \omega_R))}. \tag{3.12}$$

Debemos conocer cómo calcular los parámetros Γ y Δ . Para ello, vamos a definir la densidad espectral ($J(\omega)$), que nos describe lo fuerte que es la interacción entre un modo de nuestra línea de transmisión con frecuencia ω y el emisor

$$J(\omega) = 2\pi \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega_k - \omega). \tag{3.13}$$

Esta definición podemos relacionarla con Γ de la forma

$$\frac{\Gamma}{2} = \pi \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega_k - \omega_R) = \frac{J(\omega_R)}{2}. \quad (3.14)$$

Se está evaluando (3.13) en la frecuencia de nuestro emisor, obteniendo así el decaimiento del estado excitado del emisor dentro de la aproximación Markoviana.

En una línea de transmisión óhmica, podemos calcular la tasa de decaimiento y el desplazamiento de Lamb analíticamente. La frecuencia de los modos (ω_k) sigue una relación lineal (2.24) con el número de onda $|k|$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{2} &= \pi \left[\sum_k |g_k|^2 \delta(\omega_k - \omega_R) \right] = \pi \frac{g^2}{2D} \left[\sum_k \omega_k \delta(\omega_k - \omega_R) \right] = \frac{\pi g^2}{2D} \frac{D}{2\pi} \int_{-k_{\max}}^{k_{\max}} \omega_k \delta(\omega_k - \omega_R) dk \\ &= \frac{g^2}{4} \left[\int_0^{k_{\max}} \omega_k \delta(\omega_k - \omega_R) dk + \int_{-k_{\max}}^0 \omega_k \delta(\omega_k - \omega_R) dk \right] \\ &= \frac{g^2}{4} \left[\int_0^{k_{\max}} \omega_k \delta(\omega_k - \omega_R) dk + \int_0^{k_{\max}} \omega_{-k} \delta(\omega_k - \omega_R) dk \right] = \frac{g^2}{2} \left[\int_0^{k_{\max}} \omega_k \delta(\omega_k - \omega_R) dk \right] \\ &= \frac{g^2}{2} \int_0^{\omega_c} \frac{\omega_k}{v_g} \delta(\omega_k - \omega_R) d\omega_k = \frac{g^2 \omega_R}{2v_g}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

El procedimiento que se ha realizado se basa en tomar el sistema lo suficientemente grande, es decir, hacer tender el número de osciladores a infinito, lo que provoca que los valores de k se aproximen entre sí, permitiendo que la suma pueda aproximarse por una integral. Para realizar esta conversión, multiplicamos por la densidad de estados en el espacio recíproco, que es $\frac{D}{2\pi}$, obteniendo la transformación $\sum_k \rightarrow \frac{D}{2\pi} \int dk$. Además, se ha utilizado de nuevo la separación entre k positivas y negativas, teniendo la ventaja que la frecuencia de los modos cumple $\omega_k = \omega_{-k}$. Por último, se ha realizado el cambio de variable de k a ω usando $\omega_k = v_g |k|$.

Para el cálculo de Δ deberemos utilizar la expresión completa que nos daba (3.10), introduciendo de la misma manera que en (3.9) una diferencia en la parte imaginaria pero esta vez pasando al continuo.

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{2} + i\Delta &= \sum_k |g_k|^2 \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{i(\omega_R - \omega_k)\tau} d\tau \right] = \sum_k |g_k|^2 \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t e^{i(\omega_R - \omega_k + i\varepsilon)\tau} d\tau \right] \\ &= \sum_k |g_k|^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{i(\omega_R - \omega_k)t} e^{-\varepsilon t} - 1}{i(\omega_R - \omega_k + i\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_k \frac{i|g_k|^2 dk}{(\omega_R - \omega_k + i\varepsilon)} \\ &= \frac{iD}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int \frac{-i\varepsilon |g_k|^2 dk}{(\omega_R - \omega_k)^2 + \varepsilon^2} + \int \frac{(\omega_R - \omega_k) |g_k|^2 dk}{(\omega_R - \omega_k)^2 + \varepsilon^2} \right] \\ &= \frac{iDg^2}{4\pi D} \left[-i\pi \int \omega_k \delta(\omega_k - \omega_R) dk + \mathcal{P} \int \frac{\omega_k dk}{\omega_R - \omega_k} \right] \\ &= \frac{ig^2}{4\pi} \left[-i\pi \left(\int_{k>0} \omega_k \delta(\omega_k - \omega_R) dk \right) - i\pi \left(\int_{k<0} \omega_k \delta(\omega_k - \omega_R) dk \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{P} \int_{k>0} \frac{\omega_k dk}{\omega_R - \omega_k} + \mathcal{P} \int_{k<0} \frac{\omega_k dk}{\omega_R - \omega_k} \right] \\ &= \frac{ig^2}{2\pi v_g} \left[-i\pi \int \omega \delta(\omega - \omega_R) d\omega + \mathcal{P} \int \frac{\omega d\omega}{\omega_R - \omega} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

La primera integral que debemos resolver es idéntica a la que ya resolvimos en (3.15), mientras que para la segunda aplicamos las relaciones de Kramers-Kronig

$$f(\omega_R) = \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - \omega_R}; \quad \Re[f(\omega_R)] = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{\Im[f(\omega)]d\omega}{\omega - \omega_R}; \quad \Im[f(\omega_R)] = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{\Re[f(\omega)]d\omega}{\omega - \omega_R}. \quad (3.17)$$

Donde \Re simboliza la parte real y \Im la parte imaginaria. Estas relaciones nos permiten relacionar la parte imaginaria con la parte real de la integral. En nuestro caso la función es $f(\omega) = \omega$, por tanto

$$\mathcal{P} \int \frac{\omega d\omega}{\omega_R - \omega} = \mathcal{P} \int \frac{\Re[f(\omega)]d\omega}{\omega_R - \omega} = -\pi \Im[f(\omega_R)] = 0,$$

de modo que

$$\frac{\Gamma}{2} + i\Delta = \frac{g^2 \omega_R}{2v_g}. \quad (3.18)$$

3.2. Dos emisores

Extendamos el cálculo de un emisor para varios, esta vez el hamiltoniano adoptará la forma

$$\mathcal{H} = \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{n=1}^2 \omega_R \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_n + \sum_k \sum_{n=1}^2 g_k e^{ikx_n} \hat{a}_k^\dagger \hat{b}_n + g_k^* e^{-ikx_n} \hat{a}_k \hat{b}_n^\dagger.$$

Podremos describir entonces la excitación como

$$|\Psi\rangle = \sum_k c_k \hat{a}_k^\dagger |0\rangle + \sum_{n=1}^2 d_n \hat{b}_n^\dagger |0\rangle.$$

Siguiendo el mismo procedimiento que hemos seguido en el caso de un emisor, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{d}}_1(t) = & - \sum_k |g_k|^2 \left(\pi \delta(\omega_k - \omega_R) + i\mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_k - \omega_R} \right) \right) \tilde{d}_1(t) \\ & - \sum_k |g_k|^2 e^{ik(x_1 - x_2)} \left(\pi \delta(\omega_k - \omega_R) + i\mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_k - \omega_R} \right) \right) \tilde{d}_2(t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{d}}_2(t) = & - \sum_k |g_k|^2 \left(\pi \delta(\omega_k - \omega_R) + i\mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_k - \omega_R} \right) \right) \tilde{d}_2(t) \\ & - \sum_k |g_k|^2 e^{ik(x_2 - x_1)} \left(\pi \delta(\omega_k - \omega_R) + i\mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_k - \omega_R} \right) \right) \tilde{d}_1(t). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Podemos representar estas expresiones como un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{d}}_1(t) \\ \dot{\tilde{d}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma_{11}}{2} - i\Delta_{11} & -\frac{\Gamma_{12}}{2} - i\Delta_{12} \\ -\frac{\Gamma_{21}}{2} - i\Delta_{21} & -\frac{\Gamma_{22}}{2} - i\Delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}_1(t) \\ \tilde{d}_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

donde $\Gamma_{ij} = 2 \sum_k |g_k|^2 e^{ik(x_j - x_i)} \pi \delta(\omega_k - \omega_R)$ y $\Delta_{ij} = \sum_k |g_k|^2 e^{ik(x_j - x_i)} \mathcal{P}(\frac{1}{\omega_k - \omega_R})$. Los términos en la diagonal nos hablan de las interacciones del emisor individualmente, siendo Γ_{ii} el decaimiento exponencial (Γ) y Δ_{ii} el desplazamiento de la frecuencia (Δ) definidos previamente

para un solo emisor. Lo más interesante al añadir un emisor adicional se encuentra en los términos no diagonales, que agregan una dependencia de la forma $e^{ik(x_j-x_i)}$. La incorporación de este término nos permite definir un decaimiento colectivo Γ_{12} , que refleja la influencia mutua en el desplazamiento exponencial.

Los acoplamientos entre emisores no dependen del signo de $x_1 - x_2$, es decir, de la dirección en la que ocurre la propagación. Esto se debe a que las sumas sobre k incluyen tanto valores positivos como negativos, lo que cierra un ciclo en el plano complejo. Dado que la suma total no varía con el signo de k , la dirección en que se realiza la suma no es importante. Como resultado, la expresión puede simplificarse para que dependa únicamente de la distancia entre x_1 y x_2 , sin importar el signo de la diferencia, es decir, $\sum_k e^{ik(x_1-x_2)} = \sum_k e^{-ik(x_1-x_2)} = \sum_k e^{ik|x_1-x_2|}$.

Se procede entonces al cálculo de los coeficientes de la matriz de (3.21)

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_{nm}}{2} + i\Delta_{nm} &= \sum_k |g_k|^2 e^{ik|x_n-x_m|} \left(\pi\delta(\omega_k - \omega_R) + i\mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_k - \omega_R} \right) \right) \\
&= \frac{D}{2\pi} \left[\int dk |g_k|^2 e^{ik|x_n-x_m|} \pi\delta(\omega_k - \omega_R) + i\mathcal{P} \int \frac{|g_k|^2 e^{ik|x_n-x_m|} dk}{\omega_k - \omega_R} \right] \\
&= \frac{g^2}{4\pi} \left[\pi \int_{k>0} \omega_k e^{ik|x_n-x_m|} \delta(\omega_k - \omega_R) dk + \pi \int_{k<0} \omega_k e^{ik|x_n-x_m|} \delta(\omega_k - \omega_R) dk \right. \\
&\quad \left. + i\mathcal{P} \int_{k>0} \frac{\omega_k e^{ik|x_n-x_m|}}{\omega_k - \omega_R} dk + i\mathcal{P} \int_{k<0} \frac{\omega_k e^{ik|x_n-x_m|}}{\omega_k - \omega_R} dk \right] \\
&= \frac{g^2}{4\pi} \left[\pi \int_{k>0} \omega_k \left(e^{ik|x_n-x_m|} + e^{-ik|x_n-x_m|} \right) \delta(\omega_k - \omega_R) dk \right. \\
&\quad \left. + i\mathcal{P} \int_{k>0} \frac{\omega_k \left(e^{ik|x_n-x_m|} + e^{-ik|x_n-x_m|} \right) dk}{\omega_k - \omega_R} \right] \\
&= \frac{g^2}{4\pi} \left[\pi \int_{k>0} \omega_k 2 \cos(k|x_n - x_m|) \delta(\omega_k - \omega_R) dk + i\mathcal{P} \int_{k>0} \frac{\omega_k 2 \cos(k|x_n - x_m|) dk}{\omega_k - \omega_R} \right] \\
&= \frac{g^2}{2v_g\pi} \left[\pi \int \omega \cos(\omega/v_g|x_n - x_m|) \delta(\omega - \omega_R) d\omega + i\mathcal{P} \int \frac{\omega \cos(\omega/v_g|x_n - x_m|) d\omega}{\omega - \omega_R} \right].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Se han seguido los mismos pasos utilizados en la resolución de (3.16). Se ha realizado el paso al continuo utilizando la densidad de estados, dividiendo la integral en términos con k positivos y negativos y finalmente se ha cambiado la variable de integración de k a ω .

Podemos obtener la forma que tiene la parte real ($\frac{\Gamma_{nm}}{2}$), ya que es el primer término de (3.22)

$$\frac{\Gamma_{nm}}{2} = \frac{g^2}{2v_g} \omega_R \cos \left(\frac{\omega_R}{v_g} |x_n - x_m| \right). \tag{3.23}$$

En la parte imaginaria usamos de nuevo (3.17), la función es $f(\omega) = \omega e^{i\omega/v_g|x_n-x_m|}$, así que

$$\begin{aligned}
\Delta_{nm} &= \frac{g^2}{2v_g\pi} \mathcal{P} \int \frac{\omega \cos(\omega/v_g|x_n - x_m|) d\omega}{\omega - \omega_R} = \frac{g^2}{2v_g} \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{\Re[f(\omega)] d\omega}{\omega - \omega_R} \\
&= \frac{g^2}{2v_g} \Im[f(\omega_R)] = \frac{g^2}{2v_g} \Im \left[\omega_R e^{i\omega_R/v_g|x_n-x_m|} \right] = \frac{g^2 \omega_R}{2v_g} \sin(\omega_R/v_g|x_n - x_m|). \tag{3.24}
\end{aligned}$$

La expresi3n final viene dada por

$$\frac{\Gamma_{nm}}{2} + i\Delta_{nm} = \frac{\Gamma}{2} [\cos(\omega_R/v_g|x_n - x_m|) + i \sin(\omega_R/v_g|x_n - x_m|)]. \quad (3.25)$$

3.3. Hamiltoniano efectivo

Para realizar la simulaci3n, la manera en que hemos formulado nuestro hamiltoniano no es adecuada desde el punto de vista computacional. Sin embargo, como nuestro objetivo es ver la desexcitaci3n del oscilador LC, en realidad solo trabajamos en el subespacio de una excitaci3n. En este caso, el estado se describe por un vector $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}^T$ que contiene las amplitudes de la excitaci3n en los modos de la lnea de transmisi3n ($Y = c_k$) o en los emisores ($X = d_n$).

El hamiltoniano se puede escribir como una matriz de bloques que agrupa las contribuciones de los diferentes subespacios [3]

$$H = \left(\begin{array}{c|c} H_{\text{em}} & C \\ \hline C^\dagger & H_{\text{ph}} \end{array} \right), \quad (3.26)$$

donde H_{em} es la matriz que describe las energas de los modos de los emisores, H_{ph} es la matriz que describe las energas de los modos de la lnea de transmisi3n y C es la matriz de acoplamiento entre los emisores y la lnea de transmisi3n teniendo la forma $C_{nk} = g_k e^{ikx_n}$.

Para realizar el an3lisis de la evoluci3n temporal del estado excitado, retomamos la ecuaci3n de Schr3dinger (3.1), con el estado $|\psi\rangle$ definido y el hamiltoniano (3.26), obteniendo

$$\dot{X} = -iH_{\text{em}}X - iC^\dagger Y \quad (3.27)$$

$$\dot{Y} = -iH_{\text{ph}}Y - iCX. \quad (3.28)$$

Lo que nos ha provocado un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. Para resolverlo utilizamos la transformada de Laplace que convertir3 el sistema en uno de ecuaciones algebraicas.

$$\mathcal{X}(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt; \quad \mathcal{Y}(s) = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt. \quad (3.29)$$

Obteniendo

$$s\mathcal{X} - \mathcal{X}(0) = -iH_{\text{em}}\mathcal{X} - iC^\dagger \mathcal{Y}; \quad s\mathcal{Y} - \mathcal{Y}(0) = -iC\mathcal{X} - iH_{\text{ph}}\mathcal{Y}.$$

Y eso te lleva a aislar $\mathcal{Y}(s)$ tomando $\mathcal{Y} = 0$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{-iC}{s + iH_{\text{ph}}} \mathcal{X}(s) \quad (3.30)$$

usando (3.27) obtenemos la ecuaci3n para la din3mica de los emisores en el espacio de Laplace, donde podemos identificar unos t3rminos que actúan como hamiltoniano, ya que en el espacio de Laplace la ecuaci3n de Schr3dinger para un estado $\Psi(t)$ es $\Psi(s) = (s + iH)^{-1} \Psi(0)$. Por lo tanto, el hamiltoniano efectivo ($H_{\text{eff}} = H_{\text{em}} + C(is - H_{\text{ph}})^{-1}C^\dagger$) es aquel hamiltoniano que actúa como tal pero tiene una dependencia con s . Este hamiltoniano describe c3mo los emisores se comportan cuando est3n acoplados a la lnea de transmisi3n, el t3rmino H_{em} representa la energa de los emisores por s3 solos, mientras que el t3rmino $C(is - H_{\text{ph}})^{-1}C^\dagger$ representa las correcciones a la energa debido a la interacci3n con la lnea de transmisi3n.

Para resolver la dinámica tendríamos que invertir la transformada de Laplace, para todas las energías. Sin embargo, en el contexto la aproximación Markoviana, la cual nos llevaba a una emisión espontánea en la frecuencia ω_R (3.18) implica asumir que la frecuencia más relevante de la dinámica es ω_R y que el término $\frac{C^\dagger C}{is - H_{\text{ph}}}$ del Hamiltoniano se puede aproximar por $\frac{C^\dagger C}{\omega_R - H_{\text{ph}}}$.

De esta manera la transformada inversa de Laplace resulta en un decaimiento exponencial

$$X(t) = \int_0^\infty \frac{e^{st}}{s + iH_{\text{eff}}^{\text{Mark}}} \mathcal{X}(0) ds = X(0) e^{-iH_{\text{eff}}^{\text{Mark}} t}. \quad (3.31)$$

Para construir la matriz del hamiltoniano efectivo calculamos $C(i\omega_R - iH_{\text{ph}})^{-1}C^\dagger$, obteniendo

$$[C(i\omega_R - iH_{\text{ph}})^{-1}C^\dagger]_{n,m} = \sum_k |g_k|^2 / (\omega_R - \omega_k) e^{ik(x_n - x_m)}. \quad (3.32)$$

Para el caso de dos emisores nos queda

$$H_{\text{eff}}^{\text{Mark}} = \begin{pmatrix} \omega_R & 0 \\ 0 & \omega_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_k \frac{|g_k|^2}{\omega_R - \omega_k} & \sum_k \frac{|g_k|^2 e^{ik|x_2 - x_1|}}{i\omega_R - i\omega_k} \\ \sum_k \frac{|g_k|^2 e^{-ik|x_1 - x_2|}}{i\omega_R - i\omega_k} & \sum_k \frac{|g_k|^2}{i\omega_R - i\omega_k} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

La forma de la segunda matriz no nos permite operar con ella, por lo que calculamos

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{i|g_k|^2}{\omega_R - \omega_k} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k \frac{i|g_k|^2}{\omega_R - \omega_k + i\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k \frac{i|g_k|^2 (\omega_R - \omega_k - i\epsilon)}{(\omega_R - \omega_k)^2 + \epsilon^2} \\ &= i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k \frac{|g_k|^2 (\omega_R - \omega_k)}{(\omega_R - \omega_k)^2 + \epsilon^2} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k \frac{|g_k|^2 \epsilon}{(\omega_R - \omega_k)^2 + \epsilon^2} \\ &= i \sum_k |g_k|^2 \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\omega_k - \omega_R)}{(\omega_R - \omega_k)^2 + \epsilon^2}}_{\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega_R - \omega_k}\right)} \sum_k |g_k|^2 \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{(\omega_R - \omega_k)^2 + \epsilon^2}}_{\pi \delta(\omega_R - \omega_k)}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Este cálculo ya lo hemos realizado antes, ya que se corresponde con (3.22), por lo que el hamiltoniano efectivo lo podemos expresar como

$$H_{\text{eff}}^{\text{Mark}} = \begin{pmatrix} \omega_R & 0 \\ 0 & \omega_R \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_{11}}{2} + i\Delta_{11} & \frac{\Gamma_{12}}{2} + i\Delta_{12} \\ \frac{\Gamma_{21}}{2} + i\Delta_{21} & \frac{\Gamma_{22}}{2} + i\Delta_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Haber definido de esta manera el hamiltoniano efectivo bajo la aproximación Markoviana nos permite describir de manera muy sencilla la evolución de nuestro estado excitado, ya que solo será necesario hacer la diagonalización de (3.35), es decir, nos hemos evitado hacer la resolución de las ecuaciones diferenciales acopladas. Además, la parte real de estos autovalores son los decaimientos colectivos de la aproximación Markoviana, la dinámica nos vendrá dada por

$$d_{\lambda_\pm}(t) = d(0) e^{-i\lambda_\pm t}. \quad (3.36)$$

Donde $\lambda_\pm = \omega_R + \frac{\Gamma}{2} [\cos(\omega_R/v_g |x_n - x_m|) \pm i \sin(\omega_R/v_g |x_n - x_m|)]$.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo vamos a presentar los resultados simulando el sistema que hemos presentado en las secciones anteriores.

4.1. Solo un emisor

Partiendo de la expresión obtenida para la evolución del sistema en el límite markoviano (3.12), se quiere conocer en qué condiciones este límite es aplicable. Por lo tanto, analizaremos el sistema utilizando tanto esta expresión como simulaciones numéricas. Para obtener la dinámica del sistema hemos diagonalizado numéricamente el hamiltoniano (3.26). El estado inicial que consideraremos en este análisis es aquel en el que el oscilador LC se encuentra en su estado excitado ($d_n=1$), mientras que la línea de transmisión permanece en su estado fundamental ($c_k = 0$).

Lo primero que queremos analizar es cómo afecta el parámetro g , que representa el acoplamiento entre el oscilador LC y la línea de transmisión, a la evolución del circuito LC. En la figura (4.2) se representa el decaimiento del estado excitado del circuito LC acoplado a la guía. La evolución del estado usando el hamiltoniano ($|\psi(t)|^2$) se muestra con líneas sólidas, mientras que la evolución bajo el límite markoviano ($|d(t)|^2$) se representa con líneas discontinuas.

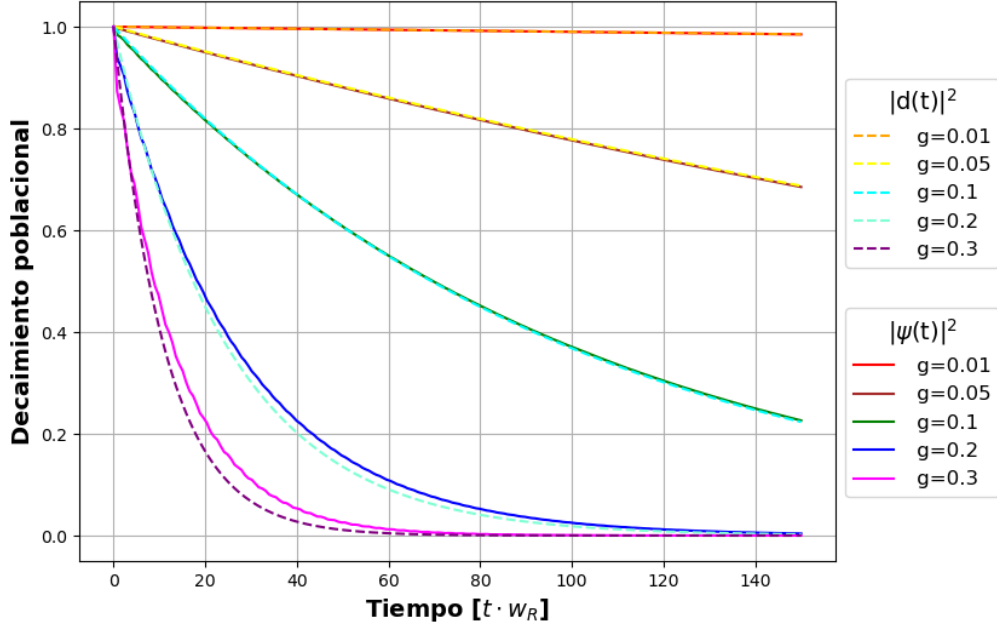


Figura 4.1: Emisión espontánea de un fotón debido al oscilador LC para diferentes acoplos (g). Se han utilizado $N = 1000$ osciladores LC distribuidos a lo largo de una línea de transmisión con una longitud total de $D = 300$, lo que resulta en una distancia entre nodos (Δx) de $\Delta x = 0,3$. La velocidad de grupo esta fijada en $v_g = c = 1$ debido a que usamos unidades naturales. La frecuencia del modo del emisor (ω_R) se fija, obteniendo así una frecuencia de $\omega_c = 3,333\omega_R$ para los modos de la línea de transmisión.

En la figura (4.1) como era esperable por la dependencia de Γ con el acoplo (3.18), a mayor acoplo decae más rápido el estado excitado. Sin embargo, lo interesante es que al aumentar el acoplo la aproximación Markoviana empieza a diferir de la simulación numérica aunque aún captura el comportamiento cualitativamente.

Dado que el decaimiento Γ en el límite markoviano depende de la frecuencia de los modos del circuito LC, es interesante analizar cómo esta frecuencia influye en la validez de dicho límite. Con la información obtenida de la gráfica anterior, vamos a realizar la simulación con un acoplamiento de $g = 0,1$, ya que es lo suficientemente grande como para ver la influencia entre la línea de transmisión y el circuito LC, pero sin dejar de cumplir con el límite markoviano.

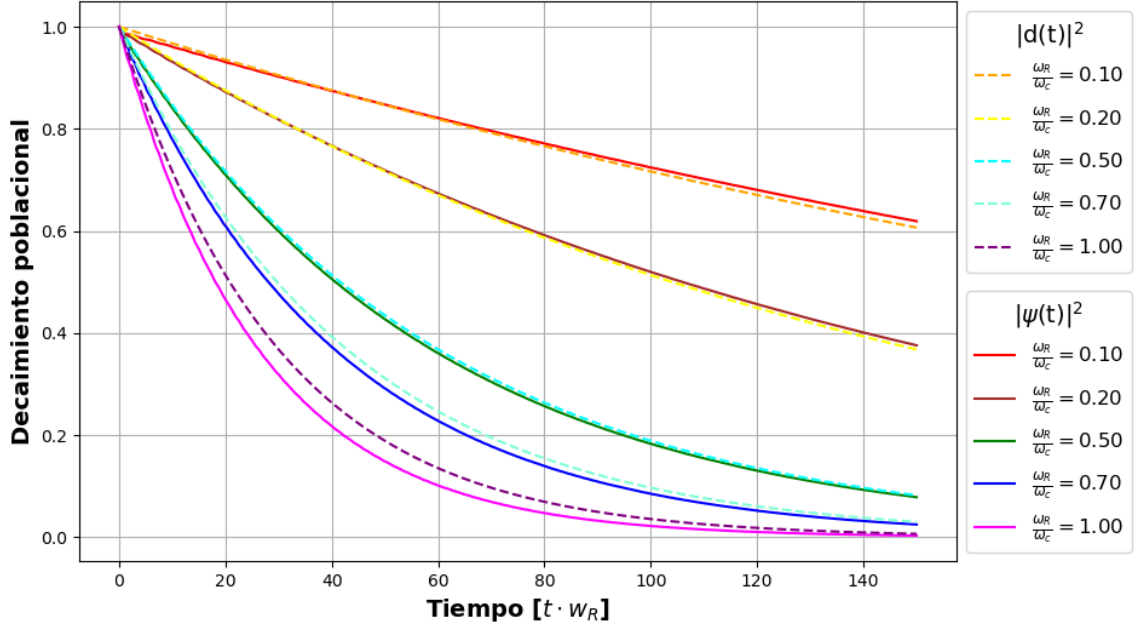


Figura 4.2: Emisión espontánea de un fotón debido al circuito LC para diferentes frecuencias de los modos del circuito LC (w_R). El acoplo utilizado ha sido de $g=0.1$ y el resto de los parámetros son los mismos que en la figura (4.1).

Se aprecia un mayor decaimiento al incrementar ω_R , lo cual es coherente con la dependencia de Γ (3.18). Sin embargo, a medida que ω_R aumenta, se muestra una diferencia entre la aproximación Markoviana y la simulación numérica, aunque ambas mantienen una similitud en su forma general. Esto se debe a la aproximación a línea de transmisión óhmica que se ha hecho al realizar los cálculos de la resolución (3.15), en la figura (2.3) podemos observar que a frecuencias bajas y sin superar nuestro valor ω_c la aproximación lineal y la relación de dispersión de nuestro sistema son iguales, sin embargo al aproximar al valor ω_c , la aproximación deja de ser buena.

4.2. Dos emisores

En cuanto a los resultados obtenidos para el acoplo de dos emisores se deben determinar los autovalores del hamiltoniano efectivo para analizar su evolución. En el caso de nuestro hamiltoniano completo, nos enfocamos en el autoestado $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle)$.

Tener dos emisores nos permite analizar cómo se influyen mutuamente, especialmente en función de la distancia entre ellos. Por ello, simularemos el sistema para diferentes posiciones relativas de los emisores, en concreto, para distancias relativas de 0 y $60\Delta x$. Se representa por tanto el decaimiento del estado $|+\rangle$ para diferentes acoplos.

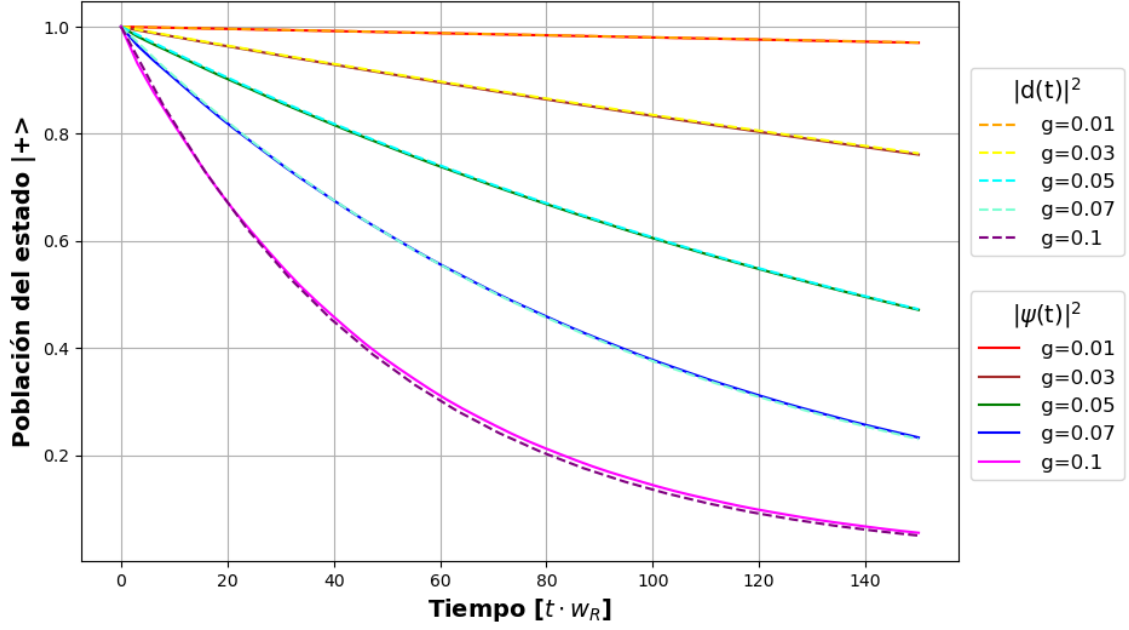


Figura 4.3: Emisión espontánea de fotones debido a los osciladores LC cuando se encuentran en la misma posición para diferentes acoplos (g) y en el estado $|+\rangle$. Se han utilizado $N = 2000$ modos el resto de los parámetros son los mismos que en la figura (4.1)

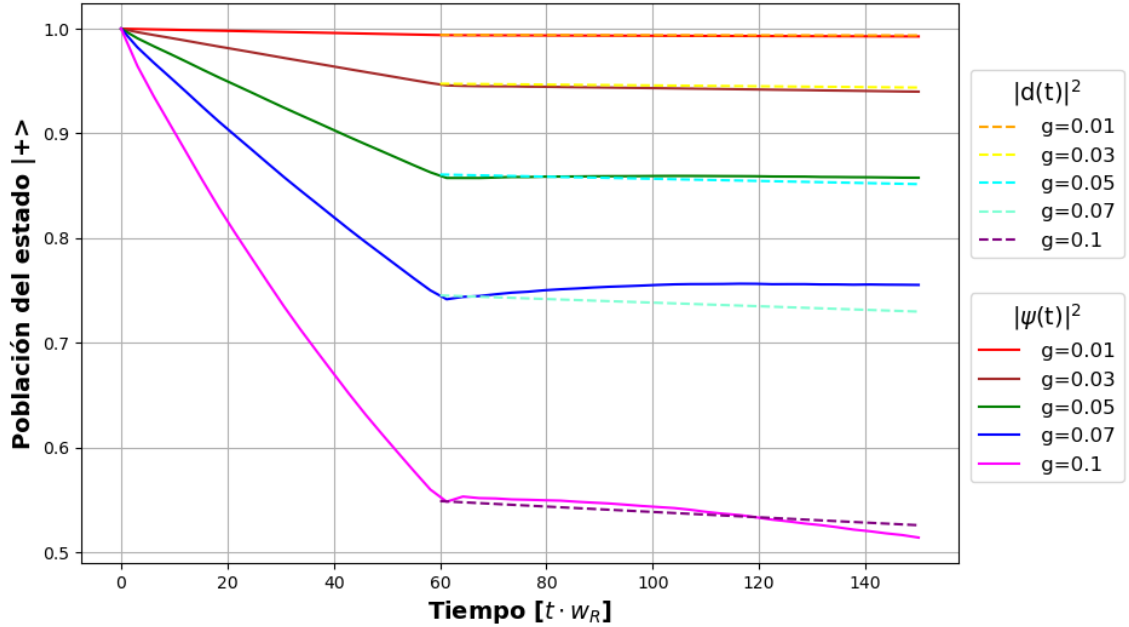


Figura 4.4: Emisión espontánea de fotones debido a los osciladores LC cuando se encuentran el primero en $x=0$ y el segundo en $x=60 \Delta x$ para diferentes acoplos (g) y en el estado $|+\rangle$. Los parámetros para la simulación son los mismos que los utilizados en (4.3).

Con estas dos figuras observamos la influencia que tienen los emisores uno sobre el otro. En la figura (4.3) los decaimientos colectivos son el doble de rápidos que los de un solo emisor, a este fenómeno se le conoce como superradiancia de Dicke [2]. Además, como se han escogido acoplos pequeños donde la aproximación Markoviana es válida, la simulación numérica coincide con la dinámica que da el hamiltoniano efectivo bajo la aproximación Markoviana.

Sin embargo, al separar los dos emisores (4.4), comenzamos a observar cómo interactúan entre sí, pudiendo identificar claramente el punto en el que ambos emisores empiezan a influirse mutuamente. En este caso, el decaimiento colectivo esta vez es más lento que el de un emisor independiente, teniendo esta vez el fenómeno de subradiancia.

Al igual que hicimos para un solo emisor acoplado y debido a la dependencia que vuelve a aparecer en el hamiltoniano efectivo con la frecuencia del emisor (3.35), representamos el decaimiento para el estado $|+\rangle$ para distintas frecuencias del emisor ω_R con las mismas distancias relativas que se han utilizado para el análisis con los diferentes acoplos.

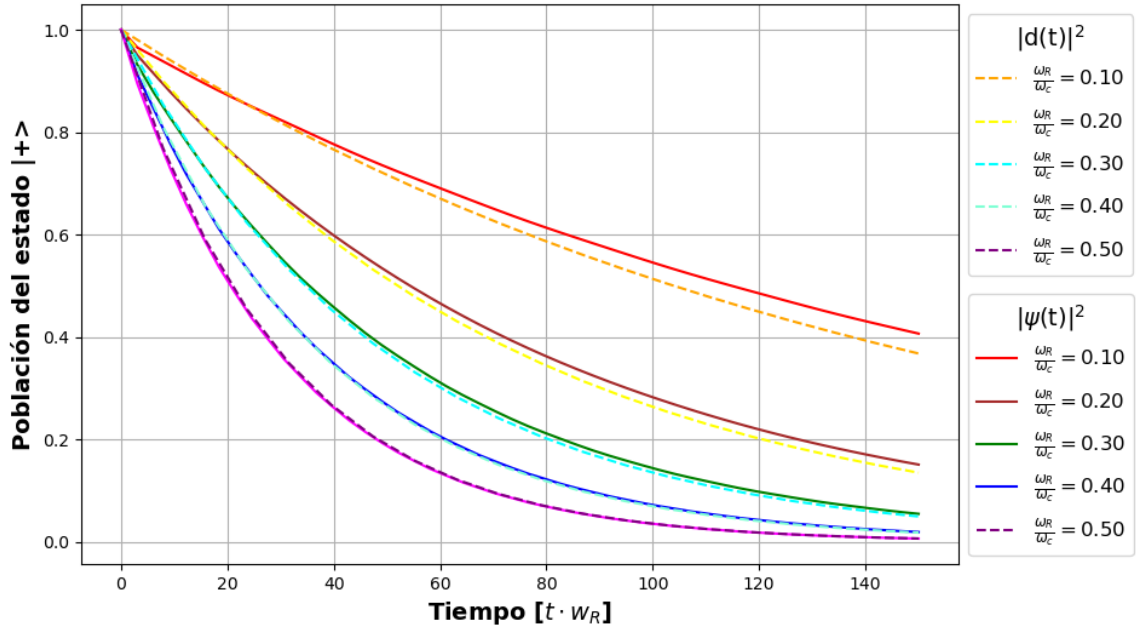


Figura 4.5: Emisión espontánea de fotones debido a los osciladores LC cuando se encuentran en la misma posición para diferentes acoplos (g) y en el estado $|+\rangle$. Se han utilizado $N = 2000$ nodos y un acoplo de $g = 0,1$ el resto de los parámetros son los mismos que en la figura (4.3).

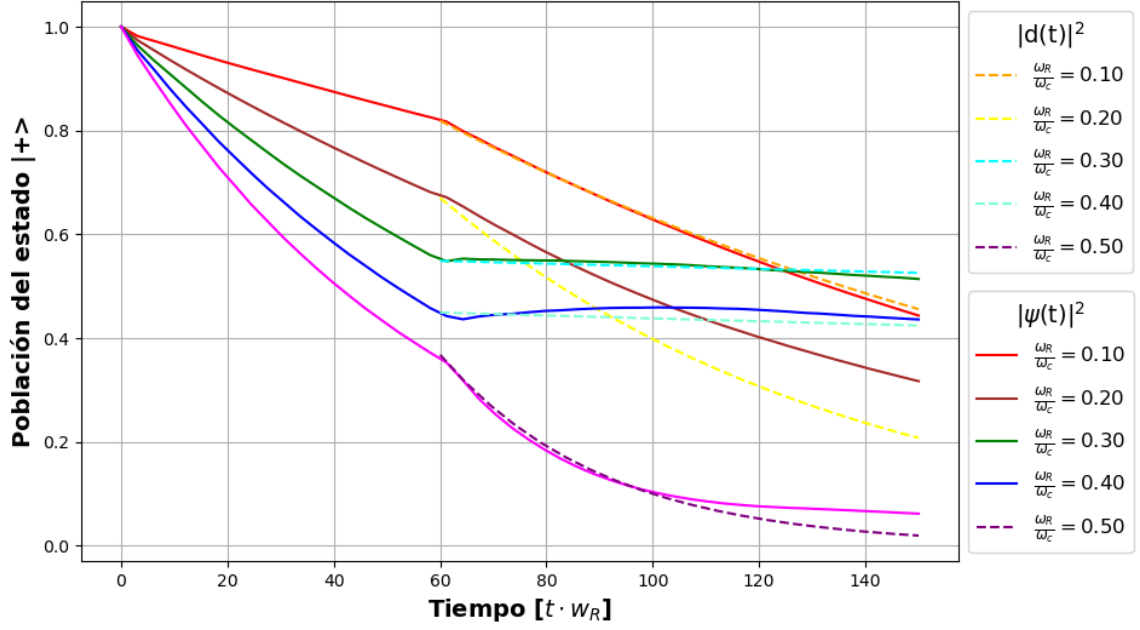


Figura 4.6: Emisión espontánea de fotones debido a los osciladores LC cuando se encuentran cuando se encuentran el primero en $x=0$ y el segundo en $x=60 \Delta x$ para diferentes frecuencias de los emisores (ω_R) y en el estado $|+\rangle$. Los parámetros para la simulación son los mismos que los utilizados en (4.6).

La información que nos dan las gráficas (4.5) y (4.6) es una recopilación de los conceptos que ya hemos ido comentando a lo largo del trabajo. En el caso de la figura (4.5) tenemos de nuevo un decaimiento colectivo que es doble que el de un emisor. Además, como estamos alejados del valor que toma ω_c , no observamos una mala coincidencia con la aproximación Markoviana. Por último, en la figura (4.6) volvemos a ver un decaimiento más lento que para un emisor y la separación que veíamos en (4.4) cuando los emisores empiezan a interactuar.

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido el estudio de la emisión espontánea del primer estado excitado de osciladores acoplados a una guía de ondas. En primer lugar, logramos realizar la cuantización canónica del hamiltoniano de una línea de transmisión acoplada a un oscilador LC, imponiendo las relaciones de conmutación bosónicas y utilizando la aproximación de onda rotante. Dentro de dicha aproximación restringimos la dinámica al subespacio de una excitación. Con el hamiltoniano obtenido, pudimos comenzar el estudio de la evolución del estado excitado, resolviendo numéricamente la ecuación de Schrödinger y utilizando la aproximación Markoviana para obtener una solución analítica a las ecuaciones diferenciales resultantes.

Asimismo, definimos el concepto de hamiltoniano efectivo y comprobamos que, a pesar de utilizar formalismos distintos, se llegaba a la misma física que tiene nuestro modelo dentro de la aproximación Markoviana.

En el caso de un oscilador LC acoplado a una línea de transmisión, evaluamos cómo varía la emisión espontánea con el acoplamiento y determinamos los límites en los que la aproximación Markoviana sigue siendo válida. Observamos que, a medida que el acoplamiento aumenta, los efectos de la memoria del emisor respecto a la línea de transmisión se hacen más evidentes, lo que conduce a una disminución en la validez de la aproximación Markoviana, ya que, esta los desprecia.

También analizamos el comportamiento al variar la frecuencia del oscilador LC, comprobando no solo los límites de la aproximación Markoviana, sino también si es apropiado modelar la línea de transmisión como óhmica en este contexto. El modelo se comporta como si la relación de dispersión fuese lineal hasta el valor de ω_c cerca del cual deja de ser así. Justamente esta aproximación es la que hemos utilizado para los cálculos analíticos en la aproximación Markoviana.

Finalmente, hemos simulado nuestro modelo con el acoplamiento de dos osciladores LC a la línea de transmisión. La adición de un segundo emisor introduce una nueva dinámica, ya que su interacción depende de la distancia entre ellos. Observamos que la evolución de los estados se divide en dos fases: en la primera, los emisores no interactúan entre sí y su comportamiento sigue la dinámica de un solo emisor acoplado a la guía; en la segunda, cuando comienzan a interactuar, la dinámica cambia, ajustándose a los autovalores del hamiltoniano efectivo. Hemos comprobado que estos comportamientos son predecibles dentro del régimen en el que la aproximación Markoviana es válida, hasta que, por las mismas razones que para el caso de un solo emisor, esta aproximación deja de ser adecuada.

Bibliografía

- [1] Andreas Albrecht et al. «Subradiant states of quantum bits coupled to a one-dimensional waveguide». En: *New Journal of Physics* 21.2 (feb. de 2019), pág. 025003. DOI: 10.1088/1367-2630/ab0134. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/ab0134>.
- [2] R. H. Dicke. «Coherence in Spontaneous Radiation Processes». En: *Phys. Rev.* 93 (1 ene. de 1954), págs. 99-110. DOI: 10.1103/PhysRev.93.99. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.93.99>.
- [3] B Gaveau y L S Schulman. «Limited quantum decay». En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 28.24 (dic. de 1995), pág. 7359. DOI: 10.1088/0305-4470/28/24/029. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/28/24/029>.
- [4] H.J. Kimble. «The Quantum Internet». En: 453 (jun. de 2008), págs. 1023-1030. DOI: |doi: 10.1038/nature07127.
- [5] Juan Jose García Ripoll. *Quantum Information & Quantum Optics with Superconducting Circuits*. Cambridge University Press, 2022.
- [6] Alexandra S. Sheremet et al. «Waveguide quantum electrodynamics: Collective radiance and photon-photon correlations». En: *Rev. Mod. Phys.* 95 (1 mar. de 2023), pág. 015002. DOI: 10.1103/RevModPhys.95.015002. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.95.015002>.