

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

---

**Precesión del perihelio para órbitas  
alrededor de agujeros negros en la  
aproximación postnewtoniana en relatividad  
general**

---

*Trabajo realizado por:*

**Pablo Díaz Navarrete**

*Trabajo dirigido por:*

**Eduardo Follana Adín**

Curso 2023-2024

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Métrica de Schwarzschild</b>	<b>3</b>
2.1. Constantes del movimiento . . . . .	4
2.2. Cálculo de la precesión del perihelio . . . . .	5
2.2.1. Limitaciones para el cálculo de la precesión. . . . .	6
2.2.2. Cálculo general de la precesión . . . . .	7
2.2.3. Simulaciones orbitales . . . . .	10
<b>3. Aproximación postnewtoniana</b>	<b>14</b>
3.1. Constantes del movimiento . . . . .	15
3.1.1. Segundo orden . . . . .	15
3.1.2. Tercer orden . . . . .	16
3.1.3. Comparación entre segundo y tercer orden con el resultado inicial . . . . .	17
3.2. Cálculo de la precesión del perihelio . . . . .	17
<b>4. Gráficas de la precesión del perihelio</b>	<b>18</b>
4.1. Precesión en función de la excentricidad de la órbita . . . . .	18
4.2. Precesión del perihelio en función del radio en el perihelio . . . . .	20
<b>5. Conclusión</b>	<b>22</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>23</b>
<b>6. Anexo</b>	<b>24</b>
6.1. Método alternativo para el cálculo de la conexión afín en la aproximación post-newtoniana . . . . .	24
6.2. Cálculo de los coeficientes $I_n$ para todo $n$ . . . . .	27

# 1. Introducción

Existen casos para los que la teoría gravitatoria de Newton es suficiente para explicar, de forma aproximada, el movimiento de cuerpos celestes en torno a otros más masivos. Se puede demostrar [1] que las ecuaciones del movimiento derivadas de la relatividad general pueden ser aproximadas de forma que se obtengan las ecuaciones de la mecánica clásica Newtoniana. Para ello es necesario asumir una partícula moviéndose a velocidades bajas y sometida a un campo gravitatorio débil y estático.

El proceso se denomina aproximación newtoniana y se resume en aproximar la aceleración en las componentes espaciales<sup>1</sup> a primer orden en  $v^2$ . En este documento se estudiará la aproximación postnewtoniana, que consiste en aproximar a órdenes superiores en  $v^2$ . El foco de estudio de este trabajo será estudiar la precesión del perihelio orbital por causas relativistas. Se calculará en la sección 2.2.2 una expresión, en forma de serie de potencias, para la precesión del perihelio en las órbitas elípticas producidas por la métrica de Schwarzschild. Sumando hasta el  $n$ -ésimo término en la serie de potencias, se obtiene una aproximación de la precesión orbital.

En la sección 3 se aplica la aproximación postnewtoniana sobre la conexión afín derivada de la métrica de Schwarzschild y se obtiene numéricamente la precesión del perihelio orbital para esta aproximación. Finalmente, en la sección 4 se estudiarán los comportamientos de las distintas aproximaciones propuestas para la precesión de dos formas: fijando el valor del perihelio y variando la excentricidad; y viceversa.

En casi su totalidad, por simplicidad, los cálculos se realizarán asumiendo  $c = 1$ . La única excepción será al simular la órbita de Mercurio para comprobar la validez de los cálculos utilizados, donde se fijará  $c$  con el valor definido en [2] para poder comparar el periodo orbital con el real. Fijar la velocidad de la luz a 1 equivale a afirmar que la distancia y el tiempo poseen las mismas dimensiones:

$$[c] = \frac{[l]}{[t]} = 1 . \quad (1.0.1)$$

Además, en los cálculos para casos distintos de Mercurio se tomará la constante gravitacional como  $G = 1$ . A nivel dimensional, esto implica que, si se tiene en cuenta además que  $c = 1$ :

$$[G] = \frac{[l]^3}{[t]^2[m]} = 1 \Rightarrow [G] = \frac{[l]}{[m]} = 1 \Rightarrow [l] = [t] = [m] . \quad (1.0.2)$$

Por tanto, la distancia, el tiempo y la masa tienen la misma dimensión bajo estas condiciones. La distancia y el tiempo se pueden medir en unidades de masa (U.M), unidad que se usará a lo largo de este documento para este caso. En este documento se considerará como despreciable la masa de la partícula que orbita en torno del cuerpo masivo central. En consecuencia, la masa reducida  $\mu$  del sistema será la masa del cuerpo central,  $M$ .

---

<sup>1</sup>  $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

## 2. Métrica de Schwarzschild

En este trabajo, se va a estudiar la métrica de Schwarzschild, deducida [3] a partir de considerar un campo gravitatorio independiente del tiempo y esféricamente simétrico. Además, en esta métrica el espacio está vacío, es decir, el tensor energía-momento es igual a 0. Con las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$ , con la convención de signos  $(-, +, +, +)$  y considerando  $c^2 = 1$ , se tiene que

$$g = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt \otimes dt + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin(\theta)^2 d\varphi \otimes d\varphi . \quad (2.0.1)$$

$r_s$  es el radio de Schwarzschild. Esta métrica es la apropiada para describir el espacio-tiempo alrededor de un agujero negro que no tiene ni carga ni rotación. También sirve para, de forma más general, describir el espacio-tiempo alrededor de un objeto masivo con simetría esférica, para radios fuera del propio objeto. El radio de Schwarzschild tiene [4] la expresión

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \stackrel{c^2=1}{=} 2GM . \quad (2.0.2)$$

En la expresión 2.0.2,  $c$  es la velocidad de la luz,  $G$  es la constante universal de gravitación y  $M$  es la masa del cuerpo celeste. La expresión para el diferencial de tiempo propio  $d\tau$  en esta métrica viene dada por

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin(\theta)^2 d\varphi^2 . \quad (2.0.3)$$

La trayectoria de una partícula o un fotón libre vendrá determinada por la ecuación geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} . \quad (2.0.4)$$

Si se describe la trayectoria de una partícula con masa, el parámetro  $p$  será proporcional al tiempo propio  $\tau$ . Se puede normalizar  $p$  de forma que  $p = \tau$ . Además, la conexión afín viene definida en función del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  como

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \left( \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} \right) . \quad (2.0.5)$$

Para la métrica de Schwarzschild, las componentes no nulas de la conexión afín son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t &= \frac{r_s}{2(r^2 - r_s r)} , & \Gamma_{tt}^r &= \frac{r_s r - r_s^2}{2r^3} , & \Gamma_{rr}^r &= -\frac{r_s}{2(r^2 - r_s r)} , \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= (-r + r_s) , & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= (-r + r_s) \sin(\theta)^2 , & \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} , \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\cos(\theta) \sin(\theta) , & \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r} , & \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} . \end{aligned}$$

## 2.1. Constantes del movimiento

La trayectoria viene determinada por las ecuaciones diferenciales dadas en (2.0.1). Para simplificar los cálculos, se pueden confinar las trayectorias al plano ecuatorial, definiendo  $\frac{d\theta_0}{d\tau} = 0$  y  $\theta = \frac{\pi}{2} = cte$ . Esto elimina  $\theta$  como variable. Al restringirse a trayectorias en el plano ecuatorial y aplicar la ecuación geodésica (2.0.5) queda el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\frac{r_s}{r^2 - r_s r} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} , \quad (2.1.1)$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{r_s r - r_s^2}{2r^3} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{r_s}{2(r^2 - r_s r)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + (r - r_s) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 , \quad (2.1.2)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} . \quad (2.1.3)$$

De estas tres ecuaciones, se pueden obtener tres constantes del movimiento:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - \frac{r_s}{r}} , \quad (2.1.4)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = L , \quad (2.1.5)$$

$$\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{E^2}{1 - \frac{r_s}{r}} = K . \quad (2.1.6)$$

La constante  $K$  en la ecuación (2.1.6) es -1 debido a que al trabajar con partículas en trayectorias tipo-tiempo, se impone que la norma de la cuadrivelocidad debe ser -1,<sup>2</sup> y la norma de la cuadrivelocidad es equivalente a la expresión (2.1.6) pues

$$-1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = K . \quad (2.1.7)$$

Si se evaluase la trayectoria de un rayo de luz, se obtendría en cambio que  $K = 0$ . La ecuación (2.1.7) se puede reordenar de forma que

$$\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{E^2}{1 - \frac{r_s}{r}} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{r_s}{2r} - \frac{r_s L^2}{2r^3} = \frac{E^2 - 1}{2} = \varepsilon . \quad (2.1.8)$$

Se puede interpretar [5] la relación (2.1.5) como que  $L$  es análogo al momento angular orbital por unidad de masa. Para el caso en el que  $G = 1$  y  $c = 1$ ,  $L$  tiene unidades de masa (U.M). Además, aplicando la definición del radio de Schwarzschild (2.0.2), la constante  $\varepsilon$  se puede interpretar por medio de la ecuación (2.1.8) como la suma de energía cinética y potencial por unidad de masa, pues esta ecuación es la misma que la de la conservación de la energía en una órbita newtoniana, exceptuando el término  $-\frac{GML^2}{r^3}$ , el cual tiende a 0 para velocidades y campos gravitatorios pequeños ( $GM \ll r$  y  $L \ll r$ ). Se define, por tanto, el potencial efectivo:

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{r_s}{2r} - \frac{r_s L^2}{2r^3} . \quad (2.1.9)$$

---

<sup>2</sup>Asumiendo que  $c = 1$ .

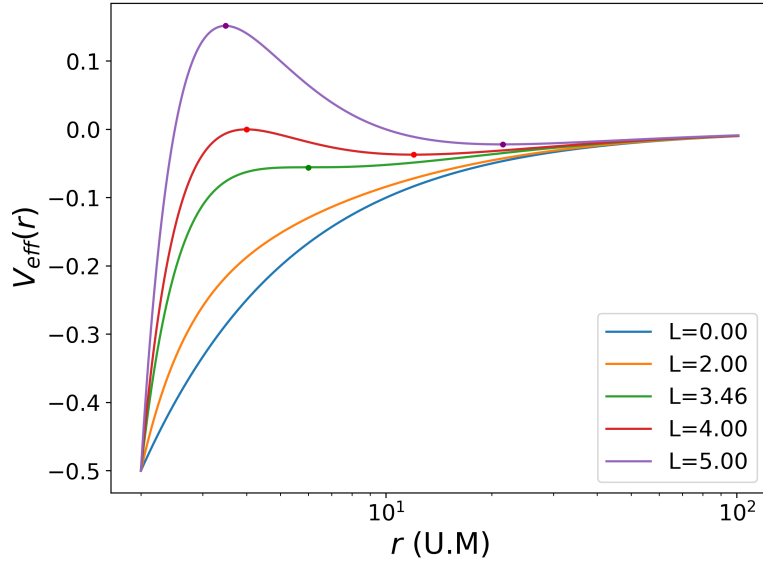


Figura 1:  $V_{eff}$  en función de  $r$  para distintos valores de  $L$ . Se asume  $G = 1$ ,  $M = 1$  (U.M) y  $c^2 = 1$ , es decir,  $r_s = 2$  (U.M). Los puntos remarcados corresponden a máximos o mínimos. Se observa que para  $L > 2\sqrt{3}$  (U.M) existen un máximo y un mínimo, los cuales se juntan en el caso  $L = 2\sqrt{3}$  en  $r = 6$  (U.M). Para  $L$  inferior a  $2\sqrt{3}$  (U.M) no se tienen ni máximos ni mínimos. El eje horizontal está en escala logarítmica para una mejor visualización

Para el caso  $L = r_s\sqrt{3}$ , se obtiene la órbita circular estable de menor radio (ISCO)<sup>3</sup>. Sustituyendo en (2.1.6) e imponiendo que  $\frac{dr}{d\tau} = 0$ ,  $r_{ISCO} = 3r_s$ . Cuando  $L > r_s\sqrt{3}$ , en el mínimo de  $V_{eff}$  existe una órbita circular estable con  $r > r_{ISCO}$  y en el máximo existe una órbita circular inestable con  $r < r_{ISCO}$ . Cuando  $L < r_s\sqrt{3}$ , el potencial efectivo es monótono creciente, por lo que no existen órbitas circulares ni estables ni inestables.

## 2.2. Cálculo de la precesión del perihelio

A continuación, se puede proceder al estudio de órbitas distintas de la circular, con derivada radial diferente de 0. Se puede demostrar que [6], a primer orden<sup>4</sup> en  $\frac{r_s}{r}$ , las órbitas son elipses cuyo perihelio precede en cada vuelta por:

$$\Delta\varphi^{(1)} = \frac{3\pi r_s}{2} \left( \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right). \quad (2.2.1)$$

<sup>3</sup>Siglas de *Innermost Stable Circular Orbit*

<sup>4</sup>Se define  $\Delta\varphi^{(n)}$  como la precesión del perihelio a orden  $n$  en  $\frac{r_s}{r}$ , es decir, la suma de todas las contribuciones a la precesión hasta orden  $n$

### 2.2.1. Limitaciones para el cálculo de la precesión.

Es de interés tener un procedimiento para simular una órbita cualquiera, fijando el radio de Schwarzschild, el perihelio y el afelio. En primer lugar, hay que averiguar bajo qué rango de valores del perihelio y del afelio se puede hacer esto. Es evidente que si se fija el perihelio por debajo de  $r_s$ , no se va a tener una órbita elíptica ya que al entrar la partícula en el horizonte de sucesos no volverá a salir. Por tanto, se establece que  $r_- > r_s$ . También se establece que el afelio debe ser superior al perihelio,  $r_+ > r_-$ . Para que  $r_-$  y  $r_+$  coincidan con el perihelio y el afelio, deben cumplir que, al evaluar en  $r_-$  o  $r_+$ , se anule la primera derivada radial  $\frac{dr}{d\tau}$ . Por la expresión (2.1.6), se deduce que:

$$\frac{L^2}{r_-^2} - \frac{E^2}{1 - \frac{r_s}{r_-}} = K = -1 , \quad (2.2.2)$$

$$\frac{L^2}{r_+^2} - \frac{E^2}{1 - \frac{r_s}{r_+}} = K = -1 . \quad (2.2.3)$$

A partir de estas dos expresiones se pueden despejar los valores de  $L^2$  y  $E^2$  en función de  $r_-$ ,  $r_+$  y  $r_s$ .

$$L^2 = \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r_-}\right)} - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r_+}\right)}}{\frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r_+}\right)r_-^2} - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r_-}\right)r_+^2}} , \quad (2.2.4)$$

$$E^2 = \frac{\frac{1}{r_-^2} - \frac{1}{r_+^2}}{\frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r_+}\right)r_-^2} - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r_-}\right)r_+^2}} . \quad (2.2.5)$$

Además, para corresponder con el perihelio y el afelio,  $r_-$  y  $r_+$  deben ser un mínimo y un máximo de  $r$ , respectivamente. La ecuación (2.1.2) da una expresión de la segunda derivada radial:

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right)_{r=r_-} = -\frac{r_s}{2r_-^2} \cdot \frac{E^2}{1 - \frac{r_s}{r_-}} + \frac{1 - \frac{r_s}{r_-}}{r_-^3} \cdot L^2 > 0 , \quad (2.2.6)$$

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right)_{r=r_+} = -\frac{r_s}{2r_+^2} \cdot \frac{E^2}{1 - \frac{r_s}{r_+}} + \frac{1 - \frac{r_s}{r_+}}{r_+^3} \cdot L^2 < 0 . \quad (2.2.7)$$

Aplicando las expresiones (2.2.4) y (2.2.5), se obtienen dos desigualdades en función de  $r_s$ ,  $r_-$  y  $r_+$ :

$$h_-(r_+, r_-, r_s) := \frac{2r_s^2 r_+^2 - (r_s^2 - r_s r_+)r_-^2 - (r_s^2 r_+ + r_s r_+^2)r_-}{2(r_s r_+^2 r_-^2 + (r_s - r_+)r_-^4 + (r_s r_+ - r_+^2)r_-^3)} > 0 , \quad (2.2.8)$$

$$h_+(r_+, r_-, r_s) := -\frac{r_s^2 r_+^2 - (2r_s^2 - r_s r_+)r_-^2 + (r_s^2 r_+ - r_s r_+^2)r_-}{2(r_s r_+^4 + (r_s r_+^2 - r_+^3)r_-^2 + (r_s r_+^3 - r_+^4)r_-)} < 0 . \quad (2.2.9)$$

Fijando un valor de  $r_-$ , se puede averiguar para qué valores de  $r_+$  se cumplirán las desigualdades. Tras descartar aquellos casos donde  $r_- < r_s$  o  $r_- > r_+$ , existen tres casos en función del valor

de  $r_-$ :

$$\begin{aligned} r_- \geq 3r_s &\Rightarrow r_+ > r_- , \\ 2r_s < r_- < 3r_s &\Rightarrow r_+ > \frac{r_s r_-}{r_- - 2r_s} , \\ r_- \leq 2r_s &\Rightarrow \nexists r_+ . \end{aligned}$$

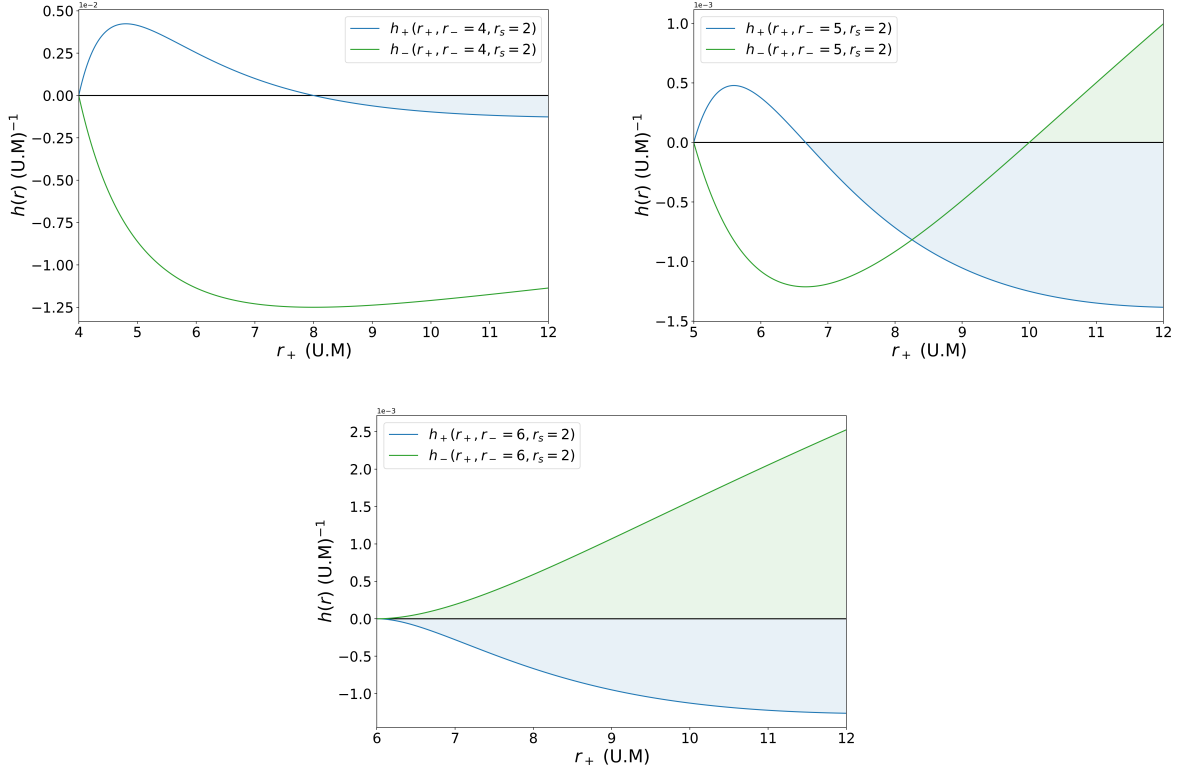


Figura 2: Representación de  $h_-$  y  $h_+$  para  $r_-$  y  $r_s$  fijos, variando  $r_+$ . Los valores de  $r_+$  para los que tanto  $h_+ < 0$  como  $h_- > 0$  son aquellos donde  $r_-$  y  $r_+$  corresponden con el perihelio y el afelio de una órbita. Se fija  $r_s = 2$  (U.M), lo que equivale a  $G = 1$ ,  $M = 1$  (U.M).

El caso para  $r_- \geq 3r_s = r_{ISCO}$ , sin ninguna restricción adicional sobre  $r_+$ , nos garantiza que  $r_-$  y  $r_+$  son respectivamente el perihelio y el afelio. Por tanto, es el que será considerado para las simulaciones y cálculos en siguientes secciones.

### 2.2.2. Cálculo general de la precesión

El cálculo de la precesión del perihelio se puede generalizar a cualquier orden de  $\frac{r_s}{r}$ . Para ello hace falta tomar la expresión (2.1.6) y aplicar regla de la cadena, junto con la expresión (2.1.5), para obtener una nueva expresión en función de  $\frac{dr}{d\varphi}$ . Seguidamente, se puede obtener



$\varphi(r)$  despejando e integrando a ambos lados:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} , \\ \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \cdot \frac{L^2}{r^4} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{E^2}{1 - \frac{r_s}{r}} &= K = -1 \Rightarrow , \\ \Rightarrow \int d\varphi &= \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{E^2}{L^2(1 - \frac{r_s}{r})} - \frac{1}{L^2} - \frac{1}{r^2}}} . \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Al evaluar la integral (2.2.10) entre  $r_-$  y  $r_+$  y multiplicarla por dos, se obtiene la variación angular en una órbita completa. A esto hay que restarle  $2\pi$  para tener la precesión del perihelio:

$$\Delta\varphi = 2(\varphi(r_+) - \varphi(r_-)) - 2\pi . \quad (2.2.11)$$

Ahora bien, las constantes  $E$  y  $L$  vienen dadas en función de  $r_s$ ,  $r_-$  y  $r_+$  por las expresiones (2.2.4) y (2.2.5). Se obtiene la siguiente integral:

$$\int d\varphi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\left(1 - r_s \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)\right) \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)}} . \quad (2.2.12)$$

A partir de aquí, se definen las constantes  $A$  y  $B$ , por simplificar los cálculos. Para resolver la integral (2.2.12) se recurre al siguiente cambio de variable:

$$A = \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} , \quad (2.2.13)$$

$$B = \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} , \quad (2.2.14)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} (A + B \cdot \sin(\psi)) . \quad (2.2.15)$$

La integral (2.2.12) queda como:

$$\int d\varphi = \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{2} (3A + B \cdot \sin(\psi))}} . \quad (2.2.16)$$

Como tanto  $A$  como  $B$  son proporcionales a  $\frac{1}{r}$ , la raíz se puede desarrollar como una serie de potencias de  $\frac{r_s}{r}$ . Para obtener la expresión completa de la integral (2.2.16) en serie de potencias hace falta recordar la fórmula del binomio de Newton.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2} + k - 1}{k} x^k \quad \forall x \text{ con } |x| < 1 , \quad (2.2.17)$$

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{(m-k)} y^k \quad \text{con } m \text{ natural.} \quad (2.2.18)$$

Aplicando (2.2.17) queda que:

$$\int d\varphi = \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2} + n - 1}{n} \left( \frac{r_s}{2} \cdot (3A + B \cdot \sin(\psi)) \right)^n \right) d\psi . \quad (2.2.19)$$

En la variable  $\psi$ , el perihelio corresponde a  $\psi = -\frac{\pi}{2}$  y el afelio a  $\psi = +\frac{\pi}{2}$ . Como  $|\sin(\psi)| \leq 1$  en el intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$  y además la constante  $B \leq 0$  ya que  $r_- \leq r_+$ , el término  $3A + B \cdot \sin(\psi)$  está acotado:

$$\begin{aligned} 3A + B &\leq 3A + B \cdot \sin(\psi) \leq 3A - B , \\ 3A + B &= 2 \left( \frac{2}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \geq 0 , \quad 3A - B = 2 \left( \frac{1}{r_+} + \frac{2}{r_-} \right) \geq 0 . \end{aligned}$$

Por tanto, el término dentro de la integral (2.2.19) evaluada entre el perihelio y el afelio es positivo para todo  $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto, la contribución de cada término de la serie de potencias en  $\frac{r_s}{r}$  a la precesión será siempre positiva.

Aplicando el binomio de Newton (2.2.18) sobre  $(3A + B \cdot \sin(\psi))$  se obtienen constantes por integrales del tipo:

$$I_n := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\psi) d\psi \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (2.2.20)$$

Trivialmente  $I_0 = \pi$  y  $I_n = 0$  si  $n$  es impar, ya que  $\sin(\psi)$  es una función impar y el dominio de integración es simétrico.<sup>5</sup> Por tanto, se puede expresar la integral (2.2.19) como una serie de potencias de  $r_s$ :

$$\varphi(r_+) - \varphi(r_-) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \binom{\frac{1}{2} + n - 1}{n} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3A)^{n-k} B^k I_k \right) \right) \left( \frac{r_s}{2} \right)^n . \quad (2.2.21)$$

A orden 0 en  $\frac{r_s}{r}$ , se obtiene que:

$$(\varphi(r_+) - \varphi(r_-))^{(0)} = \binom{\frac{1}{2} + 0 - 1}{0} \binom{0}{0} (3A)^0 B^0 I_0 \left( \frac{r_s}{2} \right)^0 = 1 \cdot I_0 = \pi .$$

Lo cual equivale, por la ecuación (2.2.11), a que  $\Delta\varphi^{(0)} = 0$ . Es decir, que a orden 0 no hay precesión. A orden 1, se obtiene la expresión (2.2.1), recordando que  $I_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} (\varphi(r_+) - \varphi(r_-))^{(1)} &= I_0 + \left( \binom{\frac{1}{2} + 1 - 1}{1} \left( \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} (3A)^{1-k} B^k I_k \right) \right) \left( \frac{r_s}{2} \right)^1 = , \\ &= I_0 + \left( \frac{3AI_0}{2} + \frac{BI_1}{2} \right) \left( \frac{r_s}{2} \right) = \pi + \frac{3\pi A}{2} \left( \frac{r_s}{2} \right) \Rightarrow , \\ &\Rightarrow \Delta\varphi^{(1)} = \frac{3\pi r_s}{2} \left( \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) . \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>En el anexo 6.2 se detalla el cálculo de  $I_n$  para todo  $n$ .

También se va a obtener la expresión a segundo orden en  $\frac{r_s}{r}$  de la precesión del perihelio. Un cálculo sencillo nos da que  $I_2 = \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned}
(\varphi(r_+) - \varphi(r_-))^{(2)} &= I_0 + \frac{3}{2} I_0 A \left( \frac{r_s}{2} \right) + , \\
&+ \left( \left( \frac{\frac{1}{2} + 2 - 1}{2} \right) \left( \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} (3A)^{2-k} B^k I_k \right) \right) \left( \frac{r_s}{2} \right)^2 = , \\
&= I_0 + \frac{3}{4} I_0 (r_s \cdot A) + \left( \frac{27}{32} I_0 + \frac{3}{32} A^{-2} B^2 I_2 \right) (r_s \cdot A)^2 \Rightarrow , \\
&\Rightarrow \Delta\varphi^{(2)} = \frac{3\pi r_s}{2} \cdot A + \frac{\pi r_s^2}{32} (54A^2 + 3B^2) . \tag{2.2.22}
\end{aligned}$$

Se puede generalizar este procedimiento para calcular la precesión orbital del perihelio al orden de  $\frac{r_s}{r}$  deseado.

### 2.2.3. Simulaciones orbitales

Para mostrar un ejemplo de la precesión orbital, se puede simular un caso real y conocido: Mercurio. Este planeta, al ser el más cercano al Sol, tiene una órbita con mayor precesión orbital por causas relativistas que los demás planetas del Sistema Solar. También existen otras contribuciones debidas al efecto de la fuerza gravitatoria del resto de planetas del Sistema Solar sobre Mercurio, pero no van a ser consideradas para este estudio. La literatura [6] nos dice que la precesión de la órbita de Mercurio por efectos de relatividad general es de  $\Delta\varphi = 43,03''$  por siglo, lo que equivale a  $\Delta\varphi = 0,1038''$  por vuelta alrededor del Sol. Para simular la órbita de Mercurio, bastará con saber el radio de Schwarzschild del Sol, el perihelio y afelio de la órbita de Mercurio [7], un punto inicial y la cuadrivelocidad en ese punto. El radio de Schwarzschild del Sol se obtiene a partir de la expresión (2.0.2). Para el caso de Mercurio se considera la velocidad de la luz dada por [2]. Los valores se listan con una precisión de tres cifras significativas:

$$\begin{aligned}
c &= 1,08 \cdot 10^9 \text{ km/h}, \\
r_s &= 2,95 \text{ km}, \\
r_- &= 46,0 \cdot 10^6 \text{ km}, \\
r_+ &= 69,8 \cdot 10^6 \text{ km}.
\end{aligned}$$

También es de interés simular un ejemplo donde la precesión sea más apreciable. Se fijan otras condiciones iniciales, con radio de Schwarzschild  $r_s = 2$  (U.M), o equivalentemente  $G = 1$ ,  $c = 1$  y  $M = 1$  (U.M). Las condiciones iniciales se fijan para que el perihelio y el afelio tengan los valores de:

$$\begin{aligned}
r_- &= 20 \text{ (U.M)}, \\
r_+ &= 200 \text{ (U.M)}.
\end{aligned}$$

Como condición inicial lo más simple parece ser coger el perihelio o el afelio, ya que en estos puntos la componente radial de la cuadrivelocidad se hace 0. De esta forma, basta con saber la

componente en  $\varphi$  de la cuadrivelocidad, ya que la componente temporal la podemos despejar como función del resto utilizando que la norma de la cuadrivelocidad de una trayectoria tipo-tiempo es  $-c^2$ .<sup>6</sup> Se obtiene pues, la relación:

$$-c^2 = u_\nu u^\nu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2,$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \left( c^2 + \frac{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \right)}. \quad (2.2.23)$$

Para conocer  $\frac{d\varphi}{d\tau}$ , se recurre a las ecuaciones (2.1.5) y (2.2.4). La constante  $E$  se puede obtener con la ecuación (2.2.5).

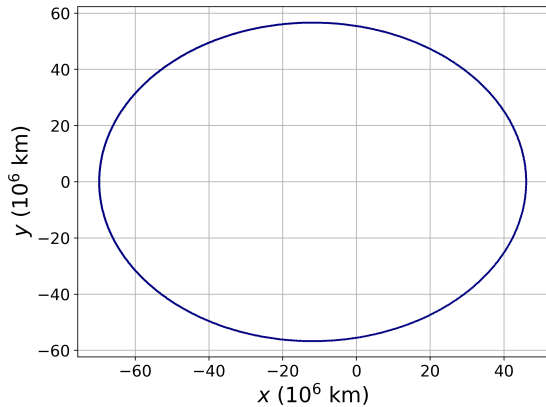
Concretamente, considerando que la expresión (2.2.4) necesita ser multiplicada por  $c$  para tener unidades de momento angular dividido por masa, para el caso de Mercurio se obtiene:

$$L = 9,76 \cdot 10^{12} \text{ km}^2/\text{h} \cdot c.$$

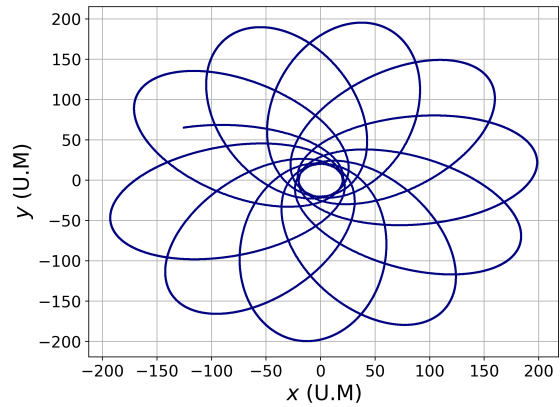
En la simulación, realizada con el algoritmo Runge-Kutta de cuarto orden, se utilizarán en la órbita de Mercurio unidades de millones de kilómetros para las distancias. Se coge como condición inicial:

$$(t, r, \theta, \varphi)_{\tau=0} = \left(0, r_-, \frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Para la cuadrivelocidad inicial las componentes en  $r$  y  $\theta$  se fijan a 0; la componente en  $\varphi$  viene dada por (2.1.5) y (2.2.4); y la componente en  $t$  viene dada por la expresión (2.2.23). Con esto se puede simular tanto la órbita de Mercurio como la órbita con  $r_s = 2$ ,  $r_- = 20$  y  $r_+ = 200$  (U.M).



(a) Simulación de la órbita de Mercurio.



(b) Simulación de la órbita con  $r_s = 2$ ,  $r_- = 20$ ,  $r_+ = 200$  (U.M).

Figura 3: Simulación de la posición en función de las coordenadas  $x = r \cos(\varphi)$  e  $y = r \sin(\varphi)$ , en unidades de millones de km para la órbita de Mercurio y en (U.M) para la otra órbita.

Se observa en la figura 3 que, para el caso de Mercurio, la órbita es a simple vista elíptica. Esto se debe a que la precesión del perihelio es muy pequeña y haría falta simular miles de

<sup>6</sup>-1 para el caso  $c = 1$

órbitas para que pudiera llegar a ser apreciable. Para el otro caso, claramente, se observa la precesión orbital. Para ver mejor en ambos casos si el perihelio y el afelio coinciden con la órbita real, se representa el radio en función del tiempo en la figura 4.

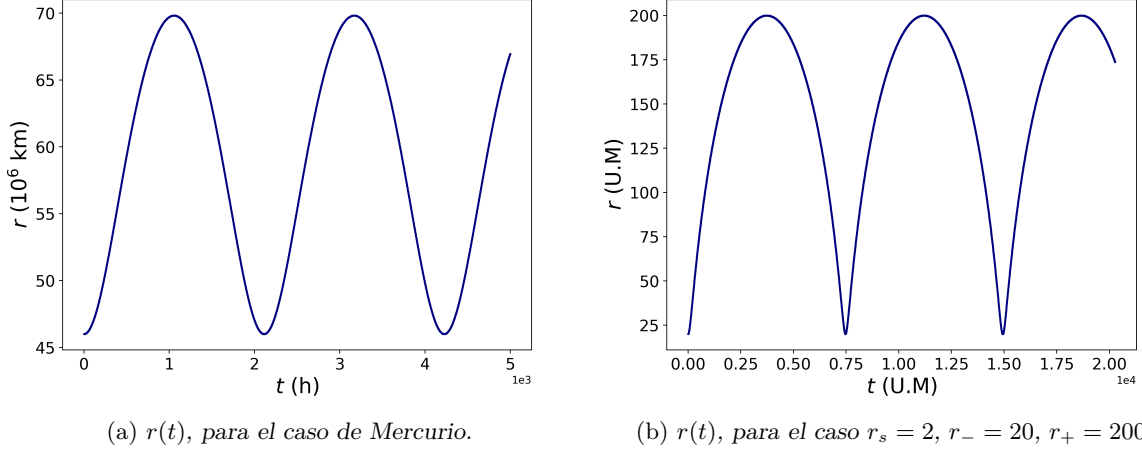


Figura 4: Simulación de la coordenada  $r$  en función del tiempo coordenado  $t$ . Para Mercurio el radio  $r$  está en unidades de millones de km y el tiempo en horas. Para la otra órbita ambas magnitudes tienen unidades de (U.M).

Para medir la precesión del perihelio, una forma es utilizar la figura 4. Midiendo los máximos y mínimos de la función  $r(t)$ , se pueden hallar el perihelio, el afelio y el periodo orbital. Para la órbita de Mercurio:

$$r_+ \text{ (medido)} = 69,8 \cdot 10^6 \pm 2 \text{ km},$$

$$r_- \text{ (medido)} = 46,0 \cdot 10^6 \pm 13 \text{ km},$$

$$T \text{ (medido)} = 2111,9249 \pm 0,0005 \text{ h}.$$

Nótese que, según la literatura [7], el periodo orbital de Mercurio es de unos 87,968 días, o 2111,232 horas. Para el caso donde, en (U.M),  $r_s = 2$ ,  $r_- = 20$ ,  $r_+ = 200$ :

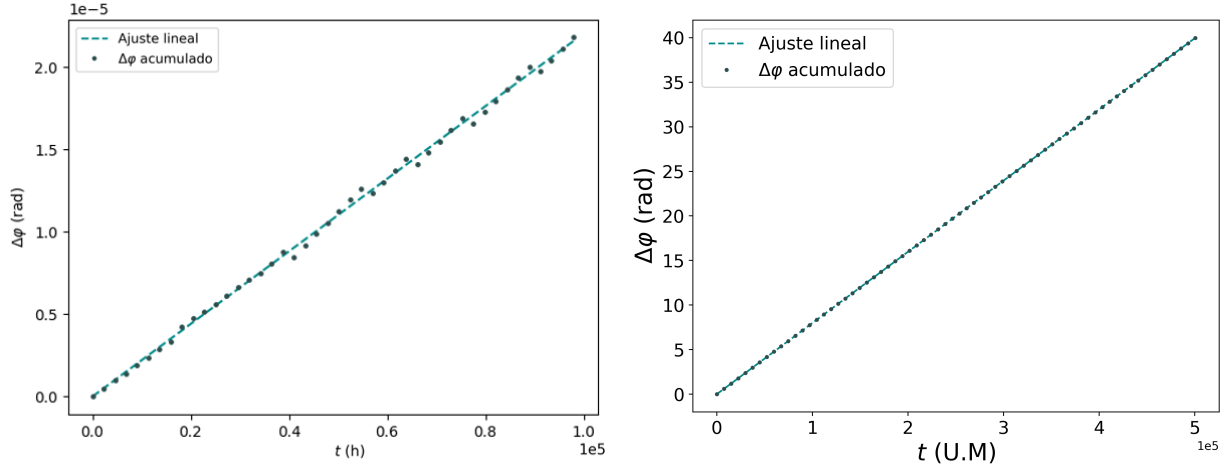
$$r_+ \text{ (medido)} = 200,00031 \pm 0,00008 \text{ (U.M)},$$

$$r_- \text{ (medido)} = 20,00017 \pm 0,00003 \text{ (U.M)},$$

$$T \text{ (medido)} = 7468,008 \pm 0,005 \text{ (U.M)}.$$

Se observa que tanto el perihelio como el afelio coinciden de forma exacta, salvo error numérico. Además, al saber el tiempo  $t$  en el que ocurre cada mínimo, se puede averiguar su equivalente en tiempo propio  $\tau$  y el valor de  $\varphi$  para cada uno. Si se hallan los mínimos, es decir, el perihelio de cada órbita, y el  $\varphi$  en cada perihelio, se obtiene una gráfica de la precesión en función del tiempo.

La precesión es acumulativa, es decir, cada órbita el perihelio precede una misma cantidad. En la figura 5 se grafica la coordenada  $\varphi$  del perihelio para cada órbita en función del tiempo y se realiza un ajuste lineal sobre los puntos obtenidos para cada órbita.



(a) Precesión acumulada para el caso de Mercurio. (b) Precesión acumulada para  $r_s = 2$ ,  $r_- = 20$ ,  $r_+ = 200$  ( $U.M$ ).

Figura 5: Coordenada angular  $\varphi$  del perihelio en cada órbita. Se fija el perihelio como condicion inicial, de forma que el primer perihelio esté en  $\varphi = 0$ . El eje de abscisas está en radianes por  $10^{-5}$  para el caso de Mercurio y en radianes para el otro ejemplo, mientras que el eje de ordenadas, correspondiente al tiempo coordenado  $t$ , está en horas para Mercurio y ( $U.M$ ) para el otro caso.

Multiplicando la pendiente de la recta de la figura 5 por el periodo orbital, se obtiene el valor de la precesión del perihelio. Para Mercurio:

$$\Delta\varphi \text{ (ajuste)} = 0,1036 \pm 0,0006 \text{ " por vuelta.}$$

Este valor entra dentro de los márgenes del obtenido por la literatura,  $\Delta\varphi \text{ (literatura)} = 0,1038''$  por vuelta, y que el obtenido si utilizamos la fórmula (2.2.1) con el perihelio y afelio de la órbita de Mercurio y el radio de Schwarzschild del Sol,  $\Delta\varphi^{(1)} = 0,103415''$  por vuelta. Integrando numéricamente (2.2.10), se obtiene un valor para la precesión más cercano al dado por (2.2.1).

$$\Delta\varphi \text{ (integral)} = 0,10342 \pm 0,00007 \text{ " por vuelta.}$$

Para el caso de la órbita de Mercurio, el término a segundo orden de la precesión es del orden de  $10^{-8}$  segundos de arco, lo cual es inferior al error producido por el algoritmo para integrar numéricamente. Esto se debe a que tanto  $A$  como  $B$  son muy pequeños, del orden de  $10^{-8}$  y  $10^{-9} \text{ km}^{-1}$  respectivamente.

Para medir la precesión para el otro ejemplo, se realizan los dos métodos utilizados para el caso de Mercurio: representar la coordenada angular  $\varphi$  del perihelio de cada órbita en función del tiempo y realizar un ajuste lineal, o directamente integrar numéricamente (2.2.10). El ajuste da una precesión del perihelio de:

$$\Delta\varphi \text{ (ajuste)} = 34,18141 \pm 0,00008^\circ \text{ por vuelta.}$$

Mientras que el valor de la precesión obtenido al integrar numéricamente (2.2.10) es de:

$$\Delta\varphi \text{ (integral)} = 34,18135 \pm 0,00002^\circ \text{ por vuelta.}$$

Se observa que ambos valores coinciden hasta el cuarto decimal, mientras que el error en ambos cálculos es del orden de  $10^{-5}$  grados. Esto se debe a que, aparte del error estadístico del ajuste, ha de tenerse en cuenta el error numérico al integrar la ecuación geodésica para obtener la trayectoria. Si se comparan estos valores con los de la precesión en serie de potencias de  $\frac{r_s}{r}$ , dada por (2.2.21):

Orden de $\Delta\varphi$	Valor ( $^\circ$ )
1	29.70000
2	33.51206
3	34.07381
4	34.16320
5	34.17818
6	34.18078
7	34.18125
8	34.18133
9	34.18135

Tabla 1: Precesión del perihelio para cada orden en  $\frac{r_s}{r}$  de la serie (2.2.21).

Se observa que para coincidir hasta la quinta cifra decimal en este caso es necesario tener cuenta hasta el noveno orden en  $\frac{r_s}{r}$ .

### 3. Aproximación postnewtoniana

Seguidamente, se puede realizar un cálculo aproximado de las geodésicas dadas por la métrica de Schwarzschild. La aproximación en cuestión se basará en potencias de  $\frac{r_s}{r}$ . Esto equivale a desarrollar en serie de potencias de  $v^2$ , ya que  $\frac{r_s}{r} \sim \frac{GM}{r} \sim v^2$  debido a que la energía potencial gravitatoria y la energía cinética son del mismo orden magnitud en mecánica newtoniana. Es decir, a priori, esta aproximación será válida si tanto  $v$  como el campo gravitatorio son pequeños. Cabe destacar que no se aproxima sobre la métrica de Schwarzschild en sí, sino sobre las componentes de la conexión afín derivada a partir de ella.

Para saber qué orden se necesita para cada componente de la conexión afín, es necesario reescribir la ecuación geodésica en función del tiempo coordenado  $t$  [8]:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{tt}^i - 2\Gamma_{tj}^i \frac{dx^j}{dt} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \left( \Gamma_{tt}^t + 2\Gamma_{tj}^t \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{jk}^t \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right) \frac{dx^i}{dt} . \quad (3.0.1)$$

Se recuerda que los índices coordenados  $i, j$  y  $k$  corresponden a las coordenadas espaciales, que para este caso serán  $r, \theta, \varphi$ . Las derivadas de la coordenada  $r$  respecto al tiempo son de orden  $v$ , mientras que las derivadas de las coordenadas angulares son de orden  $\frac{v}{r}$ . Cada componente de la conexión afín debe estar a un orden distinto en  $v$ , según cuántas derivadas  $\frac{dx^i}{dt}$  las acompañen en la expresión (3.0.1).

### 3.1. Constantes del movimiento

#### 3.1.1. Segundo orden

Para desarrollar a cuarto orden<sup>7</sup> en  $v$  la aceleración espacial [8], siguiendo la ecuación (3.0.1), se ve que es necesario tener a orden 4 la componente  $\Gamma_{tt}^i$ ; a orden 3  $\Gamma_{tj}^i$  y  $\Gamma_{tt}^t$ ; a orden dos  $\Gamma_{jk}^i$  y  $\Gamma_{tj}^t$ ; y a orden uno la componente  $\Gamma_{jk}^t$ . Además, por simplificar los cálculos, éstos se realizarán en el plano ecuatorial ya que la métrica posee las mismas simetrías que la métrica de Schwarzschild.

Por tanto, a partir de la ecuación (2.0.5) se obtiene que, en esta aproximación, las componentes de la conexión afín no nulas toman los valores:

$$\begin{aligned}\Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t \approx \frac{r_s}{2r^2}, & \Gamma_{tt}^r &\approx \frac{r_s}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right), \\ \Gamma_{rr}^r &\approx -\frac{r_s}{2r^2}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &\approx (-r + r_s), & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

A partir de aquí, se puede plantear la ecuación geodésica:

$$\frac{d^2 t}{dp^2} = -\frac{r_s}{r^2} \frac{dr}{dp} \frac{dt}{dp}, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{d^2 r}{dp^2} = -\frac{r_s}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 + \frac{r_s}{2r^2} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + (r - r_s) \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dp^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{dp} \frac{d\varphi}{dp}. \quad (3.1.3)$$

De forma análoga a como se ha hecho para la métrica de Schwarzschild, se hallan las constantes de movimiento. Se establece el parámetro  $p$  de forma que sea igual al tiempo propio  $\tau$ .

$$\frac{dt}{d\tau} = e^{\frac{r_s}{r}} E, \quad (3.1.4)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = L, \quad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned}2e^{\frac{r_s}{r}} \left(\frac{d^2 r}{d\tau^2}\right) \left(\frac{dr}{d\tau}\right) - \frac{r_s}{r^2} e^{\frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^3 &= -\frac{r_s}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) e^{\frac{3r_s}{r}} E^2 \left(\frac{dr}{d\tau}\right) + \frac{2L^2 e^{\frac{r_s}{r}}}{r^3} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{2L^2 \cdot (3r^2 - 3r_s r + r_s^2)}{r^2 r_s^2} e^{\frac{r_s}{r}} &- \frac{4r - 3r_s}{9r} e^{\frac{3r_s}{r}} E^2 = K = -1.\end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Para simplificar los cálculos, se definirán las siguientes funciones:

$$f_2(r) := \frac{2 \cdot (3r^2 - 3r_s r + r_s^2)}{r^2 r_s^2} e^{\frac{r_s}{r}} - \frac{6}{r_s^2}, \quad (3.1.7)$$

$$g_2(r) := \frac{(4r - 3r_s)}{9r} e^{\frac{3r_s}{r}} + \frac{5}{9}. \quad (3.1.8)$$

Cabe destacar que las constantes que se suman a  $f_2(r)$  y  $g_2(r)$  son necesarias porque, cuando  $r$  tiende a infinito, se busca que en general  $f_n(r)$  y  $g_n(r)$  tiendan al mismo valor que los términos

---

<sup>7</sup>Segundo orden en  $\frac{r_s}{r}$



$-\frac{1}{r^2}$  y  $\frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}$  que acompañan a  $L$  y  $E$  en la ecuación (2.1.6). Concretamente,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{r^2} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} = 1.$$

Por tanto, las constantes que se deben añadir consistirán en:

$$C_2 := -\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (3r^2 - 3r_s r + r_s^2)}{r^2 r_s^2} e^{\frac{r_s}{r}} = -\frac{6}{r_s^2}, \quad D_2 := 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(4r - 3r_s)}{9r} e^{\frac{3r_s}{r}} = \frac{5}{9}. \quad (3.1.9)$$

### 3.1.2. Tercer orden

Si se desarrolla hasta sexto orden en  $v$ , o lo que es equivalente, tercer orden en  $\frac{GM}{r}$ , se obtiene la siguiente conexión afín en el plano ecuatorial:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^{(4)} = \Gamma_{rt}^{(4)} &\approx \frac{r_s}{2r^2} \left(1 + \frac{r_s}{r}\right), & \Gamma_{tt}^{(6)} &\approx \frac{r_s}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right), \\ \Gamma_{rr}^{(4)} &\approx -\frac{r_s}{2r^2} \left(1 + \frac{r_s}{r}\right), & \Gamma_{\varphi\varphi}^{(4)} &\approx (-r + r_s), & \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

A partir de la ecuación geodésica (2.0.4), se tiene otro sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 t}{dp^2} = -\frac{r_s}{r^2} \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) \frac{dr}{dp} \frac{dt}{dp}, \quad (3.1.10)$$

$$\frac{d^2 r}{dp^2} = -\frac{r_s}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 + \frac{r_s}{2r^2} \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + (r - r_s) \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2, \quad (3.1.11)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dp^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{dp} \frac{d\varphi}{dp}. \quad (3.1.12)$$

Obteniendo las constantes del movimiento, se llega a:

$$\frac{dt}{d\tau} = e^{\frac{r_s}{r}(1+\frac{r_s}{2r})} E, \quad (3.1.13)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = L, \quad (3.1.14)$$

$$e^{\frac{r_s}{r}(1+\frac{r_s}{2r})} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - f_3(r) \cdot L^2 - g_3(r) \cdot E^2 = K = -1, \quad (3.1.15)$$

$$f_3(r) := \frac{2e^{-\frac{1}{2}}}{r_s^2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) \right) - \left(2 - \frac{r_s}{r}\right) e^{\frac{1}{2}(1+\frac{r_s}{r})^2} \right) + C_3, \quad (3.1.16)$$

$$g_3(r) := e^{-\frac{3}{2}} \left( \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{erfi} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) \right) - \frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}(1+\frac{r_s}{r})^2} \right) + D_3, \quad (3.1.17)$$

$$C_3 := \frac{2e^{-\frac{1}{2}}}{r_s^2} \left( -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2e^{\frac{1}{2}} \right), \quad (3.1.18)$$

$$D_3 := e^{-\frac{3}{2}} \left( \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{erfi} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}} \right) + 1. \quad (3.1.19)$$

$C_3$  y  $D_3$  son constantes necesarias para que  $f_3(r)$  y  $g_3(r)$  tiendan al mismo valor en el infinito que  $-\frac{1}{r^2}$  y  $\frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}$ . Se recuerda que  $\operatorname{erfi}(z)$  es la función error imaginaria, definida por:

$$\operatorname{erfi}(z) = -i \cdot \operatorname{erf}(z), \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (3.1.20)$$

### 3.1.3. Comparación entre segundo y tercer orden con el resultado inicial

Se observa que las expresiones  $f_n(r)$  y  $g_n(r)$  obtenidas a partir de la aproximación post-newtoniana se hacen mucho más complicadas al aumentar el orden de aproximación. Resulta interesante, pues, compararlas con lo originalmente obtenido para la métrica de Schwarzschild. Se define:

$$f(r) := -\frac{1}{r^2} , \quad g(r) := \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} . \quad (3.1.21)$$

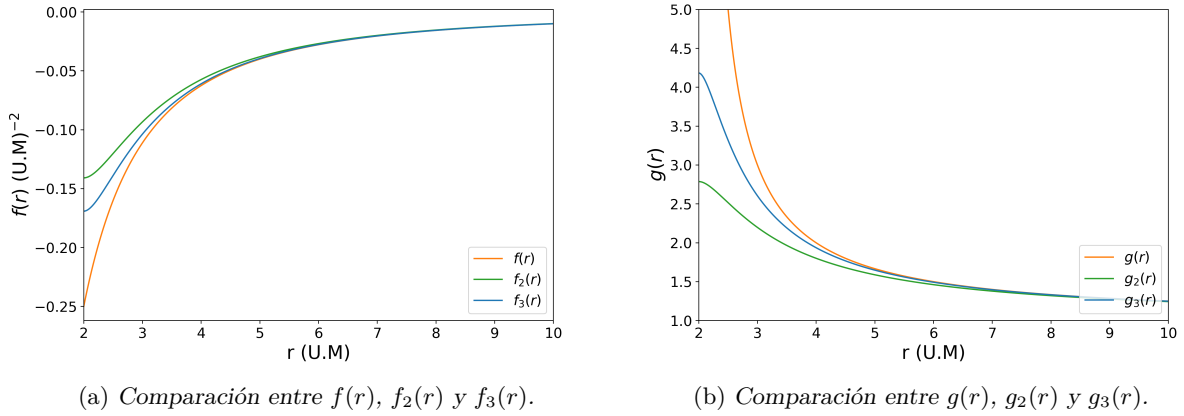


Figura 6: Comparación entre los términos que acompañan a  $L^2$  (izquierda) y  $E^2$  (derecha) en las ecuaciones de conservación de la constante  $K$  en función del radio, fijando  $r_s = 2$  (U.M); entre la métrica de Schwarzschild y su aproximación postnewtoniana a segundo y tercer orden.

Se ve que  $g(r)$  diverge conforme  $r$  tiende a  $r_s$ , mientras que  $g_2(r)$  y  $g_3(r)$  no. Para ambos casos se observa que el valor de  $g_n(r)$  tiende al de  $g(r)$  cuando  $r \gg r_s$ .

### 3.2. Cálculo de la precesión del perihelio

Para calcular la precesión del perihelio en la aproximación postnewtoniana, repetimos los pasos que llevan a la ecuación (2.2.10), pero usando como base la expresión de conservación de  $K$  correspondiente al orden en el que se está trabajando, en lugar de (2.1.6). Para segundo y tercer orden se obtienen, respectivamente:

$$e^{\frac{r_s}{r}} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \cdot \frac{L^2}{r^4} - L^2 \cdot f_2(r) - E^2 \cdot g_2(r) = -1 \Rightarrow ,$$

$$\Rightarrow \int d\varphi = \int \frac{e^{\frac{r_s}{2r}} L dr}{r^2 \sqrt{L^2 \cdot f_2(r) + E^2 \cdot g_2(r) - 1}} . \quad (3.2.1)$$

$$e^{\frac{r_s}{r} (1 + \frac{r_s}{2r})} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \cdot \frac{L^2}{r^4} - L^2 \cdot f_3(r) - E^2 \cdot g_3(r) = -1 \Rightarrow ,$$

$$\Rightarrow \int d\varphi = \int \frac{e^{\frac{r_s}{2r} (1 + \frac{r_s}{2r})} L dr}{r^2 \sqrt{L^2 \cdot f_3(r) + E^2 \cdot g_3(r) - 1}} . \quad (3.2.2)$$

Para calcular  $E$  y  $L$  en función de  $r_s$ ,  $r_-$  y  $r_+$ , basta con aplicar la expresión (3.1.6) o la (3.1.15) según el orden de aproximación, teniendo en cuenta que la derivada radial se anula en el perihelio y el afelio:

$$-f_n(r_-) \cdot L^2 - g_n(r_-) \cdot E^2 = -1 , \quad (3.2.3)$$

$$-f_n(r_+) \cdot L^2 - g_n(r_+) \cdot E^2 = -1 . \quad (3.2.4)$$

Seguidamente, se despejan  $E$  y  $L$  como:

$$E^2 = \frac{f_n(r_+) - f_n(r_-)}{f_n(r_+)g_n(r_-) - g_n(r_+)f_n(r_-)} , \quad (3.2.5)$$

$$L^2 = \frac{g_n(r_-) - g_n(r_+)}{f_n(r_+)g_n(r_-) - g_n(r_+)f_n(r_-)} . \quad (3.2.6)$$

Con esto se puede hallar numéricamente la integral . Por ejemplo, con  $r_- = 20$ ,  $r_+ = 200$ ,  $r_s = 2$  (U.M) se calcula que:

$$\Delta\varphi^{(2)} \text{ (pst.)} = 32,8^\circ \text{ por vuelta,}$$

$$\Delta\varphi^{(3)} \text{ (pst.)} = 34,1^\circ \text{ por vuelta.}$$

Se observa al compararlo con los valores de la tabla 1 que  $\Delta\varphi^{(2)} \text{ (pst.)}$  es cercano al segundo orden en la serie (2.2.21), y que  $\Delta\varphi^{(3)} \text{ (pst.)}$  es un número intermedio entre  $\Delta\varphi$  a tercer y cuarto orden.

## 4. Gráficas de la precesión del perihelio

### 4.1. Precesión en función de la excentricidad de la órbita

En esta sección se va a fijar un  $r_-$  y calcular numéricamente la precesión del perihelio a partir de la integral (2.2.12), junto a la obtenida a partir de hasta, como máximo, los 10 primeros términos de la serie (2.2.21). Se modifica la excentricidad de la elipse en el intervalo abierto  $(0, 1)$ . A partir de la excentricidad y de  $r_-$ , se puede deducir el valor de  $r_+$ :

$$e = \frac{r_+ - r_-}{r_+ + r_-} \Rightarrow r_+ = \frac{r_-(1+e)}{1-e} , \quad (4.1.1)$$

$$A = \frac{2}{r_-(1+e)} , \quad (4.1.2)$$

$$B = \frac{-2e}{r_-(1+e)} . \quad (4.1.3)$$

Utilizando la expresión (4.1.1), se puede expresar la serie (2.2.21) en potencias de  $\frac{r_s}{r_-}$ :

$$\varphi(r_+) - \varphi(r_-) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \binom{\frac{1}{2} + n - 1}{n} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( -\frac{e}{3} \right)^k I_k \right) \right) \left( \frac{3r_s}{(1+e)r_-} \right)^n . \quad (4.1.4)$$

Se fija  $r_s = 2$  (U.M) .Los valores de  $r_-$  escogidos son  $r_- = 6, 10, 20, 50$  (U.M).

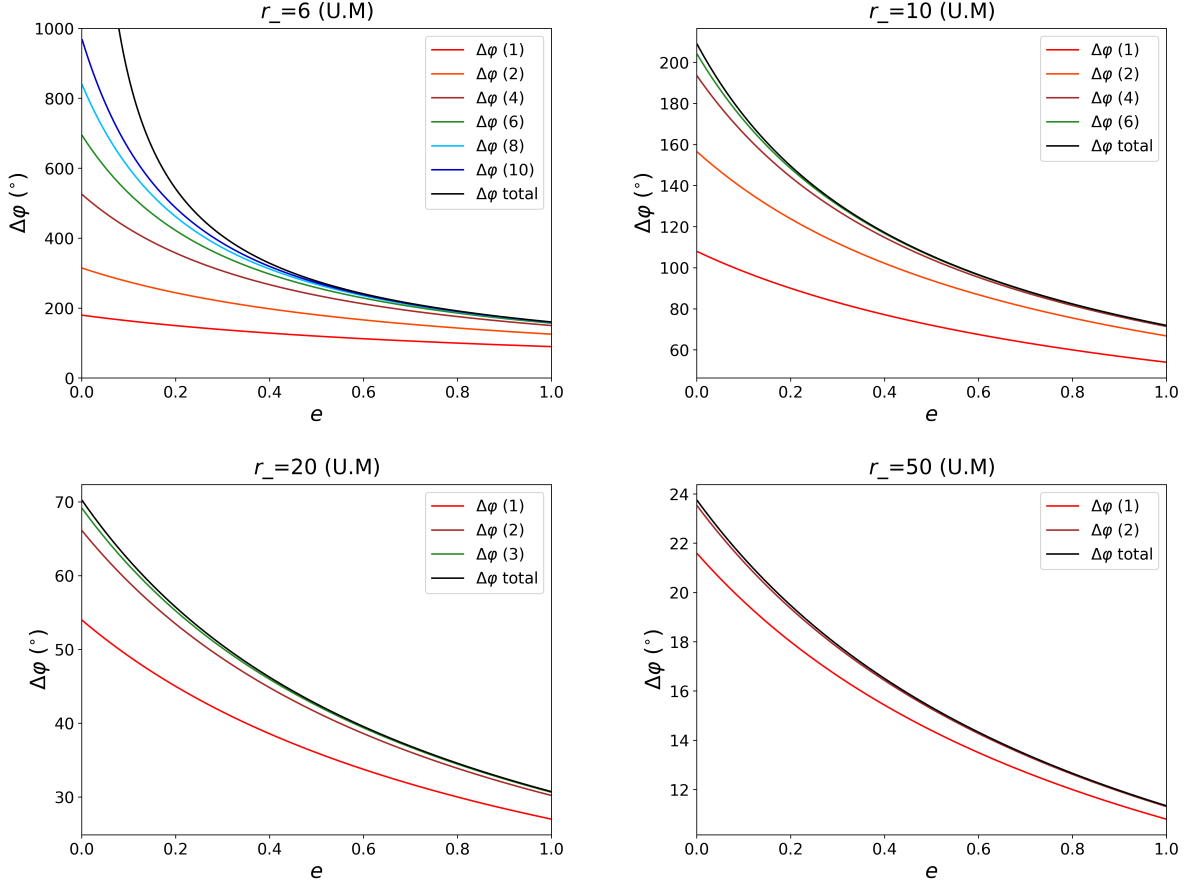


Figura 7: Precesión del perihelio  $\Delta\varphi$  para  $r_- = 6, 10, 20$  y  $50$  (U.M), junto a los hasta 10 primeros términos en la serie de potencias de  $\frac{r_s}{r_-}$ , en función de la excentricidad de la órbita.

Se observa que en general, a mayor excentricidad, menor precesión de la órbita. Esto se puede justificar argumentando que en las órbitas de mayor excentricidad, la partícula está más alejada del objeto masivo central en el afelio, por lo que los efectos relativistas serán menores. También se observa que la aproximación de la precesión en series de potencias del orden de  $\frac{r_s}{r_-}$  se desvía más del valor numérico para excentricidades bajas.

Esto se ve de forma exagerada para el caso límite  $r_- = 6$  (U.M), donde ni siquiera a orden 10 se consigue aproximar al valor numérico cuando la excentricidad tiende a 0.<sup>8</sup> mientras que para  $r_-$  mayores el límite parece ser finito. Unos cálculos sobre la ecuación (4.1.4) permiten comprobar que efectivamente es así:

$$\lim_{e \rightarrow 0} A = \frac{2}{r_-}, \quad \lim_{e \rightarrow 0} B = 0, \quad \lim_{e \rightarrow 0} (\varphi(r_+) - \varphi(r_-)) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2} + n - 1}{n} \left( \frac{3r_s}{r_-} \right)^n. \quad (4.1.5)$$

Utilizando criterio del cociente, se obtiene para qué valores de  $r_-$  la serie (4.1.5) converge:

$$b_n = \binom{\frac{1}{2} + n - 1}{n} \left( \frac{3r_s}{r_-} \right)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \left| \frac{3r_s}{r_-} \right|. \quad (4.1.6)$$

<sup>8</sup>Nótese que las definiciones de  $L$  y  $E$  usadas no tienen sentido para  $e = 0$ .

Por el criterio, para que la serie (4.1.5) converja,  $\left| \frac{3r_s}{r_-} \right| < 1$ . De forma equivalente,  $r_- > r_{ISCO}$ . Conforme la órbita tiende a ser circular, la precesión tiende a un valor finito si la órbita circular con  $r = r_-$  es estable; y diverge en caso contrario. En  $r_- = r_{ISCO}$  la precesión también diverge. Se observa, además, que para  $r_- = 20$  (U.M), el tercer orden en la precesión es el último distinguible del valor numérico a simple vista. Para  $r_- = 50$  (U.M), a partir del segundo orden el resto se sobreponen sobre el valor numérico y tampoco se distinguen. Esto da una idea de para qué valores del perihelio es válido usar un orden determinado de la serie (2.2.21) para aproximar  $\Delta\varphi$ .

## 4.2. Precesión del perihelio en función del radio en el perihelio

En esta sección se procede de forma análoga a la anterior, se establece  $r_s = 2$  (U.M). Se fija la excentricidad de la órbita y lo que se hace variar es  $r_-$  entre 6 ( $3r_s$ ) y 50 (U.M). Los valores de excentricidad fijados son 0,1, 0,5 y 0,9. Además de representar las precesiones calculadas con la serie de potencias en  $\frac{r_s}{r}$ , se representan también los calculados a partir de la integral (3.2.1) para segundo orden y la integral (3.2.2) para tercer orden.

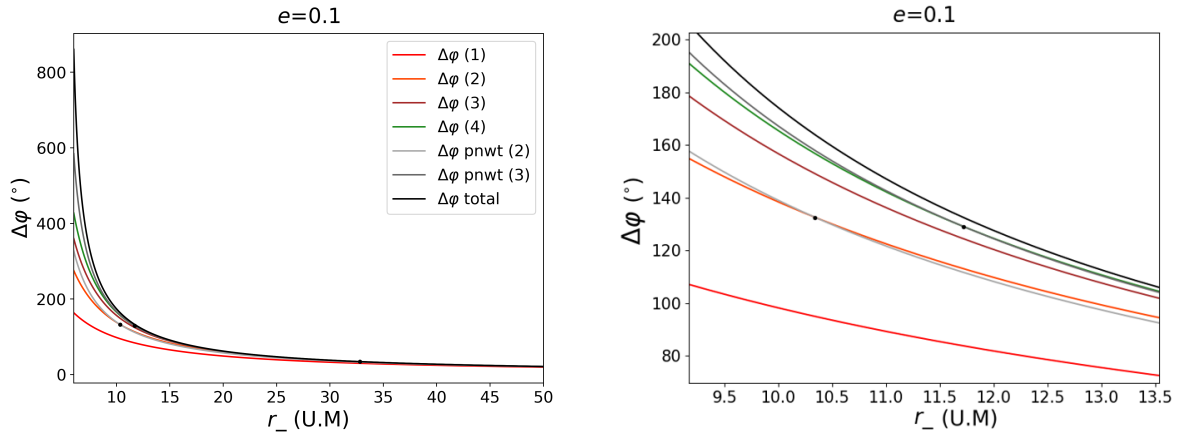


Figura 8: Precesión del perihelio  $\Delta\varphi$  para  $e = 0,1$ . Se grafican el valor exacto de la precesión, los cuatro primeros términos en serie de potencias de  $\frac{r_s}{r}$  y la precesión obtenida en los ordenes segundo y tercero de la aproximación postnewtoniana. Todos ellos aparecen en función de  $r_-$ . La gráfica de la derecha es un zoom realizado sobre la gráfica de la izquierda, para apreciar mejor los puntos de corte entre aproximaciones.

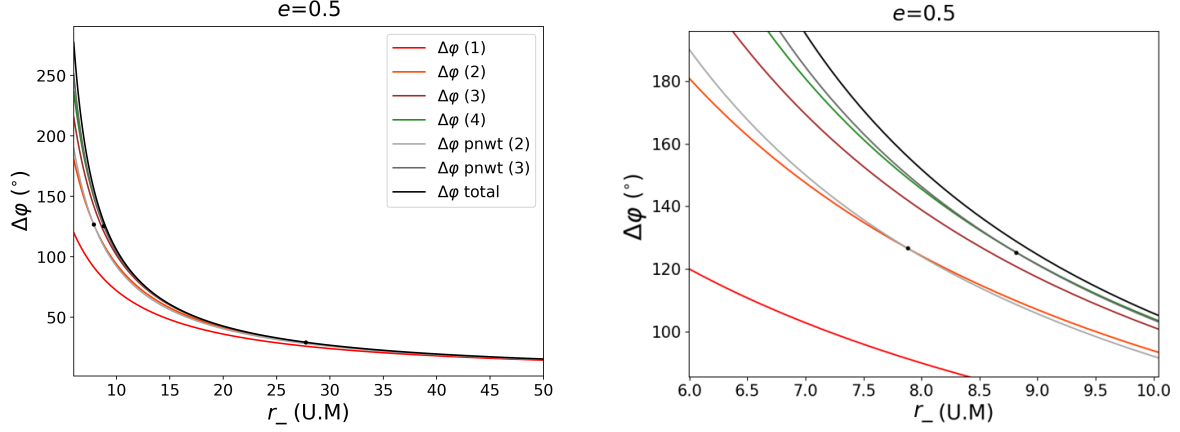


Figura 9: Precesión del perihelio  $\Delta\varphi$  para  $e = 0,5$ . Se grafican el valor exacto de la precesión, los cuatro primeros términos en serie de potencias de  $\frac{r_s}{r}$  y la precesión obtenida en los ordenes segundo y tercero de la aproximación postnewtoniana. Todos ellos aparecen en función de  $r_-$ . La gráfica de la derecha es un zoom realizado sobre la gráfica de la izquierda, para apreciar mejor los puntos de corte entre aproximaciones.

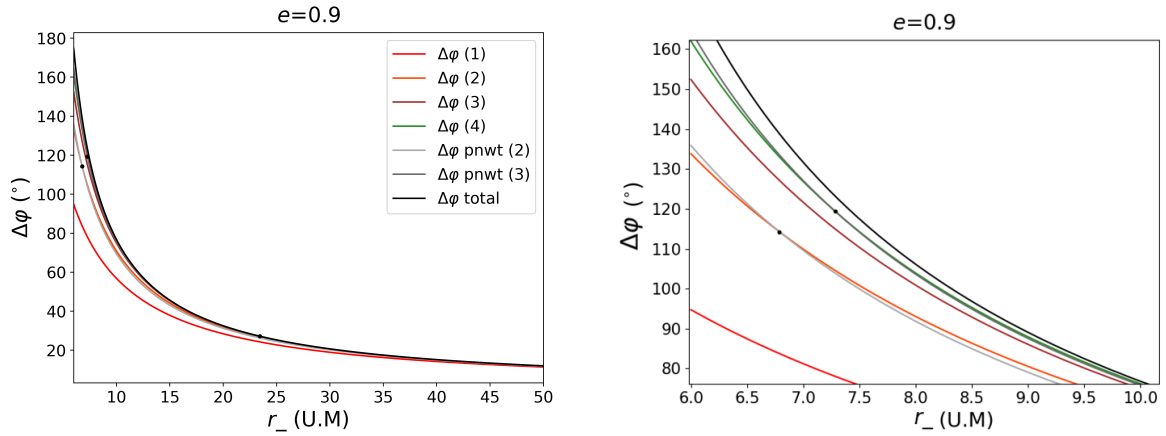


Figura 10: Precesión del perihelio  $\Delta\varphi$  para  $e = 0,9$ . Se grafican el valor exacto de la precesión, los cuatro primeros términos en serie de potencias de  $\frac{r_s}{r}$  y la precesión obtenida en los ordenes segundo y tercero de la aproximación postnewtoniana. Todos ellos aparecen en función de  $r_-$ . La gráfica de la derecha es un zoom realizado sobre la gráfica de la izquierda, para apreciar mejor los puntos de corte entre aproximaciones.

Se observa que conforme aumenta  $r_-$  la precesión disminuye. Esto se justifica argumentando que una órbita con mayor perihelio estará sujeta a menores efectos relativistas. También se observa que la aproximación del perihelio en series de potencias de  $\frac{r_s}{r}$  funciona peor para menor  $r_-$  y excentricidad.

Al comparar la precesión para la aproximación en serie de potencias y la aproximación postnewtoniana, se observa que al aproximar a orden  $n$  en  $\frac{r_s}{r}$  la precesión obtenida directamente de la métrica de Schwarzschild, no se obtiene el mismo resultado que al aproximar las ecuaciones diferenciales dadas en (3.0.1), (2.1.2) y (2.1.3) a orden  $n$  e integrarlas.

Se observa que la precesión en el segundo orden de la aproximación postnewtoniana no coincide exactamente con la precesión en el segundo orden de la expresión en (4.1.4). Para algunos valores de  $r_-$  es superior y para otros inferior. Para el tercer orden de la aproximación postnewtoniana, se observa que tampoco coincide con la suma hasta el tercer término en (4.1.4). Se observa que en función de  $r_-$ , el tercer orden de la aproximación postnewtoniana varía entre ser superior al cuarto orden en la serie, a ser inferior al tercero. Los puntos de corte en las gráficas de 8 a 10 aparecen listados en la siguiente tabla:

Corte entre	$\Delta\varphi$ (2), $\Delta\varphi$ pnwt. (2)	$\Delta\varphi$ pnwt. (3), $\Delta\varphi$ (4)	$\Delta\varphi$ pnwt. (3), $\Delta\varphi$ (3)
$r_-$ ( $e = 0,1$ )	10.340	11.715	32.820
$r_-$ ( $e = 0,5$ )	7.880	8.812	27.333
$r_-$ ( $e = 0,9$ )	6.788	7.285	23.432

Tabla 2: *Tabla de puntos de corte entre las aproximaciones de la precesión dadas por tomar la serie de potencias (4.1.4) y entre la aproximación postnewtoniana. Se fijan los mismos valores de excentricidad  $e$  que en las gráficas de 8 a 10.*

Se observa que conforme disminuye la excentricidad, aumenta el valor de  $r_-$  para el que se cortan las aproximaciones. Esto se debe a que como para menor excentricidad ambas aproximaciones difieren más del valor exacto cerca de  $r_- = 6$  (U.M), se necesita un  $r_-$  mayor para que los valores dados por cada aproximación se acerquen entre sí y se corten.

## 5. Conclusión

Durante este trabajo se ha aproximado la precesión del perihelio orbital de dos formas diferentes. En cada caso la aproximación se ha realizado durante pasos diferentes del proceso de cálculo de la precesión orbital. En la sección 2 se aproxima sobre el valor obtenido para la precesión tomando la métrica de Schwarzschild de forma exacta; en la sección 3 se aproxima sobre la conexión afín, se integra la ecuación geodésica con la nueva conexión afín y se obtiene la precesión de forma numérica.

En la sección 4 se ve que ambos planteamientos diferentes a la hora de aproximar dan resultados distintos. Aun así, se ve también que tienen comportamientos similares: ambas aproximaciones se acercan más al valor exacto cuando la excentricidad de la órbita es alta y cuando el perihelio  $r_- \gg r_s$ .

Se observa también que los cálculos derivados de la aproximación postnewtoniana dan lugar a expresiones para las constantes de movimiento más complicadas que las de la propia solución exacta. Esto ocurre porque se está aproximando sobre un caso sencillo con solución exacta. Para una métrica más complicada, como la métrica de Kerr para agujeros negros en rotación, la aproximación postnewtoniana podría ser más conveniente. Esto podría ser un tema para un futuro trabajo.

## Agradecimientos

Agradezco a mi tutor, Eduardo Follana, por haberme guiado durante la elaboración de este trabajo. También agradezco a mis familiares; y a mis amigos Javi, Raquel y Gabi; por su apoyo durante estos años de carrera universitaria.

## Bibliografía

- [1] Steven Weinberg. “The Newtonian Limit”. En: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley y Sons, 1972, págs. 77-79. ISBN: 0-471-92567-5.
- [2] Peter J. Mohr et al. *The NIST Reference on Constants, Units and Uncertainty*. NIST. Mayo de 2024. URL: <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.
- [3] Steven Weinberg. “The Schwarzschild Solution”. En: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley y Sons, 1972, págs. 179-180. ISBN: 0-471-92567-5.
- [4] Editors of Encyclopaedia. *Schwarzschild Radius*. Encyclopaedia Britannica. Mar. de 2024. URL: <https://www.britannica.com/science/Schwarzschild-radius>.
- [5] Yacine Ali-Haïmond. *Lecture 19: Symmetries, spherical-symmetric spacetimes; Schwarzschild Solution*. [https://cosmo.nyu.edu/yacine/teaching/GR\\_2019/gr.html](https://cosmo.nyu.edu/yacine/teaching/GR_2019/gr.html). Nov. de 2019.
- [6] Steven Weinberg. “Bound Orbits: Precession of Perihelia”. En: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley y Sons, 1972, págs. 194-197. ISBN: 0-471-92567-5.
- [7] David R. Williams. *Mercury Fact Sheet*. NSSDCA. Ene. de 2024. URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html>.
- [8] Steven Weinberg. “The Post-Newtonian Approximation”. En: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley y Sons, 1972, págs. 212-220. ISBN: 0-471-92567-5.
- [9] Steven Weinberg. “Vectors and Tensors”. En: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley y Sons, 1972, págs. 93-94. ISBN: 0-471-92567-5.
- [10] Steven Weinberg. “Transformation of the Affine Connection”. En: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley y Sons, 1972, págs. 100-102. ISBN: 0-471-92567-5.



## 6. Anexo

### 6.1. Método alternativo para el cálculo de la conexión afín en la aproximación postnewtoniana

Se puede observar que, en la sección 3 se aproximan de forma directa las componentes de la conexión afín en coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  en serie de potencias de  $\frac{r_s}{r}$ . En la literatura [8], se ofrece una forma alternativa para deducir las componentes de la conexión afín en aproximación postnewtoniana<sup>9</sup>. Este método alternativo se puede generalizar a métricas diferentes de la métrica de Schwarzschild.

Aplicarlo a la métrica de Schwarzschild resulta más complicado debido a que el método utiliza coordenadas pseudocartesianas generalizadas, en las cuales la métrica de Schwarzschild se complica bastante. Se necesita recordar como cambiar de coordenadas tanto la métrica como la conexión afín. Si se conocen la métrica y la conexión afín en unas coordenadas genéricas  $x^\mu$ , las componentes de la métrica y de la conexión afín en otras coordenadas  $x'^\mu$  vienen determinadas por las relaciones obtenidas en [9] y [10]:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} , \quad (6.1.1)$$

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} . \quad (6.1.2)$$

Se ha de mencionar que los cálculos para cambiar de coordenadas, por su complejidad, no se han hecho a mano, sino usando SageMath. Volviendo a la aproximación postnewtoniana dada en el libro de Weinberg, se aproxima la métrica como una perturbación sobre la métrica de espacio-tiempo plano de Minkowski. Se asume que las coordenadas son de la forma  $(t, x^i)$ :

$$g_{tt} = -1 + g^{(2)}_{tt} + g^{(4)}_{tt} + \dots , \quad (6.1.3)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + g^{(2)}_{ij} + g^{(4)}_{ij} + \dots , \quad (6.1.4)$$

$$g_{ti} = g^{(3)}_{ti} + g^{(5)}_{ti} + \dots , \quad (6.1.5)$$

con  $i, j = 1, 2, 3$  y siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker. La métrica inversa también se expresa como una perturbación de la métrica de Minkowski:

$$g^{tt} = -1 + g^{(2)tt} + g^{(4)tt} + \dots , \quad (6.1.6)$$

$$g^{ij} = \delta^{ij} + g^{(2)ij} + g^{(4)ij} + \dots , \quad (6.1.7)$$

$$g^{ti} = g^{(3)ti} + g^{(5)ti} + \dots . \quad (6.1.8)$$

Se debe cumplir que  $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu}$ . Esto relaciona los componentes de  $g^{\mu\nu}$  con los de  $g_{\mu\nu}$ . Weinberg [8] obtiene que:

$$g^{(2)tt} = -g^{(2)}_{tt} , \quad g^{(2)ij} = -g^{(2)}_{ij} , \quad g^{(3)ti} = g^{(3)}_{ti} . \quad (6.1.9)$$

---

<sup>9</sup>Para esta sección la notación será un poco diferente, para concordar con la usada por Weinberg.  $a^{(n)}$  se define como la contribución del orden  $n$  del desarrollo a la magnitud  $a$ , no como la suma de las contribuciones del desarrollo de  $a$  hasta orden  $n$ .

Se pueden despejar las relaciones entre los términos de orden superior:

$$g^{(4)tt} = -g^{(4)tt} - \left(g^{(2)tt}\right)^2, \quad (6.1.10)$$

$$g^{(4)ij} = -g^{(4)ij} - g^{(2)il}g^{(2)jl}, \quad (6.1.11)$$

$$g^{(5)ti} = g^{(5)ti} + g^{(2)tt}g^{(3)ti} - g^{(2)il}g^{(3)tl}. \quad (6.1.12)$$

A partir de las aproximaciones de  $g_{\mu\nu}$  y  $g^{\mu\nu}$ , se puede aproximar la relación (2.0.5) al orden necesario para obtener las componentes de la conexión afín en la aproximación. La literatura nos dice [8] que la expansión de las componentes de la conexión afín es de la forma:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{(2)\mu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{(4)\mu} + \dots \text{ para } \Gamma_{tt}^i, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ti}^t, \quad (6.1.13)$$

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{(3)\mu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{(5)\mu} + \dots \text{ para } \Gamma_{tj}^i, \Gamma_{tt}^t, \Gamma_{ij}^t, \quad (6.1.14)$$

con  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Weinberg calcula las expresiones para las componentes de la conexión afín al orden necesario para aproximar  $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$  a orden 2 en  $v^2$ .

$$\Gamma_{tt}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{tt}^{(2)}}{\partial x^i}, \quad (6.1.15)$$

$$\Gamma_{tt}^i = \frac{1}{2} g^{il} \frac{\partial g_{tt}^{(2)}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ti}^{(3)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{tt}^{(4)}}{\partial x^i}, \quad (6.1.16)$$

$$\Gamma_{tj}^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ti}^{(3)}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tj}^{(3)}}{\partial x^i} \right), \quad (6.1.17)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}^{(2)}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}^{(2)}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}^{(2)}}{\partial x^i} \right), \quad (6.1.18)$$

$$\Gamma_{tt}^t = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{tt}^{(2)}}{\partial t}, \quad (6.1.19)$$

$$\Gamma_{ti}^t = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{tt}^{(2)}}{\partial x^i}, \quad (6.1.20)$$

$$\Gamma_{ij}^t = 0. \quad (6.1.21)$$

Se listarán aquí las expresiones de la conexión afín necesarias para llevar la aproximación a tercer

orden en  $v^2$ . Se recuerda que  $\frac{\partial}{\partial x^i} \sim \frac{1}{r}$  y  $\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{v}{r}$ :

$$\Gamma_{tt}^{(6)} = \frac{1}{2} g^{(3)ti} \frac{\partial g_{tt}^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{(2)il} \left( 2 \frac{\partial g_{tl}^{(3)}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}^{(4)}}{\partial x^l} \right) + \frac{\partial g_{ti}^{(5)}}{\partial t} - \frac{1}{2} g^{(4)il} \frac{\partial g_{tt}^{(2)}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{tt}^{(6)}}{\partial x^i} , \quad (6.1.22)$$

$$\Gamma_{tj}^{(5)} = \frac{1}{2} g^{(3)ti} \frac{\partial g_{tt}^{(2)}}{\partial x^j} + \frac{1}{2} g^{(2)il} \left( \frac{\partial g_{tl}^{(3)}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tj}^{(3)}}{\partial x^l} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ti}^{(5)}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}^{(4)}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tj}^{(5)}}{\partial x^i} \right) , \quad (6.1.23)$$

$$\Gamma_{jk}^{(4)} = \frac{1}{2} g^{(2)il} \left( \frac{\partial g_{kl}^{(2)}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}^{(2)}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}^{(4)}}{\partial x^l} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}^{(4)}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}^{(4)}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}^{(4)}}{\partial x^i} \right) , \quad (6.1.24)$$

$$\Gamma_{tt}^{(5)} = \frac{1}{2} g^{(2)tt} \frac{\partial g_{tt}^{(2)}}{\partial t} - g^{(3)tl} \frac{\partial g_{tt}^{(2)}}{\partial x^l} , \quad (6.1.25)$$

$$\Gamma_{ti}^{(4)} = \frac{1}{2} g^{(2)tt} \frac{\partial g_{tt}^{(2)}}{\partial x^i} , \quad (6.1.26)$$

$$\Gamma_{ij}^{(3)} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ti}^{(3)}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{tj}^{(3)}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}^{(2)}}{\partial t} \right) . \quad (6.1.27)$$

Ahora se van a aplicar las fórmulas anteriores sobre la métrica de Schwarzschild. Se recuerda que las coordenadas  $(t, x, y, z)$  se transforman a  $(t, r, \theta, \varphi)$  por las expresiones:

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) , \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) , \\ z &= r \cos(\theta) . \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

En coordenadas  $(t, x, y, z)$  las componentes no nulas de la métrica de Schwarzschild son:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -1 + \frac{r_s}{r} , & g_{xx} &= 1 + \frac{r_s x^2}{r^3 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} , & g_{yy} &= 1 + \frac{r_s y^2}{r^3 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} , \\ g_{zz} &= 1 + \frac{r_s z^2}{r^3 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} , & g_{xy} &= g_{yx} = \frac{r_s xy}{r^3 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} , & g_{xz} &= g_{zx} = \frac{r_s xz}{r^3 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} , \\ g_{zy} &= g_{yz} = \frac{r_s yz}{r^3 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} . \end{aligned}$$

Al desarrollar en serie de Taylor de  $\frac{r_s}{r}$  el término  $\frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}$ , se obtiene  $g_{\mu\nu}^{(2)}$  con el primer orden en  $\frac{r_s}{r}$ ,  $g_{\mu\nu}^{(4)}$  con el segundo, etc.

$$\begin{aligned} g_{tt}^{(2)} &= \frac{r_s}{r} , & g_{xx}^{(2)} &= \frac{r_s x^2}{r^3} , & g_{yy}^{(2)} &= \frac{r_s y^2}{r^3} , \\ g_{zz}^{(2)} &= \frac{r_s z^2}{r^3} , & g_{xy}^{(2)} &= g_{yx}^{(2)} = \frac{r_s xy}{r^3} , & g_{xz}^{(2)} &= g_{zx}^{(2)} = \frac{r_s xz}{r^3} , \\ g_{zy}^{(2)} &= g_{yz}^{(2)} = \frac{r_s yz}{r^3} , & & & & \\ g_{tt}^{(4)} &= 0 , & g_{xx}^{(4)} &= \frac{r_s^2 x^2}{r^4} , & g_{yy}^{(4)} &= \frac{r_s^2 y^2}{r^4} , \\ g_{zz}^{(4)} &= \frac{r_s^2 z^2}{r^4} , & g_{xy}^{(4)} &= g_{yx}^{(4)} = \frac{r_s^2 xy}{r^4} , & g_{xz}^{(4)} &= g_{zx}^{(4)} = \frac{r_s^2 xz}{r^4} , \\ g_{zy}^{(4)} &= g_{yz}^{(4)} = \frac{r_s^2 yz}{r^4} , & g_{tt}^{(6)} &= 0 , & & \dots \end{aligned}$$

Basta aplicar las expresiones entre (6.1.9) y (6.1.12) para hallar  $g^{\mu\nu}$  a primer y segundo orden en  $\frac{r_s}{r}$ :

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{r_s}{r} , & g^{xx} &= -\frac{r_s x^2}{r^3} , & g^{yy} &= -\frac{r_s y^2}{r^3} , \\ g^{zz} &= -\frac{r_s z^2}{r^3} , & g^{xy} &= -g^{yx} = -\frac{r_s xy}{r^3} , & g^{xz} &= -g^{zx} = \frac{r_s xz}{r^3} , \\ g^{zy} &= -g^{yz} = \frac{r_s yz}{r^3} , & g^{tt} &= -\left(\frac{r_s}{r}\right)^2 , & & \dots \end{aligned}$$

Seguidamente, aplicando las ecuaciones entre (6.1.15) y (6.1.27) con los  $g_{\mu\nu}$  y  $g^{\mu\nu}$  obtenidos a partir de la métrica de Schwarzschild, se calculan los términos de la expansión de la conexión afín suficientes para aproximar  $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$  hasta tercer orden en  $v^2$ , en coordenadas  $(t, x, y, z)$ . Basta aplicar el cambio de coordenadas inverso al definido en (6.1.28) y las ecuaciones (6.1.1) y (6.1.2) para volver a coordenadas esféricas. Al utilizar cálculo simbólico en SageMath para estos pasos, se obtienen al final los mismos resultados que al aproximar directamente las componentes no nulas de la conexión afín en coordenadas esféricas, como se hace en las secciones 3.1.1 y 3.1.2 para segundo y tercer orden, respectivamente.

## 6.2. Cálculo de los coeficientes $I_n$ para todo $n$

En la sección 2.2.2 se expresa como serie de potencias de términos del orden de  $\frac{r_s}{r}$  la precesión orbital del perihelio de un objeto en torno a un agujero negro de Schwarzschild, en la expresión (2.2.21). Aparecen ciertos coeficientes  $I_n$ , dados por la integral entre  $-\frac{\pi}{2}$  y  $+\frac{\pi}{2}$  del seno elevado a  $n$ . Para los  $n$  impares, esta integral dará 0 por simetría del dominio de integración. Para los pares, se puede deducir una fórmula recursiva por integración por partes:

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du , \\ I_n &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^n(\psi) d\psi = \left[ -\cos(\psi) \sin^{n-1}(\psi) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} + , \\ &+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2(\psi) (n-1) \sin^{n-2}(\psi) d\psi = 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \sin^2(\psi) \right) (n-1) \sin^{n-2}(\psi) d\psi = , \\ &= (n-1) [I_{n-2} - I_n] \Rightarrow , \\ \Rightarrow I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ (para } n \text{ pares).} \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Sabiendo que  $I_0 = \pi$ , se puede aplicar repetidamente la expresión (6.2.1) para obtener una fórmula explícita de  $I_n$  para los  $n$  pares:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} I_{n-4} = \dots = \frac{(n-1)(n-3)\dots}{n(n-2)\dots} \pi = \frac{(n-1)!!}{n!!} \pi \tag{6.2.2}$$