



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado en Física

Título

Energía de Casimir en sistemas definidos con potencial delta de Dirac

Autora

Ariadna Salazar Mendieta

Directora

Inés Cavero Peláez

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA
2024

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Placas paralelas	3
2.1 Caso unidimensional con condiciones de Dirichlet	4
2.2 Caso general en 3D+1 con condiciones de Dirichlet	8
2.3 Caso general con potencial delta de Dirac	13
3. Corteza esférica con potencial delta de Dirac	17
4. Conclusiones	23
Bibliografía	24
Anexos	26
A. Resolución de la ecuación de Klein-Gordon con condiciones de contorno Dirichlet	26
B. Teorema de Noether y tensor energía-momento	28
C. Cálculo de la densidad de energía con placas en 1D+1	30
D. Cálculos sección 2.3	31
D.1 Función reducida de Green	31
D.2 Componente (3,3) del tensor energía-momento y densidad de la fuerza	37
E. Funciones de Bessel	39
F. Funciones armónicas para potencial esférico	43
G. Cálculos sección 3	46
G.1 Función reducida de Green	46
G.2 Energía total del sistema	49
G.3 Término E^{λ^2}	50

1. Introducción

La energía Casimir se asocia, popularmente, a la energía que hay entre dos placas neutras situadas en el vacío, a las que no se les ha aplicado ningún tipo de potencial; en general a este efecto se le conoce como efecto Casimir. El efecto Casimir, a pesar de tener su origen en la Física Cuántica de Campos, se manifiesta a nivel macroscópico. Esto ha abierto un campo de posibilidades principalmente en la micro y nanomecánica y en nanosistemas electromecánicos. Este es un efecto provocado por el confinamiento de los campos cuánticos bajo ciertas condiciones de contorno, que imponen restricciones en los modos de vibración de los campos dando lugar a un efecto neto que proviene de las fluctuaciones cuánticas del vacío, la llamada energía de Casimir. Nos proponemos en este documento hacer un análisis de los casos del efecto Casimir más conocidos. Adoptaremos la geometría plana y esférica, pero desde un planteamiento general que permita (siempre que sea posible) un estudio profundo de este fenómeno. El efecto Casimir, a pesar de tener por su naturaleza un carácter universal, es todavía un gran desconocido. El comportamiento del vacío ante distintas geometrías y/o condiciones de contorno no es predecible y la aparición de divergencias, todavía no está bien entendida.

El efecto Casimir es una consecuencia directa del punto cero de energía conocido en Mecánica Cuántica. El término punto cero de energía aparece con las teorías de radiación de Planck¹ y coge fuerza durante principios del siglo XX con desarrollos teóricos desarrollados por Einstein y Stern². A pesar de que el concepto circulaba desde temprana edad de la física cuántica, no se le dio el valor que merecía hasta a partir de mediados de siglo cuando se empezó a ver que podía, en realidad, tener consecuencias macroscópicas.

El punto cero de energía se refiere al estado de energía de un sistema cuántico en el que no hay ningún tipo de excitación externa, lo que frecuentemente relacionaríamos con el vacío absoluto. Por este motivo, uno esperaría (movidos por una visión clásica) que en un estado en el que *no hay estados* la energía fuera nula. Sin embargo, la Mecánica Cuántica nos guarda alguna sorpresa. El Hamiltoniano clásico que describe un oscilador armónico de masa m define también el oscilador armónico cuántico con la salvedad de que entonces la posición y momento de la partícula pasan a ser operadores que miden esas propiedades dada la función de onda del sistema.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (1.1)$$

Como hemos dicho, en Mecánica Cuántica q y p pasan a ser los operadores posición q y momento p , y además no commutan,

$$[q, p] = i\hbar, \quad (1.2)$$

dando lugar a particularidades propias de un sistema cuántico como es el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, $(\Delta p)(\Delta q) \geq \frac{\hbar}{2}$.

Por conveniencia definimos los operadores a^+ y a mediante las relaciones

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega q), \quad (1.3)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega q), \quad (1.4)$$

a los cuales se les conoce como operadores escalera u operadores construcción y destrucción respectivamente. Esto es debido a que cuando operan sobre un estado cuántico, suben o bajan

¹En concreto con la segunda teoría, publicada en la revista alemana *Annalen der Physik*, se pueden consultar sus volúmenes online en <https://onlinelibrary.wiley.com/journal/15213889>. Para más información consultar Max Planck. Über die Begründung des Gesetzes der schwarzen Strahlung. *Ann. d. Phys.*, 37: 642, 1912.

²Publicaron sus resultados en la misma revista que Planck, para saber más ver referencia Albert Einstein and Otto Stern. Einige Argumente für die Annahme einer molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt. *Ann. d. Phys.*, 40: 551, 1913.

su nivel. Cada estado propio de energía $|n\rangle$ se ve afectado por estos operadores de la forma

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (1.5)$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (1.6)$$

Podemos expresar el Hamiltoniano (1.1) en términos de los operadores a y a^+ según están definidos en (1.3) y (1.4) mediante

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right), \quad N = a^+a. \quad (1.7)$$

Dado que $N|n\rangle = n|n\rangle$, los niveles de energía del sistema son

$$\langle n|H|n\rangle = E_n = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + n \right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (1.8)$$

Como se puede ver en la ecuación (1.8), el sistema con el nivel más bajo de energía (ausencia de partículas o estado fundamental $|0\rangle$) no implica que el sistema tenga energía nula. De hecho, el nivel más bajo de energía es $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$. Esto es lo que se denomina energía de punto cero. No obstante, este nivel es prácticamente imposible de observar, ya que los experimentos se basan en el *scattering* ocasionado al pasar de un nivel a otro haciendo que este fenómeno no tenga efecto neto.

Existen, además, indicios fundamentales de su existencia. El Principio de Incertidumbre y la existencia del punto cero de energía están íntimamente relacionados como se puede comprobar recordando que

$$(\Delta q_n)^2 = \langle n|q^2|n\rangle - \langle n|q|n\rangle^2 \quad (1.9)$$

y suponiendo la base de estados de energía $\{|n\rangle\}$ ortonormal.

$$\begin{aligned} \langle n|q|n\rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|(a - a^+)|n\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle n|(a)|n\rangle - \langle n|(a^+)|n\rangle) = 0 \\ \langle n|q^2|n\rangle &= -\frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|(a - a^+)^2|n\rangle = -\frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|(a^2 + a^{+2} - aa^+ - a^+a)|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, llegamos a

$$(\Delta q_n)^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (1.10)$$

De forma análoga calculamos lo propio para el operador momento.

$$(\Delta p_n)^2 = \hbar m\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.11)$$

De este modo, el producto de incertidumbres nos da la relación

$$(\Delta p_n)(\Delta q_n) = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.12)$$

que no es más que el principio de Heisenberg,

$$(\Delta p_n)(\Delta q_n) = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \text{ con } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \implies (\Delta p)(\Delta q) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.13)$$

Es decir, el Principio de Heisenberg permite y corrobora la existencia del punto cero de energía.

En Física Cuántica de Campos, la existencia del punto cero de energía da lugar a una energía abrumadora que, tradicionalmente, se ha valorado como *no observable* y, como consecuencia, se ha intentado por distintos métodos eliminar del escenario. En concreto, en Teoría Cuántica

de Campos se representan las fluctuaciones cuánticas de los campos electromagnéticos de un sistema suponiendo un número infinito de osciladores armónicos en cada punto, uno por cada modo. Por tanto, teniendo en cuenta el resultado obtenido con Mecánica Cuántica del nivel cero de energía de un oscilador armónico cuántico, el punto cero de energía ahora se considera la suma de todos los modos,

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_J \omega_J, \quad (1.14)$$

donde J es el número cuántico asociado a cada modo de frecuencia ω_J . La suma es espantosamente divergente. Este comportamiento del vacío es una fuente de problemas, pues no sabemos cómo tratarlo, pero... ¿podría serlo también de oportunidades? A mediados del siglo XX Hendrik Brugt Gerhard Casimir consigue relacionar este punto cero de energía con las fuerzas de van der Waals³, abriendo así todo un abanico de posibilidades. Las fuerzas de van der Waals y el efecto Casimir son en esencia lo mismo, pero las primeras son referidas a interacciones entre cuerpos muy cercanos (nm) y el segundo a cuerpos más alejados (μm). Son los casos límite de un mismo concepto⁴.

Mucho se ha especulado también acerca de la relación entre la energía de vacío y la energía oscura. Un tema plagado de incertidumbres y con mucho recorrido pero fuera del propósito de este documento.

El resto del trabajo está estructurado de la siguiente manera: En la sección 2 analizaremos el caso más popular del efecto Casimir, la atracción de dos placas paralelas totalmente neutras situadas en el vacío sin ningún tipo de potencial aplicado entre ellas. No es exactamente el caso tratado originalmente por Casimir puesto que él consideró campos electromagnéticos y nosotros trataremos campos escalares (nos extendemos en esto más adelante). Comenzamos esta sección con el caso más simple posible, el de una dimensión temporal y una única dimensión espacial con placas *puntuales* conductoras. Calcularemos la energía de vacío utilizando el método de suma de modos en la subsección 2.1 para pasar al caso general con 3 dimensiones espaciales y placas perfectamente conductoras en 2.2. El apartado 2.3 lo reservamos para introducir potenciales definidos con la función delta de Dirac. Podemos generalizar el tipo de condiciones de contorno sobre las placas modelando de esta manera el caso general de placas dieléctricas. Estos dos últimos apartados nos servirán, además, para mostrar cómo hacer este tipo de cálculos siguiendo el método de las funciones de Green introducido por Schwinger en su teoría de fuentes, [2]. A través de la función de Green calcularemos el tensor energía-momento. Además, emplearemos distintos métodos de regularización en cada uno de los casos. Para la sección se han revisado los artículos [3] y [4] y el libro [5].

En la sección 3 analizamos las fluctuaciones cuánticas de campos escalares interaccionando con una corteza esférica descrita, de nuevo, por un potencial singular tipo delta de Dirac que, bajo circunstancias que veremos, simula los modos eléctricos transversales del campo electromagnético. La constante positiva de acople sirve para modelar el tipo de condiciones de contorno sobre la superficie de la esfera. Utilizamos el método de la función de Green que da lugar, en esta geometría, a soluciones del tipo funciones modificadas de Bessel. El tratamiento de este caso es no trivial y el uso de las funciones de Bessel es extenso. A partir de ello, calculamos distintas componentes del tensor energía momento. Esta descripción del sistema permite que podamos discutir la aparición de cierto tipo de divergencias y el origen de estas. Para su desarrollo se ha consultado el artículo [4] y el libro [6].

2. Placas paralelas

Como hemos dicho en la introducción, consideraremos campos escalares interaccionando con distintos tipos de entornos que modifican la geometría del espacio en cierta manera. Originalmente, el efecto Casimir se estudió tratando fluctuaciones del campo electromagnético.

³Lo explicó en el artículo H.B.G. Casimir, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet.*, 51: 793, 1948

⁴Para más información sobre esto ver [1].

Este está descrito por campos vectoriales, lo que hace que el formalismo se vuelva más complicado. Puesto que el efecto Casimir lo sufre cualquier tipo de campo, estudiarlo en el caso de campos escalar hace que los cálculos sean más sencillos y la física que describen más ilustrativa. Es importante mencionar también que existen casos, como el que vamos a estudiar, en los que los modos eléctrico y magnético del campo electromagnético se desacoplan y, entonces, se pueden considerar por separado y después sumar ambas contribuciones.

El caso de las placas paralelas fue el primero tratado en el efecto Casimir y uno de los más sencillos. Por este motivo, empezaremos nuestro análisis estudiando el punto cero de energía en el caso más simplificado de esta geometría e iremos complicando el problema progresivamente. Esto nos permitirá introducir maneras más sofisticadas de estudiar el efecto Casimir añadiendo generalidad al problema y permitiéndonos estudiar dicho efecto de forma local.

2.1. Caso unidimensional con condiciones de Dirichlet

Para empezar, estudiamos el efecto Casimir en un sistema unidimensional, 1D+1 (una dimensión espacial y otra temporal), el caso más sencillo. Las placas conductoras se consideran puntos localizados en $x = 0$ y $x = a$. Puesto que consideramos conductores perfectos, las placas son reflectoras perfectas y, sin pérdida de generalidad, podemos definir el campo escalar $\varphi(t, x)$ únicamente en el espacio entre las placas, es decir, $\forall(t, x) \in \mathbb{R} \times (0, a)$, con $a > 0$. El carácter conductor de las placas queda reflejado en la imposición de las condiciones de Dirichlet,

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, a) = 0. \quad (2.1)$$

La dinámica del campo escalar $\varphi(t, x)$ de masa m puede ser descrita por la ecuación de Klein-Gordon, que define la dinámica de una teoría clásica de campos, para después cuantizar las variables dinámicas y darles la categoría de operadores del mismo modo que se procedió a hacerlo en Mecánica Cuántica, [7]. La ecuación de Klein-Gordon es una ecuación diferencial homogénea en derivadas parciales de segundo orden,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(t, x) = 0. \quad (2.2)$$

Utilizamos el método de separación de variables para su resolución, cuyos detalles se pueden ver en el Anexo A. Se obtiene la siguiente solución para el nivel n de energía,

$$\varphi_n(t, x) = \text{sen}(k_n x) (A_n e^{i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}), \quad (2.3)$$

donde A_n y B_n son constantes a determinar para ciertas condiciones de contorno, k_n es una constante que depende de $n \in \mathbb{N}$ y ω_n es la frecuencia del sistema, cuyo valor depende de k_n del siguiente modo,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

donde, como se ha demostrado en el anexo,

$$k_n = \frac{\pi n}{a}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Por conveniencia, expresamos (2.3) como combinación lineal de los siguientes generadores,

$$\varphi_n^\pm(x, t) = A_n^\pm \text{sen}(k_n x) e^{\pm i\omega_n t}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

La solución general de $\varphi(t, x)$ será una combinación lineal de los campos escalares correspondientes con cada nivel de energía $\varphi_n(x, t)$. Calculamos las constantes A_n^\pm imponiendo condiciones de ortonormalización sobre los generadores de la siguiente manera,

$$(\varphi_n^\pm, \varphi_{n'}^\pm) = \mp \delta_{nn'} \quad (\varphi_n^\pm, \varphi_{n'}^\mp) = 0. \quad (2.7)$$

El producto escalar asociado a este sistema, que asegura la unitariedad está definido como

$$(f, g) = i \int_0^a dx (f^* \partial_{x_0} g - \partial_{x_0} f^* g), \quad x_0 \equiv ct. \quad (2.8)$$

Imponemos sobre (2.6) las condiciones de ortonormalización (2.7),

$$\begin{aligned} (\varphi_n^\pm, \varphi_n^\pm) &= i \int_0^a dx (\varphi_n^{\pm*} \partial_{x_0} \varphi_n^\pm - \partial_{x_0} \varphi_n^{\pm*} \varphi_n^\pm) = \frac{-A_n^{\pm 2}}{c} \int_0^a dx \operatorname{sen}^2(k_n x) ((\pm \omega_n) - (\mp \omega_n)) \\ &= \frac{\mp A_n^{\pm 2} 2\omega_n}{c} \frac{a}{2} = \mp 1 \iff A_n^\pm = \sqrt{\frac{c}{a\omega_n}} \end{aligned}$$

Es decir, el conjunto de generadores o funciones linealmente independientes que resuelven nuestro sistema es

$$\varphi_n^\pm = \sqrt{\frac{c}{a\omega_n}} \operatorname{sen}(k_n x) e^{\pm i\omega_n t}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

De manera similar podemos comprobar el resto de propiedades. Tomando ahora $n, n' \in \mathbb{N}$ con $n \neq n'$.

$$\begin{aligned} (\varphi_n^\pm, \varphi_{n'}^\pm) &= i \int_0^a dx (\varphi_n^{\pm*} \partial_{x_0} \varphi_{n'}^\pm - \partial_{x_0} \varphi_n^{\pm*} \varphi_{n'}^\pm) \\ &= \frac{\mp A_n^\pm A_{n'}^\pm (\omega_{n'} + \omega_n)}{c} \int_0^a dx \operatorname{sen}(k_n x) \operatorname{sen}(k_{n'} x) \\ &= \frac{\mp A_n^\pm A_{n'}^\pm (\omega_{n'} + \omega_n)}{c} \left[\frac{k_n \operatorname{sen}(k_n x) \operatorname{cos}(k_{n'} x) - k_{n'} \operatorname{cos}(k_n x) \operatorname{sen}(k_{n'} x)}{k_n^2 - k_{n'}^2} \right]_0^a \\ &= 0, \end{aligned}$$

puesto que cuando evaluamos la expresión en $x = a$ y $x = 0$ nos queda cada sumando del numerador multiplicado por cero, $\operatorname{sen}(\frac{\pi n}{a} a) = \operatorname{sen}(\frac{\pi n'}{a} a) = 0$ para $n, n' \in \mathbb{N}$.

Siguiendo un cálculo análogo se demuestra que $(\varphi_n^\pm, \varphi_{n'}^\mp) = 0$.

Dado que sabemos que la solución va a ser una combinación lineal de las funciones (2.9), construimos el siguiente campo escalar

$$\varphi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n^-(t, x) a_n + \varphi_n^+(t, x) a_n^+], \quad (2.10)$$

donde a_n y a_n^+ son los operadores escalera, dando así, a las variables dinámicas, la categoría de operadores que cumplen las relaciones de commutación

$$[a_n, a_{n'}^+] = \delta_{n,n'}, \quad [a_n, a_{n'}] = [a_n^+, a_{n'}^+] = 0, \quad (2.11)$$

además de

$$a_n |0\rangle = 0. \quad (2.12)$$

A continuación, vamos a calcular la componente $(0, 0)$ del tensor energía-momento. Este es una cantidad tensorial, denotada por $T_{\mu\nu}$, que codifica información acerca de la conservación de la energía y momento de un sistema. Se deriva a partir del teorema de Noether. Tanto la derivación como su expresión para campos escalares está desarrollada en detalle en el Anexo B. La componente $(0, 0)$ del tensor, T_{00} , nos da la densidad de energía del sistema,

$$T_{00}(t, x) = \frac{\hbar c}{2} \left(\frac{1}{c^2} [\partial_t \varphi(t, x)]^2 + [\partial_x \varphi(t, x)]^2 \right). \quad (2.13)$$

En el Anexo C calculamos, a partir de la expresión de los campos según aparecen en (2.10) y la expresión de la componente T_{00} anterior, el valor esperado de la densidad de energía,

$$\langle 0 | T_{00}(x) | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n - \frac{m^2 c^4}{2a\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k_n x)}{\omega_n}. \quad (2.14)$$

A partir de ahora, y en el resto del documento, vamos a suponer campos escalares no masivos, ya que la presencia de la masa en el sistema deja al efecto Casimir en un efecto de orden secundario e importancia menor. Omitimos, por tanto, el término dependiente de la masa m del campo escalar. La energía se calcula integrando la densidad de energía sobre el espacio entre las placas,

$$E_0(a) = \int_0^a \langle 0 | T_{00}(x) | 0 \rangle dx = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n. \quad (2.15)$$

Esta serie es claramente divergente y su forma nos resulta familiar. Estamos haciendo una suma infinita de frecuencias dadas por (2.4), cuyo valor en el caso no masivo ($m = 0$) es proporcional a n . Esto, en principio, no tiene por qué causar asombro puesto que estamos sumando una energía del punto cero que sabemos que es infinito. Sin embargo, lo que nos interesa es la contribución que las condiciones de contorno ejercen sobre la energía de vacío, buscamos alguna técnica para poder extraer esta parte supuestamente finita de la energía de vacío. Para ello, tenemos que regularizar la solución de alguna forma y poder extraer algún significado físico de ella. Añadimos una función de amortiguamiento $e^{-\delta\omega_n}$ a nuestra expresión, de tal manera que al final del cálculo haremos $\delta \rightarrow 0$ para recuperar la expresión inicial. Lo que se pretende con esta técnica es extraer aquellos términos divergentes y ver si esto permite aislar alguna contribución finita. La marca que debe de tener dicha contribución es que tiene que estar relacionada con la geometría causante de la restricción de los modos de los campos fluctuantes. Partimos por lo tanto de la expresión regulada

$$E_0(a, \delta) = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n e^{-\delta\omega_n}, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Sustituyendo el valor de ω_n , (2.4), y manipulando ligeramente esta expresión nos queda,

$$E_0(a, \delta) = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\pi n}{a} e^{-\delta \frac{c\pi n}{a}} = -\frac{\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial \delta} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\delta \frac{c\pi}{a}})^n,$$

una serie geométrica que fácilmente podemos sumar. Recordando $|\delta \frac{c\pi}{a}| < 1$ y operando la derivada, obtenemos

$$E_0(a, \delta) = -\frac{\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial \delta} \frac{1}{e^{\delta \frac{c\pi}{a}} - 1} = \frac{\hbar c\pi}{24a} \left(\frac{2}{e^{\delta \frac{c\pi}{2a}} - e^{-\delta \frac{c\pi}{2a}}} \right)^2$$

Utilizando la fórmula de Euler para el seno hiperbólico, obtenemos una expresión para la energía en función del parámetro δ ,

$$E_0(a, \delta) = \frac{\hbar c\pi}{8a} \operatorname{senh}^{-2} \left(\delta \frac{c\pi}{2a} \right). \quad (2.17)$$

Recordamos que teníamos que aplicar el límite $\delta \rightarrow 0$, al final de nuestro cálculo. Por lo tanto, desarrollamos el seno hiperbólico en una serie de Laurent y consideramos los primeros términos antes de las potencias positivas de δ (que convergen a cero),

$$\operatorname{senh}^{-2}(x) \simeq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + o(x^2), \quad \forall x \ni |x| < 1. \quad (2.18)$$

Sustituyendo en la expresión de arriba, obtenemos finalmente

$$E_0(a, \delta) \simeq \frac{\hbar c\pi}{8a} \left[\left(\delta \frac{c\pi}{2a} \right)^{-2} - \frac{1}{3} \right] + o(\delta^2) = \frac{\hbar a}{2c\pi\delta^2} - \frac{\hbar c\pi}{24a}. \quad (2.19)$$

Notar que el primer sumando diverge en $\delta \rightarrow 0$. Sin embargo, si queremos calcular la fuerza ejercida sobre las placas, debemos derivar con respecto al parámetro a . Esto hace que el primer término no dependa de ningún parámetro relacionado con nuestro sistema, y por lo tanto esa la

divergencia no tendrá ningún significado físico. Por tanto, podríamos renormalizar la expresión y prescindir del primer término. No obstante, vamos a ver con más detalle el significado de este sumando.

Consideraremos ahora el sistema sin placas. En este caso, el campo $\varphi(x, t)$ se extiende a todo el espacio $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, y las soluciones de la ecuación (2.2) son funciones que toman valores continuos de la frecuencia,

$$\varphi_k^\pm = A^\pm e^{\pm i(kx - \omega t)}, \quad (2.20)$$

con $k = \sqrt{|\lambda|}$, $\omega = \sqrt{\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 |\lambda|}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Corresponden a las fluctuaciones libres del campo, en ausencia de las placas, y por lo tanto no cumplen ningún tipo de condiciones de contorno en los puntos donde antes estaban situadas dichas placas conductoras y hacían que k tomara valores discretos. Al igual que antes, la constante A^\pm la calculamos usando (2.7) y (2.8) extendidas a todo el espacio continuo.

$$\begin{aligned} (\varphi_k^\pm, \varphi_{k'}^\pm) &= i \int_{-\infty}^{\infty} dx (\varphi_k^{\pm*} \partial_{x_0} \varphi_{k'}^\pm - \partial_{x_0} \varphi_k^{\pm*} \varphi_{k'}^\pm) \\ &= \mp \frac{A_k^\pm A_{k'}^\pm}{c} e^{\pm i(\omega - \omega')t} (\omega + \omega') \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm i(k' - k)x} = \mp \frac{2\omega A_k^\pm A_{k'}^\pm}{c} 2\pi \delta(k - k') \\ &= \mp \delta(k - k') \iff A_k^\pm = \sqrt{\frac{c}{4\pi\omega}} \end{aligned}$$

Evaluando la expresión (2.15) en ausencia de placas, la energía del vacío en todo el espacio $x \in \mathbb{R}$ es

$$E_{0\text{libre}}(-\infty, \infty) = \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty \omega L dk, \quad (2.21)$$

donde L es la longitud del espacio, $L \rightarrow \infty$. Es más conveniente, por lo tanto, hablar de energía por unidad de longitud $\frac{E_{0\text{libre}}(-\infty, \infty)}{L}$. Usando esta densidad de energía, podemos analizar la energía contenida en el espacio que ocupan las placas,

$$E_{0\text{libre}}(a) = \frac{E_{0\text{libre}}(-\infty, \infty)}{L} a = \frac{\hbar a}{2\pi} \int_0^\infty \omega dk = \frac{\hbar a c}{2\pi} \int_0^\infty k dk. \quad (2.22)$$

A pesar de ser una expresión divergente, y con la esperanza de poder comparar el resultado con el obtenido en presencia de las placas, regulamos esa expresión usando la misma función de amortiguamiento $e^{-\delta\omega}$ con $\delta \rightarrow 0$ que utilizamos en el caso de las placas conductoras. Obtenemos

$$E_{0\text{libre}}(a, \delta) = \frac{\hbar a}{2\pi\delta} \int_0^\infty (ck\delta) e^{-\delta ck} dk = \frac{\hbar a}{2\pi\delta} \frac{1}{c\delta} \int_0^\infty t e^{-t} dt = \frac{\hbar a}{2\pi c\delta^2} \Gamma(2) = \frac{\hbar a}{2\pi c\delta^2}. \quad (2.23)$$

Esta contribución corresponde a las fluctuaciones de vacío del campo en ausencia de las placas. Inmediatamente se reconoce que el valor coincide con el primer término en (2.19) y que, por lo tanto, corresponde a una energía que no se puede observar. Es la energía de las fluctuaciones cuánticas que estarían presentes en ausencia de las placas. Obtenemos entonces la energía neta del vacío debida a la presencia de las placas como la diferencia entre ambas energías calculadas,

$$E_0^{\text{placas}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} [E_0(a, \delta) - E_{0\text{libre}}(a, \delta)] = -\frac{\pi\hbar c}{24a}, \quad (2.24)$$

obteniendo de esta manera un valor finito. Obtenemos la densidad de la fuerza, o presión, ejercida sobre las placas por las fluctuaciones de vacío derivando con respecto al parámetro a :

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial E_0^{\text{placas}}}{\partial a} = -\frac{\pi\hbar c}{24a^2} \quad (2.25)$$

El signo menos indica que la fuerza entre las placas es atractiva. Asimismo, la variable a en el denominador indica que el valor absoluto de la fuerza aumenta con el acercamiento de las placas.

2.2. Caso general en 3D+1 con condiciones de Dirichlet

En esta sección extendemos el sistema anterior al caso más general de 3 dimensiones espaciales y 1 temporal. Situamos dos placas conductoras idénticas paralelas entre sí en el vacío. Las placas no poseen carga libre y ninguna diferencia de potencial se aplica sobre ellas. Puesto que la interacción ocurre en la dirección perpendicular al plano de las placas, suponemos que las dimensiones de estas son mucho mayores que la separación que hay entre ellas. La superficie de las placas se extiende en el plano XY, el eje Z es perpendicular a las placas.

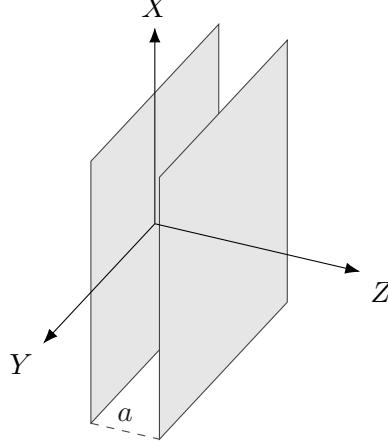


Figura 1: Placas paralelas en el vacío a una distancia de separación igual a a .

Estudiamos las fluctuaciones cuánticas de un campo escalar en el vacío. El hecho de estar el campo confinado entre las placas fuerza un cierto comportamiento en los campos. Estos están obligados a satisfacer las condiciones de frontera que introducen las placas, lo cual da lugar a que la diferencia entre los campos dentro de las placas y fuera, origine una diferencia de presión entre los modos de dentro y fuera de las placas, dando lugar a una fuerza neta entre ellas que calcularemos a continuación. Para empezar, escribimos la densidad del Lagrangiano que define el sistema. Utilizamos, a partir de aquí y en el resto del trabajo, el sistema de unidades naturales, $\hbar = c = 1$.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi(\mathbf{x})\partial_\nu\phi(\mathbf{x}) + K(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}), \quad (2.26)$$

donde $\mathbf{x} = (t, x, y, z)$, $g^{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski, definida por la matriz

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

y $K(\mathbf{x})$ es una fuente que introducimos a mano para reflejar el origen de la interacción. La dinámica del campo viene determinada por la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.28)$$

que aplicada al Lagrangiano que define nuestro sistema se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \left(-\frac{1}{2}g^{\sigma\nu}\partial_\nu\phi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\partial_\mu\phi(\mathbf{x}) \right) - K(\mathbf{x}) &= 0 \\ -\partial^\lambda\partial_\lambda\phi(\mathbf{x}) - K(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por tanto, llegamos a la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial^2\phi(\mathbf{x})}{\partial t^2} - \nabla^2\phi(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}), \quad (2.30)$$

donde ∇^2 es el Laplaciano en 3D y se asumen condiciones de contorno de Dirichlet, propias de las placas conductoras,

$$\phi(z=0) = \phi(z=a) = 0. \quad (2.31)$$

Introducimos la función de Green mediante la ecuación (2.29) como

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{T.E.} K(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (2.32)$$

donde $K(\mathbf{x}')$ es la fuente del campo en \mathbf{x}' vista antes y la función de Green es el propagador, representa la transferencia de la interacción de \mathbf{x}' a \mathbf{x} . Las siglas $T.E.$ indican que integramos en todo el espacio. Del mismo modo podemos expresar la fuente en \mathbf{x} como

$$K(\mathbf{x}) = \int_{T.E.} K(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (2.33)$$

Sustituyendo ambas expresiones en (2.29), obtenemos la ecuación correspondiente a la función de Green,

$$-\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.34)$$

donde las derivadas operan sobre la variable \mathbf{x} , pero debido a la simetría de la función de Green en las dos coordenadas, la misma ecuación se ha de satisfacer en \mathbf{x}' . La solución deberá de exhibir la propiedad de posible intercambio entre \mathbf{x} y \mathbf{x}' .

La geometría del sistema muestra invarianza traslacional en el plano XY, que es el plano de las placas. Además, trabajamos en una frecuencia fija que más adelante generalizaremos. Esto hace que podamos considerar la transformada de Fourier,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} g(z, z'; \omega, \mathbf{k}), \quad (2.35)$$

donde $g(z, z'; \omega, \mathbf{k})$ es la función reducida de Green, que por simplicidad expresaremos como $g(z, z') = g(z, z'; \omega, \mathbf{k})$. Esta función está dada a una frecuencia ω y un momento transversal $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ fijos. Hemos denotado por \mathbf{x}_\perp a las coordenadas transversales a la dirección de la interacción del campo, $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$. Recordando que,

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \delta(t - t') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \delta(z - z'), \end{aligned}$$

y sustituyéndolo junto con (2.35) en (2.34) llegamos a la siguiente relación que satisface la función de Green reducida,

$$\left(-\omega^2 + k^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) g(z, z') = \delta(z - z'), \quad (2.36)$$

junto con las condiciones de contorno (2.31) que se traducen ahora en

$$g(0, z') = g(a, z') = 0. \quad (2.37)$$

Por conveniencia, definimos $\lambda^2 := \omega^2 - k^2$,

$$\left(-\lambda^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) g(z, z') = \delta(z - z'). \quad (2.38)$$

Recordando las ecuaciones resueltas en la anterior sección y en el anexo B, sabemos que la solución es una combinación lineal de exponenciales complejas; o más concretamente, de

funciones sinusoidales pues la función deberá anularse en dos puntos concretos de z ($z = 0$ y $z = a$). De acuerdo con estas características, la única posible solución es

$$g(z, z') = \begin{cases} g_1(z, z') = A \sin(\lambda z) & , 0 < z < z' < a \\ g_2(z, z') = B \sin(\lambda(z - a)) & , 0 < z' < z < a, \end{cases} \quad (2.39)$$

siendo A y B constantes en la variable z^5 . La función de Green es continua, así que imponemos esta propiedad con $g_1(z', z') = g_2(z', z')$. De esta igualdad sacamos una relación entre las constantes A y B :

$$A \sin(\lambda z') = B \sin(\lambda(z' - a)) \quad (2.40)$$

Por otra parte, si integramos la ecuación (2.38) en un entorno de z' , es decir, en $z \in (z'^-, z'^+)$,

$$-\int_{z'^-}^{z'^+} \frac{\partial^2}{\partial z^2} g(z, z') dz - \lambda^2 \int_{z'^-}^{z'^+} g(z, z') dz = \int_{z'^-}^{z'^+} \delta(z, z') dz,$$

y teniendo en cuenta que $g(z, z')$ es continua en $z = z'$, llegamos a la siguiente condición en la derivada de la función de Green reducida:

$$-\left(\frac{\partial g_2(z', z')}{\partial z} - \frac{\partial g_1(z', z')}{\partial z}\right) + 0 = 1,$$

fijando así una segunda ecuación que nos permitirá conocer las constantes A y B . Obtenemos por lo tanto el sistema lineal

$$\begin{cases} A \sin(\lambda z') = B \sin(\lambda(z' - a)) \\ A \cos(\lambda z') - B \cos(\lambda(z' - a)) = \frac{1}{\lambda}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Despejando A y B :

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{\lambda} \frac{\sin(\lambda(z' - a))}{\sin(\lambda a)} \\ B = -\frac{1}{\lambda} \frac{\sin(\lambda z')}{\sin(\lambda a)} \end{cases} \quad (2.42)$$

En consecuencia, la solución de la función reducida de Green es

$$g(z, z') = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda} \frac{\sin(\lambda(z' - a))}{\sin(\lambda a)} \sin(\lambda z) & , 0 < z < z' < a \\ -\frac{1}{\lambda} \frac{\sin(\lambda z')}{\sin(\lambda a)} \sin(\lambda(z - a)) & , 0 < z' < z < a. \end{cases} \quad (2.43)$$

Reescribimos la anterior función con otra notación más compacta,

$$g(z, z') = -\frac{\sin(\lambda z_<) \sin(\lambda(z_> - a))}{\lambda \sin(\lambda a)}, \quad (2.44)$$

donde $z_> = \max\{z, z'\}$ y $z_< = \min\{z, z'\}$. Como hemos dicho anteriormente, la función de Green es el propagador de la interacción y por lo tanto se corresponde con el valor esperado del producto ordenado de los campos,

$$\langle T\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}') \rangle = \frac{1}{i} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (2.45)$$

donde $\langle T\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}') \rangle$ es el valor esperado del vacío del producto de los campos ordenado temporalmente. Recordamos que el tensor energía-momento, que hemos deducido en el Anexo B nos informa acerca de distintas propiedades físicas del sistema. El valor esperado de la

⁵Es decir, en general $A \equiv A(z')$, $B \equiv B(z')$.

componente T_{00} nos informa de la densidad de energía, que integrada nos proporciona la energía total del sistema. Esto nos permite analizar propiedades, tanto locales como globales del sistema. Para un campo escalar, el tensor viene dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi + g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.46)$$

El valor esperado $\langle T_{00} \rangle$ es la densidad de energía del sistema,

$$\langle T_{00} \rangle = \langle \phi(\mathbf{x}) T_{00} \phi(\mathbf{x}') \rangle,$$

cuya integración en el espacio nos da la energía de vacío en la región considerada. Formalmente lo podemos expresar como

$$E_0 = \int_0^a \langle T_{00} \rangle dz. \quad (2.47)$$

Calculamos $\langle T_{00} \rangle$ de acuerdo con las ecuaciones (2.46) y (2.45).

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle &= \frac{1}{i} \left[\partial_0 \partial_{0'} + \frac{1}{2} (-\partial_0 \partial_{0'} + \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}'}) \right] G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2i} [\partial_0 \partial_{0'} + \partial_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{x}'}] G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión completa de la función de Green, podemos escribir en términos de la función de Green reducida

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \left(\omega^2 + k^2 - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} \right) g(z, z')|_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\lambda} \left[(\omega^2 + k^2) \frac{\sin(\lambda z) \sin(\lambda(z-a))}{\sin(\lambda a)} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 \frac{\cos(\lambda z) \cos(\lambda(z-a))}{\sin(\lambda a)} \right] \end{aligned}$$

y separar la densidad reducida de energía $\langle t_{00} \rangle$,

$$\langle T_{00} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \langle t_{00} \rangle, \quad (2.48)$$

tal que

$$\langle t_{00} \rangle = -\frac{1}{2i\lambda} \left[(\omega^2 + k^2) \frac{\sin(\lambda z) \sin(\lambda(z-a))}{\sin(\lambda a)} + \lambda^2 \frac{\cos(\lambda z) \cos(\lambda(z-a))}{\sin(\lambda a)} \right].$$

Recordando que $\lambda^2 = \omega^2 - k^2$

$$\begin{aligned} \langle t_{00} \rangle &= -\frac{1}{2i\lambda \sin(\lambda a)} \omega^2 [\sin(\lambda z) \sin(\lambda(z-a)) + \cos(\lambda z) \cos(\lambda(z-a))] \\ &\quad + \frac{1}{2i\lambda \sin(\lambda a)} k^2 [-\sin(\lambda z) \sin(\lambda(z-a)) + \cos(\lambda z) \cos(\lambda(z-a))] \\ &= -\frac{1}{2i\lambda \sin(\lambda a)} [\omega^2 \cos(\lambda a) - k^2 \cos(\lambda(2z-a)a)] \end{aligned}$$

Calculamos la energía total entre las placas, integrando esta expresión en la región indicada,

$$E_0 = \int_0^a \langle T_{00} \rangle dz = \int_0^a dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \langle t_{00} \rangle. \quad (2.49)$$

Calculamos primeramente la integral en z

$$\begin{aligned}\int_0^a dz \langle t_{00} \rangle &= \frac{1}{2i} \int_0^a \frac{1}{\lambda \sin(\lambda a)} [-k^2 \cos(\lambda(2z-a)) + \omega^2 \cos(\lambda a)] dz \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{\lambda} \left[\frac{k^2}{\lambda} - \omega^2 a \cot(\lambda a) \right]\end{aligned}\quad (2.50)$$

Debido a que el primer sumando no depende de ningún parámetro del sistema, no contribuye a la fuerza neta entre las placas y corresponde a una energía del fondo (de manera similar a los que vimos en el caso unidimensional) por lo tanto lo eliminamos como una constante independiente del sistema que estamos tratando. Volviendo a la expresión completa (2.49), nos queda una energía

$$E_0 = -\frac{a}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega^2 \cot(\lambda a)}{\lambda}, \quad (2.51)$$

que es claramente divergente. Para obtener un significado físico de esta expresión, es necesario utilizar algún método de regularización. En el apartado anterior utilizamos una función exponencial decreciente que hacía el integrando convergente permitiendo obtener un valor para la suma infinita (o para la integral en su caso) y aislar las posibles divergencias. En esta ocasión vamos a utilizar una regularización dimensional que nos permite extender analíticamente la integral a un dominio en el que la integral converja y cuyo resultado esté bien definido cuando volvemos a la dimensión de nuestro problema.

Extendemos analíticamente la función a una dimensión general d , evitando así las divergencias existentes en dimensión 3. Una vez desarrollado el cálculo, hacemos el límite del resultado para $d+1=3$. En primer lugar, si realizamos una rotación en frecuencias al eje complejo, $\omega = i\zeta$ tenemos,

$$\begin{cases} \omega = i\zeta \\ \lambda = i\sqrt{k^2 + \zeta^2} \equiv i\kappa \end{cases} \quad (2.52)$$

La expresión (2.51) queda

$$E_0 = -\frac{a}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\pi} \frac{\zeta^2 \cot(i\kappa a)}{\kappa} = -\frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d k d\zeta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{\zeta^2 \coth(\kappa a)}{\kappa}.$$

Haciendo ahora un cambio de variable a polares en $\zeta = \kappa \cos \theta$, y $d^d k d\zeta = \kappa^d \sin^{d-1}(\theta) d\kappa d\theta d\varphi$ ($\kappa \in [0, \infty]$, $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$), tenemos

$$\begin{aligned}E_0 &= -\frac{a}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\kappa^d \sin^{d-1} \theta d\kappa d\theta d\varphi}{(2\pi)^{d+1}} \frac{(\kappa \cos \theta)^2 \coth(\kappa a)}{\kappa} \\ &= -\frac{a}{2} \frac{\pi^{d+1}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} + 1)} \int_0^{\infty} \frac{\kappa^{d+1}}{(2\pi)^{d+1}} \coth(\kappa a) d\kappa.\end{aligned}\quad (2.53)$$

Expresando el integrando como,

$$-\frac{a}{2} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} + 1)} \int_0^{\infty} \frac{\kappa^{d+1}}{(2\pi)^{d+1}} \left(1 + \frac{2}{e^{2\kappa a} - 1} \right) d\kappa,$$

queda explícito que la primera integral diverge, pero se trata de un término independiente de los parámetros relevantes en nuestro sistema y se puede descartar. De esta manera, la parte de la energía que depende de la configuración dada y necesitamos evaluar es

$$E_0 = -\frac{a}{2} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} + 1)} \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{(2\pi)^{d+1}} \frac{2\kappa^{d+1}}{e^{2\kappa a} - 1}. \quad (2.54)$$

Utilizando la igualdad con las funciones Gamma y Zeta de Riemann

$$\int_0^\infty dy \frac{y^{s-1}}{e^y - 1} = \Gamma(s)\zeta(s) \quad (2.55)$$

y llamando $y = 2\kappa a$ la expresión (2.54) queda

$$E_0 = -\frac{a}{2} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2} + 1)} \frac{1}{(2a)^{d+2}} \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_0^\infty dy \frac{y^{d+1}}{e^y - 1}.$$

En nuestro caso $d + 1 = 3$ por lo tanto obtenemos el valor finito

$$E_0 = -\frac{\Gamma(4)\zeta(4)}{96a^2\pi^2} = -\frac{\pi^2}{1440a^3}, \quad (2.56)$$

donde hemos empleado que $\zeta(4) = \pi^4/90$. Esta expresión corresponde al modo TE del campo electromagnético. Como habíamos discutido, los modos eléctrico y magnético se desacoplan en esta situación y se pueden tratar como dos campos escalares independientes. Además, las contribuciones de cada uno de ellos a la energía de vacío son exactamente iguales, lo que implica que la energía de Casimir del campo electromagnético es exactamente el doble de la calculada en (2.56). La fuerza entre las placas se obtiene derivando la energía con respecto a la separación entre ellas, a .

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial E_0}{\partial a} = -\frac{\pi^2}{480a^4} \quad (2.57)$$

Notamos que, de la misma manera que en el caso del sistema unidimensional, la fuerza va a ser atractiva, es decir, dos placas conductoras en el vacío se van a atraer con una intensidad inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia que las separa.

2.3. Caso general con potencial delta de Dirac

A continuación, extendemos el sistema de la sección anterior para el caso en que la placas no son necesariamente conductoras. Examinaremos el caso de campos escalares sin masa interaccionando con dos potenciales delta situados a una distancia a . La interacción viene determinada por las constantes de acople $\lambda, \lambda' \in [0, +\infty)$, que permiten generalizar las condiciones de contorno y analizar casos más generales. Aunque está fuera del alcance de este trabajo, considerar representar las placas con las deltas y tomando las constantes de acople asociadas a cada una, permite identificar la naturaleza de las divergencias que ocurren. Empezamos escribiendo el Lagrangiano asociado a este problema,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi(\mathbf{x})\partial_\nu\phi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{a}\delta(z)\phi^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{a}\delta(z-a)\phi^2(\mathbf{x}) + K(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}), \quad (2.58)$$

donde seguimos utilizando la métrica anterior para asegurar el término cinético definido positivo, y hemos añadido un potencial de interacción formado por dos funciones delta en $z = 0$ y $z = a$.

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda}{a}\delta(z)\phi^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{a}\delta(z-a)\phi^2(\mathbf{x}) \quad (2.59)$$

La función $K(\mathbf{x})$ representa la fuente de interacción que dará lugar a las ecuaciones que satisface la función de Green. El campo y la fuente satisfacen (2.32) y (2.33). Esta vez procedemos con el Principio de Mínima Acción para calcular la ecuación de movimiento. Definimos la acción en términos de la densidad del Lagrangiano como

$$S = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathcal{L} d\mathbf{x}, \quad (2.60)$$

siendo \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 los puntos inicial y final, puntos que se mantienen fijos y por lo tanto en los que los campos no sufren variaciones. Por el Principio de Mínima Acción se cumple $\delta S = 0$ para variaciones infinitesimales del campo, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(\mathbf{x})} \delta \phi(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(\mathbf{x}))} \delta (\partial_\mu \phi(\mathbf{x})) \right) \\ &= \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{x} \left[\left(K(\mathbf{x}) - \frac{\lambda}{a} \delta(z) \phi(\mathbf{x}) - \frac{\lambda'}{a} \delta(z-a) \phi(\mathbf{x}) \right) \delta \phi(\mathbf{x}) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \partial_\nu \phi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \partial_\mu \phi(\mathbf{x}) \right) \delta (\partial_\sigma \phi(\mathbf{x})) \right].\end{aligned}$$

Como $\delta(\partial_\sigma \phi(\mathbf{x})) = \partial_\sigma(\delta \phi(\mathbf{x}))$, en el último sumando aplicamos la derivada del producto y se reduce a

$$-\partial_\sigma \left[\left(-\frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \partial_\nu \phi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \partial_\mu \phi(\mathbf{x}) \right) \delta \phi(\mathbf{x}) \right] + \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \delta \phi(\mathbf{x}).$$

El primer término es una derivada total y da lugar a un término de superficie que podemos ignorar puesto que mantenemos los extremos fijos, $\delta \phi(\mathbf{x}_1) = \delta \phi(\mathbf{x}_2) = 0$. Por lo tanto,

$$0 = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{x} \left[K(\mathbf{x}) - \frac{\lambda}{a} \delta(z) \phi(\mathbf{x}) - \frac{\lambda'}{a} \delta(z-a) \phi(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \delta \phi(\mathbf{x}).$$

Lo cual es cierto si el integrando es idénticamente nulo. Así, llegamos a la ecuación que satisface el campo,

$$-\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\lambda}{a} \delta(z) \phi(\mathbf{x}) + \frac{\lambda'}{a} \delta(z-a) \phi(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}). \quad (2.61)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.32) y (2.33) y teniendo en cuenta la expresión de la función completa de Green, $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ en (2.35), escribimos la ecuación en términos de la función de Green reducida,

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 + \frac{\lambda}{a} \delta(z) + \frac{\lambda'}{a} \delta(z-a) \right] g(z, z') = \delta(z-z'), \quad (2.62)$$

donde hemos llamado $\kappa^2 = k^2 - \omega^2$. La función de Green adquiere distintos valores en las distintas regiones del espacio que dividen las placas. Resolvemos, por tanto, la ecuación anterior dividiendo el espacio en tres regiones:

- Región I: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in (-\infty, 0)\}$
- Región II: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in (0, a)\}$
- Región III: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in (a, +\infty)\}$

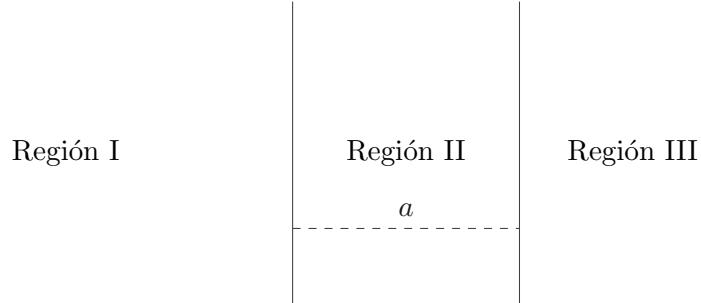


Figura 2: Regiones del espacio con placas paralelas.

Estamos interesados en calcular la función de Green en la situación en la que tanto el punto fuente (\mathbf{x}' , por ejemplo) como el punto donde medimos (que sería entonces el punto \mathbf{x}) se

encuentran en la misma región. En el Anexo D.1 están calculadas, explícitamente, las funciones de Green en cada región del espacio con los puntos z y z' en todas las situaciones posibles. Aquí extraemos del anexo aquellas que son de interés para proseguir el cálculo de la energía de Casimir.

- Para la región I, $z, z' < 0$,

$$g_I(z, z') = \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa(z_{<} - z_{>})} + \frac{e^{\kappa(z+z')}}{2\kappa\Delta} \left[\frac{\lambda'}{2\kappa a} \left(1 - \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) + e^{2\kappa a} \frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) \right] \quad (2.63)$$

- Para la región II, $0 < z, z' < a$,

$$\begin{aligned} g_{II}(z, z') = & \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa(z_{<} - z_{>})} + \frac{1}{2\kappa\Delta} \left[-e^{\kappa(z+z')} \frac{\lambda'}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) - e^{-\kappa(z+z')} e^{2\kappa a} \frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2\lambda\lambda'}{(2\kappa a)^2} \cosh \kappa(z - z') \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

- Para la región III, $z, z' > a$,

$$g_{III}(z, z') = \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa(z_{<} - z_{>})} + \frac{e^{-\kappa(z+z'-2a)}}{2\kappa\Delta} \left[-\frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 - \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) - \frac{\lambda'}{2\kappa a} e^{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) \right] \quad (2.65)$$

Recuperamos las relaciones (2.45) y (2.46) de la anterior sección para calcular las componentes del tensor energía-momento con la función de Green. En los anteriores capítulos se ha calculado la energía del sistema a partir de la componente $(0, 0)$ del tensor $T_{\mu\nu}$. La componente $(0, 0)$ es la densidad de energía del sistema y las demás componentes de la diagonal, en nuestro caso $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 3)$, representan las presiones ejercidas sobre el sistema en los ejes X, Y y Z respectivamente. Esta vez, utilizaremos las presiones ejercidas sobre el sistema para calcular la fuerza ejercida sobre las placas. Por tanto, calculamos la componente $(3, 3)$ del tensor energía-momento, la cual denotamos T_{zz} . Procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle &= \frac{1}{i} \left[\partial_z \partial_{z'} - \frac{1}{2} (-\partial_0 \partial_{0'} + \partial_{\mathbf{x}_\perp} \partial_{\mathbf{x}'_\perp} + \partial_z \partial_{z'}) \right] G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2i} [\partial_0 \partial_{0'} - \partial_{\mathbf{x}_\perp} \partial_{\mathbf{x}'_\perp} + \partial_z \partial_{z'}] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} g(z, z')|_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} [\omega^2 - k^2 + \partial_z \partial_{z'}] g(z, z')|_{z' \rightarrow z} \end{aligned}$$

Por conveniencia, definimos el tensor energía-momento reducido

$$\langle T_{zz} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \langle t_{zz} \rangle, \quad (2.66)$$

que está evaluado en puntos tal que $z = z'$.

$$\langle t_{zz} \rangle = \frac{1}{2i} [-\kappa^2 + \partial_z \partial_{z'}] g(z, z')|_{z' \rightarrow z} \quad (2.67)$$

La densidad de fuerza sobre cada placa es la diferencia de presiones entre ambos lados de las placas,

$$\mathcal{F} = \langle T_{zz} \rangle|_{z=a^-} - \langle T_{zz} \rangle|_{z=a^+}. \quad (2.68)$$

Por lo tanto, el tensor energía-momento a ambos lados de la placa situada en a , y evaluado precisamente en el punto de la discontinuidad $z = z' = a$ da como resultado

$$\langle t_{zz} \rangle|_{z=a^-} = -\frac{\kappa}{2i} \left[1 + \frac{2}{(1 + \frac{2\kappa a}{\lambda}) (1 + \frac{2\kappa a}{\lambda'}) e^{2\kappa a} - 1} \right] \quad (2.69)$$

$$\langle t_{zz} \rangle|_{z=a^+} = -\frac{\kappa}{2i}, \quad (2.70)$$

cuyos cálculos se pueden ver en el Anexo D.2. Así, ya podemos llegar a la expresión de la densidad de fuerza ejercida sobre cada placa,

$$\mathcal{F} = \langle T_{zz} \rangle|_{z=a^-} - \langle T_{zz} \rangle|_{z=a^+} = -\frac{1}{32\pi^2 a^4} \int_0^\infty \frac{y^3}{(1 + \frac{y}{\lambda})(1 + \frac{y}{\lambda'}) e^y - 1} dy. \quad (2.71)$$

Esta expresión nos permite calcular la fuerza de vacío entre dos placas con acoplos arbitrarios, se les suele llamar semitransparentes. Utilizando la librería `scipy.integrate` de *Python* para resolver numéricamente la integral en (2.71), vemos sus valores, que son finitos, como función de los parámetros λ y λ' .

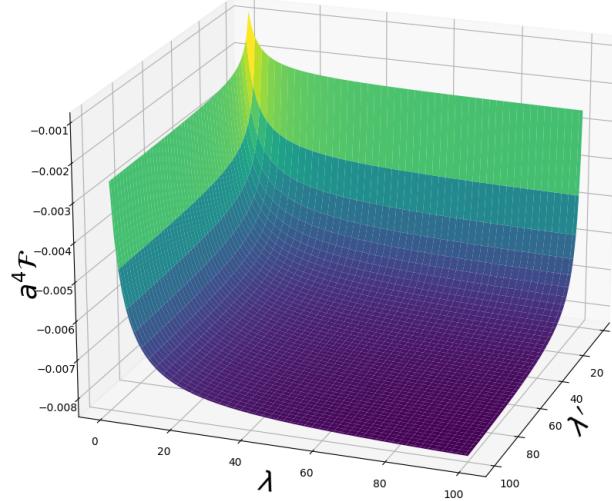


Figura 3: Densidad de la fuerza en función de los parámetros λ y λ' multiplicada por a^4 .

Notamos en la Figura 3 que la fuerza se hace muy pequeña para valores pequeños de λ y λ' y aumenta su valor absoluto a medida que aumentan en magnitud los valores de las constantes de acople, hasta llegar a una zona donde se vuelve prácticamente constante. Para simplificar la expresión suponemos $\lambda = \lambda'$. Entonces, trabajamos con la siguiente expresión:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{32\pi^2 a^4} \int_0^\infty \frac{y^3}{(1 + \frac{y}{\lambda})^2 e^y - 1} dy \quad (2.72)$$

Utilizamos de nuevo la librería `scipy.integrate` de *Python* para resolver numéricamente esta integral. Vemos la misma dependencia que en la Figura 3, pero en una dimensión.

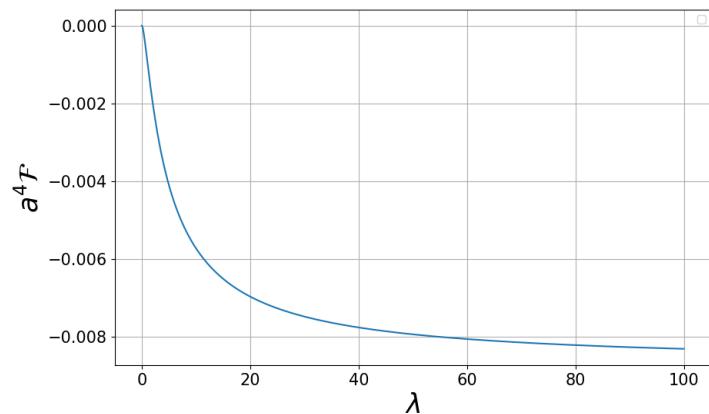


Figura 4: Densidad de la fuerza en función del parámetro λ multiplicada por a^4 .

Vamos a corroborar el comportamiento visto en las Figuras 3 y 4 de forma analítica. Pongamos que $\lambda \gg 1$. Con esta condición tenemos lo siguiente:

$$\mathcal{F} \approx -\frac{1}{32\pi^2 a^4} \int_0^\infty \frac{y^3}{e^y - 1} dy \stackrel{(2.55)}{=} -\frac{\zeta(4)\Gamma(4)}{32\pi^2 a^4} = -\frac{1}{32\pi^2 a^4} \frac{6\pi^4}{90} = -\frac{\pi^2}{480a^4} \quad (2.73)$$

Comparando este resultado con el del anterior capítulo (2.57), notamos que obtenemos el mismo resultado, ya que al hacer $\lambda \rightarrow \infty$, tenemos placas conductores. Por otro lado, si ahora suponemos $\lambda \ll 1$:

$$\mathcal{F} \approx -\frac{1}{32\pi^2 a^4} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 y^3}{y^2 e^y} dy = -\frac{1}{32\pi^2 a^4} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 y}{e^y} dy = -\frac{\lambda^2 \Gamma(2)}{32\pi^2 a^4} = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2 a^4} \quad (2.74)$$

Efectivamente, estos límites coinciden con lo visto en las Figuras anteriores 3 y 4. Cuando las constantes de acople se hacen pequeñas, obtenemos una fuerza prácticamente nula. Si las constantes de acople son muy grandes, tenemos una dependencia constante con los parámetros y negativa.

3. Corteza esférica con potencial delta de Dirac

Hemos visto que el confinamiento de las fluctuaciones del punto cero entre las placas paralelas dan lugar a fuerzas de atracción entre ellas. Sin embargo, esto no es una propiedad general de las fuerzas de vacío. De hecho, una de las incógnitas del efecto Casimir es que, en general, no hay un método para predecir si la energía de vacío de una cierta geometría, satisfaciendo ciertas condiciones de contorno, da lugar a fuerzas atractivas o repulsivas. En [8] Kenneth y Klich demostraron que la energía de vacío entre cuerpos idénticos siempre es de atracción. Sin embargo, cuando hablamos de interacción entre cuerpos distintos o de energías propias de cuerpos, la historia es muy distinta.

Tras el descubrimiento de la fuerza de atracción entre las placas, se hipotetizó acerca de si la energía de vacío podría ser la que estabilizara la existencia del electrón, ya que en aquella época no se sabía cómo compensar la existencia de la fuerza repulsiva de Coulomb. Con la esperanza de que la energía de vacío de una esfera conductora (con la que se podía modelar el electrón) diera lugar a la fuerza atractiva necesaria, Tim Boyer, en 1968, hizo un cálculo asombroso de la energía de interacción de los campos electromagnéticos con una corteza esférica conductora, se puede leer en [9]. Sin embargo, la sorpresa fue que dicha energía resultó ser de repulsión.

Mostramos en esta sección cómo tratar las fluctuaciones de un campo escalar interaccionando con una corteza esférica. Para darle generalidad, modelamos la esfera mediante la función delta de Dirac con constante de acople positiva λ , cuyo valor nos permitirá recorrer varios escenarios. En esta sección además, trabajamos con las coordenadas esféricas $\{r, \theta, \varphi\}$, que se corresponden con las coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ con las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\varphi \in [0, \pi]$. Notamos que este sistema está dotado de simetría rotacional, así la dirección de mayor interés será r . Tomando $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$, y $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, t)$, la densidad del Lagrangiano se expresa

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi(\mathbf{x}) \partial_\nu \phi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{a} \delta(r - a) \phi^2(\mathbf{x}) + K(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

con el término de interacción

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{a} \delta(r - a) \phi^2(\mathbf{x}). \quad (3.3)$$

Haciendo uso del Principio de Mínima Acción igual que procedimos a hacer en la sección anterior, o mediante las ecuaciones Euler-Lagrange, llegamos a la ecuación de movimiento,

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\lambda}{a} \delta(r - a) \right] \phi(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}). \quad (3.4)$$

En consecuencia a esta ecuación, definimos el campo a partir de la función de Green como hicimos en (2.32). Así, reescribimos (3.4) en términos de la función de Green como

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\lambda}{a} \delta(r - a) \right] G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.5)$$

La función de Green expresada a una frecuencia dada, se escribe como la transformada de Fourier

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (3.6)$$

con $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ exhibiendo la geometría esférica en su definición como

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta', \varphi') g_l(r, r'), \quad (3.7)$$

donde $Y_l^m(\theta, \varphi)$ son las funciones de los armónicos esféricos y $g_l(r, r')$ las funciones reducidas de Green. Los armónicos esféricos están definidos como

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \quad (3.8)$$

con $P_l^m(x)$ polinomio asociado de Legendre. Estas funciones cumplen la condición de ortonormalización

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_l^m(\theta, \varphi) Y_{l'}^{m'*}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}. \quad (3.9)$$

Las funciones $Y_l^m(\theta, \varphi)$ forman una base completa y se pueden relacionar como

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (3.10)$$

A continuación, desarrollamos la ecuación (3.5) en coordenadas esféricas. Teniendo en cuenta que podemos escribir la delta de Dirac como

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \quad (3.11)$$

y la derivada segunda sobre \mathbf{x} como

$$-\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (3.12)$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano en coordenadas esféricas, concluimos que (3.5) queda reducida a

$$\left[-\nabla^2 - \omega^2 + \frac{\lambda}{a} \delta(r - a) \right] \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.13)$$

Usando (3.10) y escribiendo el laplaciano en esféricas, desarrollamos (3.13) para llegar a la siguiente ecuación que satisface la función reducida de Green,

$$\left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \kappa^2 + \frac{\lambda}{a} \delta(r - a) \right] g_l(r, r') = \frac{\delta(r - r')}{r^2}, \quad (3.14)$$

donde hemos definido $\kappa^2 = -\omega^2$ por conveniencia. Para resolverla, diferenciamos dos regiones en el espacio.

- Región I: $\{(r, \theta, \varphi) \in [0, a) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)\}$
- Región II: $\{(r, \theta, \varphi) \in (a, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)\}$

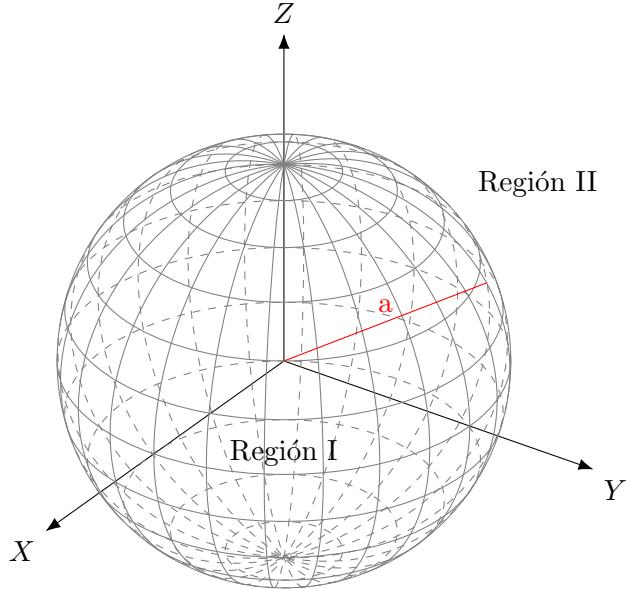


Figura 5: Regiones del espacio con potencial esférico.

La solución de la parte homogénea de la ecuación (3.14), dentro o fuera de la esfera es una combinación lineal de las funciones esféricas modificadas de Bessel $i_l(\kappa r)$ y $k_l(\kappa r)$. Para más información sobre ellas, extendemos su uso y propiedades en el Anexo E. Estas funciones cumplen la relación del Wronskiano

$$i_l'(x)k_l(x) - k_l'(x)i_l(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (3.15)$$

Nos interesa conocer la función de Green en aquellas regiones donde tanto el punto fuente, r' , como el punto donde medimos, r , están en la misma zona. Estas están calculadas detalladamente en el Anexo G.1 y son,

- Región I, para $r, r' < a$

$$g_I(r, r') = \kappa \left(i_l(\kappa r_{<})k_l(\kappa r_{>}) - i_l(\kappa r) i_l(\kappa r') \frac{\lambda \kappa a k_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \right) \quad (3.16)$$

- Región II, para $r, r' > a$

$$g_{II}(r, r') = \kappa \left(i_l(\kappa r_{<})k_l(\kappa r_{>}) - k_l(\kappa r) k_l(\kappa r') \frac{\lambda \kappa a i_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \right) \quad (3.17)$$

Con las funciones de Green determinadas, calculamos las componentes del tensor energía-momento. Empezamos por la componente $(1, 1)$, que es la radial, haciendo uso de las relaciones (2.46) y (2.45). Utilizamos la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas,

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

La componente radial nos queda

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \partial_r \partial_{r'} - \frac{1}{2} (-\partial_0 \partial_{0'} + \partial_r \partial_{r'} + r^2 \partial_\theta \partial_{\theta'} + r^2 \sin^2 \theta \partial_\varphi \partial_{\varphi'}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial_r \partial_{r'} - \kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right). \end{aligned}$$

La simetría rotacional del sistema nos permite expresar

$$\langle T_{rr} \rangle = \frac{1}{2i} \left(\partial_r \partial_{r'} - \kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}}.$$

Haciendo uso de la expresión de la función de Green completa (3.9), tenemos

$$\langle T_{rr} \rangle = \frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\partial_r \partial_{r'} - \kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_l(r, r') \Big|_{r' \rightarrow r}, \quad (3.19)$$

cuya notación se puede simplificar si definimos el tensor reducido, $\langle t_{rr} \rangle$,

$$\langle T_{rr} \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \langle t_{rr} \rangle. \quad (3.20)$$

La presión sobre la superficie de la esfera viene de la discontinuidad de la componente radial del tensor energía momento, $\langle t_{rr} \rangle|_{r=a^-} - \langle t_{rr} \rangle|_{r=a^+}$, que calculamos a continuación.

Adviértase que el término de la función de Green que corresponde a la parte libre, se cancela cuando consideramos los modos tanto de dentro como de fuera de la esfera y, como consecuencia, esos no dan una contribución a la energía de vacío.

Evaluamos el tensor para la región I,

$$\begin{aligned} \langle t_{rr} \rangle|_{r < a} &= \frac{1}{2i} \left(\partial_r \partial_{r'} - \kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_I(r, r')|_{r' \rightarrow r} \\ &= \frac{1}{2i} \left[\kappa^3 \left(i'_l(\kappa r) k'_l(\kappa r) - i_l'^2(\kappa r) \frac{\lambda \kappa a k_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \right) - \left(\kappa^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_I(r, r) \right]. \end{aligned}$$

En la región II,

$$\begin{aligned} \langle t_{rr} \rangle|_{r > a} &= \frac{1}{2i} \left(\partial_r \partial_{r'} - \kappa^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_{II}(r, r')|_{r' \rightarrow r} \\ &= \frac{1}{2i} \left[\kappa^3 \left(i'_l(\kappa r) k'_l(\kappa r) - k_l'^2(\kappa r) \frac{\lambda \kappa a i_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \right) - \left(\kappa^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_{II}(r, r) \right]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función de Green en la corteza de la esfera, $r = a$,

$$\begin{aligned} \langle t_{rr} \rangle|_{r=a^-} - \langle t_{rr} \rangle|_{r=a^+} &= \frac{\kappa^3}{2i} \left(-i_l'^2(\kappa a) \frac{\lambda \kappa a k_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} + k_l'^2(\kappa a) \frac{\lambda \kappa a i_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \right) \\ &= -\frac{\kappa^2 \lambda}{2ai} \frac{(k_l(\kappa a) i_l(\kappa a))'}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde en la última igualdad hemos usado el Wronskiano dado en (3.15). La densidad de la fuerza total sobre la superficie de la esfera es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \langle T_{rr} \rangle|_{r=a^-} - \langle T_{rr} \rangle|_{r=a^+} \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi a} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[\int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa^2 (k_l(\kappa a) i_l(\kappa a))'}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} - \int_\infty^0 d\kappa \frac{\kappa^2 (k_l(\kappa a) i_l(\kappa a))'}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \right], \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos rotado a frecuencias complejas, $\omega = i\kappa$. Mediante el cambio de variable $x = \kappa a$ llegamos a la expresión,

$$\mathcal{F} = -\frac{\lambda}{2\pi a^4} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} dx \frac{x^2 (k_l(x)i_l(x))'}{1 + \lambda x k_l(x)i_l(x)}.$$

Utilizando las relaciones (E.19) y (E.20) obtenemos la solución en términos de las funciones modificadas de Bessel,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\frac{\lambda}{2\pi a^4} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} dx \frac{x^2 \left(\frac{K_{\nu}(x)I_{\nu}(x)}{x} \right)'}{1 + \lambda K_{\nu}(x)I_{\nu}(x)} \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi a^4} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} dx \frac{x(K_{\nu}(x)I_{\nu}(x))' - K_{\nu}(x)I_{\nu}(x)}{1 + \lambda K_{\nu}(x)I_{\nu}(x)} \\ &= -\frac{1}{2\pi a^4} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} dx \left[x \frac{d}{dx} \ln(1 + \lambda K_{\nu}(x)I_{\nu}(x)) + \frac{1}{1 + \lambda K_{\nu}(x)I_{\nu}(x)} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde hemos definido $\nu = l + \frac{1}{2}$.

La misma expresión se puede obtener calculando la densidad de energía. A partir de ahí, integrando a todo el espacio, tenemos la energía total. Existe una sutileza importante que no se aprecia si tratamos el límite fuerte (material perfectamente conductor, $\lambda \rightarrow \infty$). En el caso general, si se calcula la energía total como la suma de la densidad de energía interior más la exterior, el resultado no es correcto. La razón es porque existe una contribución a la energía que proviene de la superficie⁶. La demostración de esto tiene relación con la conservación del tensor energía-momento, pues no solo se conservan las componentes del tensor relacionadas con el volumen sino también las componentes que residen en la superficie de la geometría considerada. Milton demuestra, por ejemplo en [4], que la energía completa se puede calcular mediante la fórmula

$$E = \int_{T.E.} d\mathbf{r} \langle T_{00} \rangle = \frac{1}{2i} \int_{T.E.} d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} 2\omega^2 \mathcal{G}(r, r), \quad (3.23)$$

que se reduce a integrar la función de Green y, por lo tanto, aparecen solo términos que van con el cuadrado de las funciones de Bessel correspondientes, puesto que los términos relacionados con la parte libre no contribuyen a la energía. La expresión anterior se convierte en

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\kappa^2} d\omega \left[\frac{\lambda \kappa a k_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \int_0^{\kappa a} x^2 i_l^2(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda \kappa a i_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \int_{\kappa a}^{\infty} x^2 k_l^2(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Para cuyo cálculo empleamos las igualdades, [11],

$$\int_0^x y^2 i_l^2(y) dy = \frac{x}{2} [(x^2 + l(l+1)) i_l^2(x) - x i_l(x) i_l'(x) - x^2 i_l'^2(x)] \quad (3.24)$$

$$\int_x^{\infty} y^2 k_l^2(y) dy = -\frac{x}{2} [(x^2 + l(l+1)) k_l^2(x) - x k_l(x) k_l'(x) - x^2 k_l'^2(x)] \quad (3.25)$$

El desarrollo de la anterior integral está detallado en el Anexo G.2, donde llegamos a

$$E = -\frac{1}{2\pi a} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} x \frac{d}{dx} \ln[1 + \lambda I_{\nu}(x) K_{\nu}(x)] dx, \quad (3.26)$$

⁶Para más detalle sobre este procedimiento leer [10].

cuya derivada es precisamente la expresión de la fuerza anterior, salvo un término de contacto que no es relevante y podemos descartar. En general, no es trivial tratar esta solución y el resultado será divergente. Recordamos que estamos solo calculando el modo TE del campo electromagnético, y para tener una visión completa deberíamos analizar también el TM. Se espera cancelación de divergencias entre ellos en algún caso. Nosotros nos centraremos en el caso de acople fuerte $\lambda \rightarrow \infty$ y acople débil $\lambda \rightarrow 0$, en cuyo caso se podrá hacer una expansión perturbativa.

Analizamos primeramente el caso $\lambda \ll 1$, expandiendo el término $\ln[1 + \lambda I_\nu(x) K_\nu(x)]$ en serie potencias de λ utilizando el desarrollo de Taylor de $\ln(1 + x)$ ⁷. El primer término, lineal en λ , es divergente pero del tipo diagrama de Feynmann con forma de *tadpole* (o renacuajo). Corresponde a la Figura 6 que da una contribución infinita, pero no tiene ningún tipo de relevancia física para el caso que estamos estudiando. Son energías que no dependen de las condiciones de contorno marcadas por la esfera.

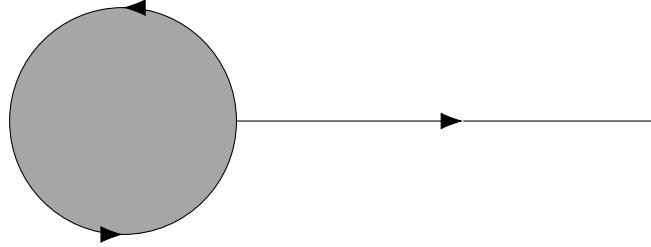


Figura 6: Tadpole.

Por esto, estudiamos directamente el término de segundo orden en λ que da lugar al término finito

$$E^{\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi a} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} x \frac{d}{dx} (I_\nu(x) K_\nu(x))^2 dx. \quad (3.27)$$

Para extraer la contribución finita, realizamos primeramente la suma de la serie en l utilizando una generalización de la siguiente propiedad encontrada en [11],

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) x y k_l(x) i_l(y) P_l(\cos \theta) = \frac{xy}{\rho} e^{-\rho}, \quad (3.28)$$

con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}$. Tras el cálculo detallado que mostramos en el Anexo G.3, podemos escribir

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) K_\nu^2(x) I_\nu^2(x) = \frac{1}{2} \int_0^{4x} \frac{e^{-z}}{z} dz, \quad (3.29)$$

permitiendo así expresar el término de segundo orden como

$$E^{\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{32\pi a}. \quad (3.30)$$

A pesar de la buena noticia de poder extraer un término finito, nos encontramos, en tercer orden la constante de acople con una divergencia logarítmica. El análisis de esta divergencia se escapa al propósito de este trabajo y no daremos detalles de su naturaleza. Bordag et al. la estudiaron por primera vez usando métodos de *heat kernel* (núcleo de calor) en [12]. También la han analizado en otros artículos como [13], [14] y [15].

$$E^{\lambda^3} \approx \frac{\lambda^3 a^2}{24\pi} \zeta(1) \quad (3.31)$$

⁷

$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \ni |x| < 1.$

Esta divergencia no se puede eliminar, lo que nos informa de que no podemos obtener una contribución finita para el caso de acople débil. Parece que la inclusión del modo TM daría algunos casos en los que la divergencia se cancelaría considerando el campo electromagnético completo. Sin embargo sí podemos extrapolar al caso de acople fuerte reproduciendo el resultado de Milton en [4] para $\lambda \gg 1$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E = -\frac{1}{2\pi a} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} x \frac{d}{dx} \ln [I_{\nu}(x) K_{\nu}(x)] dx. \quad (3.32)$$

La derivada de esta expresión da exactamente la presión encontrada en (3.22). Una evaluación asintótica de esta expresión se puede ver en [15] con el resultado

$$\mathcal{P}^{TE} = \frac{0,002817}{a^2},$$

para el modo TE. Esta expresión no coincide con la encontrada por Boyer en 1965 pues su cálculo es con el campo electromagnético. Sin embargo, el mismo análisis mostrado aquí se puede hacer para el campo escalar cumpliendo la condiciones de modo TM que, añadido al anterior reproduce exactamente el resultado de Tim Boyer.

4. Conclusiones

Este trabajo está dedicado a estudiar algunos aspectos del efecto Casimir. En él, hemos analizado tanto energías de vacío procedentes de la interacción entre dos cuerpos, como pueden ser las placas paralelas, como la energía propia de cuerpos aislados como la esfera. Aunque nos hemos centrado en las fluctuaciones cuánticas producidas por campos escalares, hemos conseguido dar generalidad al estudio situando estos campos en un fondo caracterizado por un potencial singular descrito mediante la función delta de Dirac. Esto no es una situación tan irreal como uno pudiera imaginar a primera vista. De hecho, el límite de acople fuerte, con la constante de acople tendiendo a infinito, corresponde a las condiciones de contorno de Dirichlet propias de los modos TE del campo electromagnético interaccionando con una placa conductora.

Hemos calculado la energía de Casimir utilizando el método de la suma de modos y el de las funciones de Green. Este último permite realizar un estudio tanto global como local del sistema. El cómputo de las distintas componentes del tensor energía-momento utilizando las funciones de Green, nos permite extraer y aislar los términos divergentes que en ocasiones se pueden asociar a parámetros del sistema (como la superficie) y renormalizar. Para más información se pueden consultar [16] y [17].

En general, la energía de interacción entre dos cuerpos está bien definida y va a dar algo finito. Más complicado de interpretar son las energías propias de cuerpos aislados como puede ser la esfera. En este caso, hemos comprobado cómo, en la situación general con condiciones semitransparentes de contorno, en general no podemos extraer un término finito.

Aunque mucho se ha investigado y avanzado en el estudio del efecto Casimir, todavía quedan grandes incógnitas por resolver. Se desconoce cómo las condiciones de contorno, materiales y/o geometría del sistema influye sobre las fluctuaciones cuánticas para dar lugar a fuerzas atractivas, repulsivas o nulas. Hemos comprobado cómo, mientras que las placas paralelas se atraen en el vacío, la energía de Casimir de una esfera, es de repulsión, como si tendiera a que esta se separara. Por ser un cálculo no perturbativo, no hay métodos fijos de regularización y con cada cálculo, hay que investigar qué método nos va a ayudar a aislar un término finito y dar sentido a las divergencias que ocurren. Es extraordinario que, a pesar de los distintos métodos de cálculo y de regularización (de los cuales nosotros hemos visto dos y hablado de otro en los anexos), la parte finita, relevante del sistema en cuestión, es única e independiente del sistema de regularización que se utilice.

A pesar de las dificultades que conlleva la parte experimental del efecto Casimir, los experimentos llevados a cabo concuerdan con los cálculos teóricos con una gran precisión. Por

supuesto, este tipo de experimentos ha ido mejorando su precisión en el tiempo con el desarrollo de la ciencia en la nano escala (ver [18] y las referencias incluidas), aún teniendo en cuenta las enormes dificultades que conllevan montar un experimento para medir tan diminutas fuerzas y con tal precisión.

Las limitaciones del estudio que mostramos aquí residen principalmente en la suposición de un sistema ideal. Por limitaciones propias del trabajo, nos hemos centrado sólo en los modos TE del campo electromagnético. Para obtener la fuerza total ejercida sobre el sistema, hay que sumar las componentes eléctrica y magnética. La obtención de las magnéticas sería análoga a lo que hemos hecho en este TFG, pero teniendo en cuenta las condiciones de contorno de Neumann. Si se consideran potenciales con la función delta de Dirac, el modo TM corresponde a la derivada de la delta. En el caso de cálculos de energías de interacción entre dos cuerpos situados en el vacío es más sencillo incorporar otros efectos como rugosidades, fuerzas laterales y estudios de sistemas donde aparezca tanto la atracción como la repulsión, pudiendo hablar incluso de levitación. Respuestas ópticas de los materiales son necesarias para incorporarlas en los casos en los que se necesite implementar una tecnología.

Todos nuestros cálculos están hechos suponiendo temperatura 0K.

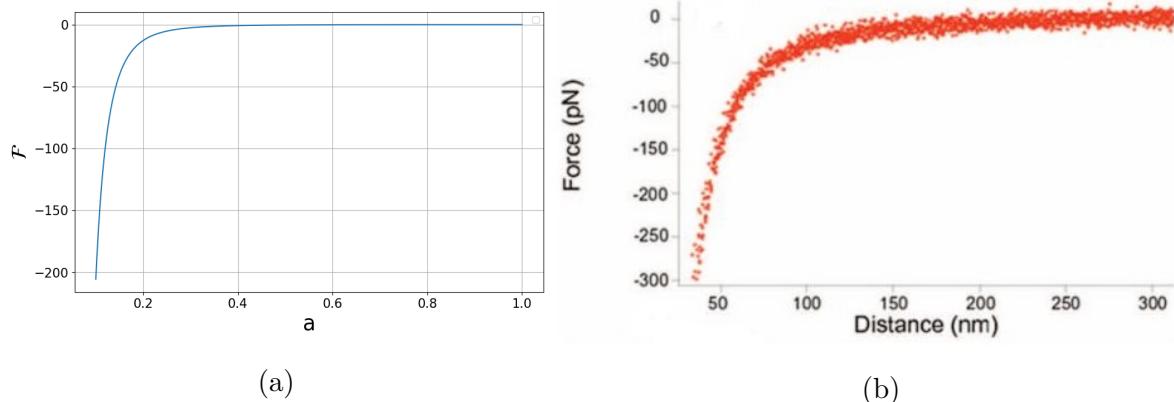


Figura 7: Comparación resultados para placas conductoras: (a) Datos teóricos de la ecuación (2.57). (b) Datos experimentales de [19].

La Figura 7 se muestra con un propósito ilustrativo solamente puesto que las gráficas no corresponden al mismo sistema físico. Los datos que aparecen en la gráfica de la izquierda son teóricos y los de la derecha se midieron con un microscopio de fuerza atómica, observando la fuerza ejercida entre una esfera y un plano; dada la dificultad que aparece al establecer el paralelismo entre placas de dimensiones microscópicas. Métodos de *Proximity Force Aproximation* PFA, (ver [20]) se utilizan después para aproximar los datos teóricos de las placas paralelas con los datos experimentales donde, como hemos dicho, es más común utilizar interacción placa-esfera.

Bibliografía

- [1] G. L. Klimchitskaya y V. M. Mostepanenko. «Casimir and Van der Waals Forces: Advances and Problems». En: *Proceedings of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University* 517 (2015), págs. 41-65. DOI: 10.5862/proc.516.4. URL: <https://doi.org/10.5862/proc.516.4>.
- [2] J. Schwinger. *Particles, Sources, and Fields*. Perseus books, 1998.
- [3] M. Bordag, U. Mohideen y V. M. Mostepanenko. *New developments in the Casimir effect*. 2001. DOI: 10.1016/S0370-1573(01)00015-1.
- [4] Kimball A. Milton. «The Casimir effect: Recent controversies and progress». En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 37 (38 2004). ISSN: 03054470. DOI: 10.1088/0305-4470/37/38/R01.

- [5] K.A. Milton. *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2001.
- [6] B. G. Korenev. *Bessel Functions and Their Applications*. Taylor & Francis, 2002.
- [7] C. Itzykson y J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory*. New York: McGraw-Hill, 1980.
- [8] Oded Kenneth e Israel Klich. «Opposites attract: A theorem about the Casimir force». En: *Physical Review Letters* 97 (16 2006). ISSN: 00319007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.160401.
- [9] Timothy H. Boyer. «Quantum electromagnetic zero-point energy of a conducting spherical shell and the casimir model for a charged particle». En: *Physical Review* 174 (5 1968). ISSN: 0031899X. DOI: 10.1103/PhysRev.174.1764.
- [10] S. A. Fulling. «Systematics of the relationship between vacuum energy calculations and heat-kernel coefficients». En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 36 (24 2003). ISSN: 03054470. DOI: 10.1088/0305-4470/36/24/320.
- [11] Israel Klich. «Casimir energy of a conducting sphere and of a dilute dielectric ball». En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 61 (2 2000). ISSN: 15502368. DOI: 10.1103/PhysRevD.61.025004.
- [12] M. Bordag, K. Kirsten y D. Vassilevich. «Ground state energy for a penetrable sphere and for a dielectric ball». En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 59 (8 1999). ISSN: 15502368. DOI: 10.1103/PhysRevD.59.085011.
- [13] N. Graham et al. «Casimir energies in light of quantum field theory». En: *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics* 572 (3-4 2003). ISSN: 03702693. DOI: 10.1016/j.physletb.2003.03.003.
- [14] H. Weigel. «Proceedings of the 6th Workshop on QFEXT». En: *Proceedings of the 6th Workshop on QFEXT*. Princeton, N.J.: RintonPress, 2004.
- [15] Kimball A. Milton. «Local and Global Casimir Energies: Divergences, Renormalization, and the Coupling to Gravity». En: *Lect. Notes Phys.* 834 (2011), págs. 39-95. DOI: 10.1007/978-3-642-20288-9_3. arXiv: 1005.0031 [hep-th].
- [16] K. A. Milton, I. Cavero-Peláez y J. Wagner. «Surface divergences and boundary energies in the Casimir effect». En: vol. 39. 2006. DOI: 10.1088/0305-4470/39/21/S52.
- [17] Inés Cavero-Peláez, Kimball A. Milton y Klaus Kirsten. «Local and global Casimir energies for a semitransparent cylindrical shell». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40 (13 2007). ISSN: 17518113. DOI: 10.1088/1751-8113/40/13/019.
- [18] Tao Gong et al. «Recent progress in engineering the Casimir effect - Applications to nanophotonics, nanomechanics, and chemistry». En: *Nanophotonics* 10 (1 2020). ISSN: 21928614. DOI: 10.1515/nanoph-2020-0425.
- [19] Federico Capasso et al. «Casimir forces and quantum electrodynamical torques: Physics and nanomechanics». En: *IEEE Journal on Selected Topics in Quantum Electronics* 13 (2 2007). ISSN: 1077260X. DOI: 10.1109/JSTQE.2007.893082.
- [20] Antoine Canaguier-Durand et al. «Casimir interaction between plane and spherical metallic surfaces». En: *Physical Review Letters* 102 (23 2009). ISSN: 00319007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.230404.
- [21] National Institute of Standards and Technology. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. 2010. URL: <https://dlmf.nist.gov/>.

Anexos

A. Resolución de la ecuación de Klein-Gordon con condiciones de contorno Dirichlet

En el capítulo 2.1 se nos presenta la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales lineal homogénea de segundo orden,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(t, x) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Para resolverla vamos a utilizar el método de separación de variables. Para ello, definimos las funciones $X : (0, a) \rightarrow \mathbb{C}$ y $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de manera que $\varphi(t, x) = T(t)X(x)$. Estamos buscando una solución no nula de la ecuación, así que existen $x_0 \in (0, a)$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $X(x_0) \neq 0$ y $T(t_0) \neq 0$. Reescribimos (A.1),

$$\frac{1}{c^2} \frac{T_{tt}(t_0)}{T(t_0)} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} = \frac{X_{xx}(x_0)}{X(x_0)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.2})$$

donde hemos separado la ecuación diferencial en un término que solo depende de la variable t y otro en función de la variable x . Debido a la independencia de estas expresiones diferenciales, igualamos las dos partes a una constante λ . Remarcar que hemos utilizado la notación

$$T_{tt}(t) = \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}, \quad X_{xx}(x) = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}. \quad (\text{A.3})$$

Ya que las condiciones de contorno están asociadas con la parte espacial de la función, vamos a resolver primero la ecuación diferencial para $X(x)$,

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \lambda X(x). \quad (\text{A.4})$$

Diferenciamos tres casos en función del valor de λ . Sabemos que los campos escalares deben tener un comportamiento oscilante, así que nos quedaremos con la solución sinusoidal. Aún así, por completitud, estudiamos todas las posibles soluciones de la ecuación.

1. $\boxed{\lambda > 0}$

La solución en este caso es

$$X(x) = A e^{\sqrt{|\lambda|}x} + B e^{-\sqrt{|\lambda|}x}, \quad A, B \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.5})$$

Aplicando las condiciones de contorno,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A e^{\sqrt{|\lambda|}a} + B e^{-\sqrt{|\lambda|}a} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Este sistema nos lleva a la expresión para A

$$A \left(e^{\sqrt{|\lambda|}a} - e^{-\sqrt{|\lambda|}a} \right) = 0, \quad (\text{A.7})$$

de la cual concluimos que en este caso $X(x) = 0$, dado que la igualdad

$$e^{\sqrt{|\lambda|}a} - e^{-\sqrt{|\lambda|}a} = e^{\sqrt{|\lambda|}a} \left(1 - e^{-2\sqrt{|\lambda|}a} \right) = 0$$

solo se puede dar si $\lambda = 0$ o $a = 0$. Por lo tanto en este caso no tenemos solución.

2. $\boxed{\lambda = 0}$

En este caso la solución es una recta.

$$X(x) = A + Bx, \quad A, B \in \mathbb{C} \quad (\text{A.8})$$

Aplicamos las condiciones de contorno,

$$\begin{cases} A = 0 \\ A + B a = 0. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Como $a \neq 0$, obligatoriamente $A = B = 0$. Por tanto, $X(x) = 0$.

3. $\boxed{\lambda < 0}$

Esta vez la solución es una combinación lineal de exponentiales imaginarias sobre $\sqrt{|\lambda|}x$.

$$X(x) = Ae^{i\sqrt{|\lambda|}x} + Be^{-i\sqrt{|\lambda|}x}, \quad A, B \in \mathbb{C} \quad (\text{A.10})$$

Aplicamos las condiciones de contorno,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{i\sqrt{|\lambda|}a} + Be^{-i\sqrt{|\lambda|}a} = 0, \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

lo que impone la siguiente relación sobre A :

$$A \left(e^{i\sqrt{|\lambda|}a} - e^{-i\sqrt{|\lambda|}a} \right) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Evitando la solución nula, imponemos la expresión

$$e^{i\sqrt{|\lambda|}a} - e^{-i\sqrt{|\lambda|}a} = e^{i\sqrt{|\lambda|}a} \left(1 - e^{-2i\sqrt{|\lambda|}a} \right) = 0, \quad (\text{A.13})$$

donde, como $e^{i\sqrt{|\lambda|}a} \neq 0$, obligatoriamente se cumplirá $e^{-2i\sqrt{|\lambda|}a} = 1 = e^{2\pi in}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Esto impone unos valores discretos para λ .

$$\sqrt{|\lambda|} = \frac{\pi n}{a}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.14})$$

Llamando $\sqrt{|\lambda|} \equiv k_n$ y aplicando Euler en la solución general, podemos tomar con toda generalidad

$$X_n(x) = A_n \sin(k_n x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad A_n \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.15})$$

A continuación, analizamos la parte temporal. De acuerdo con la ecuación (A.2), resolvemos la ecuación

$$\frac{1}{c^2} \frac{T_{tt}}{T(t)} = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \lambda. \quad (\text{A.16})$$

Teniendo en cuenta que debemos tener $\lambda < 0$ para que $\varphi(t, x) \neq 0 \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times (0, a)$ por lo visto en la resolución de $X(x)$, asignamos directamente $\lambda = -k_n^2$. Así, reescribimos la ecuación (A.16),

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = - \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k_n^2 \right) T(t) = -\omega_n^2 T(t), \quad (\text{A.17})$$

donde hemos definido $\omega_n^2 := \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k_n^2$. Entonces, la solución de la ecuación será

$$T_n(t) = C_n e^{i\omega_n t} + D_n e^{-i\omega_n t}, \quad C_n, D_n \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.18})$$

Por tanto, la solución genérica es

$$\varphi_n(t, x) = \sin(k_n x) (A_n e^{i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}), \quad (\text{A.19})$$

con A_n y B_n constantes redefinidas que se determinan por condiciones de contorno o condiciones iniciales.

B. Teorema de Noether y tensor energía-momento

El Teorema de Noether dice que las simetrías caracterizadoras de un sistema se pueden relacionar con leyes de conservación. En el caso de la simetría de la dinámica del sistema bajo cambio de coordenadas, el término conservado es lo que llamamos tensor energía-momento, expresión que utilizamos a lo largo del trabajo por corresponderse sus componentes diagonales con las densidades de energía y presiones. En este anexo vamos a calcular dicha expresión.

Dado un campo escalar $\phi(\mathbf{x})$ en el espacio \mathbb{R}^4 con $\mathbf{x} = (t, x, y, z)$, suponemos una variación infinitesimal en este,

$$\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \phi(\mathbf{x}) + \delta\phi(\mathbf{x}). \quad (\text{B.1})$$

Por el Principio de Mínima Acción, suponemos que la acción queda invariante ante cambios infinitesimales del campo. Definiendo la acción como

$$S = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathcal{L}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (\text{B.2})$$

donde \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son los extremos de un camino cualquiera en \mathbb{R}^4 . Ante un cambio como el de la ecuación (B.1), la densidad lagrangiana sufrirá un cambio,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{x}) + \delta\mathcal{L}(\mathbf{x}). \quad (\text{B.3})$$

Para que $\delta S = 0$, es suficiente con que $\delta\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(\mathbf{x})$ sea una derivada completa, de tal modo que al integrar contribuya únicamente con los valores de los extremos que se consideran fijos. Calculamos la variación del Lagrangiado dado (B.1),

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(\mathbf{x})}\delta\phi(\mathbf{x}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(\mathbf{x}))}\delta(\partial_\mu\phi(\mathbf{x})) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(\mathbf{x})}\delta\phi(\mathbf{x}) - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(\mathbf{x}))} \right) \delta\phi(\mathbf{x}) + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(\mathbf{x}))} \delta\phi(\mathbf{x}) \right) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(\mathbf{x}))} \delta\phi(\mathbf{x}) \right) \end{aligned}$$

donde hemos eliminado los dos primeros términos por la relación Euler-Lagrange. Por lo tanto salvo por una constante, se debe cumplir la igualdad,

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(\mathbf{x}) = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(\mathbf{x}))} \delta\phi(\mathbf{x}) \right), \quad (\text{B.4})$$

lo reescribimos sabiendo que esa constante, que llamaremos j^μ ha de ser una cantidad conservada, tal que

$$j^\mu(\mathbf{x}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(\mathbf{x}))} \delta\phi(\mathbf{x}) - \mathcal{J}^\mu, \quad (\text{B.5})$$

cuya derivada es cero, $\partial_\mu j^\mu(\mathbf{x}) = 0$.

Por otra parte, imponemos ahora que la posible variación del campo es debida a un cambio de coordenadas,

$$\mathbf{x}^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu, \quad (\text{B.6})$$

las variaciones infinitesimales de $\phi(\mathbf{x})$ y $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ se pueden escribir mediante un desarrollo de Taylor quedándonos con el primer orden,

$$\phi(\mathbf{x}) \rightarrow \phi(\mathbf{x}) + a^\mu \partial_\mu \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{x}) + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.8})$$

Comparando todas las transformaciones escritas, podemos ver la siguiente correspondencia,

$$\delta\phi(\mathbf{x}) = a^\mu \partial_\mu \phi(\mathbf{x}), \quad (\text{B.9})$$

que implica un cambio en la densidad lagrangiana,

$$\delta\mathcal{L}(\mathbf{x}) = a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.10})$$

Aplicando el teorema de Noether en la forma de la ecuación (B.4),

$$\partial_\mu(a^\mu \mathcal{L}) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(\mathbf{x}))} a^\nu \partial_\nu \phi(\mathbf{x}) \right) \quad (\text{B.11})$$

Definimos el tensor energía-momento como el interior de la derivada, es decir, como la cantidad que se conserva.

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(\mathbf{x}))} \partial_\nu \phi(\mathbf{x}) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.12})$$

Para el caso de la sección 2.1, teniendo en cuenta que la densidad del Lagrangiano es

$$\mathcal{L}(t, x) = -\frac{\hbar}{2c} (\partial_t \phi(t, x))^2 + \frac{\hbar c}{2} (\partial_x \phi(t, x))^2, \quad (\text{B.13})$$

la componente $(0, 0)$ del tensor (B.12) que necesitamos es,

$$T_{00}(t, x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi(t, x))} \partial_t \phi(t, x) - \delta_0^0 \mathcal{L}(t, x) = \frac{\hbar c}{2} \left[\frac{1}{c^2} \partial_t \phi(t, x)^2 + (\partial_x \phi(t, x))^2 \right] \quad (\text{B.14})$$

C. Cálculo de la densidad de energía con placas en 1D+1

En este anexo calculamos la densidad de energía $\langle T_{00} \rangle$ del caso unidimensional con placas conductoras en $x = a$ y $x = 0$ presentado en la sección 2.1. Partiendo de la expresión de la densidad de energía

$$T_{00}(t, x) = \frac{\hbar c}{2} \left(\frac{1}{c^2} [\partial_t \varphi(t, x)]^2 + [\partial_x \varphi(t, x)]^2 \right), \quad (\text{C.1})$$

utilizamos la expresión (2.10) del campo escalar $\varphi(t, x)$ para calcular $\langle T_{00} \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle &= \langle 0 | T_{00}(t, x) | 0 \rangle = \frac{\hbar c}{2} \langle 0 | \left(\frac{1}{c^2} [\partial_t \varphi(t, x)]^2 + [\partial_x \varphi(t, x)]^2 \right) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \frac{\hbar c}{2} \left(-\frac{1}{c^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (\varphi_n^+(x, t) a_n^+ - \varphi_n^-(x, t) a_n^-) \right]^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\sum_{n=1}^{\infty} k_n \cot(k_n x) (\varphi_n^+(x, t) a_n^+ + \varphi_n^-(x, t) a_n^-) \right]^2 \right] \right) | 0 \rangle \end{aligned}$$

Desarrollamos cada término por separado teniendo en cuenta cada producto posible de los operadores escalera. Empezamos con la derivada con respecto del tiempo.

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (\varphi_n^+(x, t) a_n^+ - \varphi_n^-(x, t) a_n^-) \right]^2 = \sum_{n, n'} \omega_n \omega_{n'} (\varphi_n^+ \varphi_{n'}^+ a_n^+ a_{n'}^+ + \varphi_n^- \varphi_{n'}^- a_n^- a_{n'}^- - \varphi_n^- \varphi_{n'}^+ a_n^+ a_{n'}^- - \varphi_n^+ \varphi_{n'}^- a_n^- a_{n'}^+) \quad (\text{C.2})$$

Teniendo en cuenta las relaciones (2.11) y (2.12), vemos que el valor esperado de cada término en el estado energético $|0\rangle$ es:

$$\langle 0 | a_n^+ a_{n'}^+ | 0 \rangle = \langle 0 | n, n' \rangle = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\langle 0 | a_n a_{n'} | 0 \rangle = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\langle 0 | a_n a_{n'}^+ | 0 \rangle = \langle 0 | a_n | n' \rangle = \delta_{n, n'} \quad (\text{C.5})$$

$$\langle 0 | a_n^+ a_{n'}^- | 0 \rangle = \langle 0 | a_n a_{n'}^+ - \mathbb{I} \delta_{n, n'} | 0 \rangle = 0 \quad (\text{C.6})$$

Usando las expresiones de los generadores (2.9) y las anteriores relaciones, podemos escribir

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (\varphi_n^+(x, t) a_n^+ - \varphi_n^-(x, t) a_n^-) \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \quad (\text{C.7})$$

Para el caso de la derivada con respecto al espacio, el cálculo es análogo. Por tanto, el valor esperado de la componente $(0, 0)$ del tensor energía-momento queda como

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle &= \frac{\hbar c}{2} \left[\frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \varphi_n^+ \varphi_n^- + \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 \cot^2(k_n x) \varphi_n^+ \varphi_n^- \right] \\ &= \frac{\hbar c}{2} \left[\frac{1}{ca} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin^2(k_n x) + \frac{c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2}{\omega_n} \cos^2(k_n x) \right] \\ &= \frac{\hbar}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n - \frac{m^2 c^4}{2a\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k_n x)}{\omega_n}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

D. Cálculos sección 2.3

D.1. Función reducida de Green

En la sección 2.3 obtenemos la siguiente ecuación para función reducida de Green,

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 + \frac{\lambda}{a} \delta(z) + \frac{\lambda'}{a} \delta(z-a) \right] g(z, z') = \delta(z - z'). \quad (\text{D.1})$$

A lo largo del apéndice vamos a abordar la resolución de esta. Para empezar, fijamos z' en la región I y calculamos la $g(z, z')$ en función de la región en la que se encuentre z . Designamos los distintos tramos de la función de la siguiente manera:

$$g_{z'<0}(z, z') = \begin{cases} g_I(z, z') & , z < 0 \\ g_{II}(z, z') & , 0 < z < a \\ g_{III}(z, z') & , z > a \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Comenzamos calculando $g_I(z, z')$, es decir, tenemos $z, z' < 0$. Esto nos deja la siguiente ecuación a resolver

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right] g_{z'<0}(z, z') = \delta(z - z'), \quad (\text{D.3})$$

cuya solución es una combinación lineal de exponentiales reales. Por tanto, la dependencia de $g(z, z')$ con z es exponencial. Además, como la función de Green es simétrica, la dependencia también es exponencial con z' . No obstante, eliminamos los términos que divergen: $e^{\kappa z}$ para $z = \infty$ y $e^{-\kappa z}$ para $z = -\infty$. En consecuencia, la solución es

$$g_I(z, z') = \begin{cases} g_{<}(z, z') = A_I e^{\kappa(z-z')} + B_I e^{\kappa(z+z')} & , z < z' \\ g_{>}(z, z') = C_I e^{\kappa(z+z')} + D_I e^{\kappa(-z+z')} & , z > z' \end{cases}$$

Como $g(z, z')$ es continua, se debe cumplir $g_{<}(z, z') = g_{>}(z, z')$.

$$A_I + B_I e^{2\kappa z'} = C_I e^{2\kappa z'} + D_I \Rightarrow A_I = D_I; B_I = C_I$$

En consecuencia, escribimos:

$$g_I(z, z') = A_I e^{\kappa(z_{<} - z_{>})} + B_I e^{\kappa(z+z')}, \quad (\text{D.4})$$

con $z_{<} = \min\{z, z'\}$ y $z_{>} = \max\{z, z'\}$. Para calcular las constantes, integramos la ecuación (D.3) en un entorno de z' , es decir, en $z \in (z'^-, z'^+)$. Los cálculos son análogos al anterior capítulo:

$$- (g_{>z}(z', z') - g_{<z}(z', z')) = 1 \Rightarrow \kappa \left(A_I - B_I e^{2\kappa z'} + A_I + B_I e^{2\kappa z'} \right) = 1 \Rightarrow A_I = \frac{1}{2\kappa}$$

Así, escribimos la función reducida de Green para $z, z' < 0$ como

$$g_I(z, z') = \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa(z_{<} - z_{>})} + B_I e^{\kappa(z+z')}. \quad (\text{D.5})$$

Análogamente, calculamos $g_{II}(z, z')$ y $g_{III}(z, z')$. Como en estas situaciones z' no se encuentra en la misma región que z , no distinguimos dos casos diferentes como en $g_I(z, z')$ porque siempre tenemos $z' < z$.

$$g_{II}(z, z') = A_{II} e^{\kappa(z+z')} + B_{II} e^{\kappa(-z+z')} \quad (\text{D.6})$$

$$g_{III}(z, z') = A_{III} e^{\kappa(-z+z')} \quad (\text{D.7})$$

Recopilando lo anterior, tenemos la ecuación

$$g_{z'<0}(z, z') = \begin{cases} \frac{1}{2\kappa}e^{\kappa(z_- - z_+)} + B_I e^{\kappa(z+z')} & , z < 0 \\ A_{II}e^{\kappa(z+z')} + B_{II}e^{\kappa(-z+z')} & , 0 < z < a \\ A_{III}e^{\kappa(-z+z')} & , z > a, \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

que es continua. Determinamos las constantes de las funciones $g_I(z, z')$, $g_{II}(z, z')$ y $g_{III}(z, z')$ usando las relaciones de continuidad $g_I(0, z') = g_{II}(0, z')$ y $g_{III}(a, z') = g_{III}(a, z')$.

$$g_I(0, z') = g_{II}(0, z') \Rightarrow \frac{1}{2\kappa} + B_I = A_{II} + B_{II}$$

$$g_{II}(a, z') = g_{III}(a, z') \Rightarrow A_{II}e^{\kappa a} + B_{II}e^{-\kappa a} = A_{III}e^{-\kappa a}$$

Cuando $z = 0$ o $z = a$, se cumple $z' < z$, así que la ecuación que rige el sistema es

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 + \frac{\lambda}{a} \delta(z) + \frac{\lambda'}{a} \delta(z-a) \right] g_{z'<0}(z, z') = 0. \quad (\text{D.9})$$

Integramos esta ecuación tanto en $z \in (0^-, 0^+)$ como en $z \in (a^-, a^+)$. Empezamos integrando en el entorno de $z = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= -[g_{IIz}(0, z') - g_{Iz}(0, z')] + \frac{\lambda}{a} \int_{0^-}^{0^+} g_{z'<0}(z, z') \delta(z-0) dz \\ &= \kappa e^{\kappa z'} \left(-A_{II} + B_{II} - \frac{1}{2\kappa} + B_I \right) + \frac{\lambda}{a} g_{z'<0}(0, z') \\ &\Rightarrow \kappa \left(-A_{II} + B_{II} - \frac{1}{2\kappa} + B_I \right) + \frac{\lambda}{a} \left(\frac{1}{2\kappa} + B_I \right) = 0 \\ &\Rightarrow -A_{II} + B_{II} + B_I \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa a} \right) = \frac{1}{2\kappa} \left(1 - \frac{\lambda}{\kappa a} \right) \end{aligned}$$

Ahora integramos en el entorno de $z = a$.

$$\begin{aligned} 0 &= -(g_{IIIz}(a, z') - g_{IIz}(a, z')) + \frac{\lambda'}{a} \int_{a^-}^{a^+} g_{z'<0}(z, z') \delta(z-a) dz \\ &= \kappa e^{\kappa z'} [A_{III}e^{-\kappa a} + A_{II}e^{\kappa a} - B_{II}e^{-\kappa a}] + \frac{\lambda'}{a} g_{z'<0}(a, z') \\ &\Rightarrow (A_{III}e^{-\kappa a} + A_{II}e^{\kappa a} - B_{II}e^{-\kappa a}) + \frac{\lambda'}{a} A_{III}e^{-\kappa a} = 0 \\ &\Rightarrow -B_{II}e^{-\kappa a} + A_{II}e^{\kappa a} + A_{III} \left(1 + \frac{\lambda'}{\kappa a} \right) e^{-\kappa a} = 0 \end{aligned}$$

Recopilamos las relaciones que obtenidas del punto $z = 0$.

$$\begin{cases} \frac{1}{2\kappa} + B_I = A_{II} + B_{II} \\ -A_{II} + B_{II} + B_I \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa a} \right) = \frac{1}{2\kappa} \left(1 - \frac{\lambda}{\kappa a} \right) \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Despejando B_I en la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda, llegamos al siguiente sistema lineal,

$$\begin{cases} B_I = A_{II} + B_{II} - \frac{1}{2\kappa} \\ A_{II} \frac{\lambda}{\kappa a} + B_{II} \left(2 + \frac{\lambda}{\kappa a} \right) = \frac{1}{\kappa}. \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

Recopilamos ahora las relaciones obtenidas en $z = a$.

$$\begin{cases} A_{II}e^{2\kappa a} + B_{II} = A_{III} \\ -B_{II} + A_{II}e^{2\kappa a} + A_{III} \left(1 + \frac{\lambda'}{\kappa a} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

Sustituyendo en la segunda ecuación A_{III} por la primera ecuación, llegamos a:

$$\begin{cases} A_{III} = A_{II}e^{2\kappa a} + B_{II} \\ A_{II}e^{2\kappa a} \left(2 + \frac{\lambda'}{\kappa a} \right) = -B_{II} \frac{\lambda'}{\kappa a} \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

Tomando las dos últimas ecuaciones de (D.11) y (D.13), únicamente dependientes de A_{II} y B_{II} , despejamos A_{II} y B_{II} .

$$A_{II} = -\frac{1}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda'}{2\kappa a} \quad (\text{D.14})$$

$$B_{II} = \frac{1}{2\kappa\Delta} e^{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right), \quad (\text{D.15})$$

donde hemos definido Δ como

$$\Delta = -\frac{\lambda\lambda'}{(2\kappa a)^2} + e^{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a} \right). \quad (\text{D.16})$$

Usando las primeras ecuaciones de (D.11) y (D.13), despejamos B_I y A_{III} .

$$B_I = -\frac{1}{2\kappa\Delta} \left[\frac{\lambda'}{2\kappa a} \left(1 - \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) + e^{2\kappa a} \frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) \right] \quad (\text{D.17})$$

$$A_{III} = \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \quad (\text{D.18})$$

Finalmente, obtenemos la función $g_{z'<0}(z, z')$ completamente determinada.

$$g_{z'<0}(z, z') = \begin{cases} \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa(z_- - z_+)} + \frac{e^{\kappa(z+z')}}{2\kappa\Delta} \left[\frac{\lambda'}{2\kappa a} \left(1 - \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) + e^{2\kappa a} \frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) \right] & , z < 0 \\ -\frac{e^{\kappa(z+z')}}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda'}{2\kappa a} + \frac{e^{\kappa(-z+z'+2a)}}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) & , 0 < z < a \\ \frac{e^{\kappa(-z+z'+2a)}}{2\kappa\Delta} & , z > a \end{cases} \quad (\text{D.19})$$

La función de Green es simétrica con respecto a z y z' , así que con los cálculos que hemos desarrollado también sabemos lo que ocurre cuando $z' > a$ y $z < 0$ o cuando $0 < z' < a$ y $z < 0$. Queda ver tres casos: cuando $0 < z', z < a$, cuando $a < z', z$ y cuando $a < z'$ y $0 < z < a$ (o $a < z$ y $0 < z' < a$). Vamos a utilizar el método anterior. Fijamos esta vez z' en la región III.

$$g_{z'>a}(z, z') = \begin{cases} f_I(z, z') = \frac{e^{\kappa(-z'+z+2a)}}{2\kappa\Delta} & , z < 0 \\ f_{II}(z, z') = A_{II}e^{\kappa(z-z')} + B_{II}e^{\kappa(-z-z')} & , 0 < z < a \\ f_{III}(z, z') & , z > a \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

Notar que $f_I(z, z') = g_{III}(z', z)$ por lo comentado en el anterior párrafo. Empezamos con la obtención de $f_{III}(z, z')$, análogo al cálculo de $g_I(z, z')$.

$$f_{III}(z, z') = \begin{cases} f_{<}(z, z') = A_{III}e^{\kappa(z-z')} + B_{III}e^{\kappa(-z-z')} & , z < z' \\ f_{>}(z, z') = C_{III}e^{\kappa(-z+z')} + D_{III}e^{\kappa(-z-z')} & , z > z' \end{cases} \quad (\text{D.21})$$

La ecuación que rige el comportamiento de $f_{III}(z, z')$ es de nuevo

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right] g_{z'>a}(z, z') = \delta(z - z'). \quad (\text{D.22})$$

Por continuidad, imponemos $f_{<}(z, z) = f_{>}(z, z)$.

$$A_{III} + B_{III}e^{-2\kappa z} = C_{III} + D_{III}e^{-2\kappa z} \Rightarrow A_{III} = C_{III}, B_{III} = D_{III}$$

Expresando entonces $f_{III}(z, z')$ como

$$f_{III}(z, z') = A_{III}e^{\kappa(z_{<}-z_{>})} + B_{III}e^{-\kappa(z_{>}-z_{<})}, \quad (\text{D.23})$$

con $z_{<} = \min\{z, z'\}$ y $z_{>} = \max\{z, z'\}$. Por otra parte, integramos (D.22) en un entorno de $z = z'$, es decir, con $z \in (z'^-, z'^+)$.

$$-(f_{>z}(z', z') - f_{<z}(z', z')) = 1 \Rightarrow \kappa \left(A_{III} - B_{III}e^{-2\kappa z'} + A_{III} + B_{III}e^{-2\kappa z'} \right) = 1 \Rightarrow A_{III} = \frac{1}{2\kappa}$$

Escribiendo así finalmente

$$f_{III}(z, z') = \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa(z_{<}-z_{>})} + B_{III}e^{-\kappa(z_{>}-z_{<})}. \quad (\text{D.24})$$

Queda determinar B_{III} , A_{II} y B_{II} . Para ello, imponemos continuidad e integramos la ecuación (2.62) en entornos de $z = 0$ y $z = a$. Haciendo esto llegamos a las relaciones expresadas en el siguiente sistema lineal (podemos prescindir de una de ellas),

$$\begin{cases} A_{II} + B_{II} = \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \\ A_{II} - B_{II} = \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa a} \right) \\ B_{III} + \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa} = B_{II} + A_{II}e^{2\kappa a} \\ B_{III} \left(1 + \frac{\lambda'}{\kappa a} \right) + A_{II}e^{2\kappa a} - B_{II} = \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa} \left(1 - \frac{\lambda'}{\kappa a} \right). \end{cases} \quad (\text{D.25})$$

Despejamos las constantes.

$$A_{II} = \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) \quad (\text{D.26})$$

$$B_{II} = -\frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda}{2\kappa a} \quad (\text{D.27})$$

$$B_{III} = \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \left[-\frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 - \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) - \frac{\lambda'}{2\kappa a} e^{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) \right] \quad (\text{D.28})$$

Terminando así la determinación de la función reducida de Green para $z' > a$.

$$g_{z'>a}(z, z') = \begin{cases} \frac{e^{\kappa(-z'+z+2a)}}{2\kappa\Delta} & , z < 0 \\ e^{\kappa(z-z'+2a)} \frac{1}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa a} \right) - e^{-\kappa(z+z'-2a)} \frac{1}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda}{\kappa a} & , 0 < z < a \\ \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa(z_{<}-z_{>})} + \frac{e^{-\kappa(z+z'-2a)}}{2\kappa\Delta} \left[-\frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 - \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) - \frac{\lambda'}{2\kappa a} e^{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) \right] & , z > a \end{cases} \quad (\text{D.29})$$

Por último, fijamos z' en la región II. Utilizando los cálculos hechos anteriormente, la función reducida de Green será

$$g_{0 < z' < a}(z, z') = \begin{cases} h_I(z, z') = -\frac{e^{\kappa(z'+z)}}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda'}{2\kappa a} + \frac{e^{\kappa(-z'+z+2a)}}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a}\right) & , z < 0 \\ h_{II}(z, z') & , 0 < z < a \\ h_{III}(z, z') = e^{\kappa(z'-z)} \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa a}\right) - e^{-\kappa(z'+z)} \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda}{\kappa a} & , z > a. \end{cases} \quad (\text{D.30})$$

Notar que $h_I(z, z') = g_{II}(z, z')$ y $h_{III} = f_{II}(z'z)$. Para determinar $h_{II}(z, z')$, procedemos como antes: definimos $h < (z, z')$ y $h > (z, z')$ para $z < z'$ y $z > z'$ respectivamente.

$$h_{II}(z, z') = \begin{cases} h_{<}(z, z') = A_{II}e^{\kappa(z+z')} + B_{II}e^{\kappa(z-z')} + C_{II}e^{\kappa(-z+z')} + D_{II}e^{-\kappa(z+z')} & , z < z' \\ h_{>}(z, z') = A'_{II}e^{\kappa(z+z')} + B'_{II}e^{\kappa(z-z')} + C'_{II}e^{\kappa(-z+z')} + D'_{II}e^{-\kappa(z+z')} & , z > z' \end{cases} \quad (\text{D.31})$$

Por continuidad, $h_{<}(z', z') = h_{>}(z', z')$. Con esta relación e integrando la ecuación (2.62) en un entorno de $z = z'$, obtenemos

$$h_{II}(z, z') = \begin{cases} h_{<}(z, z') = A_{II}e^{\kappa(z+z')} + \left(B'_{II} + \frac{1}{2\kappa}\right)e^{\kappa(z-z')} + C_{II}e^{\kappa(-z+z')} + D_{II}e^{-\kappa(z+z')} \\ h_{>}(z, z') = A_{II}e^{\kappa(z+z')} + B'_{II}e^{\kappa(z-z')} + \left(C_{II} + \frac{1}{2\kappa}\right)e^{\kappa(-z+z')} + D_{II}e^{-\kappa(z+z')} \end{cases}, \quad (\text{D.32})$$

ecuaciones que podemos reescribir en una sola como

$$h_{II}(z, z') = A_{II}e^{\kappa(z+z')} + B'_{II}e^{\kappa(z-z')} + C_{II}e^{\kappa(-z+z')} + D_{II}e^{-\kappa(z+z')} + \frac{1}{2\kappa}e^{\kappa(z_{<}-z_{>)}}. \quad (\text{D.33})$$

Por continuidad de $g_{0 < z' < a}(z, z')$ e integrando (2.62) en un entorno de $z = 0$, obtenemos un nuevo sistema lineal para las constantes A_{II} , B'_{II} , C_{II} y D_{II} .

$$\begin{cases} \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a}\right) = B'_{II} + D_{II} + \frac{1}{2\kappa} \\ -\frac{1}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda'}{2\kappa a} = A_{II} + C_{II} \\ C_{II} - A_{II} = \frac{\lambda'}{2\kappa a} \frac{1}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa a}\right) \\ B_{II} - D_{II} = \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa a}\right) - \frac{1}{2\kappa} \end{cases} \quad (\text{D.34})$$

Despejamos la constantes.

$$A_{II} = -\frac{1}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda'}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a}\right) \quad (\text{D.35})$$

$$B'_{II} = \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a}\right) - \frac{1}{2\kappa} = \frac{1}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda\lambda'}{(2\kappa a)^2} \quad (\text{D.36})$$

$$C_{II} = \frac{1}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda\lambda'}{(2\kappa a)^2} \quad (\text{D.37})$$

$$D_{II} = -\frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a}\right) \quad (\text{D.38})$$

Desarrollando el coseno hiperbólico con la fórmula de Euler, la expresión de la función reducida de Green cuando $0 < z, z' < a$ queda

$$h_{II}(z, z') = \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa(z_- - z_+)} + \frac{1}{2\kappa\Delta} \left[-e^{\kappa(z+z')} \frac{\lambda'}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) - e^{-\kappa(z+z')} e^{2\kappa a} \frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) + \frac{2\lambda\lambda'}{(2\kappa a)^2} \cosh \kappa(z - z') \right]. \quad (\text{D.39})$$

Obteniendo finalmente:

$$g_{0 < z' < a}(z, z') = \begin{cases} -\frac{e^{\kappa(z'+z)}}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda'}{2\kappa a} + \frac{e^{\kappa(-z'+z+2a)}}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) & , z < 0 \\ \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa(z_- - z_+)} + \frac{1}{2\kappa\Delta} \left[-e^{\kappa(z+z')} \frac{\lambda'}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) - e^{-\kappa(z+z')} e^{2\kappa a} \frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) + \frac{2\lambda\lambda'}{(2\kappa a)^2} \cosh \kappa(z - z') \right] & , 0 < z < a \\ e^{\kappa(z'-z)} \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \left(1 + \frac{\lambda}{\kappa a} \right) - e^{-\kappa(z'+z)} \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda}{\kappa a} & , z > a \end{cases} \quad (\text{D.40})$$

D.2. Componente (3, 3) del tensor energía-momento y densidad de la fuerza

En la sección 2.3 nos proponemos calcular la componente $\langle T_{zz} \rangle$ del tensor energía-momento. Tenemos la expresión del tensor reducido,

$$\langle t_{zz} \rangle = \frac{1}{2i} [-\kappa^2 + \partial_z \partial_{z'}] g(z, z')|_{z' \rightarrow z}, \quad (\text{D.41})$$

el cual cumple

$$\langle T_{zz} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \langle t_{zz} \rangle. \quad (\text{D.42})$$

Utilizando la función reducida de Green calculada en el anterior anexo, calculamos al componente (3, 3) del tensor reducido energía-momento para cada región.

$$\begin{aligned} \langle t_{zz} \rangle|_{0 < z < a} &= \frac{1}{2i} [-\kappa^2 + \partial_z \partial_{z'}] h_{II}(z, z')|_{z' \rightarrow z} \\ &= -\frac{\kappa^2}{2i} h_{II}(z, z) + \frac{\kappa^2}{2i} \left(-\frac{1}{2\kappa} e^{\kappa(z_- - z_+)} + \left[-e^{\kappa(z+z')} \frac{1}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda'}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -e^{-\kappa(z+z')} e^{2\kappa a} \frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) - \frac{2\lambda\lambda'}{(2\kappa a)^2} \cosh \kappa(z - z') \right] \right) \Big|_{z' \rightarrow z} \\ &= -\frac{\kappa^2}{2i} h_{II}(z, z) + \frac{\kappa^2}{2i} \left(-\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{2\kappa\Delta} \left[-e^{2\kappa z} \frac{\lambda'}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -e^{-2\kappa z} e^{2\kappa a} \frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) - \frac{2\lambda\lambda'}{(2\kappa a)^2} \right] \right) \\ &= -\frac{\kappa^2}{i} \left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{2\kappa\Delta} \frac{2\lambda\lambda'}{(2\kappa a)^2} \right) \\ &= -\frac{\kappa}{2i} \left[1 + \frac{2}{\left(1 + \frac{2\kappa a}{\lambda} \right) \left(1 + \frac{2\kappa a}{\lambda'} \right) e^{2\kappa a} - 1} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

$$\begin{aligned} \langle t_{zz} \rangle|_{z > a} &= \frac{1}{2i} [-\kappa^2 + \partial_z \partial_{z'}] f_{III}(z, z')|_{z' \rightarrow z} \\ &= -\frac{\kappa^2}{2i} f_{III}(z, z) + \frac{\kappa^2}{2i} \left\{ -\frac{1}{2\kappa} + \frac{e^{-\kappa(2z+ - 2a)}}{2\kappa\Delta} \left[-\frac{\lambda}{2\kappa a} \left(1 - \frac{\lambda'}{2\kappa a} \right) - \frac{\lambda'}{2\kappa a} e^{2\kappa a} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa a} \right) \right] \right\} = -\frac{\kappa}{2i} \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

Para calcular la densidad de fuerza ejercida en la superficie $z = a$, calculamos la diferencia entre la presión ejercida desde las diferentes regiones que delimita la placa.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \langle T_{zz} \rangle|_{z=a^-} - \langle T_{zz} \rangle|_{z=a^+} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(-\frac{\kappa}{2i} \left[1 + \frac{2}{\left(1 + \frac{2\kappa a}{\lambda} \right) \left(1 + \frac{2\kappa a}{\lambda'} \right) e^{2\kappa a} - 1} \right] + \frac{\kappa}{2i} \right) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3 i} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\kappa}{\left(1 + \frac{2\kappa a}{\lambda} \right) \left(1 + \frac{2\kappa a}{\lambda'} \right) e^{2\kappa a} - 1} \end{aligned}$$

Extendiendo la función a una dimensión general d y rotando en frecuencias al eje complejo como

$$\begin{cases} \omega = i\zeta \\ \kappa = \sqrt{k^2 + \zeta^2} \end{cases}, \quad (\text{D.45})$$

la expresión anterior queda

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^2k \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{\kappa}{(1 + \frac{2\kappa a}{\lambda}) (1 + \frac{2\kappa a}{\lambda'}) e^{2\kappa a} - 1} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\kappa}{(1 + \frac{2\kappa a}{\lambda}) (1 + \frac{2\kappa a}{\lambda'}) e^{2\kappa a} - 1} \kappa^2 \sin \theta \, d\kappa \, d\theta \, d\varphi \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\kappa^3}{(1 + \frac{2\kappa a}{\lambda}) (1 + \frac{2\kappa a}{\lambda'}) e^{2\kappa a} - 1} d\kappa \stackrel{y=2\kappa a}{=} -\frac{1}{32\pi^2 a^4} \int_0^{\infty} \frac{y^3}{(1 + \frac{y}{\lambda}) (1 + \frac{y}{\lambda'}) e^y - 1} dy. \end{aligned}$$

La densidad de fuerza ejercida sobre cada placa es:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{32\pi^2 a^4} \int_0^{\infty} \frac{y^3}{(1 + \frac{y}{\lambda}) (1 + \frac{y}{\lambda'}) e^y - 1} dy \quad (\text{D.46})$$

E. Funciones de Bessel

En la sección 3 trabajamos con funciones de Bessel. En este anexo se va a ofrecer una breve caracterización de estas.⁸ La ecuación de Bessel de orden ν es

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0, \quad (\text{E.1})$$

con $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Reescribimos la ecuación,

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \frac{(x^2 - \nu^2)}{x^2}y(x) = 0, \quad (\text{E.2})$$

identificando los coeficientes

$$p(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{E.3})$$

$$q(x) = \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}. \quad (\text{E.4})$$

Estas funciones tienen un polo en $x = 0$ simple y de orden dos respectivamente debido a que

$$\lim_{x \rightarrow 0} xp(x) = 1 \quad (\text{E.5})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = -\nu^2. \quad (\text{E.6})$$

El punto $x = 0$ es un punto singular-regular porque $p(x)$ y $q(x)$ tienen polos en $x = 0$, pero son polinomios. Por el Teorema de Fuchs podemos proponer la solución polinómica

$$y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (\text{E.7})$$

con $\alpha, a_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Usando esta solución en (E.2), llegamos a la siguiente relación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left([(n + \alpha)(n + \alpha - 1) + (n + \alpha) - \nu^2] a_n + a_{n-2} \right) x^{n+\alpha} = 0 \quad (\text{E.8})$$

Calculamos los valores de los coeficientes a_n y la variable α igualando el factor que multiplica cada x^n a 0.

1. $n = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \nu$
2. $n = 1 \Rightarrow a_1 = 0$
3. $n \geq 2 \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-2}}{\nu^2 - (n + \alpha)^2}$

De estas condiciones que hemos sacado, es claro que los coeficientes con n impar serán 0, es decir, $a_{2k+1} = 0 \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por otro lado, como tenemos 2 valores de α , tendremos dos tipos de soluciones.

1. $\alpha_1 = \nu$:
Por la relación de recurrencia, tendremos $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} \frac{a_0}{(1+\nu)(2+\nu)\dots(k+\nu)} \forall k \in \mathbb{N}$. Dado que $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos reescribirlo con funciones Gamma,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(k + \nu + 1)} a_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{E.9})$$

⁸Para más información sobre las funciones de Bessel se recomienda consultar [6].

Dado que a_0 es arbitrario, elegimos $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$. A esta solución se la llama función de Bessel de primera especie de orden ν :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \frac{1}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \quad (\text{E.10})$$

2. $\alpha_2 = -\nu$:

En esta caso, la función de recurrencia $a_n = \frac{a_{n-2}}{\nu^2 - (n+\alpha_2)^2} = \frac{-a_{n-2}}{n(n-2\nu)}$ estará bien definida si $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\nu \notin \mathbb{N}$. Así que para obtener esta solución vamos a estudiar dos casos.

a) $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\nu \notin \mathbb{N}$:

Este caso lo resolvemos de forma análoga al anterior. A la solución la llamamos función de Bessel de primera especie de orden $-\nu$:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \frac{1}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \quad (\text{E.11})$$

Es inmediato comprobar que (E.11) y (E.10) son linealmente independientes debido a las potencias de x que tiene cada solución.

b) $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\nu \in \mathbb{N}$:

Ahora $a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n-2\nu)}$ tiene un polo en $n = 2\nu$. De aquí volvemos a tener dos situaciones:

1) 2ν impar:

Como ya teníamos $a_{2k+1} = 0 \forall k \in \mathbb{Z}$, tenemos $a_{2\nu} = 0$, así que no nos influirá el polo en $n = 2\nu$ y la segunda solución seguirá siendo $J_{-\nu}(x)$.

2) 2ν par:

Entonces tenemos $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, así que tenemos la propiedad

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x), \quad (\text{E.12})$$

dejando inhabilitada $J_{-\nu}(x)$ como segunda solución porque no es linealmente independiente de $J_\nu(x)$. Construimos una solución linealmente independiente de $J_\nu(x)$ a la que llamamos función de Bessel de segunda especie:

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)} \quad (\text{E.13})$$

Sin embargo, esta función para $\nu \in \mathcal{Z}$ está indeterminada, así que para este caso la segunda solución será el límite de la función de Bessel de segunda especie:

$$\begin{aligned} Y_\nu(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow \nu \in \mathcal{Z}} \frac{\cos(\pi\alpha)J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)} \\ &\stackrel{\text{L'Hópital}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow \nu \in \mathcal{Z}} \frac{-\pi \sin(\pi\alpha)J_\alpha(x) + \cos(\pi\alpha)\partial_\alpha J_\alpha(x) - \partial_\nu J_{-\alpha}(x)}{\pi \cos(\pi\alpha)} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

En la siguiente imagen podemos observar el carácter oscilatorio de las funciones de Bessel.

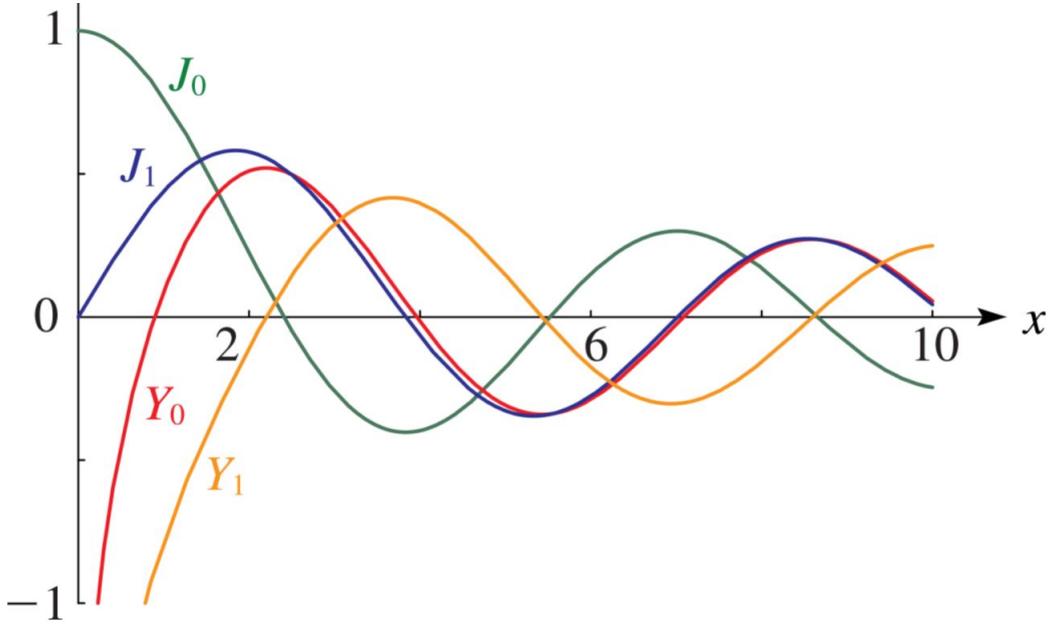


Figura 8: Gráfica funciones de Bessel de [21].

Dada la simetría de nuestro problema en la sección 3, utilizamos las funciones esféricas de Bessel $j_l(x)$ e $y_l(x)$, que son las soluciones de la ecuación de Helmholtz expresada en coordenadas esféricas

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) + (x^2 - l(l+1))y(x) = 0, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (\text{E.15})$$

las cuales se pueden relacionar con las funciones de Bessel vistas.

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (\text{E.16})$$

$$y_l(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (\text{E.17})$$

Las funciones de Bessel que utilizamos a lo largo de la sección son las funciones esféricas modificadas de Bessel $i_l(x)$ y $k_l(x)$, que son solución de la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas con argumento imaginario,

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) - (x^2 + l(l+1))y(x) = 0, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (\text{E.18})$$

que no es más que (3.14) evaluada dentro y fuera de la esfera con el cambio de variable $x = \kappa r$.

Las funciones esféricas modificadas de Bessel las podemos expresar en términos de las funciones de Bessel modificadas $I_{l+\frac{1}{2}}(x)$ y $K_{l+\frac{1}{2}}(x)$.

$$i_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (\text{E.19})$$

$$k_l(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} K_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (\text{E.20})$$

Estas son soluciones linealmente independientes de la ecuación modificada de Bessel

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + \nu^2)y(x) = 0, \quad \nu = l + \frac{1}{2}. \quad (\text{E.21})$$

Siguiendo un desarrollo análogo al hecho con la ecuación de Bessel normal, expresamos las soluciones $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$ como

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \quad (\text{E.22})$$

y

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}. \quad (\text{E.23})$$

En la siguiente imagen podemos observar el carácter exponencial de las funciones modificadas de Bessel en comparación con las oscilaciones de $J_\nu(x)$ y $Y_\nu(x)$.

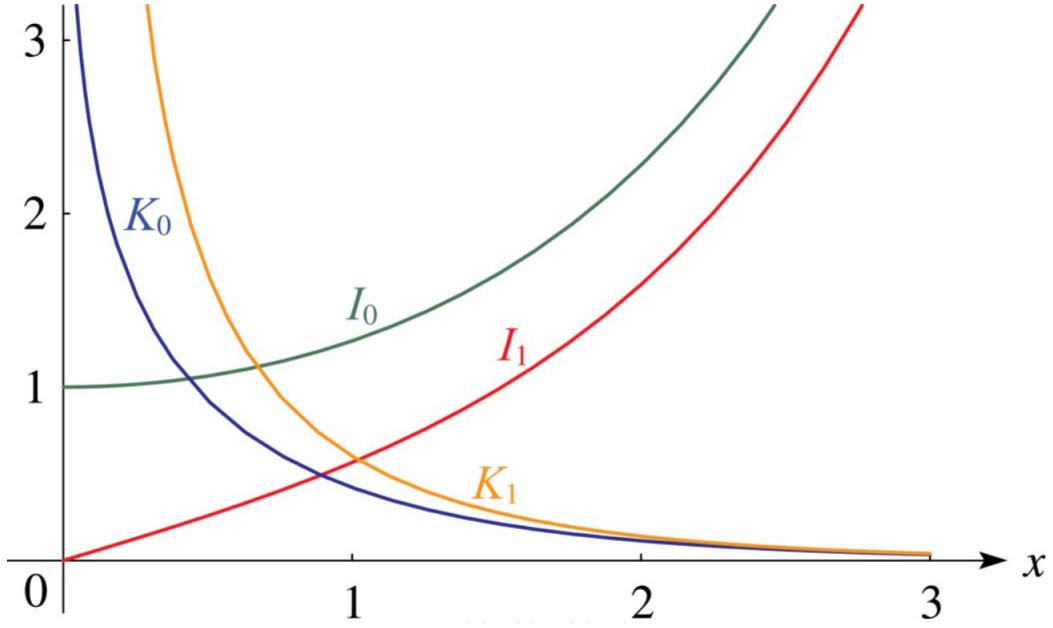


Figura 9: Gráfica funciones modificadas de Bessel de [21].

Por último, definimos el Wronskiano de dos funciones diferenciales f y g como

$$W[f, g] = fg' - f'g. \quad (\text{E.24})$$

El Wronskiano de las funciones de Bessel cumple las siguientes relaciones a destacar:

$$W[J_\nu(x), Y_\nu(x)] = \frac{2}{\pi x} \quad (\text{E.25})$$

$$W[I_\nu(x), K_\nu(x)] = -\frac{1}{x} \quad (\text{E.26})$$

En consecuencia, las funciones esféricas modificadas de Bessel cumplen

$$W[i_l(x), k_l(x)] = -\frac{1}{x^2}. \quad (\text{E.27})$$

F. Funciones armónicas para potencial esférico

En la sección 3 también empiezan a aparecer las funciones de los armónicos esféricos, vamos a ver de dónde vienen. Se nos presenta la ecuación (3.14), que se puede relacionar con la ecuación de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2) \phi(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (\text{F.1})$$

donde k es una constante y $\phi(r, \theta, \varphi)$ un campo escalar. Para resolverla, utilizamos el método de separación de variables. Definimos $R : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\Theta : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\Phi : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que $\phi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$. Si escribimos ∇^2 en coordenadas esféricas con las anteriores funciones, tenemos la siguiente ecuación,

$$\frac{\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{R(r)\Phi(\varphi)}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{R(r)\Theta(\theta)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -k^2 R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (\text{F.2})$$

Multiplicando por $\frac{r^2 \sin^2 \theta}{R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}$, tenemos

$$\frac{\sin^2 \theta}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + k^2 r^2 \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{F.3})$$

Como los términos a la izquierda de la igualdad no dependen de φ y el que está a la derecha de la igualdad solo depende esta misma variable, podemos igualar ambos lados de la igualdad a una constante. Dado que buscamos soluciones no nulas, $\exists (r_0, \theta_0, \varphi_0) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \ni R(r_0), \Theta(\theta_0), \Phi(\varphi_0) \neq 0$.

$$\frac{\sin^2 \theta_0}{R(r_0)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r_0^2 \frac{\partial R(r_0)}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta_0}{\Theta(\theta_0)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta_0 \frac{\partial \Theta(\theta_0)}{\partial \theta} \right) + k^2 r_0^2 \sin^2 \theta_0 = -\frac{1}{\Phi(\varphi_0)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi_0)}{\partial \varphi^2} = -M,$$

con M constante. Para resolver esto, empezamos por la parte dependiente de φ .

$$\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = M\Phi(\varphi) \quad (\text{F.4})$$

Dependiendo del valor de M , hay dos posibles soluciones.

1. $M = 0$: $\Phi(\varphi) = A + B\varphi$
2. $M \neq 0$: $\Phi(\varphi) = A e^{\sqrt{M}\varphi} + B e^{-\sqrt{M}\varphi}$

Dado que $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\Phi(\varphi)$ debe ser 2π -periódica. Imponiendo entonces $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ y $\Phi'(\varphi) = \Phi'(\varphi + 2\pi)$ las soluciones se puede reescribir.

1. $M = 0$: $\Phi_0(\varphi) = A_0$
2. $M \neq 0$: $\Phi_m(\varphi) = A_m e^{im\varphi}$ con $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ni im = \sqrt{M} \iff M = -m^2$

Así que la solución general de $\Phi(\varphi)$ es:

$$\Phi(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{im\varphi}, \quad A_m \in \mathbb{C} \quad (\text{F.5})$$

Lo podemos expresar también como

$$\Phi(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \sin m\varphi + C_m \cos m\varphi, \quad B_m, C_m \in \mathbb{C}. \quad (\text{F.6})$$

Ahora, resolvemos la parte independiente de φ de (F.3). Para ello, haciendo uso de la constante M , reescribimos la ecuación.

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) - \frac{M}{\sin^2 \theta} \quad (\text{F.7})$$

La parte de la izquierda de la igualdad solo depende de r y la derecha de θ , así que procedemos de manera análoga al anterior caso. Como las soluciones son no nulas, $\exists(\theta_0, \varphi_0) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi) \ni \Theta(\theta_0), \Phi(\varphi_0) \neq 0$, así que podemos escribir

$$\frac{1}{R(r_0)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r_0^2 \frac{\partial R(r_0)}{\partial r} \right) + k^2 r_0^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta_0) \sin \theta_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta_0 \frac{\partial \Theta(\theta_0)}{\partial \theta} \right) - \frac{M}{\sin^2 \theta_0} = Q,$$

con Q constante. Por un lado, resolvemos la parte dependiente de r .

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + k^2 r^2 = R \quad (\text{F.8})$$

Haciendo el cambio de variable $R(r) = r^{-1/2} y(r)$, la ecuación queda

$$r^2 y''(r) + r y'(r) + \left[(kr)^2 - \left(Q + \frac{1}{4} \right) \right] y(r) = 0, \quad (\text{F.9})$$

la cual se convierte en la ecuación de Bessel al aplicar $x = \kappa r$

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + \left[x^2 - \left(Q + \frac{1}{4} \right) \right] y(x) = 0. \quad (\text{F.10})$$

Si redefinimos la constante Q como $Q = l(l+1)$,

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + \left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] y(x) = 0, \quad (\text{F.11})$$

y entonces tenemos que la solución general de $R(r)$ será una combinación lineal de las funciones de Bessel vistas en el Anexo E.

Por último, resolvemos la parte dependiente de θ ,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{M}{\sin^2 \theta} \Theta(\theta) = -Q \Theta(\theta), \quad (\text{F.12})$$

realizando el cambio de variable $x = \cos \theta$ y $\Theta(\theta) = y(x)$,

$$\frac{\partial}{\partial x} ((1-x^2)y'(x)) + Qy(x) + \frac{M}{1-x^2} y(x) = 0. \quad (\text{F.13})$$

Aplicando $Q = l(l+1)$ y $M = -m^2$ y desarrollando la derivada obtenemos la ecuación asociada de Legendre,

$$(1-x^2)y''(x) - 2x y'(x) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y(x) = 0, \quad (\text{F.14})$$

dando así una solución como

$$\Theta(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m P_l^m(\cos \theta), \quad F_m \in \mathbb{C}. \quad (\text{F.15})$$

Finalmente, la solución general queda

$$\begin{aligned}
\phi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^l R_l^m(r) e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta) \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^l R_l^m(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad A_m \in \mathbb{C},
\end{aligned} \tag{F.16}$$

donde $Y_l^m(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos, que vienen dados por la expresión

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta). \tag{F.17}$$

Con este desarrollo podemos ver porqué en las soluciones del campo escalar para un potencial esférico aparecen las funciones $Y_l^m(\theta, \varphi)$. Estas vienen de la parte angular de la ecuación definida por $\Theta(\theta) \Phi(\varphi)$.

G. Cálculos sección 3

G.1. Función reducida de Green

Buscamos la función reducida de Green que cumple la ecuación

$$\left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \kappa^2 + \frac{\lambda}{a} \delta(r-a) \right] g_l(r, r') = \frac{\delta(r-r')}{r^2}. \quad (\text{G.1})$$

Para empezar su resolución, fijamos r' en la región I y calculamos la función reducida de Green en función de la localización de r . Dado que $i_l(x)$ diverge cuando $x \rightarrow \infty$ y $k_l(x)$ cuando $x \rightarrow 0$, procediendo análogamente al capítulo anterior obtenemos

$$g_{r' < a} = \begin{cases} g_I(r, r') & , r < a \\ g_{II}(r, r') = A_{II} k_l(\kappa r) i_l(\kappa r') & , r > a. \end{cases} \quad (\text{G.2})$$

Para el cálculo de $g_I(r, r')$ diferenciamos dos casos.

$$g_I(r, r') = \begin{cases} g_{<}(r, r') = A_I i_l(\kappa r) i_l(\kappa r') + B_I i_l(\kappa r) k_l(\kappa r') & , r < r' \\ g_{>}(r, r') = C_I i_l(\kappa r) i_l(\kappa r') + D_I k_l(\kappa r) i_l(\kappa r') & , r > r' \end{cases} \quad (\text{G.3})$$

Por continuidad, imponemos $g_{<}(r', r') = g_{>}(r', r')$,

$$A_I I_\nu^2(\kappa r') + B_I i_l(\kappa r') k_l(\kappa r') = C_I I_\nu^2(\kappa r') + D_I k_l(\kappa r') i_l(\kappa r') \Rightarrow A_I = C_I, B_I = D_I$$

Llegando así a

$$g_I(r, r') = A_I i_l(\kappa r) i_l(\kappa r') + B_I i_l(\kappa r_{<}) k_l(\kappa r_{>}), \quad (\text{G.4})$$

donde $r_{<} = \min\{r, r'\}$ y $r_{>} = \max\{r, r'\}$. Para determinar una de las constantes, multiplicamos por r^2 e integramos la ecuación (3.14) en un entorno de r' , es decir, en $r \in (r'^-, r'^+)$.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{r'^-}^{r'^+} \delta(r-r') dr \\ &= - \int_{r'^-}^{r'^+} \partial \left(r^2 \frac{\partial g_l(r, r')}{\partial r} \right) + \int_{r'^-}^{r'^+} [l(l+1) + r^2 \kappa^2] g_l(r, r') dr \\ &= - \int_{r'^-}^{r'^+} \partial \left(r^2 \frac{\partial g_l(r, r')}{\partial r} \right) + 0 = r'^2 [g_{Ir}(r'^-, r') - g_{Ir}(r'^+, r')] \\ &= \kappa r'^2 [A_I i_l'(\kappa r') i_l(\kappa r') + B_I i_l'(\kappa r') k_l(\kappa r') - A_I i_l'(\kappa r') i_l(\kappa r') - B_I i_l(\kappa r') k_l'(\kappa r')] \\ &= \kappa r'^2 B_I [i_l'(\kappa r') k_l(\kappa r') - i_l(\kappa r') k_l'(\kappa r')] \stackrel{(3.15)}{=} B_I \frac{\kappa r'^2}{\kappa^2 r'^2} = \frac{B_I}{\kappa} \iff B_I = \kappa \end{aligned}$$

Dando la siguiente función reducida de Green:

$$g_{r' < a} = \begin{cases} A_I i_l(\kappa r) i_l(\kappa r') + \kappa i_l(\kappa r_{<}) k_l(\kappa r_{>}) & , r < a \\ A_{II} k_l(\kappa r) i_l(\kappa r') & , r > a \end{cases} \quad (\text{G.5})$$

Para determinar las constantes, imponemos por continuidad $g_I(a, r') = g_{II}(a, r')$.

$$A_I i_l(\kappa a) i_l(\kappa r') + \kappa i_l(\kappa r') k_l(\kappa a) = A_{II} k_l(\kappa a) i_l(\kappa r') \iff A_I = \frac{k_l(\kappa a)(A_{II} - \kappa)}{i_l(\kappa a)}$$

Seguidamente, multiplicamos la ecuación (3.14) por r^2 y la integramos en un entorno de a , en $r \in (a^-, a^+)$.

$$\begin{aligned}
0 &= - \int_{a^-}^{a^+} \partial \left(r^2 \frac{\partial g_l(r, r')}{\partial r} \right) + \int_{a^-}^{a^+} [l(l+1) + r^2 \kappa^2] g_l(r, r') dr + \\
&\quad + \frac{\lambda}{a} \int_{a^-}^{a^+} r^2 \delta(r - a) g_l(r, r') dr \\
&= a^2 \left[g_{Ir}(a^-, r') - g_{IIr}(a^+, r') + \frac{\lambda}{a} g_l(a, r') \right] \\
&= a^2 \left[\kappa (A_I i'_l(\kappa a) i_l(\kappa r') + \kappa i_l(\kappa r') k'_l(\kappa a) - A_{II} k'_l(\kappa a) i_l(\kappa r')) + \frac{\lambda}{a} A_{II} k_l(\kappa a) i_l(\kappa r') \right] \\
&= a^2 i_l(\kappa r') \left[\kappa \left(\frac{k_l(\kappa a)(A_{II} - \kappa)}{i_l(\kappa a)} i'_l(\kappa a) + \kappa k'_l(\kappa a) - A_{II} k'_l(\kappa a) \right) + \frac{\lambda}{a} A_{II} k_l(\kappa a) \right] \\
&= a^2 i_l(\kappa r') \left[A_{II} \left\{ \kappa \left(\frac{k_l(\kappa a) i'_l(\kappa a)}{i_l(\kappa a)} - k'_l(\kappa a) \right) + \frac{\lambda}{a} k_l(\kappa a) \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \kappa^2 \left\{ k'_l(\kappa a) - \frac{k_l(\kappa a) i'_l(\kappa a)}{i_l(\kappa a)} \right\} \right] \\
&\stackrel{(3.15)}{=} a^2 i_l(\kappa r') \left[A_{II} \left\{ \frac{1}{\kappa a^2 i_l(\kappa a)} + \frac{\lambda}{a} k_l(\kappa a) \right\} - \frac{1}{a^2 i_l(\kappa a)} \right] \iff A_{II} = \frac{\kappa}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)}
\end{aligned}$$

Despejamos A_I .

$$A_I = \frac{k_l(\kappa a)}{i_l(\kappa a)} \left(\frac{\kappa}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} - \kappa \right) = -\frac{\lambda \kappa^2 a k_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \quad (\text{G.6})$$

Finalmente, obtenemos que la función reducida de Green para $r' < a$ es

$$g_{r' < a} = \begin{cases} \kappa \left(i_l(\kappa r_<) k_l(\kappa r_>) - i_l(\kappa r) i_l(\kappa r') \frac{\lambda \kappa a k_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \right) & , r < a \\ k_l(\kappa r) i_l(\kappa r') \frac{\kappa}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} & , r > a \end{cases} \quad (\text{G.7})$$

De manera análoga, calculamos $g_{r' > a}$.

$$g_{r' > a} = \begin{cases} f_I(r, r') = k_l(\kappa r') i_l(\kappa r) \frac{\kappa}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} & , r < a \\ f_{II}(r, r') & , r > a \end{cases} \quad (\text{G.8})$$

Notar que, por simetría de las funciones de Green, $f_I(r, r') = g_{II}(r', r)$. Para calcular $f_{II}(r, r')$ volvemos a ver que tenemos dos casos cuando $r, r' > a$.

$$f_{II}(r, r') = \begin{cases} f_<(r, r') = A_I i_l(\kappa r) k_l(\kappa r') + B_I k_l(\kappa r) k_l(\kappa r') & , r < r' \\ f_>(r, r') = C_I k_l(\kappa r) i_l(\kappa r') + D_I k_l(\kappa r) k_l(\kappa r') & , r > r' \end{cases} \quad (\text{G.9})$$

Por continuidad, imponemos $f_>(r', r') = f_<(r', r')$.

$$A_I i_l(\kappa r) k_l(\kappa r') + B_I k_l(\kappa r') k_l(\kappa r') = C_I k_l(\kappa r') i_l(\kappa r') + D_I k_l(\kappa r') k_l(\kappa r') \Rightarrow A_I = C_I, B_I = D_I \quad (\text{G.10})$$

Reescribimos entonces $f_{II}(r, r')$ como

$$f_{II}(r, r') = A_I i_l(\kappa r_<) k_l(\kappa r_>) + B_I k_l(\kappa r) k_l(\kappa r'). \quad (\text{G.11})$$

Multiplicamos por r^2 e integramos en un entorno de $r = r'$ la ecuación (G.1).

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{r'^{-}}^{r'^{+}} \delta(r - r') dr = - \int_{r'^{-}}^{r'^{+}} \partial \left(r^2 \frac{\partial g_l(r, r')}{\partial r} \right) + \int_{r'^{-}}^{r'^{+}} [l(l+1) + r^2 \kappa^2] g_l(r, r') dr \\
&= - \int_{r'^{-}}^{r'^{+}} \partial \left(r^2 \frac{\partial g_l(r, r')}{\partial r} \right) + 0 = r'^2 [f_{IIr}(r'^{-}, r') - f_{IIr}(r'^{+}, r')] \\
&= \kappa r'^2 [A_I i_l'(\kappa r') k_l(\kappa r') + B_I k_l'(\kappa r') k_l(\kappa r') - A_I i_l(\kappa r') k_l'(\kappa r') - B_I k_l(\kappa r') k_l'(\kappa r')] \\
&= \kappa r'^2 A_I [i_l'(\kappa r') k_l(\kappa r') - i_l(\kappa r') k_l'(\kappa r')] \stackrel{(3.15)}{=} A_I \frac{\kappa r'^2}{\kappa^2 r'^2} = \frac{A_I}{\kappa} \iff A_I = \kappa
\end{aligned}$$

Así que tenemos

$$g_{r'>a} = \begin{cases} k_l(\kappa r') i_l(\kappa r) \frac{\kappa}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} & , r < a \\ \kappa i_l(\kappa r_{<}) k_l(\kappa r_{>}) + B_I k_l(\kappa r) k_l(\kappa r') & , r > a, \end{cases} \quad (G.12)$$

función continua, propiedad que da la siguiente relación,

$$\begin{aligned}
k_l(\kappa r') i_l(\kappa a) \frac{\kappa}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} &= \kappa i_l(\kappa a) k_l(\kappa r') + B_I k_l(\kappa a) k_l(\kappa r') \\
\Rightarrow B_I &= - \frac{\lambda \kappa^2 a i_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)}. \quad (G.13)
\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación reducida de Green con r' en la región II queda determinada por la siguiente función:

$$g_{r'>a} = \begin{cases} k_l(\kappa r') i_l(\kappa r) \frac{\kappa}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} & , r < a \\ \kappa \left(i_l(\kappa r_{<}) k_l(\kappa r_{>}) - k_l(\kappa r) k_l(\kappa r') \frac{\lambda \kappa a i_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \right) & , r > a \end{cases} \quad (G.14)$$

G.2. Energía total del sistema

En la sección 3 comenzamos el cálculo de la energía total del sistema con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{\lambda \kappa a k_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \int_0^{\kappa a} x^2 i_l^2(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda \kappa a i_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \int_{\kappa a}^{\infty} x^2 k_l^2(x) dx \right] \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Simplificamos con el tensor reducido $\langle t_{00} \rangle$,

$$E = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \langle t_{00} \rangle, \quad (\text{G.16})$$

el cual queda de la siguiente manera usando (3.24) y (3.25):

$$\begin{aligned} \langle t_{00} \rangle &= \frac{\lambda \kappa a k_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \int_0^{\kappa a} x^2 i_l^2(x) dx + \frac{\lambda \kappa a i_l^2(\kappa a)}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \int_{\kappa a}^{\infty} x^2 k_l^2(x) dx \\ &= \frac{\lambda \kappa a}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \frac{(\kappa a)^2}{2} (i_l^2(\kappa a) k_l(\kappa a) k_l'(\kappa a) - k_l^2(\kappa a) i_l(\kappa a) i_l'(\kappa a) + \\ &\quad + \kappa a (i_l(\kappa a) k_l'(\kappa a) + k_l(\kappa a) i_l'(\kappa a)) (i_l(\kappa a) k_l'(\kappa a) - k_l(\kappa a) i_l'(\kappa a))) \\ &\stackrel{(3.15)}{=} -\frac{\lambda \kappa a}{1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)} \frac{\kappa a}{2} \left(\frac{k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)}{\kappa a} + (k_l(\kappa a) i_l(\kappa a))' \right) \\ &= -\frac{\kappa a}{2} \frac{d}{d(\kappa a)} \ln [1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)] \end{aligned}$$

Así, la energía total el sistema da:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{4\pi i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \kappa a \frac{d}{d(\kappa a)} \ln [1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)] \\ &\stackrel{|\omega|=i\kappa}{=} -\frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \kappa a \frac{d}{d(\kappa a)} \ln [1 + \lambda \kappa a k_l(\kappa a) i_l(\kappa a)] \\ &\stackrel{x=\kappa a}{=} -\frac{1}{2\pi a} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} dx x \frac{d}{dx} \ln [1 + \lambda x k_l(x) i_l(x)] \\ &= -\frac{1}{2\pi a} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} dx x \frac{d}{dx} \ln [1 + \lambda K_{\nu}(x) I_{\nu}(x)] \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

G.3. Término E^{λ^2}

Partimos de la expresión

$$E^{\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi a} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} x \frac{d}{dx} (I_{\nu}(x) K_{\nu}(x))^2 dx. \quad (\text{G.18})$$

Del artículo [11], utilizamos la siguiente propiedad para la serie en l ,

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) x y k_l(x) i_l(y) P_l(\cos \theta) = \frac{xy}{\rho} e^{-\rho}, \quad (\text{G.19})$$

con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}$. Podemos escribir entonces también:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) x^2 k_l(x) i_l(x) P_l(\cos \theta) = \frac{x}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}} e^{-x\sqrt{2(1 - \cos \theta)}}, \quad (\text{G.20})$$

Si hacemos el producto de dos sumatorios como el anterior,

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) x^2 k_l(x) i_l(x) P_l(\cos \theta) \right) \left(\sum_{l'=0}^{\infty} (2l'+1) x^2 k_{l'}(x) i_{l'}(x) P_{l'}(\cos \theta) \right) = \frac{x^2 e^{-2x\sqrt{2(1 - \cos \theta)}}}{2(1 - \cos \theta)}. \quad (\text{G.21})$$

Integramos la anterior ecuación en $\cos \theta$ haciendo uso de la siguiente propiedad:

$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1} \quad (\text{G.22})$$

Procedemos con el cálculo.

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left(\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) x^2 k_l(x) i_l(x) P_l(\cos \theta) \right) \left(\sum_{l'=0}^{\infty} (2l'+1) x^2 k_{l'}(x) i_{l'}(x) P_{l'}(\cos \theta) \right) \\ & \stackrel{(G.22)}{=} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 x^4 k_l^2(x) i_l^2(x) \frac{2}{2l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} 2(2l+1) x^4 k_l^2(x) i_l^2(x) \\ & = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2(1 - \cos \theta)} e^{-2x\sqrt{2(1 - \cos \theta)}} d(\cos \theta) \\ & \stackrel{z=2x\sqrt{2(1 - \cos \theta)}}{=} x^2 \int_0^{4x} \frac{e^{-z}}{z} dz \end{aligned}$$

Recopilando lo anterior, tenemos la igualdad

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) K_{\nu}^2(x) I_{\nu}^2(x) = \frac{1}{2} \int_0^{4x} \frac{e^{-z}}{z} dz, \quad (\text{G.23})$$

permitiendo así escribir el término de segundo orden como

$$\begin{aligned} E^{\lambda^2} &= \frac{\lambda^2}{8\pi a} \int_0^{\infty} x \frac{d}{dx} \int_0^{4x} \frac{e^{-z}}{z} dz = 3 \frac{\lambda^2}{8\pi a} \int_0^{\infty} x \frac{e^{-4x}}{x} dx \\ &= -\frac{\lambda^2}{8\pi a} \int_0^{\infty} e^{-4x} dx = \frac{\lambda^2}{32\pi a}. \end{aligned} \quad (\text{G.24})$$