



TRABAJO DE FIN DE GRADO EN FÍSICA

**FENOMENOLOGÍA DE VIOLACIÓN DE  
INVARIANCIA LORENTZ EN LA FÍSICA  
DE NEUTRINOS DE MUY ALTA ENERGÍA**

AUTOR:

Guillermo Pascua Ramón

DIRECTORES:

José Manuel Carmona Martínez  
Maykoll A. Reyes Hung

Departamento de Física Teórica  
Zaragoza, 10 de julio de 2024



## Resumen

La búsqueda de una descripción cuántica de la gravedad sigue siendo uno de los mayores retos de la física moderna. Aunque la estructura matemática necesaria para formular una teoría consistente de gravedad cuántica aún no está clara, nuestra comprensión del espacio-tiempo seguramente se verá afectada. Existen argumentos sólidos que respaldan la hipótesis de que la relatividad especial (SR) como la comprendemos podría ser solo una descripción aproximada de la naturaleza, dando lugar a una violación de la invariancia Lorentz (LIV) a una cierta escala de energía elevada. En este contexto, los mensajeros astrofísicos: neutrinos, rayos cósmicos y rayos- $\gamma$ , constituyen candidatos perfectos para buscar estas desviaciones respecto a SR. En este trabajo se recogen los aspectos generales de LIV, junto a una revisión de las cotas teóricas y experimentales más recientes en el ámbito de la física de astropartículas de alta energía. Se presenta un cálculo original de la anchura de desintegración modificada para el proceso  $\pi^+ \rightarrow \ell^+ + \nu_\ell$  en un marco de LIV. Los resultados muestran que la producción de neutrinos sublumínicos se ve favorecida a altas energías, mientras que la producción de neutrinos superlumínicos está suprimida. Finalmente, se discute un método novedoso para las búsquedas de LIV basado en la composición en sabor del flujo de neutrinos astrofísicos en las fuentes.

## Summary

The search for a quantum description of gravity remains one of the biggest puzzles of modern physics. Although the mathematical structure for a consistent theory of quantum gravity is still unclear, our current understanding of spacetime will surely be transformed. There are strong arguments which support the hypothesis that special relativity (SR) as we conceive it may only be an approximate description of nature, leading to a Lorentz invariance violation (LIV) at some high-energy scale. In this context, astrophysical messengers, namely, neutrinos, cosmic rays and  $\gamma$ -rays, make up the perfect candidates to look for these departures from SR. In this work, general aspects of LIV are reviewed, together with an overview of the most recent theoretical and experimental constraints in the domain of high-energy astroparticle physics. An original calculation of the modified decay width for the process  $\pi^+ \rightarrow \ell^+ + \nu_\ell$  in a LIV framework is presented. Results show that subluminal neutrino production is enhanced at high energies, while superluminal neutrino production is suppressed. Finally, a novel method for LIV searches based on the flavour composition of the astrophysical neutrino flux at the sources is discussed.

## Agradecimientos

Este trabajo no hubiese sido posible sin el apoyo incondicional de varias personas a las que me gustaría dedicar unas palabras.

En primer lugar, quiero agradecer a mis tutores José Manuel y Maykoll, así como al profesor José Luis Cortés, por acogerme desde el primer día como un miembro más del grupo. La experiencia adquirida a vuestro lado es lo más valioso que me llevo de este trabajo y no podría haber deseado una mejor forma de iniciarme en el mundo de la ciencia.

A Lucas, gracias por ser mi mano derecha durante todos estos años, en lo académico y en lo personal. A María, por ser un apoyo constante en mi vida y hacerme ver siempre el lado bueno de las cosas. A mi hermana Natalia, espero que esto te sirva de inspiración para perseguir tus propias metas. Tu hermano mayor estará siempre a tu lado para guiarte.

Y, por supuesto, a vosotros, papá y mamá. Gracias por darme siempre todo cuanto habéis tenido, por dejarme perseguir mis sueños y por inculcarme los valores del esfuerzo y la perseverancia. Todo lo que soy es gracias a vosotros y todos mis logros son vuestros también. Os quiero.

## Notación y convenios

A lo largo del trabajo emplearemos la misma notación que Peskin y Schroeder [1]. Trabajaremos en unidades naturales, en las cuales  $\hbar = c = 1$ . En este sistema,

$$[\text{longitud}] = [\text{tiempo}] = [\text{energía}]^{-1} = [\text{masa}]^{-1}.$$

El tensor métrico vendrá dado por

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Al trabajar con tensores, los índices griegos ( $\alpha, \beta, \dots$ ) toman valores  $\{0, 1, 2, 3\} \equiv \{t, x, y, z\}$ , mientras que los índices latinos ( $i, j, \dots$ ) denotan únicamente las tres componentes espaciales. Denotaremos los cuadrvectores mediante  $p \equiv p^\mu$ , mientras que para los vectores espaciales usaremos  $\mathbf{p}$ , cuyo módulo representaremos por  $|\mathbf{p}|$ . Ejemplos:

$$p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) \quad p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = (p^0, -\mathbf{p})$$

$$p \cdot x = p^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x},$$

donde empleamos el convenio de suma de Einstein  $R^\alpha T_\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 R^{(\alpha)} T_{(\alpha)}$ , por el cual dos índices repetidos, uno covariante y otro contravariante, indican una suma.

Todos los valores de constantes fundamentales y magnitudes experimentales empleados en los cálculos y representaciones gráficas han sido obtenidos de *Review of Particle Physics (2022)* [2].

## Listado de acrónimos y abreviaturas

- SR: Special Relativity – Relatividad Especial
- GR: General Relativity – Relatividad General
- QFT: Quantum Field Theory – Teoría Cuántica de Campos
- SM: Standard Model – Modelo Estándar
- $\Lambda$ CDM: Dark Energy and Cold Dark Matter Model
- QG: Quantum Gravity – Gravedad Cuántica
- LI: Lorentz Invariance – Invariancia Lorentz
- LIV: Lorentz Invariance Violation – Violación de Invariancia Lorentz
- GRB: Gamma Ray Burst – Estallido de Rayos Gamma
- CR: Cosmic Ray – Rayo cósmico
- UHECR: Ultra-High-Energy Cosmic Ray – Rayo Cósmico de muy Alta Energía
- MDR: Modified Dispersion Relation – Relación de Dispersión Modificada
- CMB: Cosmic Microwave Background – Fondo Cósmico de Microondas
- EFT: Effective Field Theory – Teoría de Campos Efectiva
- VPE: Vacuum Pair Emission – Emisión de Pares en el Vacío
- NSpl: Neutrino Splitting – División de Neutrinos

## Listado de símbolos

- $\ell_P$ : Longitud de Planck
- $E_P$ : Energía de Planck
- $\Lambda$ : Escala de violación de invariancia Lorentz
- $\nu_{\ell L}$ : Componente levógira del campo del neutrino  $\nu_{\ell}$
- $\gamma_{\text{CMB}}$ : Fotón del fondo cósmico de microondas (CMB)
- $\Delta^+$ : Barión resonante ( $J^P = 3/2^+$ )
- $\gamma_{\epsilon}$ : Fotón del ambiente en una fuente astrofísica
- $G_F$ : Constante de acople de Fermi
- $f_{\pi}$ : Constante de desintegración del pion
- $\theta_C$ : Ángulo de Cabibbo

## Índice de contenidos

<b>Notación y convenios</b>	<b>III</b>
<b>Lista de acrónimos y abreviaturas</b>	<b>IV</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>IV</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Violación de invariancia Lorentz</b>	<b>3</b>
2.1 Relación de dispersión modificada . . . . .	3
2.2 Implicaciones fenomenológicas en la física de altas energías . . . . .	4
2.2.1 Tiempos de vuelo . . . . .	6
2.2.2 Cinemática de procesos . . . . .	7
2.3 Modelo de LIV para el neutrino . . . . .	8
<b>3 Producción de neutrinos en fuentes astrofísicas</b>	<b>12</b>
3.1 Modificaciones en la desintegración del pion en LIV . . . . .	13
3.1.1 Elemento de matriz . . . . .	14
3.1.2 Anchura de desintegración . . . . .	16
3.2 Consecuencias fenomenológicas de LIV en la producción de neutrinos . . . . .	18
<b>4 Conclusiones</b>	<b>22</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>23</b>
<b>Anexos:</b>	
<b>A Desintegración del pion en relatividad especial</b>	<b>27</b>
A.1 Planteamiento del problema . . . . .	27
A.2 Teoría V-A de las interacciones débiles . . . . .	28
A.3 Amplitud de probabilidad del proceso . . . . .	30
A.3.1 Elemento de matriz leptónico . . . . .	35
A.3.2 Elemento de matriz hadrónico . . . . .	37
A.3.3 Elemento de matriz total y suma sobre los espines . . . . .	38
A.4 Anchura de desintegración . . . . .	41
<b>B Sistema laboratorio en SR: anchura de desintegración</b>	<b>45</b>



# 1 | Introducción

*"Somos como enanos encaramados en los hombros de gigantes. Vemos más y más lejos que nuestros predecesores, no porque tengamos una visión más aguda o mayor altura, sino porque somos elevados y transportados en su gigantesca estatura."*

— Bernardo de Chartres

DESDE SUS ORÍGENES, el ser humano ha contemplado los cielos en busca de respuestas. La luz procedente de estrellas lejanas nos ha guiado durante siglos a la hora de navegar los mares, sembrar y cosechar los cultivos o incluso comprender la composición química de los astros. Hoy, vemos más y más lejos que nuestros predecesores. El descubrimiento de neutrinos cósmicos en 2013 por la colaboración IceCube [3] abrió una nueva ventana de observación en astrofísica y supuso el nacimiento de la astronomía multimensajero. Por primera vez en la historia, somos capaces de observar el universo no solo a través de fotones, sino también neutrinos, rayos cósmicos y ondas gravitacionales. Esta ventana nos brinda la oportunidad de usar los desarrollos más recientes en métodos experimentales para buscar huellas de nueva física a energías inalcanzables en el laboratorio con la tecnología actual. El objetivo de este trabajo consistirá en explorar la posibilidad de que la simetría Lorentz de relatividad especial no sea una simetría exacta de la naturaleza y las consecuencias que esto tendría en la física de altas energías, centrando nuestro análisis en el caso del neutrino. Antes de motivar la necesidad de este estudio, debemos comprender primero su origen histórico.

Al inicio del siglo pasado, la física estaba a punto de sufrir un cambio de paradigma. La mecánica clásica, ya establecida desde el siglo XVII por Isaac Newton y reformulada matemáticamente por J. L. Lagrange y W. R. Hamilton, se fundamentaba en las transformaciones de Galileo. Estas transformaciones, definidas entre sistemas de referencia inerciales, se caracterizan por dejar invariantes las ecuaciones de Newton y dan lugar a una regla de composición de velocidades aditiva, una idea intuitiva que parecía observarse en la experiencia cotidiana. Por otro lado, el electromagnetismo se regía por las ecuaciones de Maxwell, quien a mediados del siglo XIX fue capaz de sintetizar todo el conocimiento empírico sobre la electricidad y el magnetismo en una descripción coherente del campo electromagnético. Sin embargo, las transformaciones entre observadores inerciales que dejaban invariantes estas ecuaciones no se correspondían con las transformaciones de Galileo. Estas fueron introducidas por H. A. Lorentz y ahora llevan su nombre. A diferencia de las transformaciones de Galileo, las transformaciones de Lorentz prohíben la aditividad de velocidades e incluso establecen una velocidad máxima insuperable: la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío,  $c$ . Ambas ideas eran incompatibles, por lo que o bien las leyes de la mecánica debían ser modificadas o bien las ecuaciones de Maxwell no eran correctas. Este choque entre las dos teorías físicas más exitosas hasta entonces dio lugar a un debate: ¿es la física invariante Lorentz o invariante Galileo?

Tras el experimento realizado por Michelson y Morley en 1887 [4] con el objetivo de medir el viento del éter, el hipotético medio físico en que se propagarían las ondas electromagnéticas, se comprobó que no había indicios de su existencia. A raíz de estos resultados, un joven Albert Einstein postuló en 1905 [5], en primer lugar, el principio de relatividad, por el cual las leyes físicas deben ser iguales para todo observador inercial y, en segundo lugar, la invariancia de  $c$ . De esta forma, medida desde cualquier sistema de referencia inercial, la luz siempre se propaga

en el vacío a velocidad constante  $c$ , sea cual sea el estado de movimiento del observador. En otras palabras, se postula que no solo la mecánica, sino toda la física debe ser invariante Lorentz. Había nacido la relatividad especial (SR) y, con ella, una nueva mecánica, la mecánica relativista.

Desde entonces, la física moderna se ha construido sobre los pilares establecidos por SR, desembocando en las dos teorías físicas más exitosas hasta la fecha: la teoría cuántica de campos (QFT) y la relatividad general (GR) de Einstein. Por un lado, QFT es el marco teórico que describe la naturaleza a escala microscópica: las partículas elementales y las interacciones débil, electromagnética y fuerte; lo que nos ha permitido construir el Modelo Estándar (SM) de la física de partículas. Por otro lado, GR explica la interacción gravitatoria desde la geometría diferencial y forma la base del modelo cosmológico actual,  $\Lambda$ CDM, que describe la evolución del universo.

No obstante, la física atraviesa en este momento una crisis que no difiere tanto de la que tuvo lugar el siglo pasado: a pesar de sus éxitos en paralelo, estas dos teorías son incompatibles a nivel fundamental y la descripción microscópica de la interacción gravitatoria, necesaria para la comprensión de diferentes escenarios físicos, es todavía un problema abierto. Independientemente de cuál sea la teoría de gravedad cuántica (QG) definitiva, es muy probable que nuestra concepción actual del espacio-tiempo se vea alterada, como ocurrió en su día con el nacimiento de SR. Esta idea, junto a la ausencia de una teoría matemáticamente consistente de QG, llevó a varios físicos a seguir una aproximación fenomenológica al problema, tratando de postular propiedades que debería exhibir una teoría completa de QG. Siguiendo esta filosofía *bottom-up*, surgió la hipótesis de que la simetría fundamental de SR, conocida como invariancia Lorentz, podría romperse a partir de una cierta escala de energía en el contexto de QG. Los efectos inducidos por esta ruptura de simetría, que recibirá el nombre de violación de invariancia Lorentz (LIV), podrían ser observados en mensajeros cósmicos como neutrinos, UHECRs o rayos- $\gamma$  a energías muy superiores a las alcanzables por los aceleradores actuales y futuros. Recientemente, el auge de la astronomía multimensajero ha convertido este campo de estudio en una de las propuestas más prometedoras para la búsqueda de efectos de QG.

Este trabajo tiene dos objetivos principales. En primer lugar, introducir al lector en las ideas fundamentales de LIV mediante una revisión bibliográfica de los resultados teóricos y experimentales más recientes en este campo; y, en segundo lugar, presentar un resultado original: el cálculo completo de la anchura de desintegración del pion cargado en un marco de LIV y su interpretación en el contexto de la producción de neutrinos en fuentes astrofísicas.

La estructura de la memoria es la siguiente. En la sección 2 se introducirán las nociones básicas de LIV. Se comenzará formulando en la sección 2.1 la ruptura de simetría a partir de la relación de dispersión relativista. Posteriormente, se analizarán en la sección 2.2 las consecuencias de una relación de dispersión modificada, que clasificaremos en dos categorías: anomalías en tiempos de vuelo y modificaciones en la cinemática de procesos. Por último, se terminará este capítulo con la sección 2.3, donde se motivará y desarrollará el estudio de LIV en el sector del neutrino. En la sección 3 se abordará la producción de neutrinos en la naturaleza, particularizando al caso de los neutrinos astrofísicos. Seguidamente, se procederá en la sección 3.1 con el cálculo analítico de la anchura de desintegración del proceso  $\pi^+ \rightarrow \ell^+ + \nu_\ell$  en un modelo de LIV no-universal que solo afecta al neutrino. Los resultados obtenidos se interpretarán en la sección 3.2. Finalmente, en la sección 4 se presentarán las conclusiones del trabajo y las líneas de trabajo futuro. El lector interesado podrá encontrar en los Anexos A y B una introducción al cálculo anterior en SR.

## 2 | Violación de invariancia Lorentz

La invariancia Lorentz constituye la simetría principal de la relatividad especial y nos permite formular de manera natural el *principio de relatividad*. Bajo este principio, todos los observadores inerciales deben experimentar las mismas leyes físicas y sus medidas estarán relacionadas entre sí mediante transformaciones de Lorentz (boosts y rotaciones). Esto se traduce, por tanto, en la covariancia Lorentz<sup>1</sup> de las ecuaciones, resaltando una de las principales consecuencias de SR: todos los sistemas de referencia inerciales son completamente equivalentes.

La violación de invariancia Lorentz (LIV) implica la ruptura de esta simetría y conduce a la pérdida del principio de relatividad. Argumentos de QG sugieren que la simetría Lorentz de SR se rompería a muy altas energías. Para ello, se basan en la hipótesis de que una partícula propagándose con una longitud de onda próxima a la longitud de Planck,  $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,62 \cdot 10^{-35}$  m, podría explorar escalas en las que el espacio-tiempo presenta estructura, afectando a su cinemática mediante efectos no convencionales. De este modo, efectos de LIV que dominan a altas energías tendrían su origen en la naturaleza microscópica del espacio-tiempo y su descubrimiento constituiría un paso importante hacia una descripción cuántica de la gravedad.

La pérdida del principio de relatividad conlleva una importante consecuencia. Ahora, las leyes físicas serán diferentes para distintos observadores, por lo que cada uno deberá describir la física desde su propio sistema laboratorio. Cuando escribamos la ecuación asociada a una ley física, será pertinente especificar qué observador “ve” esa ecuación en concreto. Surge entonces la noción de un *observador privilegiado*, que usualmente se atribuye a aquel que mide el CMB completamente isótropo. El hecho de que nosotros midamos el CMB prácticamente isótropo nos indica que la Tierra constituye una buena aproximación a ese observador [6].

### 2.1. Relación de dispersión modificada

La manera usual de incluir efectos de LIV es mediante una relación energía-momento modificada (MDR). En SR, la relación de dispersión usual para una partícula masiva viene dada por<sup>2</sup>

$$E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2 , \quad (2.1)$$

que depende únicamente de la masa,  $m$ , de la partícula y el módulo de su momento lineal,  $\mathbf{p}$ . Una forma genérica de romper la invariancia Lorentz manteniendo la simetría rotacional es mediante la adición de un término extra en la expresión (2.1):

$$E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2 [1 + f(\lambda, |\mathbf{p}|)] , \quad (2.2)$$

donde  $f(\lambda, |\mathbf{p}|)$  es una función desconocida de  $|\mathbf{p}|$  y un parámetro  $\lambda$ , que cuantifica cómo de grande es la desviación respecto a SR. Dado que la MDR debe reproducir (2.1) en un amplio rango de energías para ser compatible con las observaciones actuales, la magnitud de  $f$  será

<sup>1</sup>La covariancia Lorentz es una forma de expresar que todas las leyes físicas deben tener la misma expresión sea cual sea el sistema de referencia en el que se escriban (siempre que sea un sistema inercial). Para ello, las ecuaciones deberán ser igualdades entre objetos matemáticos que transformen de la misma forma bajo transformaciones de Lorentz. Estos objetos serán los tensores, cuya relevancia cobra aún más sentido en el marco de GR, donde se extiende este concepto de covariancia a la *covariancia general*.

<sup>2</sup>A partir de ahora emplearemos unidades naturales, en las que  $c = \hbar = 1$ .

muy pequeña frente a la unidad para este intervalo de energías. Esto nos permitirá reescribir la función  $f(\lambda, |\mathbf{p}|)$  como un desarrollo en serie de potencias de  $\lambda$ . Siguiendo el convenio usual, reescribiremos el parámetro  $\lambda$  como el inverso de una escala de energía característica,  $\lambda = \Lambda_{\text{LIV}}^{-1}$ , expresando  $f$  como

$$f(\lambda, |\mathbf{p}|) = \sum_n a_n \lambda^n |\mathbf{p}|^n = \sum_n a_n \left( \frac{|\mathbf{p}|}{\Lambda_{\text{LIV}}} \right)^n, \quad (2.3)$$

donde vemos que, al tratarse de una función adimensional, tendremos un desarrollo en potencias del cociente  $|\mathbf{p}|/\Lambda_{\text{LIV}}$ . Llegados a este punto y pensando en el objetivo de estudiar la fenomenología asociada a diferentes situaciones físicas, nos restringiremos únicamente al primer término no nulo del desarrollo. El término de orden cero fue originalmente estudiado por S. Coleman y S. Glashow en su primer trabajo sobre LIV en 1999 [7]. Nosotros, sin embargo, estamos interesados en un efecto de LIV creciente con la energía, por lo que consideraremos las posibilidades  $n = 1$  y  $n = 2$ . Introduciendo este primer término en (2.3), obtenemos:

$$E^2 \simeq m^2 + |\mathbf{p}|^2 \left[ 1 + a_n \left( \frac{|\mathbf{p}|}{\Lambda_{\text{LIV}}} \right)^n \right]. \quad (2.4)$$

Finalmente, podremos reabsorber el coeficiente  $a_n$  de la expresión (2.4) en la definición de la escala  $\Lambda_{\text{LIV}}$ , de forma que la expresión general de la MDR será

$$E^2 \simeq m^2 + |\mathbf{p}|^2 \left[ 1 + s \left( \frac{|\mathbf{p}|}{\Lambda_{\text{LIV}}} \right)^n \right] \quad \text{con } n = 1, 2 \quad \text{y} \quad s = \pm 1, \quad (2.5)$$

donde  $s$  indica el signo de la corrección y  $n$  el orden del primer término no nulo que se considera.

Para comprobar que esta MDR viola la LI, podemos recalcular el invariante  $p^\mu p_\mu = m^2$  de SR en el sistema de referencia privilegiado (y desde ahora, en el que trabajaremos siempre):

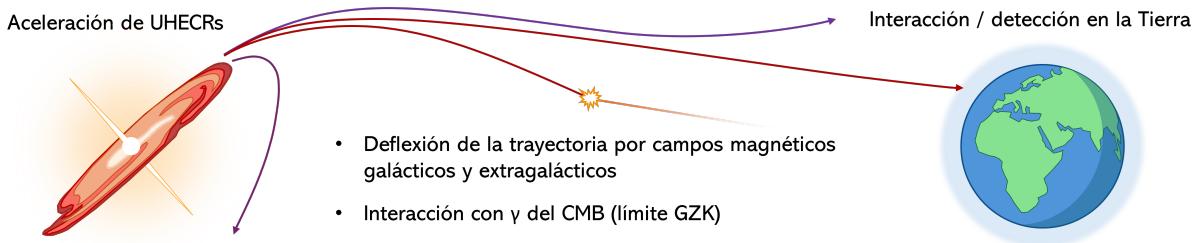
$$p^\mu p_\mu \equiv E^2 - |\mathbf{p}|^2 \simeq m^2 + s \frac{|\mathbf{p}|^{n+2}}{\Lambda_{\text{LIV}}^n}, \quad (2.6)$$

donde ahora el invariante Lorentz  $p^\mu p_\mu$ , que en SR se corresponde con el cuadrado de la masa de la partícula, depende de su momento lineal y, por tanto, del observador. Queda claro entonces que el uso de una MDR de la forma (2.5) rompe la simetría entre sistemas de referencia inerciales propia de SR.

## 2.2. Implicaciones fenomenológicas en la física de altas energías

Acabamos de ver que el empleo de una MDR nos permite crear un escenario de LIV dependiente de la energía. Además, SR constituye una buena descripción de la naturaleza en un dominio de energías muy amplio, por lo que el valor de  $\Lambda_{\text{LIV}}$  debe ser muy grande. Usualmente, la escala de energía  $\Lambda_{\text{LIV}}$  se asocia con la energía de Planck bajo la suposición de que esta es la escala a la cual los efectos de una nueva física relacionada con gravedad cuántica son evidentes. Volviendo a la MDR (2.5), vemos que para apreciar estos efectos de manera notable, sería en principio necesario que el cociente  $|\mathbf{p}|/\Lambda_{\text{LIV}}$  fuese del orden de la unidad. Para ello, necesitaríamos alcanzar energías próximas a la escala de Planck,  $E_P \approx 1,22 \cdot 10^{28}$  eV.

Las partículas de mayor energía que se encuentran a nuestro alcance son los UHECRs, partículas cargadas (principalmente protones, electrones y núcleos ligeros) que son aceleradas en fenómenos



**Figura 2.1:** Ilustración esquemática de la producción y propagación de los UHECR hasta su detección en la Tierra. Los UHECR de mayor energía se verán deflectados en menor medida por los campos magnéticos en su propagación.

astrofísicos violentos, como las explosiones de Supernovas o los GRBs, y se propagan a través del universo hasta alcanzar las capas altas de la atmósfera terrestre, donde interactúan produciendo cascadas de partículas secundarias. Este proceso se muestra en la Figura 2.1. El flujo de UHECRs medido en la Tierra presenta un corte a partir de un cierto umbral de energía, en torno a  $E_{\text{GZK}} \simeq 5 \cdot 10^{19}$  eV. Este *cut-off* en el flujo de UHECRs se conoce como el límite Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK). Su origen reside en la interacción de los protones de los UHECRs con los fotones del CMB. Por encima de este umbral, los procesos

$$p + \gamma_{\text{CMB}} \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^+ + n \quad \text{y} \quad p + \gamma_{\text{CMB}} \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^0 + p \quad (2.7)$$

están permitidos, donde el neutrón resultante se desintegrará (además de los piones) en  $p e^- \bar{\nu}_e$ . En consecuencia, ambos canales producirán como resultado protones cada vez menos energéticos, hasta reducir su energía por debajo del umbral  $E_{\text{GZK}}$ . De forma práctica, todos los protones de los UHECRs generados a distancias mayores que  $\sim 30$  Mpc llegarán a la Tierra con energías por debajo de  $\sim 10^{20}$  eV [8]. El CR de mayor energía registrada hasta la fecha fue detectado en octubre de 1991 por el *Fly's Eye air shower detector* en Utah (EE.UU.). En el artículo posterior, se reportó la detección de un CR de  $(3,2 \pm 0,9) \cdot 10^{20}$  eV [9]. A pesar de ser la partícula más energética jamás detectada, su energía sigue estando 8 órdenes de magnitud por debajo de la escala de Planck. Debido a las restricciones impuestas por el límite GZK y el reducido flujo por encima de este umbral, la posibilidad de observar directamente estos efectos de nueva física queda descartada por completo. A escalas de energía típicas de observaciones de neutrinos y rayos- $\gamma$  de alta energía, en torno al TeV-PeV, el cociente<sup>3</sup>  $|\mathbf{p}|/\Lambda_{\text{LIV}}$  de la MDR (2.5) variará entre  $10^{-16}$  y  $10^{-13}$ , asumiendo que  $\Lambda_{\text{LIV}} \sim E_P$ .

No obstante, existe un conjunto de situaciones físicas en las que estas desviaciones respecto a SR, a priori despreciables, resultarán en efectos muy notables en las observaciones debido a *mecanismos de amplificación*. Además, trabajar a menores energías nos permitirá abrir nuestro abanico y usar observaciones de los diferentes mensajeros cósmicos: UHECRs, rayos- $\gamma$  y neutrinos. Estos mecanismos de amplificación estudiados en fenomenología de LIV podrán clasificarse en dos categorías principales: el estudio de los tiempos de vuelo de partículas de alta energía y las modificaciones en la cinemática de procesos. A continuación veremos cómo estas pequeñas desviaciones pueden conducir a efectos observables por los experimentos actuales.

<sup>3</sup>En el régimen ultra-relativista ( $|\mathbf{p}| \gg m$ ) podremos hablar indistintamente del cociente entre la energía de la partícula y la escala  $\Lambda_{\text{LIV}}$  o el cociente entre el módulo de su momento lineal y la escala de LIV,  $|\mathbf{p}|/\Lambda_{\text{LIV}}$ .

### 2.2.1. Tiempos de vuelo

En relatividad especial, una partícula sin masa se propagará siempre a la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ . En el marco de LIV, esto no será cierto: una partícula sin masa tendrá una velocidad dependiente de su energía, que en el límite de bajas energías tenderá a su valor clásico,  $c$ . Veamos que este efecto se deduce directamente de la MDR.

Consideremos la MDR (2.5) para una partícula sin masa:

$$E^2 \simeq |\mathbf{p}|^2 \left[ 1 + s \left( \frac{|\mathbf{p}|}{\Lambda_{\text{LIV}}} \right)^n \right]. \quad (2.8)$$

La velocidad de la partícula vendrá dada por  $v = dE/d|\mathbf{p}|$ , por lo que tomaremos la raíz de (2.8):

$$E \simeq |\mathbf{p}| \sqrt{1 + s \left( \frac{|\mathbf{p}|}{\Lambda_{\text{LIV}}} \right)^n} \simeq |\mathbf{p}| + s \frac{|\mathbf{p}|^{n+1}}{2 \Lambda_{\text{LIV}}^n}, \quad (2.9)$$

donde hemos usado que  $(|\mathbf{p}|/\Lambda_{\text{LIV}})^n \ll 1$  para aproximar  $\sqrt{1 \pm x} \simeq 1 \pm x/2$ . Así, podremos calcular fácilmente la velocidad

$$v = \frac{dE}{d|\mathbf{p}|} \simeq 1 + s \frac{(n+1)}{2} \left( \frac{|\mathbf{p}|}{\Lambda_{\text{LIV}}} \right)^n. \quad (2.10)$$

Analizando el resultado (2.10) vemos que, en el límite de bajas energías,  $|\mathbf{p}|/\Lambda_{\text{LIV}} \rightarrow 0$  y la velocidad  $v \rightarrow 1$ , la velocidad de la luz en el vacío (recordemos que trabajamos en unidades naturales  $c = \hbar = 1$ ). No obstante, para una partícula de muy alta energía, el efecto de LIV introducirá una modificación en la velocidad dependiente de la energía. Esta modificación dependerá del modelo de LIV que se considere, parametrizado por la elección de  $n = 1, 2$  y  $s = \pm 1$ .

Fijémonos ahora en las consecuencias físicas que tiene la elección del signo  $s$  en la MDR. Un modelo de LIV con  $s = -1$  implicará que la velocidad será inferior a la unidad y decrecerá conforme aumente su energía, independientemente del orden  $n$  de la corrección. Dado que su velocidad será inferior a la de la luz a muy altas energías, a partículas con estas características se les denomina partículas *sublumínicas*. Análogamente, para el caso  $s = +1$  tendremos partículas *superlumínicas* cuya velocidad crecerá con la energía. De ahora en adelante, usaremos estos términos para caracterizar los modelos de LIV en lugar de especificar el valor del signo  $s = \pm 1$ .

Si bien para el rango de energías accesible las correcciones en la velocidad de las partículas de alta energía son muy pequeñas, de orden  $(|\mathbf{p}|/\Lambda_{\text{LIV}})^n$ , su propagación a lo largo de distancias cosmológicas proporciona un mecanismo de amplificación de esta desviación respecto a SR. En este escenario, partículas de muy alta energía producidas en fuentes astrofísicas lejanas podrían llegar a la Tierra con un cierto retraso<sup>4</sup> respecto a partículas de menor energía emitidas en el mismo instante de tiempo. Los análisis de tiempo de vuelo constituyen uno de los métodos más comunes para la realización de tests de LIV y son aplicables tanto a partículas sin masa como a partículas masivas en el régimen ultra-relativista. Por ello, este tipo de búsquedas se realizan mediante observaciones de rayos- $\gamma$  y neutrinos muy energéticos.

<sup>4</sup>Según estudiemos partículas sublumínicas o superlumínicas podrá tratarse de un retraso o un adelanto en la llegada, respectivamente. Usaremos el término “retraso” de forma general para referirnos a ambos escenarios.

Al realizar análisis de retrasos en tiempos de vuelo (en inglés, *time delays*), es necesario tener en cuenta los efectos de la expansión del universo en la propagación de las partículas. La expresión correcta para calcular este retraso fue derivada por primera vez por U. Jacob y T. Piran en 2008 [10]. Hasta la fecha, los análisis llevados a cabo suponían que una partícula de alta energía y una de baja energía recorrián la misma distancia propia, dando lugar a un resultado que difiere en un factor<sup>5</sup>  $(1 + z)$  del correcto. En realidad, es la distancia comóvil la que es igual para ambas partículas, no la distancia propia.

Los análisis de este tipo emplean observaciones de fenómenos astrofísicos transitorios como GRBs en el espectro de rayos- $\gamma$  y neutrinos. Se buscan correlaciones entre la energía de las partículas y su retraso en la llegada respecto al estallido inicial, detectado por medio de fotones de baja energía que no serían afectados por LIV. Durante los últimos años, se han realizado diversos estudios por parte de colaboraciones experimentales como ANTARES [11] con resultados no concluyentes debido a las grandes incertidumbres en la distancia a las fuentes, que dificultan en gran medida la elección de la ventana temporal a considerar. Un análisis más reciente usando datos de IceCube fue publicado en 2023 por G. Amelino-Camelia *et al*, donde afirmaban haber encontrado fuertes evidencias de retrasos en la propagación de neutrinos de alta energía correlacionados direccional y temporalmente con GRBs [12]. Su ajuste a las medidas, asumiendo una MDR con  $n = 1$ , proporciona una escala de LIV favorecida con un valor de  $\Lambda_{\text{LIV}} = (9, 2 \pm 1, 9) \cdot 10^{-2} E_P$ , aunque las incertidumbres en las correlaciones de cada evento detectado con un GRB reducen notablemente la significancia de este resultado.

Todos estos análisis se han realizado bajo la suposición de que el único efecto de física no convencional a altas energías reside en la propagación. No obstante, como ha sido mostrado recientemente por J. M. Carmona *et al* [13], esto no es correcto. Además de las anomalías en los tiempos de vuelo de partículas sin masa, existen efectos como la aparición de canales de desintegración para partículas antes estables que deben tenerse en cuenta a la hora de realizar un análisis consistente. Estos efectos adicionales provienen de la consideración de modificaciones en la cinemática de procesos debidos a LIV, que comentaremos a continuación.

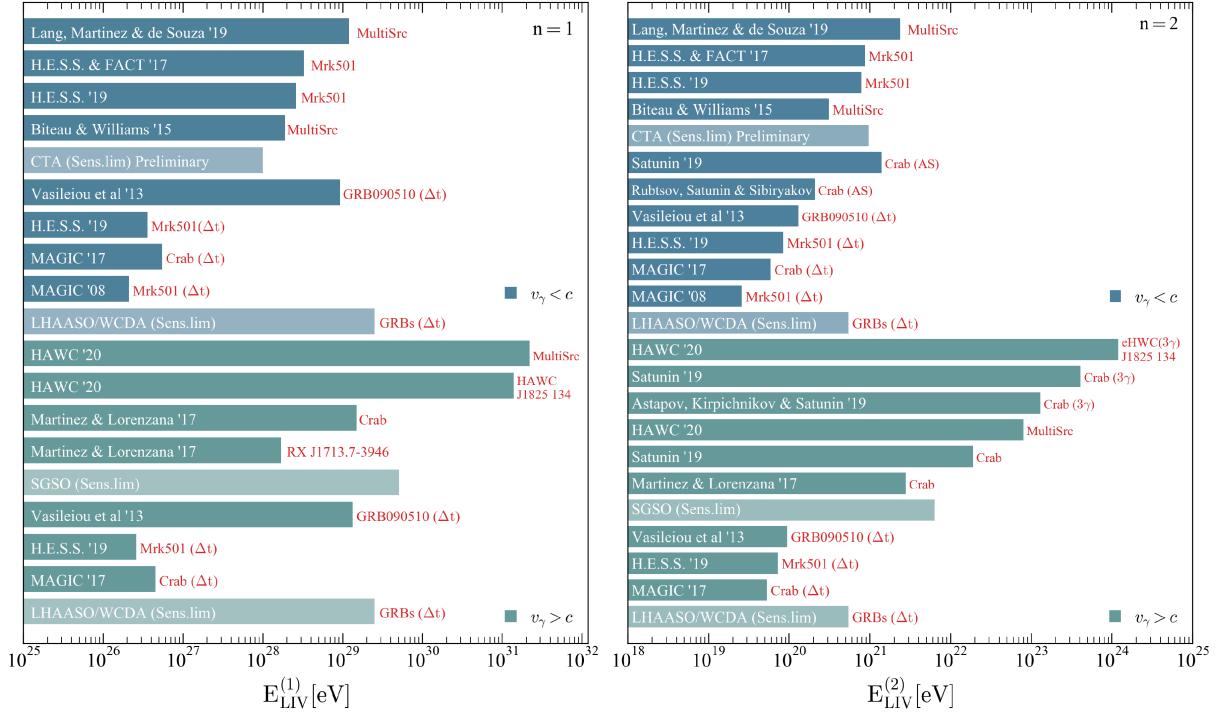
### 2.2.2. Cinemática de procesos

La consecuencia más intuitiva de una MDR para una partícula es la aparición de anomalías en su propagación libre. Sin embargo, estas desviaciones respecto a la relación de dispersión en SR pueden inducir efectos muy relevantes en las secciones eficaces de interacción con otras partículas o las anchuras de desintegración de ciertos procesos.

Uno de estos efectos inducidos más interesantes a nivel fenomenológico consiste en la aparición de umbrales de energía a partir de los cuales ciertos procesos, antes prohibidos en SR, estarán permitidos, y viceversa. Este escenario fue estudiado de forma general por D. Mattingly *et al* en [14], donde caracterizaron las configuraciones de umbrales inferior y superior para reacciones de dos partículas,  $A + B \rightarrow C + D$ . Un ejemplo de esta fenomenología aparecerá al estudiar un modelo de LIV para el neutrino, que a pesar de ser una partícula estable en el SM podrá desintegrarse bajo ciertas condiciones a través de dos canales principales, como veremos en más profundidad en la sección 2.3.

---

<sup>5</sup>Donde  $z$  es el *redshift* o corrimiento al rojo cosmológico, definido como  $1 + z = \lambda_{\text{det}} / \lambda_{\text{emit}}$ .



**Figura 2.2:** Recopilación de las cotas inferiores más fuertes y recientes para la escala de LIV ( $\Lambda_{LIV}$ ) provenientes de la ausencia de efectos no convencionales en las observaciones de retrasos en tiempos de vuelo dependientes de la energía, desintegración de fotones, supresión en la formación de cascadas atmosféricas y cambios en los umbrales de la producción de pares  $e^-/e^+$ . En azul se muestran los límites sublumínicos ( $v_\gamma < c$ ) y en verde los límites superlumínicos ( $v_\gamma > c$ ). El cuadro izquierdo muestra el orden de aproximación  $n = 1$  y el derecho  $n = 2$ . Fuente: H. Martínez-Huerta *et al* (2020) [15].

Por otro lado, la fenomenología de LIV en el sector del fotón ha sido ampliamente estudiada en la literatura. Algunos de los efectos de nueva física que aparecen en este sector incluyen la desintegración del fotón, la producción de radiación Cherenkov en el vacío y la modificación de procesos bien conocidos, como la producción de pares electrón-positrón; además de los ya mencionados retrasos en tiempos de vuelo [15]. Todos estos efectos de nueva física han sido analizados por diferentes colaboraciones experimentales como el High Energy Stereoscopic System (H.E.S.S.), el High Altitude Water Cherenkov Observatory (HAWC) o el Major Atmospheric Gamma Imaging Cherenkov Telescope (MAGIC), estableciendo fuertes cotas inferiores para el valor de  $\Lambda_{LIV}$ . En la Figura 2.2 se muestra una recopilación de estas cotas publicada en 2020 por H. Martínez-Huerta *et al* [15]. Incluye estudios de retrasos en tiempos de vuelo y cinemática de procesos modificada, así como las cotas proyectadas en ese momento para los experimentos LHAASO/WCDA y el Cherenkov Telescope Array (CTA).

### 2.3. Modelo de LIV para el neutrino

En las secciones anteriores hemos analizado cómo se puede introducir un efecto de LIV en una partícula y sus implicaciones en su propagación e interacción con otras partículas. Será interesante preguntarnos ahora qué partículas deberían manifestar estos efectos en caso de existir una ruptura de simetría Lorentz a altas energías.

Los neutrinos son unas partículas muy especiales dentro del SM, con unas masas extremadamente pequeñas en comparación con el resto de partículas y que solo interactúan débilmente. Desde su descubrimiento en 1956 por C. Cowan y F. Reines [16], su detección y caracterización ha constituido un gran reto para la física experimental. Por ello, estas partículas elusivas constituyen muy buenos candidatos para búsquedas de física más allá del SM, lo que incluye una posible violación de la simetría Lorentz. El origen de su estudio como posibles pruebas de desviaciones respecto a SR se remonta a 2011, cuando el experimento OPERA afirmó haber encontrado evidencias de la propagación superlumínica<sup>6</sup> de neutrinos [18] y diversos modelos teóricos fueron publicados explorando esta posibilidad [19, 20]. Otro argumento a favor de estudiar efectos de LIV únicamente en neutrinos proviene de los fuertes límites existentes sobre una MDR para los leptones cargados. A raíz de estos límites, el estudio de un modelo de LIV solo para el sector del neutrino está justificado, lo que ha sido ampliamente abarcado y argumentado en la literatura [21-23].

Los modelos de LIV se clasifican en *universales* y *no-universales*, según si afectan a todas las partículas por igual o a cada una de forma diferente, respectivamente. De ahora en adelante, consideraremos un modelo no-universal de LIV que afecta únicamente al neutrino y que es, además, independiente del sabor. A continuación veremos cómo implementar este modelo de forma consistente como una extensión al SM.

Para empezar, supondremos que los neutrinos son partículas sin masa. El efecto de LIV se introducirá en el marco de una teoría efectiva de campos (EFT) como una perturbación de orden  $(1/\Lambda)^n$  en la densidad lagrangiana asociada al campo del neutrino en la teoría libre:

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^{(\nu)} = \sum_{\ell} \left( \bar{\nu}_{\ell} (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu}) \nu_{\ell} - s \frac{1}{\Lambda^n} \bar{\nu}_{\ell} \gamma^0 (i\partial_0)^{n+1} \nu_{\ell} \right), \quad (2.11)$$

mientras que el lagrangiano de interacción  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  se mantendrá inalterado [6]. El subíndice  $\ell$  en (2.11) indica el tipo de neutrino ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ ). El campo del neutrino cumplirá  $\nu_{\ell} = \nu_{\ell L}$ , donde el subíndice  $L$  se refiere a la quiralidad levógira del campo, y en la representación quiral será un campo de Dirac con dos componentes nulas. Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a (2.11), obtendremos las ecuaciones de movimiento para los campos:

$$\bar{\nu}_{\ell} : \quad \left( i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - s \frac{1}{\Lambda^n} \gamma^0 (i\partial_0)^{n+1} \right) \nu_{\ell} = 0 \quad (2.12)$$

y su compleja conjugada para el campo  $\nu_{\ell}$ . Estas son las ecuaciones de Dirac modificadas, cuyas soluciones serán los campos  $\nu_{\ell}$  y  $\bar{\nu}_{\ell}$ , espines de Dirac modificados. Introduciendo una expansión de ondas planas con soluciones positivas y negativas para el campo libre  $\nu_{\ell}(x)$ , uno puede demostrar que las relaciones energía-momento para el neutrino y el antineutrino vendrán dadas, respectivamente, por [6]:

$$|\mathbf{p}| = E_{\nu} - s \frac{E_{\nu}^{n+1}}{\Lambda^n} \quad \text{y} \quad |\mathbf{p}| = E_{\bar{\nu}} + (-1)^{n+1} s \frac{E_{\bar{\nu}}^{n+1}}{\Lambda^n}, \quad (2.13)$$

donde vemos que se obtiene una MDR para cada uno. Cabe destacar que la escala de LIV introducida en (2.11) difiere en un factor  $2^{1/n}$  de la usada en las secciones 2.1 y 2.2,  $\Lambda^n = 2\Lambda_{\text{LIV}}^n$ .

<sup>6</sup>Los resultados obtenidos por OPERA, bautizados como *la anomalía de neutrinos superlumínicos*, fueron más tarde atribuidos a fallos en el equipamiento de medida. En particular, una conexión de fibra óptica entre un receptor GPS y el reloj principal del experimento no había sido enroscada por completo, lo que generaba un retraso en la señal de varias decenas de nanosegundos, dando lugar a una anomalía en la medida temporal por la cual los neutrinos parecían viajar a velocidades superlumínicas [17].

$s = -1$		$s = +1$	
	neutrino ( $\nu$ )	antineutrino ( $\bar{\nu}$ )	neutrino ( $\nu$ )
$n = 1$	sublumínico	superlumínico	superlumínico
$n = 2$	sublumínico	sublumínico	superlumínico

**Tabla 2.1:** Recopilación de los comportamientos no estándar de los neutrinos y antineutrinos en función del modelo de LIV. El signo  $s$  se ha introducido en (2.11) de forma que si  $s = -1$  el neutrino siempre será sublumínico, mientras que si  $s = +1$  el neutrino siempre será superlumínico.

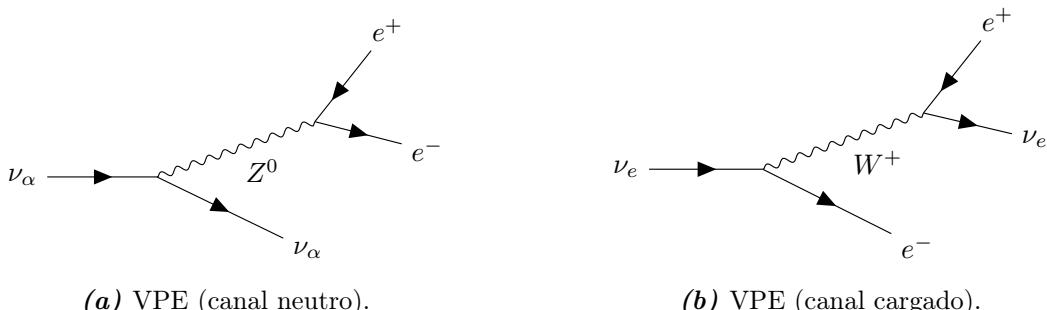
Esto es una cuestión de convenio. Durante el resto del trabajo emplearemos la parametrización dada por  $\Lambda$ . Si analizamos las MDR (2.13) obtenidas para el neutrino y el antineutrino, vemos que en el caso lineal ( $n = 1$ ) el neutrino y el antineutrino tendrán comportamientos opuestos: uno será sublumínico y otro superlumínico; mientras que en el caso cuadrático ( $n = 2$ ), presentarán el mismo comportamiento. Esto se resume en la Tabla 2.1.

Una vez analizados los efectos de LIV en la propagación libre de neutrinos y antineutrinos, revisaremos sus interacciones. Tal y como hemos comentado, el lagrangiano de interacción asociado al campo del neutrino no se verá modificado por nuestro modelo de LIV y será igual al lagrangiano de interacción en el SM. No obstante, como ya anticipamos en la sección 2.2.2, las anomalías en la propagación de las partículas por el efecto de LIV darán lugar a modificaciones en la cinemática de procesos.

En particular, si el neutrino o el antineutrino son superlumínicos, se convierten en partículas inestables capaces de desintegrarse a través de dos canales principales: la producción de pares electrón-positrón en el vacío (VPE) y la emisión de pares neutrino-antineutrino, también conocida como *Neutrino Splitting* (NSpl). Estos nuevos procesos tendrán importantes consecuencias fenomenológicas, como la predicción de una fuerte atenuación en el flujo de neutrinos de muy alta energía. Los diagramas de Feynman asociados al proceso VPE se recogen en la Figura 2.3, donde vemos que existen dos canales posibles para la desintegración. El canal neutro estará permitido para todos los sabores, mientras que el canal cargado solo lo estará para el neutrino electrónico.

Además, dado que las partículas del estado final tienen masa, habrá un umbral de energía por debajo del cual no se podrá dar el proceso [6]. La mínima energía requerida para el neutrino inicial viene dada por

$$E_{\text{th}}^{(\text{VPE})} = (2m_e^2 \Lambda^n)^{1/(2+n)}, \quad (2.14)$$



**Figura 2.3:** Diagramas de Feynman para los procesos de producción de pares electrón-positrón  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha e^- e^+$ , mediados por corrientes neutras (a) y cargadas (b).

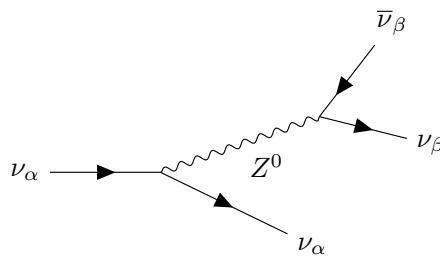
donde  $m_e$  es la masa del electrón. En el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$  (hacemos desaparecer el efecto de LIV) vemos que el umbral  $E_{\text{th}}^{(\text{VPE})} \rightarrow \infty$  y el proceso está prohibido. A diferencia del VPE, el umbral de energía para la emisión de pares neutrino-antineutrino es completamente despreciable debido a la pequeña masa del neutrino, que hemos aproximado  $m_\nu \simeq 0$ , luego

$$E_{\text{th}}^{(\text{NSpl})} \simeq 0 . \quad (2.15)$$

El diagrama de este proceso se muestra en la Figura 2.4, que solo será mediado por corrientes neutras. Por otro lado, si el neutrino o el antineutrino son sublumínicos, estos procesos estarán prohibidos y los únicos efectos posibles de LIV aparecerán en las interacciones responsables de su producción o detección. Será esta primera situación la que nos ocupará durante el resto del trabajo.

Debido a las ligaduras entre el comportamiento del neutrino y el antineutrino según el modelo de LIV, Tabla 2.1, el estudio de toda la fenomenología asociada a las desintegraciones de partículas superlumínicas será realmente complejo. La búsqueda de evidencias de esta nueva física a altas energías necesitará de simulaciones numéricas para cuantificar desviaciones en el flujo de neutrinos en la Tierra. Las comparaciones de este flujo simulado con las medidas de telescopios de neutrinos como IceCube o KM3NeT permitirán establecer cotas inferiores para la escala  $\Lambda$  en caso de no observar estos efectos, u obtener evidencias de una escala  $\Lambda$  favorecida en caso de observarlos. Varios ejemplos de este tipo de análisis se pueden encontrar en [6].

Sin embargo, muy poca atención ha sido prestada en la literatura científica a los mecanismos de producción de neutrinos y la forma en que LIV afectaría a estos. Si bien los efectos en la propagación y la posible desintegración de neutrinos constituyen muy buenos candidatos para búsquedas de LIV, ignorar los procesos envueltos en su producción constituye un gran error. No tendría fundamento, por ejemplo, estudiar la desintegración de neutrinos superlumínicos si su canal de producción estuviese inhibido, por lo que aquellos análisis que no incluyan efectos de LIV en la producción de neutrinos serán inconsistentes. Dado que estos efectos se manifestarán a energías muy elevadas, estaremos interesados en la componente astrofísica del flujo de neutrinos en la Tierra. En la siguiente sección abordaremos el problema de la producción de neutrinos astrofísicos en un marco de violación de invariancia Lorentz.



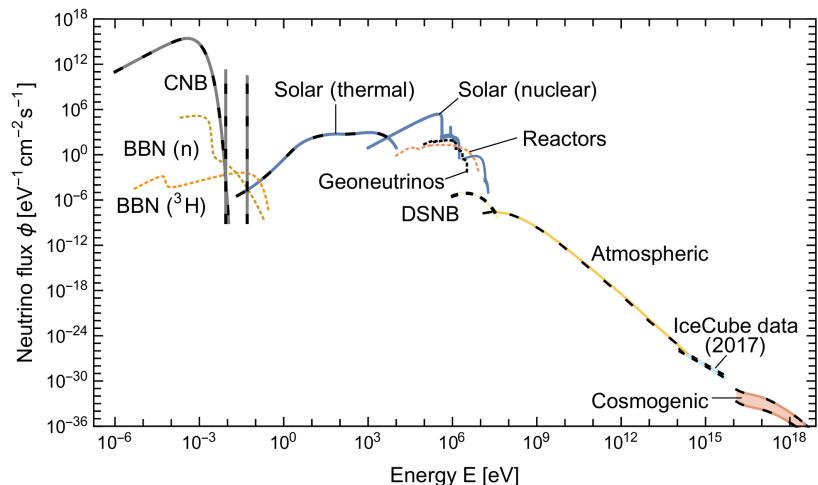
**Figura 2.4:** Diagrama de Feynman asociado a la emisión de pares neutrino-antineutrino  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta \bar{\nu}_\beta$ . El único canal posible para este proceso será el mediado por el bosón  $Z^0$ .

### 3 | Producción de neutrinos en fuentes astrofísicas

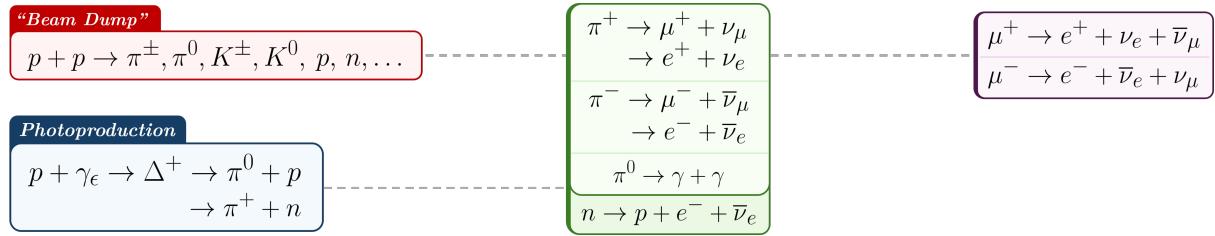
Aunque no seamos conscientes de ello, vivimos en un baño continuo de neutrinos. El origen de estas partículas tan especiales es muy diverso. Una fracción de ellas proviene de las reacciones termonucleares que tienen lugar en el Sol, recibiendo el nombre de *neutrinos solares*. Otra fracción tiene su origen en la Tierra y se produce mediante la desintegración beta ( $\beta^\pm$ ) de ciertos isótopos inestables presentes en la naturaleza, dando lugar a los llamados *geoneutrinos*. Otra buena parte de ellos, los *neutrinos atmosféricos*, proviene de la desintegración de partículas secundarias producidas en la interacción de CRs con las capas altas de la atmósfera terrestre. La lista continúa, pero a pesar de la gran variedad de fuentes de neutrinos, podemos organizarlos de forma sencilla atendiendo a su posición en el espectro de energías, Figura 3.1.

Nosotros estaremos interesados en los *neutrinos astrofísicos*, que conforman la componente dominante del flujo en la Tierra por encima de los 100 TeV, aproximadamente, como se puede apreciar en la Figura 3.1. Como su propio nombre indica, estos neutrinos tienen origen astrofísico y se producen en fuentes galácticas o extragalácticas. A pesar de conocer su mecanismo de producción, a día de hoy la búsqueda de fuentes puntuales y extensas de neutrinos astrofísicos sigue siendo un problema abierto para el campo de la astronomía de neutrinos. Solo tres fuentes han sido identificadas como posibles candidatas: el blazar TXS 0506+056, la galaxia activa NGC 1068 y, más recientemente, la Vía Láctea [24-26].

Los neutrinos astrofísicos de alta energía se producen principalmente mediante la desintegración de piones cargados,  $\pi^\pm$ , provenientes de la interacción de protones energéticos con el material denso situado en el interior de las fuentes o con fotones de menor energía del ambiente,  $\gamma_e$ , producidos a su vez por *bremsstrahlung* de electrones en regiones caracterizadas por la presencia de campos magnéticos intensos [27]. En la Figura 3.2 se recoge un esquema de los procesos anteriores, denominados usualmente como *beam dump* y *photoproduction*.



**Figura 3.1:** Espectro en energías del flujo de neutrinos en la Tierra integrado a todas las direcciones y sumado sobre los tres sabores. Nótese que el efecto de las oscilaciones no afectará al flujo combinado de  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$  que se muestra en la figura. Las líneas continuas indican fuentes de neutrinos y las líneas punteadas fuentes de antineutrinos. Las líneas punteadas y continuas superpuestas representan fuentes de neutrinos y antineutrinos. Fuente: E. Vitagliano *et al* (2020) [28].



**Figura 3.2:** Esquema del principal mecanismo de producción de neutrinos astrofísicos en las fuentes.

Durante las siguientes secciones nos centraremos en la producción de neutrinos mediante los procesos  $\pi^\pm \rightarrow \ell^\pm + \nu_\ell$ , donde  $\ell \equiv e, \mu$  indica el leptón cargado y  $\nu_\ell$  su respectivo neutrino/antineutrino. Este constituirá el canal dominante de producción.

### 3.1. Modificaciones en la desintegración del pion en LIV

A lo largo de esta sección afrontaremos un cálculo en QFT para estudiar la desintegración del pion en un marco de LIV. El lector no familiarizado con este tipo de cálculos podrá encontrar en el Anexo A una introducción completa al problema, abarcando desde nociones básicas de física de partículas hasta el cálculo detallado de la desintegración en SR. Dado que la forma usual de proceder consiste en explotar la LI y trabajar en el sistema CdM, se ha incluido un Anexo B con el cálculo de SR en el sistema laboratorio, que servirá de entrenamiento para su análogo en LIV.

Consideremos un modelo de LIV no-universal que afecta solo al neutrino, inducido por un lagrangiano libre modificado análogo a (2.11). La relación de dispersión para el neutrino vendrá dada entonces por

$$|\mathbf{k}| = E_\nu - s \frac{E_\nu^{n+1}}{\Lambda^n}. \quad (3.1)$$

A pesar de que en LIV el cuadrimomento  $k$  del neutrino pierde su interpretación física, será conveniente definir la 4-tupla  $\tilde{k} = (|\mathbf{k}|, \mathbf{k})$ , pues nos permitirá emplear la notación relativista a nivel formal. Nuestro objetivo ahora consistirá en calcular la anchura de desintegración modificada,  $\Gamma$ , para el proceso<sup>7</sup>

$$\pi^+ \rightarrow \ell^+ + \nu_\ell, \quad (3.2)$$

que en el SM estará mediado por un bosón  $W^+$ . Para realizar este cálculo emplearemos la teoría V-A de las interacciones débiles. Uno podría pensar que el uso de una teoría efectiva de bajas energías del SM para un cálculo en LIV no es un planteamiento correcto del problema. No obstante, esta aproximación es perfectamente válida: independientemente de la energía del pion inicial, la norma de su cuadrimomento será  $p^2 = m_\pi^2 \ll m_W^2$  y las masas de los leptones cargados cumplirán  $m_e, m_\mu \ll m_W$ , por lo que el propagador del bosón  $W$  se reducirá a

$$\tilde{D}_{\mu\nu} \simeq \frac{i}{m_W^2} g_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

<sup>7</sup>El resultado será completamente equivalente para este proceso y para su conjugado de carga  $\pi^- \rightarrow \ell^- + \nu_\ell$ , por lo que bastará con considerar el proceso 3.2. El único matiz relevante al diferenciar entre uno y otro aparecerá cuando consideremos un modelo de LIV completo. Según los parámetros  $n$  y  $s$ , los comportamientos del neutrino y el antineutrino podrán ser iguales u opuestos, Tabla 2.1, por lo que el resultado de la anchura de desintegración (que también dependerá de los parámetros  $n$  y  $s$ ) deberá escogerse de forma acorde para cada proceso.

recuperando así el formalismo de la teoría V-A (ver sección A.2 para la discusión completa). El diagrama de Feynman del proceso se muestra en la Figura 3.3.

### 3.1.1. Elemento de matriz

Comenzaremos calculando el elemento de matriz del proceso, que vendrá dado por

$$\mathcal{M}_{\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell} = \langle \ell^+(q, s'), \nu_\ell(\tilde{k}, s'') | -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu(0) | \pi^+(p) \rangle, \quad (3.4)$$

donde  $G_F$  es la constante de acople de Fermi y  $J^\mu(0)$  es la corriente cargada del lagrangiano efectivo  $\mathcal{L}_F(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu(x)$ , evaluada en el origen. Cada corriente será suma de un término hadrónico y otro leptónico  $J^\mu = J_h^\mu + J_\ell^\mu$ , que tienen la forma:

$$J_\ell^\mu = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\ell} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\ell \quad (3.5)$$

y

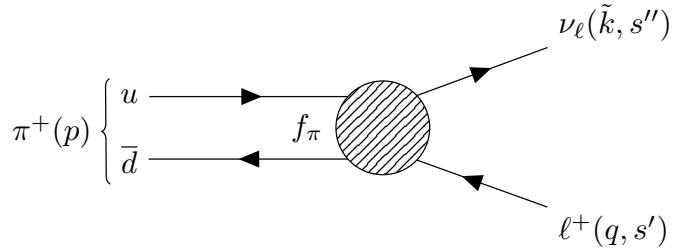
$$J_h^\mu = \bar{d}' \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u + \bar{s}' \gamma^\mu (1 - \gamma^5) c + \bar{b}' \gamma^\mu (1 - \gamma^5) t. \quad (3.6)$$

El apóstrofe (') sobre los campos fermiónicos asociados a los quarks *down*, *strange* y *bottom* que aparece en (3.6) indica que estos campos son autoestados de la interacción débil, no de la fuerte, cuya relación vendrá parametrizada por el *ángulo de Cabibbo*,  $\theta_C$ , Anexo A.2. De ahora en adelante, denotaremos  $\mathcal{M}_{\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell} \equiv \mathcal{M}_{fi}$ . El único término que contribuirá al elemento de matriz (3.4) será

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle \ell^+(q, s'), \nu_\ell(\tilde{k}, s'') | J_{\mu, \ell}^\dagger J_h^\mu(0) | \pi^+(p) \rangle \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle \ell^+(q, s'), \nu_\ell(\tilde{k}, s'') | [\bar{\nu}_\ell \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \ell](0) [\bar{d}' \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u](0) | \pi^+(p) \rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Expresando el campo  $d' = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C$  y separando los términos leptónico y hadrónico, obtenemos:

$$\mathcal{M}_{fi} = -\frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \underbrace{\langle \ell^+(q, s'), \nu_\ell(\tilde{k}, s'') | [\bar{\nu}_\ell \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \ell](0) | 0 \rangle}_{=\mathcal{M}_{fi}^{(L)}} \underbrace{\langle 0 | [\bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u](0) | \pi^+(p) \rangle}_{=\mathcal{M}_{fi}^{(H)}}. \quad (3.8)$$



**Figura 3.3:** Diagrama de primer orden asociado a la desintegración del pion  $\pi^+$  en LIV. El pion inicial tiene cuadrimomento  $p$  y espín  $s = 0$ , mientras que en el estado final el lepton cargado tendrá cuadrimomento  $q$  y espín  $s'$ . El neutrino tendrá momento lineal  $\mathbf{k}$ , energía  $E_\nu$  y espín  $s''$ .

El término hadrónico,  $\mathcal{M}_{fi}^{(H)}$ , no presenta ninguna diferencia respecto al cálculo realizado en SR, pues solo hemos introducido el efecto de LIV en el lagrangiano libre del neutrino. Por tanto, podremos usar el resultado obtenido en el Anexo A.3.2:

$$\mathcal{M}_{fi}^{(H)} = \langle 0 | [\bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u](0) | \pi^+(p) \rangle = -f_\pi p^\mu , \quad (3.9)$$

donde se ha introducido la constante de desintegración del pion,  $f_\pi$ . Siguiendo el convenio explicado en la sección A.3.2, el valor de esta constante será  $f_\pi = 130, 56(2)(4)(13)$  MeV [2]. Para calcular el término leptónico,  $\mathcal{M}_{fi}^{(L)}$ , procederemos de manera análoga a SR. Expresaremos el estado final como la acción de operadores creación sobre el vacío y calcularemos su dual:

$$\langle \ell^+(q, s'), \nu_\ell(\tilde{k}, s'') | = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \langle 0 | a_{\mathbf{k}, s''}(\nu_\ell) b_{\mathbf{q}, s'}(\ell) . \quad (3.10)$$

A continuación, escribiremos las expresiones de los campos libres  $\bar{\nu}_\ell(x)$  y  $\ell(x)$  como una superposición de ondas planas evaluadas en el origen ( $x = 0$ ) y operaremos con (3.10) de la manera usual, obteniendo así:

$$\mathcal{M}_{fi}^{(L)} = \langle \ell^+(q, s'), \nu_\ell(\tilde{k}, s'') | [\bar{\nu}_\ell \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \ell](0) | 0 \rangle = \bar{u}_\nu^{s''}(\tilde{k}) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_\ell^{s'}(q) , \quad (3.11)$$

un resultado equivalente al de SR, con la diferencia de que ahora  $\bar{u}_\nu^{s''}(\tilde{k})$  será un espinor de Dirac modificado y la relación energía-momento para el neutrino vendrá dada por la expresión (3.1). Insertando (3.9) y (3.11) en (3.8), podremos escribir finalmente el elemento de matriz como

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G_F f_\pi \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \bar{u}_\nu^{s''}(\tilde{k}) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_\ell^{s'}(q) p^\mu . \quad (3.12)$$

El elemento de matriz  $\mathcal{M}_{fi}$  nos dará la amplitud de la probabilidad de transición entre el estado inicial y el estado final del proceso. No obstante, nosotros estaremos interesados en su módulo al cuadrado, que nos proporcionará la probabilidad real y que será la variable que aparezca en la anchura de desintegración diferencial,  $d\Gamma$ . Además, como no estamos interesados en la polarización de espín de las partículas finales, promediaremos el resultado a todas las combinaciones posibles de  $s'$  y  $s''$ , definiendo:  $|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \sum_{s'} \sum_{s''} \mathcal{M}_{fi} \mathcal{M}_{fi}^*$ . Así,

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \sum_{s'} \sum_{s''} \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C}{2} \left( \bar{u}_\nu^{s''}(\tilde{k}) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_\ell^{s'}(q) \right) \left( \bar{v}_\ell^{s'}(q) (1 + \gamma^5) \gamma_\nu u_\nu^{s''}(\tilde{k}) \right) p^\mu p^\nu . \quad (3.13)$$

Haciendo uso de las *relaciones de completitud* para los espinores del leptón cargado y para los espinores modificados del neutrino:

$$\sum_{s'} v_\ell^{s'}(q) \bar{v}_\ell^{s'}(q) = \not{q} - m_\ell \quad \text{y} \quad \sum_{s''} u_\nu^{s''}(\tilde{k}) \bar{u}_\nu^{s''}(\tilde{k}) = \not{\tilde{k}} + m_\nu \simeq \not{\tilde{k}} \quad (3.14)$$

respectivamente, podremos reescribir el resultado (3.13) como

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C}{2} \text{Tr}(\not{\tilde{k}} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{q} - m_\ell) (1 + \gamma^5) \gamma_\nu) p^\mu p^\nu , \quad (3.15)$$

donde aparece la traza de un producto de matrices. Hemos introducido aquí la notación “slash” de Feynman,  $\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$ . Las propiedades usuales de la traza de matrices  $\gamma^\mu$  son bien conocidas y nos permitirán calcular de forma sencilla la expresión (3.15), obteniendo así:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = 4 G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C (2 (q \cdot p) (\tilde{k} \cdot p) - m_\pi^2 q \cdot \tilde{k}) . \quad (3.16)$$

Este es el resultado que necesitamos para calcular la anchura de desintegración total en el sistema de referencia laboratorio. Como veremos más adelante, será conveniente expresar el elemento de matriz (3.16) en función de dos variables: la energía del pion inicial,  $E_\pi$ , y la energía del neutrino,  $E_\nu$ , resultando en

$$|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 = 4 G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C \left( \frac{m_\ell^2 (m_\pi^2 - m_\ell^2)}{2} - s m_\ell^2 (E_\pi - 2E_\nu) \frac{E_\nu^{n+1}}{\Lambda^n} + 2(E_\pi - E_\nu) \frac{E_\nu^{2n+3}}{\Lambda^{2n}} \right), \quad (3.17)$$

donde hemos empleado la MDR para el neutrino<sup>8</sup> y la relación  $E_\pi E_\nu - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} \simeq (m_\pi^2 - m_\ell^2)/2 + s E_\nu^{n+2}/\Lambda^n$ , que se deduce empleando la conservación del momento lineal y la energía. Analizando (3.17), vemos que cuando  $\Lambda \rightarrow \infty$  el resultado tiende al valor de SR, lo que nos asegura que a bajas energías la simetría Lorentz permanece intacta. Por otro lado, cuando

$$E_\pi^{n+2} \gg m_\ell m_\pi \Lambda^n \quad (3.18)$$

el tercer término de (3.17) dominará sobre el resto. Aparecerán así dos escalas de energía, según usemos  $m_\ell = m_e$  o  $m_\ell = m_\mu$  en (3.18). La escala inferior podrá entenderse como un umbral efectivo a partir del cual los efectos de LIV serán notables. Cuando la energía del pion sea mayor que la escala superior, el elemento de matriz será completamente independiente de  $m_\ell$ , dando lugar a una probabilidad de transición igual para el neutrino electrónico y para el muónico. Esto es un comportamiento completamente diferente respecto a SR, donde el canal de desintegración  $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$  está suprimido respecto al canal  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ . Sin embargo, solo podremos sacar conclusiones válidas a partir de la anchura  $\Gamma$  de cada proceso, no al nivel del elemento de matriz.

### 3.1.2. Anchura de desintegración

La anchura de desintegración diferencial del proceso en LIV vendrá dada por la expresión

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta(E_\pi - E_\nu - E_\ell) \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \frac{1}{2E_\pi} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_\nu} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_\ell}, \quad (3.19)$$

donde ahora será necesario explicitar la conservación de la energía y la conservación del momento lineal por separado. A diferencia de SR, no particularizaremos el problema al sistema CdM. La anchura total se calculará, por tanto, integrando a todo el espacio de momentos del neutrino y el leptón cargado:

$$\Gamma = \frac{1}{8E_\pi(2\pi)^2} \int \frac{d^3 k}{E_\nu} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 \int \frac{d^3 q}{E_\ell} \delta(E_\pi - E_\nu - E_\ell) \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (3.20)$$

Usando la propiedad (A.69), reescribiremos  $\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)$ , con  $\mathbf{q}^* = \mathbf{p} - \mathbf{k}$  e integraremos respecto al momento del leptón cargado:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{8E_\pi(2\pi)^2} \int \frac{d^3 k}{E_\nu} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 \int \frac{d^3 q}{E_\ell} \delta(E_\pi - E_\nu - E_\ell) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \\ &= \frac{1}{8E_\pi(2\pi)^2} \int \frac{d^3 k}{E_\nu} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 \frac{\delta(E_\pi - E_\nu - \sqrt{m_\ell^2 + |\mathbf{q}^*|^2})}{\sqrt{m_\ell^2 + |\mathbf{q}^*|^2}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

<sup>8</sup>Un detalle importante a destacar es que, siempre que trabajemos con la MDR, nos quedaremos a primer orden de corrección en la escala  $\Lambda$ . De forma práctica, esto se traduce en que la relación de dispersión cuadrática vendrá dada entonces por  $|\mathbf{k}|^2 \simeq E_\nu^2 - 2s E_\nu^{n+2}/\Lambda^n$ .

A continuación, escribiremos  $|\mathbf{q}^*|^2$  en función de las variables de integración. Como sabemos,  $|\mathbf{q}^*|^2 = \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{q}^* = (\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}$ . No obstante, nos interesará expresar este término en función de la energía del pion y la energía del neutrino, al igual que hemos hecho con el elemento de matriz. Desarrollando, obtenemos

$$|\mathbf{q}^*|^2 = E_\pi^2 + E_\nu^2 - m_\pi^2 - 2s \frac{E_\nu^{n+2}}{\Lambda^n} - 2\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \left( E_\nu - s \frac{E_\nu^{n+1}}{\Lambda^n} \right) \cos \theta , \quad (3.22)$$

siendo  $\theta$  el ángulo formado por el momento lineal del pion,  $\mathbf{p}$  y el momento lineal del neutrino,  $\mathbf{k}$ . Ahora, la delta de Dirac que impone la conservación de la energía en (3.21) proporcionará una ligadura para la integral final entre la energía del neutrino y el ángulo  $\theta$ . Procediendo de forma análoga a SR, Anexo B, denotaremos

$$f(\theta) = E_\pi - E_\nu - \sqrt{m_\ell^2 + E_\pi^2 + E_\nu^2 - m_\pi^2 - 2s \frac{E_\nu^{n+2}}{\Lambda^n} - 2\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \left( E_\nu - s \frac{E_\nu^{n+1}}{\Lambda^n} \right) \cos \theta} \quad (3.23)$$

y aplicaremos la propiedad (A.69), lo que nos permitirá realizar la integral angular para el momento del neutrino. Los ceros de (3.23), vendrán dados por

$$\cos \theta^* = - \frac{m_\pi^2 - m_\ell^2 - 2E_\pi E_\nu + 2s E_\nu^{n+2} / \Lambda^n}{2\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} (E_\nu - s E_\nu^{n+1} / \Lambda^n)} \quad \text{con} \quad f(\theta^*) = 0 , \quad (3.24)$$

que determinará el ángulo  $\theta$  en función de  $E_\nu$ , y su derivada será

$$\left| \frac{df(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta^*} = \frac{\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} (E_\nu - s E_\nu^{n+1} / \Lambda^n) \sin \theta^*}{E_\pi - E_\nu} . \quad (3.25)$$

Reuniendo todo esto, podremos reescribir (3.21) como

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{8E_\pi(2\pi)^2\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} \int_0^{+\infty} d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{E_\nu} \oint \sin \theta d\theta d\varphi \frac{\delta(\theta - \theta^*)}{(E_\nu - s E_\nu^{n+1} / \Lambda^n) \sin \theta^*} \\ &\times \frac{E_\pi - E_\nu}{\sqrt{m_\ell^2 + E_\pi^2 + E_\nu^2 - m_\pi^2 - 2s E_\nu^{n+2} / \Lambda^n - 2\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \left( E_\nu - s E_\nu^{n+1} / \Lambda^n \right) \cos \theta}} , \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde hemos expresado el diferencial de volumen del espacio de momentos para el neutrino en coordenadas esféricas. La integral al ángulo  $\varphi$  resultará en un factor  $2\pi$ , mientras que la integral sobre  $\theta$  dará como resultado el integrando evaluado en  $\theta = \theta^*$ , obteniendo así:

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi E_\pi \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} \int_0^{+\infty} d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{E_\nu (E_\nu - s E_\nu^{n+1} / \Lambda^n)} \Theta(\theta^*) \Theta(\pi - \theta^*) . \quad (3.27)$$

La funciones  $\Theta$  que aparecen en (3.27) son las funciones escalón de Heaviside, que delimitarán el intervalo de integración. Finalmente, expresaremos  $|\mathbf{k}|$  en función de la energía del neutrino  $E_\nu$ , que será nuestra nueva variable de integración. Haciendo uso de la relación de dispersión (3.1), la integral (3.27) podrá escribirse como

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi E_\pi \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} \int_{E_\nu(\theta^*=\pi)}^{E_\nu(\theta^*=0)} dE_\nu (1 - s(n+1)E_\nu^n / \Lambda^n) \frac{(1 - 2sE_\nu^n / \Lambda^n)}{(1 - sE_\nu^n / \Lambda^n)} |\mathcal{M}_{fi}|^2 . \quad (3.28)$$

Entonces, podremos desarrollar  $(1 - sE_\nu^n / \Lambda^n)^{-1} = 1 + sE_\nu^n / \Lambda^n + \mathcal{O}((E_\nu^n / \Lambda^n)^2)$  y el integrando de (3.28) podrá escribirse como un desarrollo en potencias de  $E_\nu^n / \Lambda^n$  multiplicando al elemento de matriz. Todos los factores desarrollables como una suma de potencias de  $E_\nu^n / \Lambda^n$  se podrán

aproximar a orden 0, ya que  $E_\nu^n/\Lambda^n \ll 1$ . Por tanto, la integral (3.28) se reducirá a

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi E_\pi \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} \int_{E_\nu^{(\min)}}^{E_\nu^{(\max)}} dE_\nu |\bar{\mathcal{M}}_{fi}|^2, \quad (3.29)$$

donde hemos renombrado los límites de integración como  $E_\nu^{(\min)} \equiv E_\nu(\theta^* = \pi)$  y  $E_\nu^{(\max)} \equiv E_\nu(\theta^* = 0)$ . Empleando la expresión explícita (3.17) para el elemento de matriz en función de las energías del pion inicial y del neutrino, podremos calcular el resultado final, obteniendo:

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C}{4\pi E_\pi \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} \left( \frac{m_\ell^2 (m_\pi^2 - m_\ell^2)}{2} (E_{\nu,\max} - E_{\nu,\min}) \right. \\ & - s \frac{m_\ell^2 E_\pi}{n+2} \frac{(E_{\nu,\max}^{n+2} - E_{\nu,\min}^{n+2})}{\Lambda^n} + s \frac{2 m_\ell^2}{n+3} \frac{(E_{\nu,\max}^{n+3} - E_{\nu,\min}^{n+3})}{\Lambda^n} \\ & \left. + \frac{2 E_\pi}{2n+4} \frac{(E_{\nu,\max}^{2n+4} - E_{\nu,\min}^{2n+4})}{\Lambda^{2n}} - \frac{2}{2n+5} \frac{(E_{\nu,\max}^{2n+5} - E_{\nu,\min}^{2n+5})}{\Lambda^{2n}} \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para hallar la expresión final de la anchura  $\Gamma$  en función de la energía del pion, será necesario conocer la dependencia de  $E_\nu^{(\min)}$  y  $E_\nu^{(\max)}$  con  $E_\pi$ , que obtendremos como solución de las siguientes ecuaciones:

$$s \frac{E_{\nu,\min}^{n+2}}{\Lambda^n} + s \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \frac{E_{\nu,\min}^{n+1}}{\Lambda^n} - (E_\pi + \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}) E_{\nu,\min} + \frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{2} = 0 \quad (3.31)$$

y

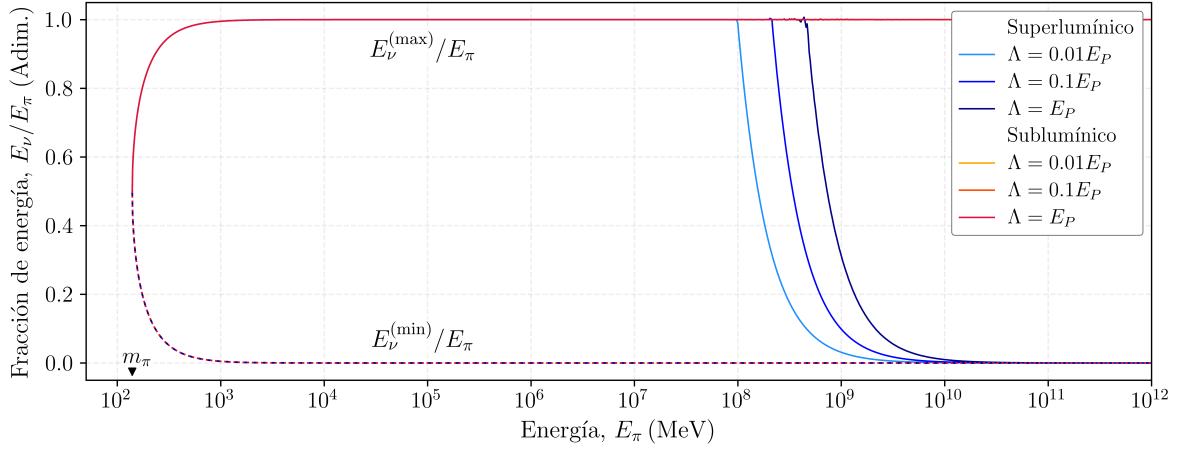
$$s \frac{E_{\nu,\max}^{n+2}}{\Lambda^n} - s \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \frac{E_{\nu,\max}^{n+1}}{\Lambda^n} - (E_\pi - \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}) E_{\nu,\max} + \frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{2} = 0 \quad (3.32)$$

Las ecuaciones (3.31) y (3.32) provienen de particularizar (3.24) a los casos  $\theta^* = \pi$  y  $\theta^* = 0$ , respectivamente. El modelo de LIV bajo estudio fijará los parámetros  $n$ ,  $s$  y  $\Lambda$ . Una vez escogido el modelo, se deberán resolver ambas ecuaciones para el neutrino electrónico ( $m_\ell = m_e$ ) y para el neutrino muónico ( $m_\ell = m_\mu$ ) en función de la energía del pion,  $E_\pi$ .

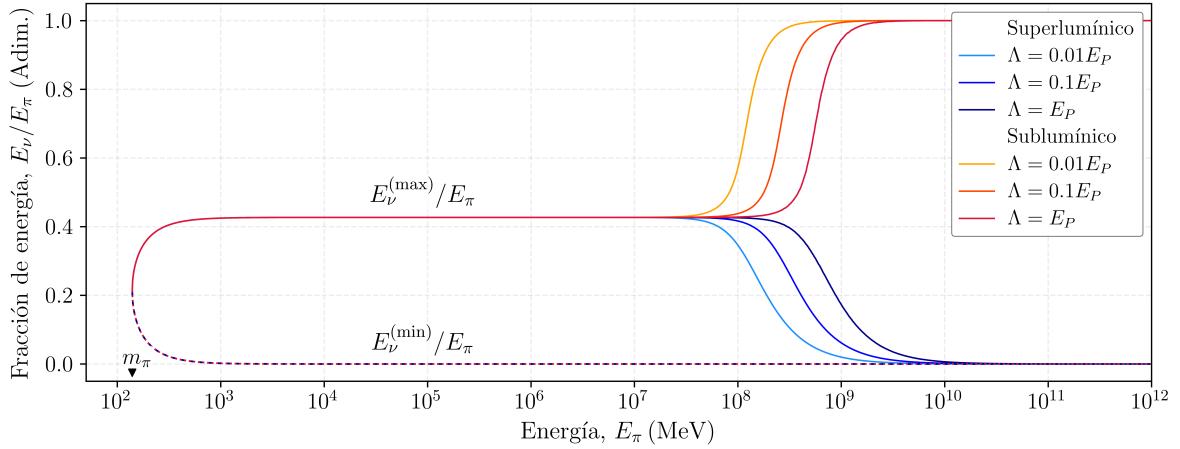
### 3.2. Consecuencias fenomenológicas de LIV en la producción de neutrinos

De ahora en adelante, consideraremos el caso lineal,  $n = 1$ , y exploraremos las implicaciones físicas de los resultados obtenidos en la sección anterior. Este no solo será el caso de estudio más sencillo, sino también el más interesante a nivel fenomenológico: el neutrino y el antineutrino exhibirán comportamientos diferentes, Tabla 2.1. Por tanto, será este el escenario en el que nos centraremos a partir de este momento. En él, (3.31) y (3.32) serán ecuaciones cúbicas en las variables  $E_\nu^{(\min)}$  y  $E_\nu^{(\max)}$ , respectivamente. Dado que las raíces de los polinomios de tercer grado tienen una expresión analítica conocida, emplearemos herramientas computacionales para calcular sus soluciones exactas para diferentes valores de  $E_\pi$  a partir de las expresiones analíticas. En la Figura 3.4 se muestran las fracciones de energía  $E_\nu^{(\min)}/E_\pi$  y  $E_\nu^{(\max)}/E_\pi$  obtenidas mediante este procedimiento. El rango de energías comprendido entre  $E_\nu^{(\min)}$  y  $E_\nu^{(\max)}$  dará el intervalo de integración para la variable  $E_\nu$ .

Hasta ahora, el único efecto de LIV en la desintegración del pion se ha manifestado en la modificación del elemento de matriz  $|\bar{\mathcal{M}}_{fi}|^2$  a muy altas energías, como se ha mostrado en (3.18). Analizando las Figuras 3.4a y 3.4b, encontramos un segundo efecto que competirá con el anterior: el intervalo de energías posibles para el neutrino producido en la desintegración se verá



(a) Límites de integración para la energía del neutrino electrónico,  $\nu_e$ .



(b) Límites de integración para la energía del neutrino muónico,  $\nu_\mu$ .

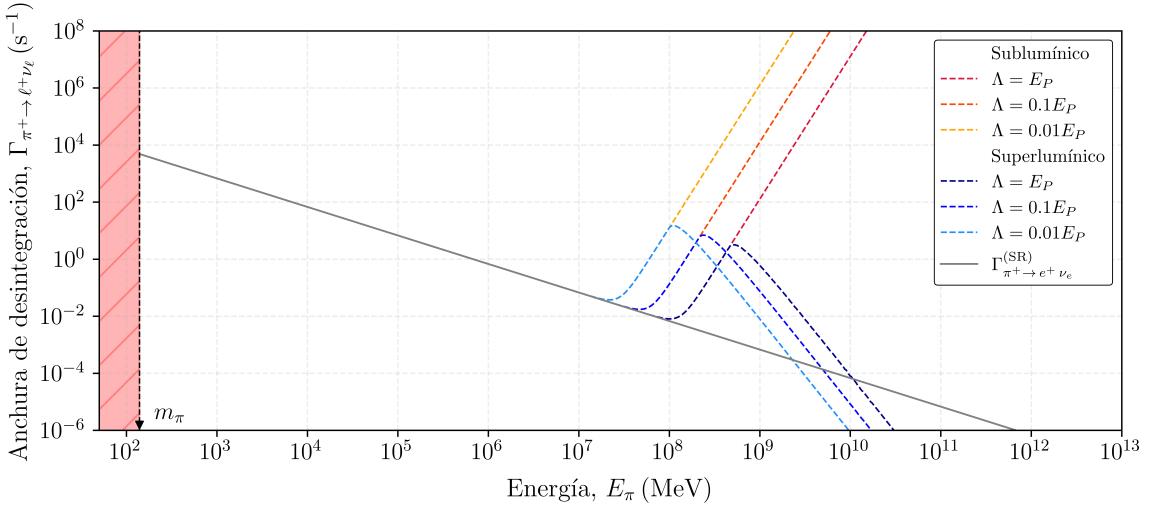
**Figura 3.4:** Evolución de los valores  $E_\nu^{(\min)}$  y  $E_\nu^{(\max)}$  en función de la energía del pion inicial, normalizados respecto a  $E_\pi$ , para los procesos  $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$  (a) y  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  (b) en un escenario de LIV lineal ( $n = 1$ ). El cálculo de las soluciones exactas y su representación gráfica se han implementado mediante un programa en lenguaje Python, haciendo uso de las librerías NumPy y Matplotlib [29, 30]. Las pequeñas fluctuaciones de  $E_\nu^{(\max)}/E_\pi$  que aparecen en (a) para el caso superlumínico con  $\Lambda = E_P$  se deben a errores de aproximación en el cálculo numérico de ciertas funciones de NumPy para números complejos.

modificado respecto a SR. En el escenario sublumínico, el intervalo se ensanchará hasta abarcar todo el rango permitido,  $0 \lesssim E_\nu \lesssim E_\pi$ . Esto se aprecia de forma clara en la Figura 3.4b, donde la energía máxima permitida para el neutrino muónico crece rápidamente en torno a  $E_\pi \approx 0, 1 - 1$  PeV, según la escala de LIV escogida. Para el neutrino electrónico, Figura 3.4a, este efecto no es apreciable, pues la fracción de energía máxima en SR tiende muy rápidamente a la unidad a bajas energías, mucho antes de que el efecto de LIV sea notable.

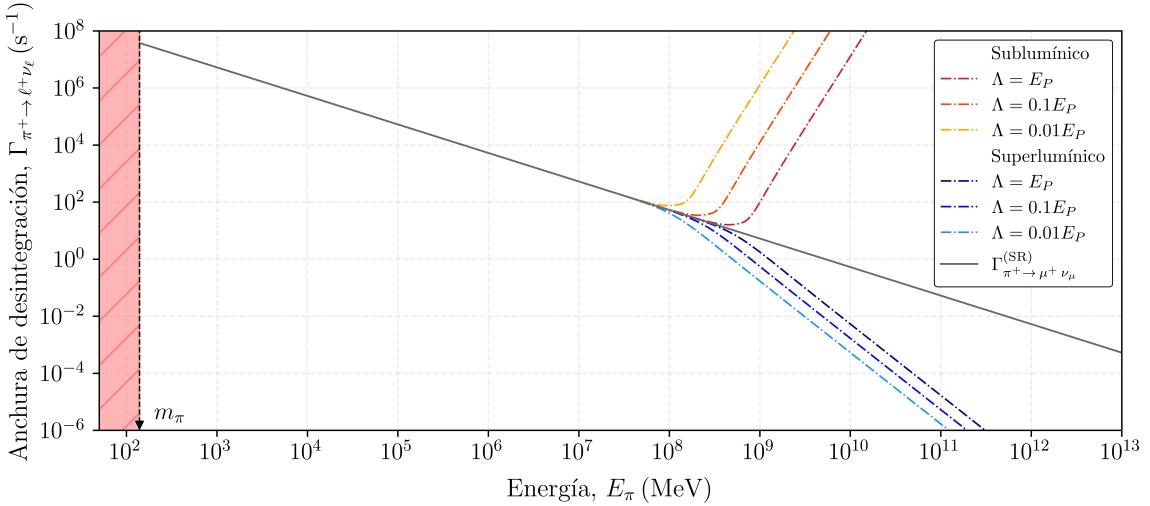
En el escenario superlumínico ocurrirá lo contrario: el intervalo de energías permitidas se verá reducido a partir de un cierto umbral de energía, determinado por la escala  $\Lambda$ , y los límites superior e inferior coincidirán por encima de  $E_\pi \approx 10$  PeV, aproximadamente. Dado que  $E_\nu^{(\max)} \rightarrow E_\nu^{(\min)} \approx 0$ , el pion se convertirá en una partícula estable a muy altas energías. Por último, vemos que tanto en el caso sublumínico como en el caso superlumínico el límite inferior  $E_\nu^{(\min)}$  para los dos tipos de neutrinos no se verá afectado y tenderá a cero a partir de  $E_\pi \approx 1$  GeV.

Las modificaciones en la anchura de desintegración tendrán entonces dos orígenes diferenciados. Por un lado, la probabilidad del proceso se verá afectada debido a las correcciones en la expresión del elemento de matriz (3.17) y, por otro lado, aparecerá una modificación en el intervalo de energías permitidas para el neutrino hijo, que delimita el intervalo de integración para la anchura total, Figura 3.4. En el caso sublumínico, ambos efectos favorecerán la desintegración del pion, mientras que en el caso superlumínico estos efectos serán contrarios entre sí. Será interesante analizar ambos escenarios por sus posibles consecuencias físicas.

A continuación, representaremos gráficamente la anchura total de cada proceso frente a la energía del pion, cuya expresión analítica se ha obtenido en (3.30). Esto se recoge en la Figura 3.5. Analizando estos resultados, observamos que la desintegración se verá favorecida en ambos procesos para el caso sublumínico. Además, dado que los límites de integración para el neutrino electrónico y muónico coincidirán a partir de  $E_\pi \approx 10^8 - 10^{10}$  MeV, Figura 3.4, y el elemento de



(a) Anchura total del proceso  $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ .



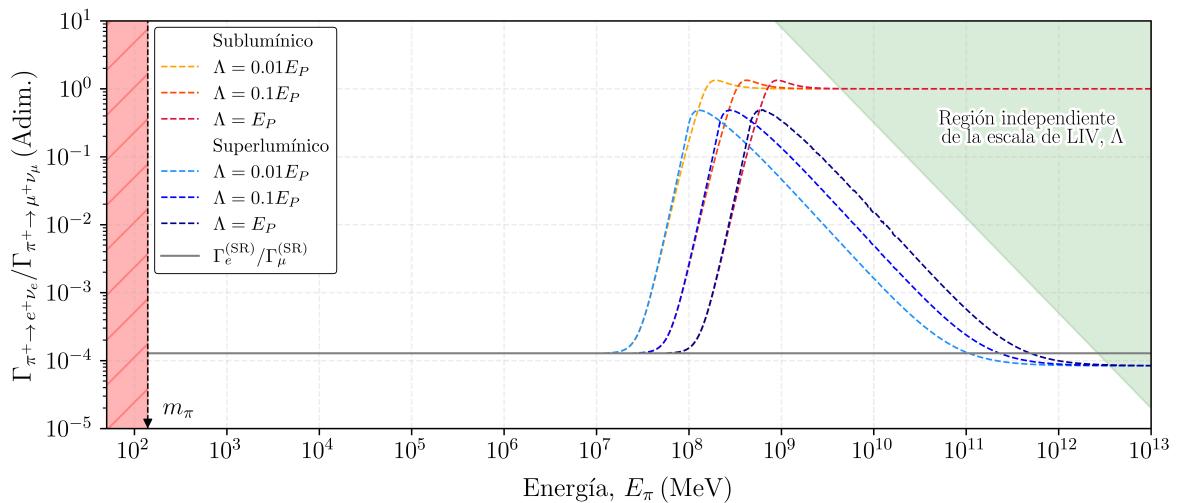
(b) Anchura total del proceso  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ .

**Figura 3.5:** Modificaciones en la anchura de desintegración total de los procesos  $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$  (a) y  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  (b) inducidas por un modelo de LIV lineal ( $n = 1$ ). Para representar gráficamente este resultado se ha evaluado la expresión analítica (3.30) en los límites  $E_\nu^{(\min)}$  y  $E_\nu^{(\max)}$  calculados en la Figura 3.4. La franja roja delimita el rango de energías no permitido para el pion,  $E_\pi < m_\pi$ .

matriz será independiente del sabor a muy altas energías, la anchura de desintegración presentará la misma tendencia para los procesos  $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$  y  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ . Las principales diferencias se manifestarán en el escenario superlumínico. El umbral efectivo de reducción del intervalo de energías permitido para el neutrino coincidirá en ambos procesos con el inicio de la atenuación de la anchura de desintegración,  $\Gamma$ . Sin embargo, el término de corrección de orden  $E_\nu^n/\Lambda^n$  en (3.17) dependerá del cuadrado de la masa del leptón cargado. Dado que  $m_e^2/m_\mu^2 \simeq 2,3 \cdot 10^{-5}$ , la contribución de este término en el caso del proceso  $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$  será despreciable frente a su análogo en el proceso  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  y dominará por tanto el término de orden  $E_\nu^{2n}/\Lambda^{2n}$ , definido positivo, que dará lugar al crecimiento inicial de la anchura en torno a  $E_\pi \approx 10^7 - 10^9$  MeV. A mayor energía, la reducción de  $E_\nu^{(\max)}/E_\pi$  se impondrá y provocará la caída de  $\Gamma$ , de modo que en el caso superlumínico el pion se convertirá en una partícula estable.

Todo esto será válido para el estudio de la producción de neutrinos. No obstante, en la naturaleza existen tanto neutrinos como antineutrinos, y uno deberá ser cuidadoso al interpretar los resultados obtenidos en este trabajo. El primer paso consiste en escoger un modelo de LIV, determinado por la escala  $\Lambda$  y los parámetros  $n$  y  $s$ , y comprobar en la Tabla 2.1 cuál será el comportamiento del neutrino y del antineutrino. Si el neutrino es (super)sulblumínico, acudiremos a los resultados<sup>9</sup> para el carácter (super)sulblumínico de la escala  $\Lambda$  escogida. De igual manera, si el antineutrino es (super)sulblumínico, acudiremos a los resultados para el carácter (super)sulblumínico.

Las búsquedas actuales de señales de LIV en el sector del neutrino se fundamentan en los análisis de retrasos en tiempos de vuelo y la búsqueda de su posible desintegración. No obstante, estos nuevos resultados abren la puerta a considerar un efecto adicional en estas búsquedas: la proporción de los sabores de neutrinos astrofísicos en las fuentes se verá modificada a altas energías. Esto no resulta evidente en la Figura 3.5, por lo que representaremos el *branching ratio*  $\Gamma_{\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e}/\Gamma_{\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu}$  en función de la energía del pion, Figura 3.6. Vemos entonces que, si bien a bajas energías la producción de neutrinos electrónicos está suprimida, existirá un cierto intervalo de energía en el cual la proporción de  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$  en la fuente será comparable. Además, por encima de un cierto umbral determinado por la escala  $\Lambda$ , esta proporción será constante y únicamente dependerá del comportamiento (super)sulblumínico del neutrino.



**Figura 3.6:** Proporción de neutrinos  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$  producidos en una fuente astrofísica como función de  $E_\pi$ .

<sup>9</sup>Nótese que en este trabajo únicamente hemos estudiado los resultados asociados al caso lineal  $n = 1$ . El caso cuadrático  $n = 2$  deberá ser estudiado de forma análoga.

## 4 | Conclusiones

Al inicio de este trabajo se ha motivado el estudio de la violación de invariancia Lorentz como una posible ruptura de simetría en la naturaleza, para posteriormente proceder con un repaso general de su formulación y sus implicaciones en la física de altas energías. La idea de una ruptura de simetría Lorentz ha sido ampliamente estudiada en la literatura, desde los trabajos más teóricos sobre la estructura matemática de este concepto [31] hasta los numerosos análisis de datos llevados a cabo por grandes colaboraciones experimentales [11, 15]. Sin embargo, y a pesar del auge actual de la fenomenología de QG en el marco de la astronomía multimensajero, el estudio de LIV en la producción de neutrinos de alta energía sigue siendo un área muy poco explorada. Esto viene ocasionado, principalmente, por la escasez de datos experimentales de neutrinos astrofísicos de muy alta energía, siendo insuficiente incluso para testar las predicciones del SM sobre los mecanismos de producción de neutrinos en las fuentes.

Los resultados obtenidos en este trabajo ponen de manifiesto el gran potencial que presenta el estudio de fuentes astrofísicas para búsquedas de LIV: a energías por encima de un determinado umbral, el proceso  $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$  dejará de estar suprimido respecto a  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  y la proporción en sabor  $\nu_e/\nu_\mu$  se aproximará a la unidad. Además, a energías 4 órdenes de magnitud por encima de este umbral, el efecto de LIV será completamente independiente de la escala  $\Lambda$  y la proporción  $\nu_e/\nu_\mu \rightarrow 1$  en el caso sublumínico, mientras que en el caso superlumínico el pion se convertirá en una partícula estable. Un estudio completo de LIV en el sector del neutrino deberá incorporar todas las modificaciones comentadas desde su producción hasta su detección en la Tierra, incluyendo la propagación a lo largo de distancias cosmológicas, donde el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos jugará también un papel relevante. Desde el punto de vista experimental, la infraestructura tecnológica y la escasez de eventos de alta energía han constituido los principales limitantes durante las últimas décadas a la hora de constreñir posibles desviaciones ocasionadas por LIV en las observaciones de telescopios de neutrinos. Esta situación, sin embargo, podría verse alterada en las próximas décadas.

Actualmente, dos nuevos telescopios de neutrinos, ARCA y ORCA, están en proceso de construcción en las profundidades del mar Mediterráneo. Una vez completado, ARCA, acrónimo de *Astroparticle Research with Cosmics in the Abyss*, será el telescopio más avanzado del mundo, con un volumen de detección de  $1 \text{ km}^3$ , aproximadamente, con la posibilidad de una ampliación aún mayor [32]. Análogamente, IceCube, el mayor telescopio de neutrinos en la actualidad, comenzará en breve un gran proyecto de mejora de su detector. IceCube-Gen2, su sucesor, tratará de buscar fuentes de neutrinos cósmicos hasta el EeV y se espera que esté operativo para el año 2033 [33]. Estos próximos desarrollos abrirán la puerta a la realización de nuevos análisis de datos con una estadística sin precedentes y la búsqueda de efectos de nueva física a energías muy superiores a las accesibles hoy día. Es en este contexto donde los resultados presentados en este trabajo podrán ser contrastados con las observaciones, lo que permitirá establecer nuevas cotas inferiores para la escala  $\Lambda$  o incluso determinar un valor de  $\Lambda$  favorecido, en caso de encontrar correlaciones con un cierto modelo de LIV.

Por otro lado, el estudio de la producción de neutrinos en fuentes astrofísicas conllevará también una serie de retos que harán de estos análisis una tarea muy compleja. Si bien es cierto que el mecanismo principal de producción de estos neutrinos es la desintegración de piones cargados, existen también otras posibilidades. Por tanto, cada tipo de fuente podrá exhibir un comporta-

miento ligeramente diferente según su naturaleza, composición y otros factores que intervendrán en el proceso, lo que resultará en un fondo no deseado para el análisis de la proporción en sabor del flujo de neutrinos. Para solucionarlo, uno debería considerar el estudio de fuentes aisladas cuyos mecanismos de producción y aceleración de partículas de alta energía sean bien conocidos. Sin embargo, esto presenta otras dificultades añadidas, como la necesidad de una resolución direccional extremadamente pequeña o la escasez de eventos por encima del PeV.

Hasta que el desarrollo de la nueva tecnología de detección nos permita llevar a cabo estudios precisos, será necesario explorar todas las implicaciones fenomenológicas que presentaría un escenario de LIV en la producción de neutrinos. Una continuación natural de este trabajo incluirá el estudio del caso cuadrático,  $n = 2$ , para el que será interesante obtener de nuevo la evolución de los límites  $E_\nu^{(\min)}$  y  $E_\nu^{(\max)}$  en función de la energía del pion, así como las anchuras de desintegración  $\Gamma_{\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e}$  y  $\Gamma_{\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu}$ . Otra extensión posible de los resultados obtenidos en la sección 3.2 consistirá en obtener la distribución de probabilidad asociada a la fracción de energía  $E_\nu/E_\pi$  del neutrino hijo y analizar su comportamiento para valores de  $E_\pi$  elevados, lo que aportará mayor información sobre el proceso respecto a  $E_\nu^{(\min)}/E_\pi$  y  $E_\nu^{(\max)}/E_\pi$ , que únicamente delimitan el soporte de la distribución. Una vez estudiada toda la casuística asociada a los diferentes modelos de LIV en la desintegración del pion, se deberá considerar la desintegración del (anti)muon  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$  en un marco de LIV análogo al introducido en la sección 3.1. De esta forma, será posible concatenar la desintegración de piones cargados en las fuentes con las sucesivas desintegraciones posteriores de las partículas hijas inestables: los (anti)muones y los (anti)neutrinos superlumínicos. Estudiando esta cadena de desintegración con las nuevas anchuras modificadas, podrá construirse un modelo completo de producción para el flujo de neutrinos de muy alta energía, que podrá ser testado experimentalmente en las próximas décadas.

## Bibliografía

- [1] Michael E. Peskin y Daniel V. Schroeder. «An Introduction To Quantum Field Theory». En: Westview Press, 1995. ISBN: 978-0-201-50397-5.
- [2] R. L. Workman et al. «Review of Particle Physics». En: *PTEP* 2022 (2022), pág. 083C01. DOI: [10.1093/ptep/ptac097](https://doi.org/10.1093/ptep/ptac097).
- [3] M. G. Aartsen et al. «Evidence for High-Energy Extraterrestrial Neutrinos at the IceCube Detector». En: *Science* 342 (2013), pág. 1242856. DOI: [10.1126/science.1242856](https://doi.org/10.1126/science.1242856).
- [4] Albert A. Michelson y Edward W. Morley. «On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether». En: *American Journal of Science* 34.203 (1887), págs. 333-345. URL: <https://ajsonline.org/article/62505>.
- [5] A. Einstein. «On the Electrodynamics of Moving Bodies». En: *Annalen der Physik* 322.10 (1905), págs. 891-921. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19053221004>.
- [6] Maykoll A. Reyes. «Exploration of Possible Signals beyond Special Relativity Using High-Energy Astroparticle Physics». Tesis doct. Universidad de Zaragoza, jul. de 2023. arXiv: [2307.03462 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/2307.03462).
- [7] Sidney Coleman y Sheldon L. Glashow. «High-energy tests of Lorentz invariance». En: *Phys. Rev. D* 59 (11 abr. de 1999), pág. 116008. DOI: [10.1103/PhysRevD.59.116008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.116008).

- [8] Maurizio Spurio. «Probes of Multimessenger Astrophysics. Charged Cosmic Rays, Neutrinos,  $\gamma$ -Rays and Gravitational Waves». En: 2.<sup>a</sup> ed. Springer, 2018. Cap. 7, págs. 239-241. ISBN: 978-3-319-96853-7. DOI: [10.1007/978-3-319-96854-4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-96854-4).
- [9] D. J. Bird et al. «Detection of a Cosmic Ray with Measured Energy Well beyond the Expected Spectral Cutoff due to Cosmic Microwave Radiation». En: *The Astrophysical Journal* 441 (mar. de 1995), pág. 144. DOI: [10.1086/175344](https://doi.org/10.1086/175344).
- [10] Uri Jacob y Tsvi Piran. «Lorentz-violation-induced arrival delays of cosmological particles». En: *JCAP* 01 (2008), pág. 031. DOI: [10.1088/1475-7516/2008/01/031](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2008/01/031).
- [11] S. Adrián-Martínez, A. Albert, M. André et al. «Stacked search for time shifted high energy neutrinos from gamma ray bursts with the ANTARES neutrino telescope». En: *Eur. Phys. J. C* 77 (20 2017).
- [12] Giovanni Amelino-Camelia et al. «Could quantum gravity slow down neutrinos?». En: *Nature Astron.* 7.8 (2023), págs. 996-1001. DOI: [10.1038/s41550-023-01993-z](https://doi.org/10.1038/s41550-023-01993-z).
- [13] J M Carmona, J L Cortés y M A Reyes. «Consistency of Lorentz-invariance violation neutrino scenarios in time delay analyses». En: *Classical and Quantum Gravity* 41.7 (mar. de 2024), pág. 075012. DOI: [10.1088/1361-6382/ad2f13](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ad2f13).
- [14] D. Mattingly, Ted Jacobson y S. Liberati. «Threshold configurations in the presence of Lorentz violating dispersion relations». En: *Phys. Rev. D* 67 (12 jun. de 2003), pág. 124012. DOI: [10.1103/PhysRevD.67.124012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.124012).
- [15] Humberto Martínez-Huerta, Rodrigo Guedes Lang y Vitor de Souza. «Lorentz Invariance Violation Tests in Astroparticle Physics». En: *Symmetry* 12.8 (2020). ISSN: 2073-8994. DOI: [10.3390/sym12081232](https://doi.org/10.3390/sym12081232). URL: <https://www.mdpi.com/2073-8994/12/8/1232>.
- [16] C. L. Cowan et al. «Detection of the Free Neutrino: A Confirmation». En: *Science* 124.3212 (1956), págs. 103-104. ISSN: 00368075, 10959203. URL: [http://www.jstor.org/stable/1751492](https://www.jstor.org/stable/1751492).
- [17] Matt Strassler. «OPERA: What went wrong». En: (2012). URL: <https://profmattstrassler.com/articles-and-posts/particle-physics-basics/neutrinos/neutrinos-faster-than-light/opera-what-went-wrong/>.
- [18] T. Adam et al. «Measurement of the neutrino velocity with the OPERA detector in the CNGS beam». En: *Journal of High Energy Physics* 2012.93 (2012). URL: [https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2012\)093](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2012)093).
- [19] Jean Alexandre, John Ellis y Nick E. Mavromatos. «On the possibility of superluminal neutrino propagation». En: *Physics Letters B* 706.4 (2012), págs. 456-461. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2011.11.038>.
- [20] Gian F. Giudice, Sergey Sibiryakov y Alessandro Strumia. «Interpreting OPERA results on superluminal neutrino». En: *Nuclear Physics B* 861.1 (2012), págs. 1-16. ISSN: 0550-3213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2012.03.008>.
- [21] J. M. Carmona et al. «Decay of superluminal neutrinos in the collinear approximation». En: *Phys. Rev. D* 107.4 (2023), pág. 043001. DOI: [10.1103/PhysRevD.107.043001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.107.043001).
- [22] A. Crivellin, F. Kirk y M. Schreck. «Implications of  $SU(2)_L$  gauge invariance for constraints on Lorentz violation». En: *Journal of High Energy Physics* 2021.82 (2021). DOI: [https://doi.org/10.1007/JHEP04\(2021\)082](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2021)082).

- [23] J. M. Carmona, J. L. Cortes y D. Mazon. «Uncertainties in Constraints from Pair Production on Superluminal Neutrinos». En: *Phys. Rev. D* 85 (2012), pág. 113001. DOI: [10.1103/PhysRevD.85.113001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.113001).
- [24] The IceCube Collaboration. «Neutrino emission from the direction of the blazar TXS 0506+056 prior to the IceCube-170922A alert». En: *Science* 361.6398 (jul. de 2018), págs. 147-151. DOI: [10.1126/science.aat2890](https://doi.org/10.1126/science.aat2890).
- [25] The IceCube Collaboration. «Evidence for neutrino emission from the nearby active galaxy NGC 1068». En: *Science* 378.6619 (nov. de 2022), págs. 538-543. DOI: [10.1126/science.abg3395](https://doi.org/10.1126/science.abg3395).
- [26] The IceCube Collaboration. «Observation of high-energy neutrinos from the Galactic plane». En: *Science* 380.6652 (2023), págs. 1338-1343. DOI: [10.1126/science.adc9818](https://doi.org/10.1126/science.adc9818).
- [27] Maurizio Spurio. «Probes of Multimessenger Astrophysics. Charged Cosmic Rays, Neutrinos,  $\gamma$ -Rays and Gravitational Waves». En: 2.<sup>a</sup> ed. Springer, 2018. Cap. 10, págs. 356-357. ISBN: 978-3-319-96853-7. DOI: [10.1007/978-3-319-96854-4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-96854-4).
- [28] Edoardo Vitagliano, Irene Tamborra y Georg Raffelt. «Grand unified neutrino spectrum at Earth: Sources and spectral components». En: *Rev. Mod. Phys.* 92 (4 dic. de 2020), pág. 045006. DOI: [10.1103/RevModPhys.92.045006](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.92.045006).
- [29] Charles R. Harris et al. «Array programming with NumPy». En: *Nature* 585.7825 (sep. de 2020), págs. 357-362. DOI: [10.1038/s41586-020-2649-2](https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2).
- [30] J. D. Hunter. «Matplotlib: A 2D graphics environment». En: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), págs. 90-95. DOI: [10.1109/MCSE.2007.55](https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55).
- [31] D. Colladay y V. Alan Kostelecký. «Lorentz-violating extension of the standard model». En: *Phys. Rev. D* 58 (11 oct. de 1998), pág. 116002. DOI: [10.1103/PhysRevD.58.116002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.116002).
- [32] S Adrián-Martínez et al. «Letter of intent for KM3NeT 2.0». En: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 43.8 (jun. de 2016), pág. 084001. DOI: [10.1088/0954-3899/43/8/084001](https://doi.org/10.1088/0954-3899/43/8/084001).
- [33] M. G. Aartsen et al. «IceCube-Gen2: the window to the extreme Universe». En: *J. Phys. G* 48.6 (2021), pág. 060501. DOI: [10.1088/1361-6471/abbd48](https://doi.org/10.1088/1361-6471/abbd48).
- [34] H. Yukawa. «On the Interaction of Elementary Particles I». En: *Proc. Phys. Math. Soc. Jap.* 17 (1935), págs. 48-57. URL: <https://doi.org/10.1143/PTPS.1.1>.
- [35] G. Occhialini C. Lattes y C. Powell. «Observations on the Tracks of Slow Mesons in Photographic Emulsions». En: *Nature* 160 (1947), págs. 453-456. URL: <https://doi.org/10.1038/160453a0>.
- [36] Enrico Fermi. «Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi beta». En: *Ric. Sci.* 4 (1933), págs. 491-495.
- [37] C. S. Wu et al. «Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay». En: *Phys. Rev.* 105 (1957), págs. 1413-1415. DOI: [10.1103/PhysRev.105.1413](https://doi.org/10.1103/PhysRev.105.1413).
- [38] Michele Maggiore. «A Modern Introduction to Quantum Field Theory». En: Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, 2005. Cap. 8. ISBN: 978-0-19-852074-0.
- [39] F. Halzen y Alan D. Martin. «Quarks and Leptons». En: 1.<sup>a</sup> ed. John Wiley & Sons, 1984. Cap. 6, pág. 123. ISBN: 978-0-471-88741-6.



# Anexos

## A | Desintegración del pion en relatividad especial

Nuestro objetivo a lo largo de este apartado consistirá en calcular de forma rigurosa la anchura de desintegración asociada al proceso  $\pi^\pm \rightarrow \ell^\pm + \nu_\ell$  en un marco relativista sin ningún efecto de nueva física. Comprender en profundidad este desarrollo será un paso fundamental para introducir posteriormente efectos de violación de invariancia Lorentz en la cinemática del proceso, que constituye el fin último de este trabajo. Atacar ese complejo problema sin previo entrenamiento o intuición no sería muy inteligente, por lo que optaremos por tomar el camino aparentemente más largo, que en muchas ocasiones suele ser también el más conveniente y gratificante. Por tanto, se recomienda encarecidamente la lectura de este anexo al lector no familiarizado con este tipo de cálculos en QFT. Ahora sí, sin más dilación, procedamos con el cálculo.

### A.1. Planteamiento del problema

Comencemos por nuestro protagonista, el pion. Los piones son partículas subatómicas mediadoras de la interacción fuerte residual, la interacción que mantiene unidos a los nucleones (protónes y neutrones) en el núcleo atómico. El pion fue teorizado inicialmente por el físico japonés Hideki Yukawa en 1935 [34] en un intento de explicar la fuerza nuclear fuerte entre nucleones mediante el intercambio de un bosón masivo, para el cual estimó una masa de  $m_\pi \simeq 100$  MeV asumiendo que se trataba de una fuerza de corto alcance, del orden de 2 fm. Fue finalmente en 1947 cuando el grupo de Cecil Powell en Bristol [35] descubrió en los rayos cósmicos (CR) una nueva partícula de masa intermedia que cumplía con lo esperado, a la que bautizaron como mesón- $\pi$  (o *pion*) para diferenciarla del previamente descubierto mesón- $\mu$  (o *muon*), también presente en los CR.

Hoy día sabemos que el pion no es una sola partícula, sino tres diferentes:  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  y  $\pi^0$ . Los dos primeros, con carga eléctrica, forman un par partícula-antipartícula, mientras que el pion neutro es su propia antipartícula. Los piones no aparecen en el Modelo Estándar, pues no son partículas elementales, sino sistemas ligados con  $J^P = 0^-$  conformados por un quark y un antiquark. De hecho, es un sistema tan fuertemente ligado que su masa es, aproximadamente, unas 20 veces mayor que la masa de sus constituyentes, Tabla A.1. Esto será muy importante tenerlo en cuenta a la hora de calcular la amplitud de probabilidad del proceso de desintegración, como veremos más adelante, pues no podremos considerar el pion como un estado asintótico de dos quarks libres, un quark *up* y un quark *down*.

	Carga eléctrica ( $e$ )	Masa (MeV)	Composición	Vida media (s)
$\pi^+$	+1	139, 57039(18)	$u \bar{d}$	$2, 6033(5) \cdot 10^{-8}$
$\pi^-$	-1	139, 57039(18)	$d \bar{u}$	$2, 6033(5) \cdot 10^{-8}$
$\pi^0$	0	134, 9768(5)	$u \bar{u} / d \bar{d}$	$8, 43(13) \cdot 10^{-17}$

**Tabla A.1:** Propiedades de los piones ( $J^P = 0^-$ ) y medidas experimentales de ciertas magnitudes de interés. Como podemos apreciar, la masa del  $\pi^\pm$  es de  $\simeq 140$  MeV, mientras que las masas de los quarks  $u$  y  $d$  son 2, 16 MeV y 4, 67 MeV, respectivamente. Fuente: **PDG** (2022) [2].

Si bien existen diferentes canales de desintegración para cada uno, nosotros nos centraremos en la desintegración de un  $\pi^\pm$  en un leptón cargado y su respectivo neutrino/antineutrino:

$$\pi^\pm \rightarrow \ell^\pm + \nu_\ell ,$$

donde  $\ell \equiv e, \mu$ , tal que el número leptónico total y el número leptónico por familia se conserve en el proceso. Cabe destacar que la desintegración al leptón  $\tau$  no será posible, pues este tiene una masa de  $m_\tau \simeq 1777$  MeV, mayor que la del pion. Así, los procesos que nos conciernen serán los siguientes:

$$\begin{array}{ll} \pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e & \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e & \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu . \end{array}$$

Nos bastará con calcular uno de estos procesos, pues el procedimiento para el resto será completamente análogo. Además, trabajar en el marco de la relatividad especial simplificará en gran medida el trabajo, pues podremos calcular la anchura de desintegración del proceso en el sistema centro de masas del pion inicial y, una vez obtenido el resultado, calcular su valor en cualquier otro sistema de referencia mediante una transformación de Lorentz. En un marco de LIV, esto ya no será posible, por lo que cada observador se verá obligado a describir la física del problema únicamente desde su sistema de referencia.

## A.2. Teoría V-A de las interacciones débiles

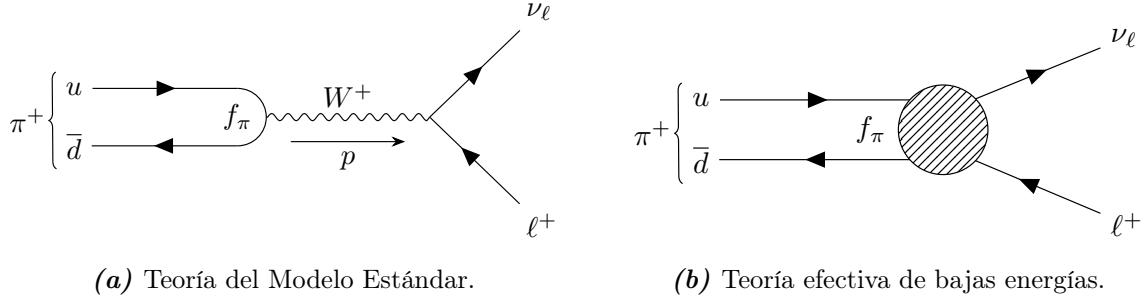
La teoría V-A de las interacciones débiles tiene sus orígenes en la teoría de Fermi de la desintegración beta [36], propuesta por el físico italiano en 1933. En su versión inicial, Fermi sugería que los procesos  $\beta$  en los núcleos atómicos podrían describirse mediante corrientes cargadas, en analogía a la formulación de la entonces aún joven electrodinámica cuántica (QED). Además, propuso una densidad lagrangiana asociada a estas corrientes cargadas inspirándose en la empleada para las corrientes cargadas en QED,  $\mathcal{L} = ej_\mu^{(em)} A^\mu$ , escribiendo<sup>10</sup>:

$$\mathcal{L}_\beta = G j_\mu^{n \rightarrow p} j_{\nu \rightarrow e}^\mu = G(\bar{u}_p \gamma_\mu u_n)(\bar{u}_e \gamma^\mu u_\nu) , \quad (\text{A.1})$$

donde reemplazó la carga eléctrica  $e$  por una nueva constante de acople  $G$ , ahora conocida como la constante de acople de Fermi,  $G_F$ . Es importante destacar que los campos están evaluados en el mismo punto del espacio-tiempo. Es decir, supuso que se trataba de una interacción puntual. Para el avance significativo de la teoría, hubo que esperar a 1956, cuando la brillante física Madame Wu llevó a cabo en Columbia el experimento que probó la violación de la conservación de la paridad en las interacciones débiles [37], estudiando la desintegración  $\beta$  de núcleos de  $^{60}\text{Co}$ . Este descubrimiento fue la clave que llevó a la reformulación de la estructura de las corrientes débiles cargadas, incluyendo un término axial:  $J_V(\gamma^\mu) \rightarrow J_V(\gamma^\mu) - J_A(\gamma^\mu \gamma^5)$ .

---

<sup>10</sup>Para ser más precisos, su resultado original fue una expresión general donde consideraba la corriente total como suma de 5 términos, cada uno construido a partir de una de las cinco *formas bilineales covariantes de Dirac* (de forma que la teoría sea covariante Lorentz). Introdujo así un Hamiltoniano para las interacciones débiles  $H_w = \sum_i \frac{G_i}{2} (\bar{u}_p O_i u_n)(\bar{u}_e O_i u_\nu) + h.c.$ , donde los  $O_i$  son una de las siguientes formas bilineales:  $O_S = 1$ ,  $O_V = \gamma^\mu$ ,  $O_T = \sigma^{\mu\nu}$ ,  $O_A = \gamma^\mu \gamma^5$  y  $O_P = \gamma^5$ . Los subíndices ( $S, V, \dots$ ) denotan el nombre de la forma bilineal (escalar, vector, tensor, vector axial y pseudoscalar, respectivamente) y  $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Fue tras escribir esta expresión general que optó por completar la analogía con QED limitándose al caso de una forma bilineal vectorial, ec. (A.1).



**Figura A.1:** La desintegración del pion puede estudiarse tanto en el SM como en su aproximación a bajas energías. En el SM (a), el bosón  $W$  es el propagador entre los dos vértices de interacción. Cada vértice tiene lugar en un punto distinto del espacio-tiempo, por lo que el par  $\ell^+ \nu_\ell$  se produce en una posición y en un instante de tiempo diferente a la aniquilación del par  $u \bar{d}$ . En la teoría V-A (b), se asume que el efecto del propagador es tan reducido que se puede modelar el proceso como un único vértice de interacción puntual con un acople equivalente a los dos vértices del SM.

Esta combinación, que únicamente requiere de reemplazar  $\gamma^\mu$  por  $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$  en la definición de las corrientes introducida por Fermi, viola automáticamente la conservación de paridad. Así nació la teoría V-A, en honor a la estructura de las corrientes que permitió describir matemáticamente lo que se observaba en los experimentos.

Actualmente, la teoría V-A se concibe como el límite a bajas energías de la teoría electrodébil, incluida en el Modelo Estándar, cuya estructura completa solo se revela a energías comparables con las masas de los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$ , que median la interacción electrodébil junto al fotón. Dado que  $m_W = 80,377(12)$  GeV y  $m_Z = 91,1876(21)$  GeV [2], podremos estudiar la desintegración de los piones en esta aproximación de bajas energías y, a pesar de que a nivel fundamental el proceso está mediado por un bosón  $W$ , el hecho de que la norma del cuadrimomento del pion sea despreciable frente a  $m_W$ , nos permitirá usar una teoría de campos efectiva<sup>11</sup>, la teoría V-A.

Ahora ya estamos perfectamente equipados para introducir el lagrangiano efectivo y proceder con el cálculo del proceso. Si bien es posible deducir la forma del lagrangiano y las corrientes a partir de su formulación en el Modelo Estándar, esto ya ha sido cubierto ampliamente en la literatura, por lo que no entraremos en ello aquí. El lector interesado puede consultar [38]. En el Modelo Estándar, la desintegración del pion viene dada por el proceso ilustrado en la Figura A.1a, donde se incluye el propagador asociado al bosón  $W$ . Como vemos, no se trata de una interacción puntual, pues hay dos vértices de interacción diferentes, cada uno con un acople  $g$ . En el límite a bajas energías, tendremos que  $p^2 \ll m_W^2$  y podremos modelar el proceso como una interacción puntual, sin necesidad de un propagador. Así, el intercambio del bosón masivo  $W$  se reduce a una interacción de cuatro fermiones en el límite de bajas energías, Figura A.1b. Como ya hemos comentado, el acople en la teoría V-A vendrá dado por la constante  $G_F$ , con

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 m_W^2}, \quad (\text{A.2})$$

siendo  $g$  la constante de acople en el SM y  $G_F = 1,1663788(6) \cdot 10^{-5}$  GeV $^{-2}$  [2].

<sup>11</sup>Uno podría pensar que, aunque esta aproximación sea perfectamente válida a bajas energías, su aplicación al problema que nos concierne, el estudio de desviaciones respecto de SR a escalas de energía próximas a la de Planck, carecería de sentido alguno. Esto es un punto importante a destacar y en el que debemos profundizar para asegurarnos que nuestro cálculo tiene sentido en el marco de LIV. La discusión se recoge en la sección 3.1.

El lagrangiano efectivo para procesos mediados por corrientes cargadas, como en nuestro caso, viene dado por

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu , \quad (\text{A.3})$$

donde cada corriente está compuesta por un término hadrónico y otro leptónico  $J^\mu = J_\ell^\mu + J_h^\mu$ , que tienen la forma:

$$J_\ell^\mu = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\ell} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\ell \quad (\text{A.4})$$

y

$$J_h^\mu = \bar{d}' \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u + \bar{s}' \gamma^\mu (1 - \gamma^5) c + \bar{b}' \gamma^\mu (1 - \gamma^5) t . \quad (\text{A.5})$$

La ecuación (A.3) se conoce como el lagrangiano de Fermi. Cabe destacar un aspecto relevante de la corriente hadrónica (A.5). Los campos fermiónicos asociados a los quarks *down*, *strange* y *bottom* que aparecen en ella tienen un apóstrofe (') para indicar que estos campos son *autoestados de la interacción débil* y no de la fuerte. La relación entre ambos viene dada, de forma general, por la matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM), que se representa usualmente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} . \quad (\text{A.6})$$

Esto será importante, pues cuando hablamos de la composición en quarks de los piones, Tabla A.1, nos referimos de forma implícita a los autoestados de la interacción fuerte. Además, también es común usar como parámetro de mezcla el *ángulo de Cabibbo*,  $\theta_C \simeq 13,02^\circ$  [2]. En primera aproximación,  $b' \simeq b$  y la matriz CKM se reduce a:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} . \quad (\text{A.7})$$

### A.3. Amplitud de probabilidad del proceso

Estamos ya en condiciones de calcular la amplitud de probabilidad asociada a la desintegración  $\pi^\pm \rightarrow \ell^\pm + \nu_\ell$ . Como es costumbre al trabajar en problemas donde existen interacciones entre los campos, consideraremos nuestro Hamiltoniano del sistema

$$H = H_0 + H_{int} , \quad (\text{A.8})$$

donde trataremos el segundo término como una perturbación respecto al término libre. Además, de ahora en adelante emplearemos la *imagen de interacción* de la mecánica cuántica, aunque no siempre se manifieste en la notación de forma explícita. En esta imagen, los operadores (y por tanto los campos) evolucionan en el tiempo con el Hamiltoniano libre  $H_0$ , mientras que los estados lo hacen con el término de interacción. De esta forma, un operador arbitrario  $A_S$ , independiente del tiempo en la imagen de Schrödinger, tendrá la siguiente forma en la imagen de interacción:

$$A_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} A_S e^{-iH_0(t-t_0)} . \quad (\text{A.9})$$

Por tanto, nuestro Hamiltoniano total en la imagen de interacción será  $H(t) = H_0 + H_I(t)$ , donde hemos definido el Hamiltoniano de interacción en esta imagen como

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (\text{A.10})$$

Nótese que en la nueva imagen  $H_0$  no presentará dependencia temporal, pues commuta con el operador  $e^{\pm iH_0(t-t_0)}$ . Por otro lado, la evolución de los estados vendrá dada por el operador de evolución  $U(t, t_0)$ , que en la imagen de interacción se define de la siguiente manera:

$$U(t, t_0) = T \left\{ \exp \left( -i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right) \right\}, \quad (\text{A.11})$$

siendo  $T$  el operador de ordenación temporal, que nos permite definir el producto ordenado temporalmente de campos u operadores, como se muestra en la expresión (A.12).

$$T\{\phi(y)\phi(x)\} = \begin{cases} \phi(y)\phi(x) & y^0 > x^0 \\ \phi(x)\phi(y) & y^0 < x^0 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Tomemos ahora nuestro estado inicial del sistema a tiempo  $t_0$ , que denotaremos por  $|i(t_0)\rangle$ . La evolución de este estado hasta un tiempo  $t$  podrá obtenerse mediante la acción del operador evolución sobre el estado:

$$|i(t)\rangle = U(t, t_0) |i(t_0)\rangle, \quad (\text{A.13})$$

donde  $U(t, t_0)$  viene dado por (A.11). Estamos interesados en conocer la probabilidad de que el estado inicial en  $t_0$  evolucione a un estado final concreto, que denotaremos por  $|f\rangle$ . Es decir, queremos calcular la amplitud de transición entre los estados  $|i(t_0)\rangle$  y  $|f\rangle$ , que en mecánica cuántica no es otra cosa que

$$\langle f | i(t) \rangle = \langle f | U(t, t_0) | i(t_0) \rangle, \quad (\text{A.14})$$

la acción del dual de  $|f\rangle$  sobre el estado tras la evolución. En nuestro caso, debemos matizar un aspecto importante sobre estos estados. Siempre que estudiemos un proceso como el de la Figura A.1b, consideraremos los estados inicial y final como estados asintóticamente libres. En otras palabras, supondremos que en el límite  $t_0 \rightarrow -\infty$ , el estado inicial  $|i(t_0)\rangle$  es un autoestado del Hamiltoniano con energía y momento definidos,  $p = (p^0, \mathbf{p})$ . Análogamente, denotaremos como  $|f\rangle \equiv |f(t)\rangle$  a un estado asintótico en el límite  $t \rightarrow +\infty$ . Físicamente, lo que estamos diciendo es que para  $t \rightarrow \pm\infty$ , las partículas están tan alejadas que no existe interacción, por lo que evolucionan como estados libres con una energía y un momento bien definidos<sup>12</sup>.

Tomando el límite  $t \rightarrow +\infty$  y  $t_0 \rightarrow -\infty$  y denotando los estados asintóticos como  $|i\rangle \equiv |i(t_0)\rangle$  y  $|f\rangle \equiv |f(t)\rangle$ , tendremos que la *amplitud de probabilidad* de la desintegración será

$$\mathcal{A}_{\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell} = \langle f | U(+\infty, -\infty) | i \rangle = \langle f | S | i \rangle, \quad (\text{A.15})$$

donde  $|i\rangle = |\pi^+(p)\rangle$  y  $|f\rangle = |\ell^+(q), \nu_\ell(k)\rangle$ . Se define así la matriz  $S = U(+\infty, -\infty)$ , también conocida como “matriz de scattering”. Existe todo un formalismo construido a partir de esta matriz para facilitar los cálculos de secciones eficaces de scattering y anchuras de desintegración, que desemboca en la conocida fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ).

<sup>12</sup>Por supuesto, en caso de que tratemos con un estado multipartícula, como nuestro estado final, cada una por separado deberá cumplir estos requisitos: ser un estado de energía y momento definidos. Además de estos, como veremos más adelante, deberán ser también autoestados de la helicidad. Es decir, tendrán un espín definido.

Esta fórmula simplifica en gran medida el cálculo de los elementos de matriz del operador  $i\mathcal{T}$  (relacionado con la matriz  $S$  mediante  $S = \mathbb{1} + i\mathcal{T}$ ). Sin embargo, en nuestro caso particular no podremos aplicar este formalismo, pues los campos que aparecen en el lagrangiano de interacción (A.3) no describen todas las partículas que vemos en los estados inicial y final. Concretamente, el pion, el estado inicial de nuestro sistema. Por tanto, no tenemos otra opción que continuar con la derivación general del resultado.

Tal y como habíamos definido en (A.11), la expresión analítica de la matriz  $S \equiv U(+\infty, -\infty)$  será

$$U(+\infty, -\infty) = T \left\{ \exp \left( -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I(t') \right) \right\}, \quad (\text{A.16})$$

que podremos expandir en serie de Taylor como:

$$U(+\infty, -\infty) = T \left\{ \mathbb{1} - i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I(t') + \frac{(-i)^2}{2!} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I(t') \right)^2 + \dots \right\}. \quad (\text{A.17})$$

La posibilidad de realizar la expansión en serie de la exponencial abre la puerta a fragmentar el problema inicial en muchos otros de menor dificultad: el cálculo de los sucesivos términos del desarrollo. Esta idea constituye la esencia de la teoría de perturbaciones. A *primer orden de aproximación*, tendremos que

$$U(+\infty, -\infty) \simeq \mathbb{1} - i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' T\{H_I(t')\} = \mathbb{1} - i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I(t'), \quad (\text{A.18})$$

donde hemos usado que  $T\{H_I(t)\} = H_I(t)$ , pues todos los campos en el Hamiltoniano están evaluados en el mismo instante de tiempo. Además, fijémonos que podremos escribir el Hamiltoniano como la integral a todo el volumen de la densidad Hamiltoniana, tal que:

$$U(+\infty, -\infty) \simeq \mathbb{1} - i \int d^4x \mathcal{H}_I(x). \quad (\text{A.19})$$

Introduciendo esto en la expresión (A.15) para la amplitud de probabilidad, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell} &= \langle f | U(+\infty, -\infty) | i \rangle \simeq \langle f | \mathbb{1} - i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) | i \rangle \\ &= \underbrace{\langle f | i \rangle}_{=0} - i \int d^4x \langle f | \mathcal{H}_I(x) | i \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

donde vemos que el término de orden cero se anula, pues los estados inicial y final son ortogonales. Además, usando que  $\hat{P}^\mu$  es el operador de traslación espaciotemporal, podremos escribir la densidad Hamiltoniana como

$$\mathcal{H}_I(x) = e^{i\hat{P}x} \mathcal{H}_I(0) e^{-i\hat{P}x}. \quad (\text{A.21})$$

Insertando esto en la expresión (A.20), podremos desarrollar el resultado, obteniendo finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell} &\simeq -i \int d^4x \langle f | e^{i\hat{P}x} \mathcal{H}_I(0) e^{-i\hat{P}x} | i \rangle = -i \int d^4x e^{i(P_f - P_i)x} \langle f | \mathcal{H}_I(0) | i \rangle \\ &= -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \langle f | \mathcal{H}_I(0) | i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

De forma natural, aparece aquí la conservación de la energía y el momento (codificado en la conservación del cuadrimomento total del sistema) como consecuencia general de la invariancia del problema bajo traslaciones en el tiempo y el espacio. El factor  $(2\pi)^4$  proviene de la definición de la delta de Dirac en cuatro dimensiones,  $\delta^{(4)}(P) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{iPx}$ , donde  $P \equiv P^\mu$  y  $Px \equiv P_\mu x^\mu$ .

Por otro lado,  $P_i$  y  $P_f$  representan los cuadrimomentos del sistema en el estado inicial y final, respectivamente, que como ya hemos comentado anteriormente están bien definidos. Estos provienen de la acción de los operadores de traslación  $e^{\pm i\hat{P}_x}$  sobre los estados inicial y final. La misma manipulación puede llevarse a cabo para potencias arbitrarias de  $\mathcal{H}_I(x)$ , pudiendo extraer la delta de Dirac de la misma manera a todos los órdenes en teoría de perturbaciones [38].

A continuación, redefiniremos<sup>13</sup> el resultado obtenido en (A.22), denotando:

$$\mathcal{A}_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi}, \quad (\text{A.23})$$

De ahora en adelante, trabajaremos únicamente con la matriz  $\mathcal{M}$ , dejando a un lado el factor  $i(2\pi)^4$  y la delta de Dirac, que simplemente impone la conservación del cuadrimomento del sistema. Es decir, estaremos interesados en calcular el elemento  $\mathcal{M}_{fi}$ , dado por

$$\mathcal{M}_{\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell} = -\langle \ell^+(q), \nu_\ell(k) | \mathcal{H}_I(0) | \pi^+(p) \rangle, \quad (\text{A.24})$$

el elemento de matriz de la densidad Hamiltoniana evaluada en  $x = 0$ . Esto es una consecuencia de la invariancia bajo traslaciones espaciotemporales del problema, que nos permitirá situarnos en el origen de nuestro sistema de referencia sin pérdida de generalidad. Recordando que la densidad Hamiltoniana asociada a un lagrangiano viene dada por  $\mathcal{H}(x) = \sum_i \Pi_i(x) \partial_0 \phi_i(x) - \mathcal{L}(x)$ , con  $\Pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i(x))}$ , y que en el lagrangiano de interacción de la teoría V-A (A.3) no aparecen derivadas, tendremos que  $\Pi_i(x) = 0 \ \forall i$ , luego  $\mathcal{H}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x)$ . Así, podemos escribir

$$\mathcal{M}_{\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle \ell^+(q), \nu_\ell(k) | J_\mu^\dagger J^\mu(0) | \pi^+(p) \rangle. \quad (\text{A.25})$$

#### INCISO. Dependencia funcional de los operadores en la imagen de interacción.

Cabe destacar que la dependencia funcional de  $\mathcal{H}_I(t)$  con los campos será la misma que la de  $\mathcal{H}_{int}$ , con la diferencia de que los campos que aparecen en  $\mathcal{H}_I(t)$  serán las soluciones libres de la ecuación de Dirac. Algo que no debería sorprendernos, pues la unitariedad de los operadores  $\exp(-iH_0 t)$  nos permite hacer esto (recordemos que en esta imagen los operadores evolucionan con el Hamiltoniano libre). Tomemos como ejemplo sencillo la densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H}_{int} = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$ . En la imagen de interacción:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I(t) &= e^{iH_0 t} \frac{\lambda}{4!} \phi^4 e^{-iH_0 t} = \frac{\lambda}{4!} e^{iH_0 t} \phi \mathbb{1} \phi \mathbb{1} \phi \mathbb{1} \phi e^{-iH_0 t} \\ &= \frac{\lambda}{4!} \underbrace{e^{iH_0 t} \phi}_{\phi_I(t)} \underbrace{e^{-iH_0 t}}_{\phi_I(t)} \underbrace{e^{iH_0 t} \phi}_{\phi_I(t)} \underbrace{e^{-iH_0 t}}_{\phi_I(t)} \underbrace{e^{iH_0 t} \phi}_{\phi_I(t)} \underbrace{e^{-iH_0 t}}_{\phi_I(t)} \\ &= \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(t), \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

y en el caso de que  $\phi$  sea un campo escalar real, por ejemplo, la forma de  $\phi_I(t)$  será la solución más general de la ecuación de Klein-Gordon libre, véase:

$$\phi_I(x) = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_\mathbf{p}}} (a_\mathbf{p} e^{-ipx} + a_\mathbf{p}^\dagger e^{ipx}). \quad (\text{A.27})$$

<sup>13</sup>La notación empleada hasta ahora, denotando la amplitud del proceso mediante  $\mathcal{A}_{fi}$ , se ha introducido meramente para una mayor claridad en la exposición del desarrollo. El convenio usado para definir la matriz  $\mathcal{M}$  es, sin embargo, estándar y es extensamente empleado en la literatura. En muchas ocasiones se suele definir directamente  $\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu$  y sus elementos dan las diferentes amplitudes de los procesos  $i \rightarrow f$ .

El elemento de matriz (A.25) es el término en el que realmente estaremos interesados, y el que aparecerá en la expresión de la anchura de desintegración diferencial, que calcularemos en la siguiente sección. Consideremos entonces el proceso ilustrado en la Figura A.2, donde un  $\pi^+$  con cuadrimomento  $p$  y espín nulo (recordemos que  $J^P(\pi) = 0^-$ ) se desintegra en un antileptón cargado  $\ell^+$  con cuadrimomento  $q$  y espín  $s'$ , y en un neutrino  $\nu_\ell$  con cuadrimomento  $k$  y espín  $s''$ . Hasta ahora no ha sido necesario especificar los espines de las partículas finales, pero será importante de ahora en adelante para realizar el cálculo. Por lo general, los experimentos que buscan medir la anchura de desintegración de estos procesos son ciegos frente a los espines de las partículas en el estado final, por lo que una vez obtenido el resultado tendremos que sumar las contribuciones de todas las configuraciones de espín de las partículas finales.

Denotaremos entonces nuestros estados de forma más precisa como

$$|i\rangle = |\pi^+(p)\rangle \quad \text{y} \quad |f\rangle = |\ell^+(q, s')\rangle, \nu_\ell(k, s'')\rangle, \quad (\text{A.28})$$

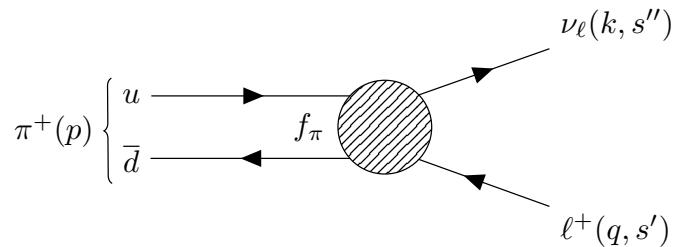
y procederemos con el cálculo de  $\mathcal{M}_{fi} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle f | J_\mu^\dagger J^\mu(0) | i \rangle$ . Desarrollando las corrientes:

$$\begin{aligned} J_\mu^\dagger J^\mu &= (J_{\mu, h} + J_{\mu, \ell})^\dagger (J_\mu^\mu + J_\ell^\mu) = (J_{\mu, h}^\dagger + J_{\mu, \ell}^\dagger) (J_h^\mu + J_\ell^\mu) \\ &= J_{\mu, h}^\dagger J_h^\mu + J_{\mu, h}^\dagger J_\ell^\mu + J_{\mu, \ell}^\dagger J_h^\mu + J_{\mu, \ell}^\dagger J_\ell^\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

donde obtenemos un término puramente hadrónico, un término puramente leptónico y dos términos mixtos. Es directo ver que los términos puros no contribuirán a la amplitud. Todo estado general puede descomponerse en su parte hadrónica y su parte leptónica, tal que  $|\psi\rangle = |\psi\rangle_h \otimes |\psi\rangle_\ell$ . Así, una corriente puramente hadrónica, por ejemplo, solo actuará sobre el espacio asociado a los estados  $|\psi\rangle_h$ , de forma que, en un caso como el nuestro donde  $|i\rangle = |i\rangle_h$  y  $|f\rangle = |f\rangle_\ell$ :

$$\langle f | J_{\mu, h}^\dagger J_h^\mu | i \rangle = \left( \langle f | \ell \otimes \langle f | h \right) J_{\mu, h}^\dagger J_h^\mu \left( |i\rangle_h \otimes |i\rangle_\ell \right) = \underbrace{\langle f | 0 \rangle_\ell}_{=0} \otimes \langle 0 | J_{\mu, h}^\dagger J_h^\mu | i \rangle_h = 0, \quad (\text{A.30})$$

y de la misma manera para el término leptónico puro. Por otro lado, de los términos mixtos únicamente uno de ellos contribuirá, concretamente el  $J_{\mu, \ell}^\dagger J_\ell^\mu$ , que “sube la carga” sobre el estado leptónico inicial (el vacío) y “baja la carga” sobre el estado hadrónico inicial (el pion  $\pi^+$ ).



**Figura A.2:** Diagrama de primer orden asociado a la desintegración del pion  $\pi^+$  en la aproximación de bajas energías. El pion inicial tiene cuadrimomento  $p$  y espín  $s = 0$ , mientras que en el estado final los cuadrimomentos y espines del leptón cargado y el neutrino son  $(q, s')$  y  $(k, s'')$ , respectivamente. En el proceso deberán conservarse tanto el cuadrimomento como el momento angular del sistema.

Así, la única contribución<sup>14</sup> a la corriente nos permitirá escribir (A.25) como:

$$\mathcal{M}_{fi} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle f | J_{\mu, \ell}^\dagger J_h^\mu(0) | i \rangle . \quad (\text{A.31})$$

Recordando las expresiones para las corrientes (A.4) y (A.5), y procediendo de forma análoga a los cálculos anteriores, podemos deducir fácilmente que los términos de cada corriente que contribuyen a la amplitud serán solo los de los campos asociados a partículas del estado inicial o final, véase:

$$\begin{aligned} J_{\mu, \ell}^\dagger(0) &\equiv [\bar{\nu}_\ell \gamma_\mu(1 - \gamma^5)\ell](0) \\ J_h^\mu(0) &\equiv [\bar{d}' \gamma^\mu(1 - \gamma^5)u](0) , \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

luego el elemento de matriz (A.31) vendrá dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle f | [\bar{\nu}_\ell \gamma_\mu(1 - \gamma^5)\ell](0) [\bar{d}' \gamma^\mu(1 - \gamma^5)u](0) | i \rangle \\ &= -\frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \langle f | [\bar{\nu}_\ell \gamma_\mu(1 - \gamma^5)\ell](0) [\bar{d} \gamma^\mu(1 - \gamma^5)u](0) | i \rangle , \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

donde hemos introducido el ángulo de Cabibbo tal que  $\bar{d}' = \bar{d} \cos \theta_C + \bar{s} \sin \theta_C$ , pues recordemos que en el estado inicial del pion tenemos  $\bar{d}$  y no  $\bar{d}'$ . Escribiendo ahora los estados inicial y final de forma explícita y separando el elemento de matriz en su parte leptónica y su parte hadrónica, llegamos finalmente a:

$$\mathcal{M}_{fi} = -\frac{G_F \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \langle \ell^+(q, s'), \nu_\ell(k, s'') | [\bar{\nu}_\ell \gamma_\mu(1 - \gamma^5)\ell](0) | 0 \rangle \langle 0 | [\bar{d} \gamma^\mu(1 - \gamma^5)u](0) | \pi^+(p) \rangle . \quad (\text{A.34})$$

Calcularemos por separado el elemento de matriz leptónico y el hadrónico.

### A.3.1. Elemento de matriz leptónico

A continuación, calcularemos únicamente la parte leptónica del elemento  $\mathcal{M}_{fi}$  (A.34), que tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_{fi}^{(L)} = \langle \ell^+(q, s'), \nu_\ell(k, s'') | [\bar{\nu}_\ell \gamma_\mu(1 - \gamma^5)\ell](0) | 0 \rangle . \quad (\text{A.35})$$

El estado final podrá escribirse a partir de operadores creación actuando sobre el “vacío” del espacio de Fock asociado a cada campo. En nuestro caso, podremos escribirlo como

$$| \ell^+(q, s'), \nu_\ell(k, s'') \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{q}, s'}^\dagger(\ell) a_{\mathbf{k}, s''}^\dagger(\nu_\ell) | 0 \rangle , \quad (\text{A.36})$$

donde  $a^\dagger$  y  $b^\dagger$  son los operadores de creación de partícula y antipartícula, respectivamente (cada uno asociado a un campo de Dirac, que denotamos entre paréntesis). Las raíces provienen de la normalización de los estados en el dominio relativista. Entonces, calcularemos su dual:

$$\begin{aligned} \langle \ell^+(q, s'), \nu_\ell(k, s'') | &= \left( | \ell^+(q, s'), \nu_\ell(k, s'') \rangle \right)^\dagger = \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \left( b_{\mathbf{q}, s'}^\dagger(\ell) a_{\mathbf{k}, s''}^\dagger(\nu_\ell) | 0 \rangle \right)^\dagger \\ &= \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \langle 0 | a_{\mathbf{k}, s''}(\nu_\ell) b_{\mathbf{q}, s'}(\ell) . \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

<sup>14</sup>Según la desintegración que consideremos, el término mixto que contribuirá a la corriente será uno u otro. Para el proceso a un leptón y un antineutrino,  $\pi^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell$ , el término relevante será  $J_{\mu, h}^\dagger J_\ell^\mu$ , mientras que para la desintegración a un antileptón y un neutrino,  $\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell$ , será  $J_{\mu, \ell}^\dagger J_h^\mu$ .

Introduciendo lo anterior en la expresión (A.35), llegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{(L)} &= \langle \ell^+(q, s') , \nu_\ell(k, s'') | [\bar{\nu}_\ell \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \ell](0) | 0 \rangle \\ &= \underbrace{\langle 0 | \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}, s''} (\nu_\ell) \bar{\nu}_\ell(0) | 0 \rangle}_{S_\nu} \underbrace{\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \langle 0 | \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} b_{\mathbf{q}, s'} (\ell) \ell(0) | 0 \rangle}_{S_\ell}, \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

donde hemos separado los términos asociados al campo del neutrino y del lepton cargado, que denotaremos por  $S_\nu$  y  $S_\ell$ , respectivamente. Esta notación se ha introducido únicamente para una mayor claridad en la exposición, pues a continuación calcularemos cada uno de ellos por separado. Recordemos que, al trabajar en la imagen de interacción, los campos que aparecen en la expresión (A.38) serán los campos de Dirac libres asociados al neutrino y al lepton cargado, evaluados en  $x = 0$ . Por tanto, el cálculo de  $S_\nu$  y  $S_\ell$  se simplificará en gran medida, como veremos a continuación. Comencemos por  $S_\nu$ :

$$\begin{aligned} S_\nu &= \langle 0 | \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}, s''} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left( b_{\mathbf{p}, s} \bar{v}^s(p) + a_{\mathbf{p}, s}^\dagger \bar{u}^s(p) \right) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \underbrace{\left( \langle 0 | a_{\mathbf{k}, s''} b_{\mathbf{p}, s} | 0 \rangle \bar{v}^s(p) + \langle 0 | a_{\mathbf{k}, s''} a_{\mathbf{p}, s}^\dagger | 0 \rangle \bar{u}^s(p) \right)}_{=0} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \langle 0 | a_{\mathbf{k}, s''} a_{\mathbf{p}, s}^\dagger | 0 \rangle \bar{u}^s(p) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \bar{u}^s(p) \left( \langle 0 | \{a_{\mathbf{k}, s''}, a_{\mathbf{p}, s}^\dagger\} | 0 \rangle - \underbrace{\langle 0 | a_{\mathbf{p}, s}^\dagger a_{\mathbf{k}, s''} | 0 \rangle}_{=0} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \bar{u}^s(p) \langle 0 | \{a_{\mathbf{k}, s''}, a_{\mathbf{p}, s}^\dagger\} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Usando ahora que el anticomutador asociado a los operadores creación y destrucción de partículas (y antipartículas) para el campo de Dirac viene dado por

$$\{a_{\mathbf{p}, r}, a_{\mathbf{q}, s}^\dagger\} = \{b_{\mathbf{p}, r}, b_{\mathbf{q}, s}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{rs}, \quad (\text{A.40})$$

podremos desarrollar (A.39) y aplicar las propiedades usuales de la delta de Kronecker en el sumatorio y la delta de Dirac en la integral:

$$\begin{aligned} S_\nu &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \bar{u}^s(p) \langle 0 | (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta_{s'' s} | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \bar{u}^s(p) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta_{s'' s} \underbrace{\langle 0 | 0 \rangle}_1 \\ &= \int d^3 p \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \bar{u}^{s''}(p) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \bar{u}^{s''}(k) \\ &= \bar{u}^{s''}(k). \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Obteniendo finalmente que el término  $S_\nu$  no es más que el adjunto de Dirac del espinor  $u^{s''}(k)$  para el neutrino, con cuadrimomento  $k$  y espín  $s''$ . Ahora, calcularemos de forma análoga el término  $S_\ell$ .

Así, tenemos:

$$\begin{aligned}
S_\ell &= \langle 0 | \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} b_{\mathbf{q}, s'} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left( a_{\mathbf{p}, s} u^s(p) + b_{\mathbf{p}, s}^\dagger v^s(p) \right) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left( \underbrace{\langle 0 | b_{\mathbf{q}, s'} a_{\mathbf{p}, s} | 0 \rangle}_{=0} u^s(p) + \langle 0 | b_{\mathbf{q}, s'} b_{\mathbf{p}, s}^\dagger | 0 \rangle v^s(p) \right) \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \langle 0 | b_{\mathbf{q}, s'} b_{\mathbf{p}, s}^\dagger | 0 \rangle v^s(p) \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} v^s(p) \left( \langle 0 | \{ b_{\mathbf{q}, s'}, b_{\mathbf{p}, s}^\dagger \} | 0 \rangle - \underbrace{\langle 0 | b_{\mathbf{p}, s}^\dagger b_{\mathbf{q}, s'} | 0 \rangle}_{=0} \right) \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} v^s(p) \langle 0 | \{ b_{\mathbf{q}, s'}, b_{\mathbf{p}, s}^\dagger \} | 0 \rangle ,
\end{aligned} \tag{A.42}$$

que, usando de nuevo la relación (A.40) para el anticommutador, resulta en:

$$\begin{aligned}
S_\ell &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} v^s(p) \langle 0 | (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \delta_{s' s} | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} v^s(p) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \delta_{s' s} \underbrace{\langle 0 | 0 \rangle}_{=1} \\
&= \int d^3 p \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} v^{s'}(p) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} v^{s'}(q) \\
&= v^{s'}(q) ,
\end{aligned} \tag{A.43}$$

donde obtenemos el espinor  $v$  asociado al campo de Dirac del antileptón  $\ell^+$  con cuadrimomento  $q$  y espín  $s'$ . Reuniendo los términos  $S_\nu$  y  $S_\ell$ , podremos reescribir finalmente el elemento de matriz leptónico (A.35) como

$$\mathcal{M}_{fi}^{(L)} = \bar{u}_\nu^{s''}(k) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_\ell^{s'}(q) . \tag{A.44}$$

### A.3.2. Elemento de matriz hadrónico

Una vez obtenida la contribución de la corriente leptónica a  $\mathcal{M}_{fi}$ , calcularemos la contribución de la corriente hadrónica asociada a los quarks entre el estado inicial del pion y el vacío. El elemento de matriz hadrónico vendrá dado por

$$\mathcal{M}_{fi}^{(H)} = \langle 0 | [\bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u] (0) | \pi^+(p) \rangle . \tag{A.45}$$

A diferencia de como hemos hecho con el término leptónico  $\mathcal{M}_{fi}^{(L)}$ , ahora no podremos descomponer el estado del pion como operadores de creación de un quark *up* y un antiquark *down* actuando sobre el vacío, pues los quarks que lo conforman no son partículas libres. En un estado ligado sencillo, como el átomo de hidrógeno, por ejemplo, la masa del sistema se obtiene sumando las masas de sus constituyentes (el protón y el electrón) y restando una cierta cantidad, que denominamos energía de ligadura del sistema. En este ejemplo, la energía de ligadura del estado fundamental es de  $E_I \simeq 13,6$  eV, completamente despreciable frente a la masa del electrón,  $m_e \simeq 511$  keV [2], y, por lo tanto, frente a la masa de los constituyentes del sistema libre,  $m_e + m_p$ . Esto es lo que uno esperaría encontrar en un sistema en que la interacción puede tratarse de forma perturbativa. Sin embargo, esto no ocurre en QCD.

Los constituyentes del pion ( $\pi^+$ ), los quarks  $u$  y  $\bar{d}$ , poseen unas masas de  $m_u \simeq 2,16$  MeV y  $m_d \simeq 4,67$  MeV, respectivamente [2]. Al medir experimentalmente la masa del sistema ligado  $\pi^+$ , se obtiene un valor de  $m_{\pi^+} \simeq 140$  MeV, ver Tabla A.1. Esto significa que la contribución de las masas de los quarks es prácticamente despreciable frente a la masa del sistema ligado. Casi la totalidad de la masa del pion proviene de la energía del campo del gluon creado por los quarks  $u$  y  $\bar{d}$ , así como por otros efectos más complicados propios de QCD, que quedan fuera de nuestro alcance en este trabajo. Todos estos constituyen efectos no perturbativos, que no seremos capaces de cuantificar con las herramientas usuales.

Para solventar este problema, se introduce la constante de desintegración del pion,  $f_\pi$ . Dado que el pion es un pseudoscalar (su paridad intríseca es  $P_\pi = -1$ ), puede mostrarse que el elemento de matriz  $\langle 0 | \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u | \pi^+ \rangle$  es un cuadrivector Lorentz [38]. Por tanto, teniendo en cuenta que el estado inicial del pion tiene espín nulo, la única magnitud con la que podemos describir el sistema (y por tanto la dependencia de  $\mathcal{M}_{fi}^{(H)}$ ), será su cuadrimomento,  $p \equiv p^\mu$ , recordemos la Figura A.2. Así, podremos parametrizar la expresión (A.45) como

$$\mathcal{M}_{fi}^{(H)} = \langle 0 | [\bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u] (0) | \pi^+(p) \rangle = -f_\pi p^\mu, \quad (\text{A.46})$$

donde se incluye  $f_\pi$  como una constante de proporcionalidad. Esta solución al problema será muy ventajosa, pues midiendo su valor de forma experimental podremos emplearla para realizar cálculos de este tipo. Existen diferentes convenios para la definición de  $f_\pi$ , que pueden diferir en un factor 2 o  $\sqrt{2}$  del aquí empleado. Nosotros seguiremos el convenio usado por Maggiore [38]. En él, esta constante tiene un valor de  $f_\pi = 130,56(2)(4)(13)$  MeV [2].

### A.3.3. Elemento de matriz total y suma sobre los espines

Reuniendo las expresiones (A.44) y (A.46) podremos expresar finalmente el elemento de matriz (A.34) del proceso como:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G_F f_\pi \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \bar{u}_\nu^{s''}(k) \gamma_\mu p^\mu (1 - \gamma^5) v_\ell^{s'}(q). \quad (\text{A.47})$$

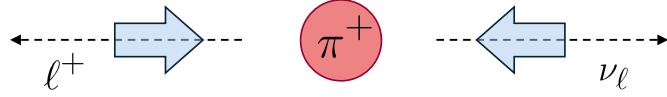
Introduciendo la notación “slash” de Feynman,  $\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$ , y usando la conservación del cuadrimomento  $p = k + q$ , podremos reescribir el término anterior en función de magnitudes asociadas a las partículas finales. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \frac{G_F f_\pi \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \left( \bar{u}_\nu^{s''}(k) \not{k} (1 - \gamma^5) v_\ell^{s'}(q) + \bar{u}_\nu^{s''}(k) \not{q} (1 - \gamma^5) v_\ell^{s'}(q) \right) \\ &= \frac{G_F f_\pi \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \left( \bar{u}_\nu^{s''}(k) \not{k} (1 - \gamma^5) v_\ell^{s'}(q) + \bar{u}_\nu^{s''}(k) (1 + \gamma^5) \not{q} v_\ell^{s'}(q) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

y al expresar el resultado de esta forma podremos usar que los espines  $\bar{u}_\nu(k)$  y  $v_\ell(q)$  cumplen cada uno su respectiva ecuación de Dirac:  $\bar{u}_\nu(k)(\not{k} - m_\nu) \simeq \bar{u}_\nu(k) \not{k} = 0$  para el neutrino (bajo la aproximación  $m_\nu \simeq 0$ ) y  $(\not{q} + m_\ell) v_\ell(q) = 0$  para el leptón cargado. Así, el primer sumando de la ec. (A.48) se anulará y el elemento de matriz quedará:

$$\mathcal{M}_{fi} = -\frac{G_F f_\pi m_\ell \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \bar{u}_\nu^{s''}(k) (1 + \gamma^5) v_\ell^{s'}(q). \quad (\text{A.49})$$

Este es el resultado que buscábamos calcular. Sin embargo, la anchura de desintegración no dependerá de  $\mathcal{M}_{fi}$ , sino de su módulo al cuadrado,  $|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \mathcal{M}_{fi} \mathcal{M}_{fi}^*$ .



**Figura A.3:** Esquema de la desintegración  $\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell$ . Los momentos de las partículas finales se muestran en negro (flecha de puntos), mientras que los espines se representan en azul. Este es el único estado de polarización de espín posible para la desintegración y, por tanto, el único término que contribuirá en la suma (A.50).

Además, como puede apreciarse en la expresión (A.49), el elemento de matriz  $\mathcal{M}_{fi}$  depende de los espines de las partículas finales a través de las helicidades  $s'$  y  $s''$  del lepton cargado y el neutrino, respectivamente. Dado que nosotros estaremos interesados en la anchura de desintegración no polarizada, pues es lo que medirán por lo general nuestros detectores, definiremos de la forma usual:

$$|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 = \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \sum_{s'} \sum_{s''} \mathcal{M}_{fi} \mathcal{M}_{fi}^* . \quad (\text{A.50})$$

Esta suma a todas las combinaciones posibles de espines de las partículas involucradas en la interacción es una práctica usual en este tipo de cálculos. Sin embargo, en el caso particular que nos concierne, Figura A.2, podemos realizar un rápido análisis del proceso para comprobar que únicamente existe una posibilidad asociada al estado final. En el límite sin masa,  $m_\nu \simeq 0$ , un campo levógiro (y por tanto de quiralidad definida) describe a una partícula con helicidad  $h = -1/2$  y a su antipartícula con helicidad  $h = +1/2$ . Por tanto, el neutrino  $\nu_\ell$  en el estado final de la desintegración del  $\pi^+$  será levógiro, con  $h_\nu = -1/2$ . Ahora, si analizamos el problema desde el sistema centro de masas, el momento lineal total del sistema será nulo, lo que implicará que el momento del lepton cargado  $\ell^+$  deberá ser de igual módulo y sentido contrario al del neutrino. Dado que el espín del pión es cero, la conservación del momento angular impondrá entonces que la helicidad del lepton cargado sea también negativa,  $h_\ell = -1/2$ , ver Figura A.3.

A pesar de que la única contribución a la suma provenga de la configuración de espines con helicidades negativas para el neutrino y el lepton cargado, seguirá siendo conveniente realizar la suma sobre todas las configuraciones aplicando las *relaciones de completitud*:

$$\sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m \quad \text{y} \quad \sum_{s=1,2} v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m , \quad (\text{A.51})$$

pues estas reglas son completamente generales y, como veremos a continuación, nos serán de gran utilidad. Así, comencemos calculando

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^* &= -\frac{G_F f_\pi m_\ell \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \left( \bar{u}_\nu^{s''}(k) (1 + \gamma^5) v_\ell^{s'}(q) \right)^\dagger \\ &= -\frac{G_F f_\pi m_\ell \cos \theta_C}{\sqrt{2}} \bar{v}_\ell^{s'}(q) (1 - \gamma^5) u_\nu^{s''}(k) , \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

donde hemos usado que  $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$  y la relación  $\gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5$ . Denotando por cte. al prefactor constante que aparece en la expresión del elemento de matriz (A.49) y su conjugado (A.52), procederemos con el cálculo de  $|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2$ :

$$|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 = \sum_{s'} \sum_{s''} \mathcal{M}_{fi} \mathcal{M}_{fi}^* = \text{cte.}^2 \sum_{s'} \sum_{s''} \bar{u}_\nu^{s''}(k) (1 + \gamma^5) v_\ell^{s'}(q) \bar{v}_\ell^{s'}(q) (1 - \gamma^5) u_\nu^{s''}(k) . \quad (\text{A.53})$$

De forma práctica, la expresión anterior no es más que un producto de matrices y vectores fila y columna, cuyo resultado es un escalar. Un truco muy útil y que simplificará enormemente este cálculo consistirá en escribir de forma explícita el producto matricial, empleando los índices pertinentes para denotar los elementos de cada matriz y las componentes de cada vector. De esta forma, podremos expresar (A.54) como

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \text{cte.}^2 \sum_{s'} \sum_{s''} (\bar{u}_\nu^{s''}(k))_\alpha (1 + \gamma^5)_{\alpha\beta} (v_\ell^{s'}(q))_\beta (\bar{v}_\ell^{s'}(q))_\delta (1 - \gamma^5)_{\delta\lambda} (u_\nu^{s''}(k))_\lambda, \quad (\text{A.54})$$

donde los índices repetidos se suman entre sí. Ahora, podremos reorganizar el producto como más nos convenga, pues los elementos comutan entre sí (estamos tratando con escalares). Así, escribiremos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \text{cte.}^2 \underbrace{\sum_{s''} (u_\nu^{s''}(k))_\lambda (\bar{u}_\nu^{s''}(k))_\alpha}_{=(\not{k})_{\lambda\alpha}} (1 + \gamma^5)_{\alpha\beta} \underbrace{\sum_{s'} (v_\ell^{s'}(q))_\beta (\bar{v}_\ell^{s'}(q))_\delta}_{=(\not{q} - m_\ell)_{\beta\delta}} (1 - \gamma^5)_{\delta\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

donde hemos introducido las relaciones de completitud (A.51). Analizando los índices de (A.55) vemos que el cálculo anterior no será otra cosa que la traza de una matriz, dada por

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \text{cte.}^2 (\not{k})_{\lambda\alpha} (1 + \gamma^5)_{\alpha\beta} (\not{q} - m_\ell)_{\beta\delta} (1 - \gamma^5)_{\delta\lambda} \\ &= \text{cte.}^2 \text{Tr}(\not{k} (1 + \gamma^5) (\not{q} - m_\ell) (1 - \gamma^5)). \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Usando la linealidad de la traza y las relaciones  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ , podremos desarrollar la expresión anterior:

$$\text{Tr}(\not{k} (1 + \gamma^5) (\not{q} - m_\ell) (1 - \gamma^5)) = 2 \text{Tr}(\not{k} \not{q}) - 2 \text{Tr}(\gamma^5 \not{k} \not{q}), \quad (\text{A.57})$$

pudiendo emplear ahora dos propiedades bien conocidas de la traza [39]:  $\text{Tr}(\not{k} \not{q}) = 4k_\mu q^\mu$  y  $\text{Tr}(\gamma^5 \not{k} \not{q}) = 0$ , obteniendo finalmente:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2 4k_\mu q^\mu. \quad (\text{A.58})$$

Este es el resultado general que necesitaremos a la hora de calcular la anchura de desintegración total del proceso en un sistema de referencia dado. Ahora bien, como es costumbre hacer cuando se trata el problema de la desintegración de una partícula en relatividad especial, nos situaremos en el sistema centro de masas para simplificar el cálculo a realizar. Esto se verá reflejado también en el resultado (A.58). Por conservación del cuadrimomento, tendremos que  $q^\mu = p^\mu - k^\mu$ . Entonces, podremos escribir el producto  $k_\mu q^\mu$  de (A.58) como

$$k_\mu q^\mu = k_\mu (p^\mu - k^\mu) = k_\mu p^\mu - k_\mu k^\mu. \quad (\text{A.59})$$

Por un lado, tendremos que en el sistema CdM el pion está en reposo y su cuadrimomento queda  $p^\mu = (m_\pi, 0)$ , de forma que  $k_\mu p^\mu = E_\nu m_\pi$ . Por otro lado, el invariante relativista  $k_\mu k^\mu$  para el neutrino se anulará, pues  $k_\mu k^\mu = m_\nu^2 \simeq 0$ . Entonces, en el sistema CdM, la expresión (A.58) se reducirá a

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = 4 G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2 m_\pi E_\nu, \quad (\text{A.60})$$

que será la que emplearemos en la sección que sigue para obtener finalmente la anchura de desintegración del proceso. Nótese que, dado que estamos tratando con una desintegración a dos cuerpos, el espectro de energías de los productos será discreto, con  $E_\nu = (m_\pi^2 - m_\ell^2)/2m_\pi$ .

#### A.4. Anchura de desintegración

Tras un largo camino repleto de cálculos y derivaciones de resultados, finalmente reunimos todo lo necesario para proceder con el cálculo de la anchura de desintegración del proceso  $\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell$ . Antes de comenzar, recapitulemos brevemente el trabajo que hemos realizado en los anteriores apartados. En primer lugar, hemos introducido a los piones  $\pi^\pm$  y  $\pi^0$ , comentando de forma resumida su naturaleza y sus propiedades básicas, que hemos sintetizado en la Tabla A.1, así como los principales canales de desintegración de los piones cargados  $\pi^\pm$ . Posteriormente, hemos desarrollado el marco teórico bajo el que describimos las interacciones débiles en el régimen de bajas energías, la teoría de campos efectiva V-A, cuyo origen nos remonta a la teoría de Fermi de la desintegración beta.

Una vez asentadas las bases y el marco teórico del cálculo, hemos derivado la forma de calcular el elemento de matriz asociado al proceso, también conocido como la amplitud de probabilidad, a primer orden en teoría de perturbaciones (A.22). Así, hemos introducido la definición usual del elemento de matriz  $\mathcal{M}_{fi}$  (A.24), que hemos calculado a lo largo de las secciones A.3.1, A.3.2 y A.3.3, obteniendo finalmente la expresión (A.49). El último paso ha consistido en calcular el módulo al cuadrado del elemento de matriz no polarizado, que hemos definido como  $|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2$  y que hemos particularizado para el sistema de referencia CdM, alcanzando la expresión (A.60).

La anchura de desintegración diferencial en un proceso a dos cuerpos, como el que nos ocupa aquí, vendrá dada por la siguiente expresión:

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k) \frac{1}{2E_p} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_q} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_k} , \quad (\text{A.61})$$

donde  $p$ ,  $q$ ,  $k$  son los cuadrimomentos del pion, el leptón cargado y el neutrino, respectivamente, siguiendo el convenio mantenido hasta ahora, Figura A.2. Esta expresión es válida sea cual sea el sistema de referencia en el que vayamos a trabajar (por supuesto, siempre que empleemos la forma general (A.58) para  $|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2$ ). A continuación, particularizaremos la anchura de desintegración diferencial al sistema CdM. Para ello, usaremos que el cuadrimomento del pion se reducirá a  $p^\mu = (m_\pi, 0)$ . De esta forma, podremos escribir:

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta(m_\pi - E_\ell - E_\nu) \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \frac{1}{2m_\pi} |\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_q} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_k} . \quad (\text{A.62})$$

La primera delta expresará la conservación de la energía en el proceso, mientras que  $\delta^{(3)}(\mathbf{q} + \mathbf{k})$  impondrá la conservación del momento total del sistema, que en el CdM se visualiza de forma trivial, con  $\mathbf{q} = -\mathbf{k}$ . Finalmente, introduciendo el resultado (A.60) para el elemento de matriz en nuestro sistema de referencia, obtenemos

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2}{8\pi^2} \delta(m_\pi - E_\ell - E_\nu) \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \frac{d^3 q}{E_\ell} d^3 k , \quad (\text{A.63})$$

donde hemos introducido la notación  $E_\ell \equiv E_q$  y  $E_\nu \equiv E_k$  para mayor claridad. Integrando sobre  $d^3 k$  a todo el espacio de momentos, vemos que el único término relevante para la integración será la delta, de forma que  $\int d^3 k \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) = 1$ , por lo que el resultado quedará reducido a

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2}{8\pi^2} \delta(m_\pi - E_\ell - E_\nu) \frac{d^3 q}{E_\ell} . \quad (\text{A.64})$$

Para integrar (A.64), primero escribiremos el diferencial de volumen en el espacio de momentos,  $d^3q$ , en coordenadas esféricas:

$$d^3q = |\mathbf{q}|^2 dq d\Omega = |\mathbf{q}| \underbrace{|\mathbf{q}| dq}_{=E_\ell dE_\ell} d\Omega = \sqrt{E_\ell^2 - m_\ell^2} E_\ell dE_\ell d\Omega , \quad (\text{A.65})$$

donde  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  es el diferencial de ángulo sólido. Hemos usado además la relación  $E_\ell dE_\ell = |\mathbf{q}| dq$ , que puede obtenerse fácilmente a partir de la relación de dispersión relativista  $E_\ell(\mathbf{q}) = (m_\ell^2 + |\mathbf{q}|^2)^{1/2}$ . Por otro lado, la aproximación  $m_\nu \simeq 0$  nos permitirá escribir la energía del neutrino como  $E_\nu \simeq |\mathbf{k}| = |\mathbf{q}| = (E_\ell^2 - m_\ell^2)^{1/2}$ , que podremos introducir en la expresión de la delta de Dirac que aparece en (A.64) y que impone la conservación de la energía en el proceso. Insertando todo esto en la anchura diferencial (A.64), obtenemos

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2}{8\pi^2} \delta\left(E_\ell + \sqrt{E_\ell^2 - m_\ell^2} - m_\pi\right) \sqrt{E_\ell^2 - m_\ell^2} dE_\ell d\Omega , \quad (\text{A.66})$$

que ahora sí podemos integrar a todas las direcciones (posibles orientaciones del momento del lepton cargado) y a todo el intervalo de energía permitido:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2}{8\pi^2} \oint d\Omega \int_0^{+\infty} dE_\ell \sqrt{E_\ell^2 - m_\ell^2} \delta\left(E_\ell + \sqrt{E_\ell^2 - m_\ell^2} - m_\pi\right) \\ &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2}{2\pi} \int_0^{+\infty} dE_\ell \sqrt{E_\ell^2 - m_\ell^2} \delta\left(E_\ell + \sqrt{E_\ell^2 - m_\ell^2} - m_\pi\right) . \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Empleando la propiedad (A.69) de la delta, identificaremos  $f(E_\ell) = E_\ell + (E_\ell^2 - m_\ell^2)^{1/2} - m_\pi$ , cuyo único cero vendrá dado por  $E_\ell^* = (m_\pi^2 + m_\ell^2)/2m_\pi$ . Así, tendremos que  $|f'(E_\ell)|_{E_\ell=E_\ell^*} = 2m_\pi^2/(m_\pi^2 - m_\ell^2)$  y podremos reescribir la anchura total como

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2}{4\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}\right) \int_0^{+\infty} dE_\ell \sqrt{E_\ell^2 - m_\ell^2} \delta(E_\ell - E_\ell^*) \\ &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2}{4\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}\right) \sqrt{E_\ell^{*2} - m_\ell^2} , \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

donde hemos aplicado la propiedad (A.70) de la delta de Dirac para resolver la integral.

### INCISO. Propiedades de la delta de Dirac.

Es muy común encontrar en cálculos de secciones eficaces y anchuras de desintegración integrales del tipo  $\int dx \delta(f(x)) u(x)$ , donde aparece la delta de una función de la variable de integración. Para resolverlas, se emplea una propiedad muy útil de la delta de Dirac como función generalizada:

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=0}^N \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}} \quad \text{tal que} \quad f(x_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N , \quad (\text{A.69})$$

que nos permite reescribir el integrando como una suma de términos del tipo  $\delta(x - x_i)$ , cuya integración es trivial gracias a la propiedad usual:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \delta(x - x_i) = g(x_i) . \quad (\text{A.70})$$

Introduciendo el valor de  $E_\ell^*$  en la expresión (A.68), obtendremos finalmente la anchura de desintegración del proceso en el sistema centro de masas:

$$\boxed{\Gamma_{\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell}^{(\text{CDM})} = \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2 m_\pi}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}\right)^2}. \quad (\text{A.71})$$

Como era de esperar, esta anchura depende únicamente de las masas del pión y el leptón cargado. Gracias a la simetría Lorentz de la teoría, podremos calcular ahora la anchura de desintegración en cualquier otro sistema de referencia mediante una transformación de Lorentz. El inverso de la anchura,  $\Gamma^{-1}$ , tiene unidades de tiempo y, por tanto, transformará bajo *boosts* con el factor relativista  $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ , siendo  $v$  la velocidad relativa entre los dos sistemas. Es decir, para un observador que se mueva con velocidad  $v$  relativa al sistema CdM, el pion tendrá una energía  $E_\pi = m_\pi \gamma(v)$ , luego

$$\Gamma^{-1}(E_\pi) = \gamma(v) \Gamma^{-1}(m_\pi) = \frac{E_\pi}{m_\pi} \Gamma^{-1}(m_\pi) \quad (\text{A.72})$$

y podremos escribir la regla general de transformación para la anchura de desintegración como

$$\Gamma(E_\pi) = \frac{m_\pi}{E_\pi} \Gamma(m_\pi). \quad (\text{A.73})$$

De esta forma, la anchura de desintegración del proceso en un sistema de referencia general a primer orden en teoría de perturbaciones vendrá dada por:

$$\boxed{\Gamma_{\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell}(E_\pi) = \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2 m_\pi^2}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}\right)^2 \frac{1}{E_\pi}}. \quad (\text{A.74})$$

Vemos entonces que la dependencia de la anchura con la energía inicial del pion será  $\Gamma \propto E_\pi^{-1}$ . Resultará interesante calcular también el cociente  $\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}$  para comprobar cuál de los dos canales de desintegración será el dominante. Recordemos que la masa de una partícula es igual a la de su antipartícula, por lo que al depender (A.74) únicamente de las masas y la energía del pion:

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e)} = 1, \quad (\text{A.75})$$

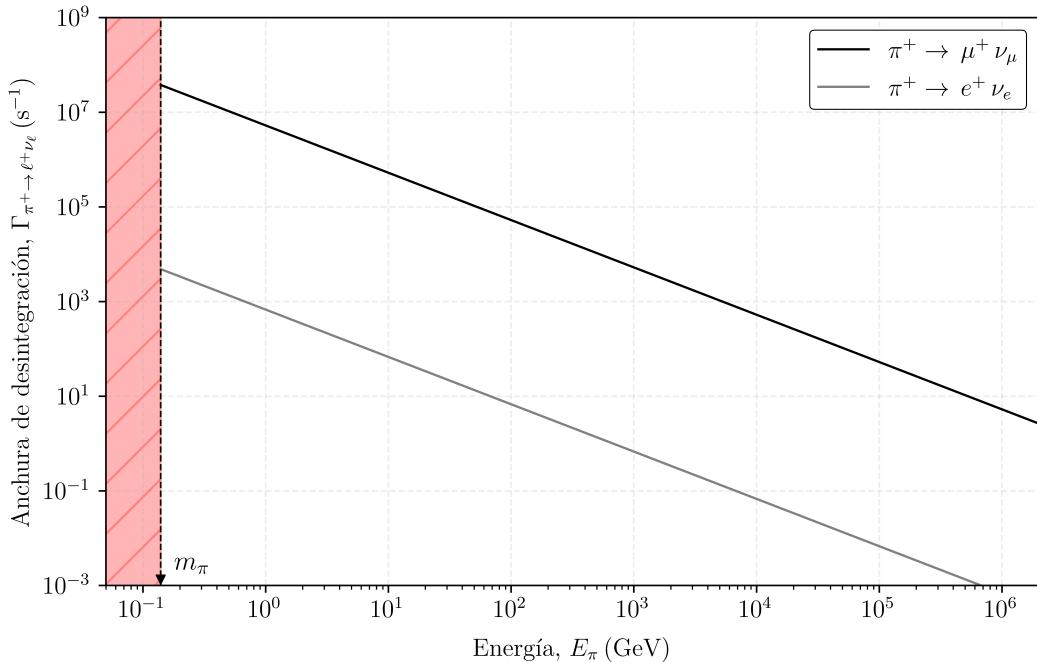
como ya habíamos avanzado al inicio de la sección A.1. Esto nos permitirá hablar del proceso asociado al  $\ell^+$  o  $\ell^-$  de forma indistinguible. No obstante, si calculamos

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} \simeq 1,283 \cdot 10^{-4}, \quad (\text{A.76})$$

podemos comprobar que el canal dominante será la desintegración al muon (antimuon). El resultado experimental de esta medida es conocido [2] y viene dado por

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} \Big|_{\text{exp}} = (1,230 \pm 0,004) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{A.77})$$

La discrepancia entre el cálculo teórico a primer orden y la medida experimental se sitúa en torno al 4 %. Considerando las correcciones asociadas a términos perturbativos de orden superior podremos disminuir la discrepancia entre ambos. No obstante, conocer el grado de discrepancia que alcanzamos restringiéndonos a primer orden en el cálculo será de gran importancia a la hora de incorporar efectos de nueva física, pues nos permitirá cuantificar si una posible desviación respecto del resultado “tradicional” predicho por el Modelo Estándar es significativa o si resulta imprescindible considerar términos de orden superior en el desarrollo.



**Figura A.4:** Anchura de desintegración a primer orden para los procesos a un muon (antimuon) y un electrón (positrón) en función de la energía inicial del pion. La franja roja delimita el rango de energías no permitido, que está acotado por la mínima enegía permitida para el pion,  $E_\pi = m_\pi$ , dada por su masa en reposo. Las anchuras calculadas para el sistema CdM en (A.71) se corresponden con los puntos evaluados en  $\Gamma(E_\pi = m_\pi)$ .

Sabiendo que el error relativo cometido es aproximadamente del 4 %, tenemos la seguridad de que las conclusiones sobre los resultados en el modelo de LIV que presentamos en este trabajo serán robustas. En un escenario en el que la discrepancia obtenida en este cálculo hubiera sido muy superior al 10 %, por ejemplo, deberíamos considerar las correcciones de orden superior para contrastar los resultados con las medidas experimentales y poder sacar conclusiones.

Para terminar con los comentarios relativos al resultado obtenido en (A.74), resultará interesante representar las anchuras de los dos procesos considerados en función de la energía del pion inicial. Esto se recoge en la Figura A.4, donde se puede apreciar de forma directa la dependencia de la anchura  $\Gamma$  con la energía y la fuerte supresión del canal  $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$  respecto al  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ , cuyo origen proviene de la diferencia de masas entre el electrón y el muon. Llegados a este punto, ya reunimos todo el conocimiento necesario para explorar efectos de violación de invariancia Lorentz en la desintegración de piones cargados. Un escenario que, como hemos comentado en el párrafo anterior, resulta muy robusto y atractivo a nivel fenomenológico para explorar desviaciones respecto al caso “clásico” que acabamos de estudiar.

## B | Sistema laboratorio en SR: anchura de desintegración

A lo largo del Anexo A, hemos realizado un repaso general de las ideas fundamentales que son necesarias para el estudio de la desintegración del pion en el marco de SR. Tras calcular el elemento de matriz total  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$  en la sección A.3.3, hemos explotado la simetría Lorentz de la relatividad especial para calcular la anchura total,  $\Gamma(E_\pi)$ , a partir de la anchura en el sistema centro de masas,  $\Gamma(m_\pi)$ , lo que simplifica notablemente el trabajo. En LIV, sin embargo, nos veremos obligados a trabajar siempre en el sistema laboratorio, por lo que tendremos que integrar directamente la anchura diferencial en este sistema de referencia. A continuación mostraremos el procedimiento para calcular la anchura total en el sistema laboratorio en SR, que nos será de gran utilidad cuando posteriormente abordemos este mismo cálculo en un escenario de LIV.

Comencemos escribiendo la anchura de desintegración diferencial:

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k - q) \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{q}}}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $p$ ,  $q$ ,  $k$  son los cuadrimomentos del pion, el leptón cargado y el neutrino, respectivamente; e introduciremos de nuevo la notación  $E_{\mathbf{p}} \equiv E_\pi$ ,  $E_{\mathbf{q}} \equiv E_\ell$  y  $E_{\mathbf{k}} \equiv E_\nu$  para mayor claridad. El elemento de matriz  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$  es invariante Lorentz, por lo que su valor en el sistema laboratorio será igual que el calculado en la sección A.3.3 para el sistema CdM:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = 2 G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2 (m_\pi^2 - m_\ell^2). \quad (\text{B.2})$$

Integrando la anchura diferencial (B.1) sobre el espacio de momentos del leptón cargado y el neutrino, obtenemos la expresión a calcular para la anchura total:

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{8(2\pi)^2 E_\pi} \int \frac{d^3 k}{E_\nu} \int \frac{d^3 q}{E_\ell} \delta(E_\pi - E_\nu - E_\ell) \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad (\text{B.3})$$

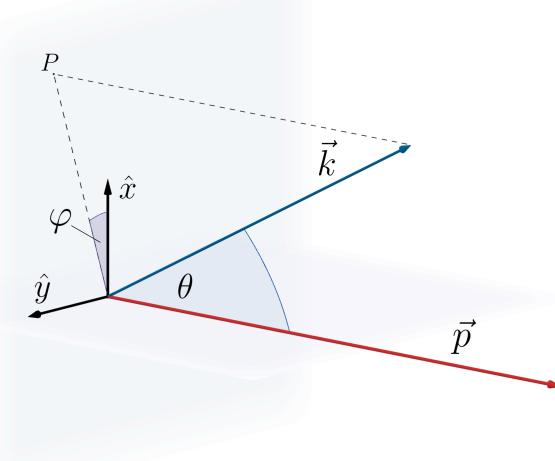
donde hemos separado la delta de Dirac que impone la conservación del cuadrimomento en (B.1) en la delta asociada a la conservación de la energía y la asociada a la conservación del momento lineal. Además, hemos reescrito los términos constantes del integrando (incluido el elemento de matriz) fuera de la integral. Usando la propiedad (A.69), podremos escribir  $\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{q}) = \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)$  con  $\mathbf{q}^* = \mathbf{p} - \mathbf{k}$  e integrar respecto al momento del leptón cargado:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{8(2\pi)^2 E_\pi} \int \frac{d^3 k}{E_\nu} \int \frac{d^3 q}{E_\ell} \delta(E_\pi - E_\nu - E_\ell) \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \\ &= \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{8(2\pi)^2 E_\pi} \int \frac{d^3 k}{E_\nu} \frac{\delta(E_\pi - E_\nu - \sqrt{m_\ell^2 + |\mathbf{q}^*|^2})}{\sqrt{m_\ell^2 + |\mathbf{q}^*|^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

A continuación, expresaremos  $|\mathbf{q}^*|^2$  en función de las variables de integración, de forma que

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}^*|^2 &= \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{q}^* = (\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k}) = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} \\ &= |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2 |\mathbf{p}| |\mathbf{k}| \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

siendo  $\theta$  el ángulo formado por el momento lineal del neutrino y la dirección de propagación del pion, que tomaremos como  $+\hat{\mathbf{z}}$  sin pérdida de generalidad, Figura B.1.



**Figura B.1:** Descomposición del momento lineal del neutrino,  $\mathbf{k}$ , en coordenadas esféricas. La dirección  $\hat{\mathbf{z}}$  se escoge por conveniencia como la dirección de propagación del pion, con momento lineal  $\mathbf{p}$ .

Usando las relaciones de dispersión relativistas para el pion y el neutrino ( $m_\nu \simeq 0$ ), podremos escribir (B.5) como

$$|\mathbf{q}^*|^2 = E_\pi^2 - m_\pi^2 + E_\nu^2 - 2E_\nu\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \cos\theta. \quad (\text{B.6})$$

Insertando este resultado en la expresión de la anchura total (B.4), obtenemos:

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{8(2\pi)^2 E_\pi} \int \frac{d^3 k}{E_\nu} \frac{\delta\left(E_\pi - E_\nu - \sqrt{m_\ell^2 + E_\pi^2 - m_\pi^2 + E_\nu^2 - 2E_\nu\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \cos\theta}\right)}{\sqrt{m_\ell^2 + E_\pi^2 - m_\pi^2 + E_\nu^2 - 2E_\nu\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \cos\theta}}. \quad (\text{B.7})$$

Como vemos en (B.7), la delta de Dirac que impone la conservación de la energía en el proceso ahora puede verse como una ligadura entre la energía del neutrino y el ángulo  $\theta$ . Para integrar esta expresión interpretaremos la función dentro de la delta de Dirac como una función del ángulo  $\theta$ , lo que nos permitirá conocer el valor de  $\theta$  en función de la energía del neutrino,  $E_\nu$ . Así, definimos:

$$f(\theta) = E_\pi - E_\nu - \sqrt{m_\ell^2 + E_\pi^2 - m_\pi^2 + E_\nu^2 - 2E_\nu\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \cos\theta}, \quad (\text{B.8})$$

pudiendo aplicar ahora la propiedad (A.69) para reescribir la delta de Dirac de (B.7) como

$$\delta(f(\theta)) = \frac{\delta(\theta - \theta^*)}{\left|\frac{df(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^*}} \quad \text{donde} \quad f(\theta^*) = 0. \quad (\text{B.9})$$

Comenzamos buscando el cero de la función  $f(\theta)$ , que vendrá dado por

$$\cos\theta^* = \frac{2E_\pi E_\nu - m_\pi^2 + m_\ell^2}{2E_\nu\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} \quad (\text{B.10})$$

y su derivada evaluada en ese punto

$$\left|\frac{df(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^*} = \frac{E_\nu\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \sin\theta^*}{E_\pi - E_\nu}. \quad (\text{B.11})$$

Ahora, con las expresiones (B.10), (B.11) y empleando la propiedad (B.9), podremos expresar la delta como

$$\delta(f(\theta)) = \frac{E_\pi - E_\nu}{E_\nu \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \sin \theta^*} \delta(\theta - \theta^*) . \quad (\text{B.12})$$

Por otro lado, escribiremos el diferencial de volumen del espacio de momentos para el neutrino en coordenadas esféricas:

$$d^3 k = |\mathbf{k}|^2 dk d\Omega = E_\nu^2 dE_\nu d\Omega , \quad (\text{B.13})$$

siendo  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  el diferencial de ángulo sólido. Introduciendo (B.12) y (B.13) en la integral de la anchura total (B.7), obtenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{8(2\pi)^2 E_\pi \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} \int_0^{+\infty} dE_\nu \oint d\Omega \frac{(E_\pi - E_\nu) \delta(\theta - \theta^*)}{\sin \theta^* \sqrt{m_\ell^2 + E_\pi^2 - m_\pi^2 + E_\nu^2 - 2E_\nu \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \cos \theta}} \\ &= \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{8(2\pi)^2 E_\pi \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} \int_0^{+\infty} dE_\nu \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi (E_\pi - E_\nu) \delta(\theta - \theta^*) \\ &\quad \times \frac{1}{\sin \theta^* \sqrt{m_\ell^2 + E_\pi^2 - m_\pi^2 + E_\nu^2 - 2E_\nu \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \cos \theta}} . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

La integral sobre el ángulo  $\varphi$  nos dará un factor  $2\pi$ , mientras que la integral sobre  $\theta$  dará como resultado el integrando evaluado en  $\theta = \theta^*$  únicamente si  $\theta^* \in [0, \pi]$ . Esta condición deberá incluirse en el resultado mediante la función escalón de Heaviside. Así, podremos escribir el resultado de (B.14) como

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi E_\pi \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} \int_0^{+\infty} dE_\nu \frac{\sin \theta^* (E_\pi - E_\nu) \Theta(\theta^*) \Theta(\pi - \theta^*)}{\sin \theta^* \sqrt{m_\ell^2 + E_\pi^2 - m_\pi^2 + E_\nu^2 - 2E_\nu \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} \cos \theta^*}} , \quad (\text{B.15})$$

donde las funciones de Heaviside limitarán el intervalo de integración entre los valores  $E_\nu^{(\min)} = E_\nu(\theta^* = \pi)$  y  $E_\nu^{(\max)} = E_\nu(\theta^* = 0)$ . Sustituyendo la expresión (B.10) de  $\cos \theta^*$  en (B.15), obtenemos:

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi E_\pi \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} \int_{E_\nu(\theta^*=\pi)}^{E_\nu(\theta^*=0)} dE_\nu . \quad (\text{B.16})$$

#### INCISO. Función escalón de Heaviside.

La función escalón de Heaviside se define como:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 , \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

que además presenta la siguiente propiedad:

$$\Theta(-x) = 1 - \Theta(x) . \quad (\text{B.18})$$

Haciendo uso de (B.17) y (B.18) podremos definir un intervalo  $[a, b]$  no nulo escribiendo

$$\Theta(x - a) \Theta(b - x) , \quad (\text{B.19})$$

que valdrá cero cuando  $x \notin [a, b]$  y uno cuando  $x \in [a, b]$ .

Finalmente, determinaremos los límites de integración para la variable  $E_\nu$  a partir de las condiciones que aparecen en (B.16). Haciendo uso de la expresión (B.10), tendremos que:

$$\theta^* = \pi \implies E_\nu^{(\min)} = \frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{2(E_\pi + \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2})} \quad (\text{B.20})$$

y

$$\theta^* = 0 \implies E_\nu^{(\max)} = \frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{2(E_\pi - \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2})} , \quad (\text{B.21})$$

luego la integral (B.16) dará como resultado

$$\Gamma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi E_\pi \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}} E_\nu \Big|_{E_\nu^{(\min)}}^{E_\nu^{(\max)}} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi E_\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}\right) . \quad (\text{B.22})$$

Sustituyendo ahora la expresión del elemento de matriz (B.2) en el resultado de (B.22), obtenemos la expresión final para la anchura de desintegración total del proceso en el sistema laboratorio:

$$\boxed{\Gamma_{\pi^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell}(E_\pi) = \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_C m_\ell^2 m_\pi^2}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}\right)^2 \frac{1}{E_\pi}} , \quad (\text{B.23})$$

que coincide con el resultado (A.74) calculado en la sección A.4, como era de esperar.