Métodos probabilísticos en fiabilidad de sistemas

Iker Gómez Giménez

Trabajo de fin de grado de Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Julio 2024

Resumen

This work, "Probabilistic Methods in System Reliability", provides a detailed exploration of advanced probabilistic concepts crucial for understanding and predicting the reliability of complex systems.

The first chapter introduces some concepts about Probability Theory that will be used during the work.

The second chapter provides a detailed exploration of coherent systems in the context of reliability theory. It focuses on fundamental concepts such as minimal path and cut sets, dual systems, and their practical applications in analyzing system reliability. Key topics include different types of coherent systems like series and parallel configurations, and their mathematical representations using path and cut sets. The chapter also discusses system lifetime, residual lifetime, and reliability functions, illustrating these concepts with clear examples. It concludes by examining the use of signatures to describe the distribution of system lifetimes and their implications for reliability analysis.

In Chapter 3, we explore the aging properties of systems and components, investigating how the aging process impacts their reliability and meanlife. Key classes of aging are defined, such as increasing/decreasing failure rate and increasing/decreasing mean residual life, which describe how the probabilities of failure and life expectancy change over time. Furthermore, it analyzes how aging properties are preserved in coherent systems through distortion functions that relate the distributions of individual components to that of the entire system, and it establishes the conditions under which these classes are preserved in coherent systems are proved.

Finally, Chapter 4 of this study focuses on generalizing the concept of independence and identical distribution of component lifetimes in coherent systems. It introduces the concept of interchangeable components, where correlations between random variables do not affect the joint distribution of system failure times. The main theorem establishes how system properties can be derived from the individual characteristics of components under this notion of interchangeability. Practical applications are explored in analyzing how does the system behaves depending on the number of components which does not work.

In conclusion, the work "Probabilistic Methods in System Reliability", offers an exploration of advanced probabilistic concepts crucial for understanding and predicting the reliability of complex systems. It covers coherent systems, aging properties, and generalizes the concepts of independence and identical distribution in interchangeable components.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En este cápitulo nos centraremos en mencionar los conceptos ya aprendidos en asignaturas anteriores, para que la comprensión del trabajo resulte mas sencilla y llevadera.

Comenzaremos definiendo los conceptos básicos. Recordemos que un espacio probabilistico $(\Omega, \mathscr{S}, P)$ consta de un conjunto Ω (Posibles resultado de un experimento aleatorio), una sigma álgebra $\mathscr{S}$ (sigma álgebra de sucesos) y una función de probabilidad P que a cada suceso le asocia una probabilidad de que ocurra.

Definición 1. Una **variable aleatoria discreta** es una variable aleatoria que toma un conjunto finito o contable de valores distintos.

Formalmente, una variable aleatoria discreta X se define como una función que asigna un valor real a cada resultado en el espacio muestral Ω:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

donde el conjunto de posibles valores de X es finito o numerable. Si X puede tomar los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$, entonces las probabilidades correspondientes están dadas por: $P(X = x_i) = s_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots$, con la condición de que: $\sum_{i=1}^{\infty} s_i = 1 \quad \text{y} \quad s_i \geq 0$ para todo i.

La **esperanza** (o **valor esperado**) de una variable aleatoria discreta X es una medida del "promedio"de los valores que X puede tomar, ponderado por sus probabilidades. Se define como:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$$

donde: $E(X)$ es la esperanza de X. y x_i son los posibles valores que puede tomar X. - $P(X = x_i)$ es la probabilidad de que X tome el valor x_i.

Definición 2. La distribución binomial con parámetros $n \in \mathbb{N}$ (número de ensayos) y $p \in [0, 1]$ (probabilidad de éxito) (Bin(n,p)) tiene la siguiente función de probabilidad:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ es el coeficiente binomial, que es el número de maneras de elegir k elementos de un conjunto de n elementos sin importar el orden. Es decir, cuántas formas diferentes se pueden formar subconjuntos de tamaño k a partir de un conjunto de n elementos.

Definición 3. Una **variable aleatoria continua** X toma cualquier valor en un intervalo de números reales. Las funciones de densidad de probabilidad (pdf) y de distribución (cdf) se definen como:

$$f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty] \text{ medible tal que } \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1 \quad \text{y} \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt. \tag{1.1}$$

Además a la función $\overline{F}_X(x) := P(X > x)$ se le conoce como **función de fiabilidad**.

Por otra parte, la **esperanza matemática** $E(X)$ de una variable aleatoria continua X es el promedio ponderado de todos los valores posibles de X, considerando su densidad de probabilidad

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx.$$

Proposición 1. Sea X una variable aleatoria no negativa con funcion distribución F, entonces

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} \overline{F}(x) dx.$$

Demostración. Haremos la prueba para una variable aleatoria continua con densidad f, es decir:

$$\overline{F}(x) = \int_{x}^{\infty} f(t)\, dt,$$

donde $f(t)$ es la función de densidad de probabilidad de X. Queremos evaluar la integral:

$$\int_{0}^{\infty} \overline{F}(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} \left(\int_{x}^{\infty} f(t)\, dt \right) dx$$

Al cambiar el orden de integración, la integral se convierte en:

$$\int_{0}^{\infty} \left(\int_{0}^{t} dx \right) f(t)\, dt$$

La integral interna es:

$$\int_{0}^{t} dx = t$$

Sustituimos esta evaluación en la integral externa:

$$\int_{0}^{\infty} \overline{F}(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} t f(t)\, dt = E(X).$$

∎

Notemos que si X es una variable discreta, que toma valores sobre 0,1,2,..., deducimos de la Proposición anterior que

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X > i).$$

Definición 4. La **distribución exponencial** con parámetro $\lambda > 0$ tiene las siguientes definiciones:
Función de densidad de probabilidad (pdf): $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{para } x \geq 0$
Función de distribución acumulada (cdf): $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{para } x \geq 0$

Definición 5. La **distribución de Weibull** con parámetros $k > 0$ (forma) y $\lambda > 0$ (escala) tiene las siguientes definiciones:
Función de densidad de probabilidad (pdf): $f_X(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} \quad \text{para } x \geq 0$
Función de distribución acumulada (cdf): $F_X(x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k} \quad \text{para } x \geq 0$

Definamos a continuación dos de los conceptos mas importantes en probabilidad, la probabilidad condicional, así como la independencia.

Definición 6. La **probabilidad condicional** de un evento A dado que otro evento B ha ocurrido, denotada como $P(A \mid B)$, se define como la probabilidad de que ocurra el evento A dado que se sabe que el evento B ha ocurrido. Matemáticamente, se expresa de la siguiente manera:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{, donde:}$$

- $P(A \mid B)$ es la probabilidad condicional de A dado B.
- $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que ambos eventos A y B ocurran.
- $P(B)$ es la probabilidad de que ocurra el evento B.

Es importante destacar que esta definición solo tiene sentido cuando $P(B) > 0$, ya que no se puede condicionar sobre un evento con probabilidad cero.

Definición 7. Dos variables aleatorias X y Y definidas sobre el mismo espacio probabilístico se dicen *independientes* si y solo si la función de distribución conjunta $F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ se puede expresar como el producto de las funciones de distribución marginales $F_X(x)$ y $F_Y(y)$, es decir:

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall x,y.$$

Y por último (por ahora) la noción de estadisticos ordenados, que son de gran utilidad por el valor informativo que nos aporta saber cuantas componentes tienen que fallar para que un sistema se apague (veremos esto mas adelante).

Definición 8. Los estadísticos ordenados de una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (esto es, un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas) se definen como el conjunto ordenado de observaciones:

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n},$$

donde $X_{1:n}$ es el mínimo valor, $X_{2:n}$ es el segundo valor más pequeño, y así sucesivamente hasta $X_{n:n}$, que es el máximo valor de la muestra. Notemos que los estadísticos ordenados tambien se pueden definir para cualquier vector de variables $(X_1, \ldots, X_n)$ definidas sobre el mismo espacio probabilístico.

Para una muestra de tamaño n, los estadísticos de orden proporcionan información ordenada y útil sobre la distribución de los datos observados.

Capítulo 2

Sistemas Coherentes

Para este primer cápitulo veremos las nociones básicas de los sistemas coherentes, a la vez que ilustraremos una gran variedad de ejemplos con el objetivo de hacer la lectura mas cómoda. Finalmente aplicaremos nociones ya conocidas en el ambito de la probabilidad a este tipo de sistemas con la finalidad de ver sus distintas propiedades y aplicaciones en diferentes campos.

En el contexto de la fiabilidad, un sistema es un conjunto de componentes o elementos interrelacionados que trabajan juntos para cumplir una función específica o alcanzar un objetivo determinado. La fiabilidad, en este contexto, se refiere a la capacidad de un sistema para desempeñar sus funciones requeridas bajo condiciones específicas y durante un período de tiempo determinado sin fallos, en la cual nos focalizaremos en este trabajo. La información de este capitulo esta recopilada de [1].

Comenzaremos definiendo los diferentes sistemas .

2.1. Definición de sistemas y propiedades

Un sistema de componentes se referirá a un conjunto de elementos físicos interconectados entre si para lograr un mismo objetivo. Un ejemplo de esto es un sistema de cuatro componentes, las extremidades del cuerpo, dos piernas y dos brazos, ¿qué componentes deben estar en funcionanmiento para caminar o para escribir en un ordenador?, esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 9. Un sistema de componentes de orden n se describe por medio de una función con estructura Booleana tal que,

$$\phi : \{0,1\}^n \to \{0,1\},$$

donde $\phi(x_1,...,x_n)$ representa el estado del sistema (no funcionando si es 0 y funcionando si es 1) y donde las variables $x_1,...,x_n \in \{0,1\}$ representa el estado de los n componentes de este. Esta función ϕ recibe el nombre de función estructural.

Ejemplo 1. La función $\phi(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2$, es un sistema donde tenemos que el sistema estara funcionando en las siguientes combinaciones $(1,1,0)$ y $(1,1,1)$, estando en no funcionamiento en el resto, luego el sistema funcionará unicamente si estan funcionando las dos primeras componentes, que son relevantes en este caso, siendo irrelevante la tercera. Profundizaremos algo mas sobre estos conceptos mas adelante.

Ahora se hace natural definir ciertas propiedades básicas sobre los sistemas de componentes, lo que nos lleva a definir los sistemas semicoherentes, no sin antes definir lo que se entiende como función creciente en $\mathbb{R}^n$ ya que es empleado en la definición de dichos sistemas.

Definición 10. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es *creciente* (o *monótona creciente*) si para cualesquiera $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se cumple que:

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \implies f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}),$$

donde la relación $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ significa que $x_i \leq y_i$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$.

Definición 11. Un sistema semi-coherente de orden n es un sistema

$$\phi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

que satiface las siguientes propiedades:

1. ϕ es creciente;

2. $\phi(0,...,0) = 0$ y $\phi(1,...,1) = 1$

La propiedad 1 podría traducirse como que si el sistema está funcionando y encendemos algun componente que no estaba funcionando, el sistema deberá seguir funcionando.

Un ejemplo de sistema semi-coherente es el mostrado en el Ejemplo 1. Ahora esta definición nos lleva a definir los componentes irrelevantes, aquellos que no afectan en ningun caso al estado del sistema.

Definición 12. El componente i-ésimo se dice irrelevante para el sistema ϕ si

$$\phi(x_1,...,x_{i-1},0,x_{j+1},...,x_n) = \phi(x_1,...,x_{i-1},1,x_{j+1},...,x_n)$$

para todo $x_1,...,x_{i-1},x_{j+1},...,x_n \in \{0,1\}$
En cualquier otro caso se le llama componente relevante.

Podemos observar que en el Ejemplo 1, la variable x_3 es un componente irrelevante, pues su estado no afecta al estado del sistema.
Para evitar la aparición de coponentes irrelevantes definimos los sistemas coherentes

Definición 13. Un sistema coherente de orden n es un sistema

$$\phi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

tal que

1. ϕ es creciente;

2. ϕ es estrictamente creciente en cada componente en al menos un punto.

Con la segunda condición aseguramos que todas las variables sean relevantes. Ahora, una pregunta que nos hacemos es si un sistema coherente es semicoherente, veamos que, en efecto, esto es cierto.

Proposición 2. Todo sistema coherente ϕ es también un sistema semi-coherente.

Demostración. Notemos que unicamente hay que ver que $\phi(0,...,0) = 0$ y $\phi(1,...,1) = 1$. La segunda condición en la definición 13 implica que, en particular ϕ es estrictamente creciente en x_1 en al menos un punto, por lo que existen $x_2,...,x_n \in \{0,1\}$ tal que,

$$0 = \phi(0,x_2,...,x_n) \leq \phi(1,x_2,...,x_n) = 1,$$

por lo que $0 \leq \phi(0,...,0) \leq \phi(0,x_2,...,x_n) = 0$ y $1 = \phi(1,x_2,...,x_n) \leq \phi(1,...,1) = 1$, concluyendo con el resultado deseado. ∎

Ejemplo 2. La función $\phi(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - x_1x_2$ es un sistema coherente, ya que ϕ crece estrictamente en el punto (0,0) respecto a ambas variables.

Un sistema coherente(o semi-coherente) puede ser determinado por los conjuntos de componentes que hacen que el sistema funcione(o falle respectivamente), definamos estos conjuntos a continuación.

Definición 14. Un conjunto no vacio $P \subseteq \{1,\dots,n\}$ es un conjunto camino de ϕ si $\phi(x_1,...,x_n) = 1$ cuando $x_i = 1$ para todo $i \in P$. De manera similar un conjunto no vacío $C \subseteq \{1,\dots,n\}$ es un conjunto de corte de ϕ si $\phi(x_1,...,x_n) = 0$ cuando $x_i = 0$ para todo $i \in C$.

Definición 15. Un conjunto camino P se llama conjunto mínimo de camino si el sistema no contiene otro conjunto camino. Un conjunto de corte C se llama conjunto mínimo de corte si no contiene otro conjunto de corte.

Ejemplo 3. Sea $\phi(x_1,x_2) = x_1$ entonces $\{\{1\},\{1,2\}\}$ son los conjuntos de corte y camino del sistema. Esto se debe a que el sistema esta funcionando si y solo si está encendida la primera componente o ambas. A su vez el sistema no estará funcionando si y solo si no están funcionando la primera componente o ambas.

Ejemplo 4. Sea $\phi(x_1,x_2,x_3) = min(x_1,max(x_2,x_3))$ un sistema entonces sus conjuntos de camino son $\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$ y sus conjuntos de corte $\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$, por lo tanto, su conjunto mínimo de camino es $\{\{1,2\},\{1,3\}\}$ y su conjunto mínimo de corte $\{\{1\},\{2,3\}\}$, pues son los unicos que no contienen otro conjunto de camino o corte respectivamente.

En matemáticas, la dualidad es una herramienta poderosa para analizar y comprender estructuras. En rasgos generales, el sistema dual es de alguna forma el inverso del original, como vemos en la siguiente definición.

Definición 16. El sistema dual de un sistema ϕ es el sistema

$$\phi^D : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

definida como $\phi^D(x_1,\ldots,x_n) := 1-\phi(1-x_1,\ldots,1-x_n)$ para todos $x_1,\ldots,x_n \in \{0,1\}$.

De la anterior definición se obtiene también trivialmente que $(\phi^D)^D = \phi$.

Ejemplo 5. Sea $\phi(x_1,x_2)$ el sistema del Ejemplo 2, entonces su sistema dual es $\phi^D = 1-\phi(1-x_1,1-x_2) = 1-(1-x_1+1-x_2-(1-x_1)(1-x_2)) = x_1x_2$

Luego, observaremos que en el sistema dual ϕ^D, un sistema en el cual si P es un conjunto de camino si y solo si P es un conjunto de corte en ϕ^D, lo mismo sucede con los conjuntos de corte.

Veamos a continuación algunas propiedades de los sistemas duales que nos podrán ser de utilidad mas adelante.

Notación 1. Sea $C \in \{1,...,n\} := N$, entonces 1^C representa que los componentes en C están encendidos, a su vez 0^C representa que estos están apagados.

Proposición 3. Si P es un conjunto camino (resp. C un conjunto de corte) de ϕ, entonces P es un conjunto de corte (resp camino) de ϕ^D.

Demostración. Definimos en primer lugar $Q = N \setminus P$.
P es un conjunto camino de $\phi \Leftrightarrow \phi(1^P,0^Q) = 1 \Leftrightarrow 1-\phi(1^P,0^Q) = 0 \Leftrightarrow \phi^D(0^P,1^Q) = 0 \Leftrightarrow P$ es un conjunto de corte de ϕ^D . ■

Veamos a continuación que el estado de todo sistema coherente se puede caracterizar por sus conjuntos de camino y de corte.

Proposición 4. Dos sistemas coherentes de componentes son iguales (esto es, sus funciones de estructura son iguales) si y solo si tienen los mismos conjuntos de corte y de camino.

Demostración. $\Rightarrow$) Trivial.
$\Leftarrow$) Ahora si dos sistema tienen los mismos conjuntos de corte significa que si un sistema no esta encendido, el otro sistema no estará encendido tampoco. Exactamente lo mismo sucede con los conjuntos de camino si un sistema esta encendido al tener los mismos conjuntos de camino ambos sistema estaran encendidos. Por lo tanto, ambos sistemas son indistinguibles en términos de sus fallos y operación, lo que implica que son iguales. ■

A continuación veremos algunos de los sistemas de componentes coherentes mas comunes y simples, con los que trabajaremos.

Definición 17. 1. El sistema en serie de orden n es $\phi_{1:n}(x_1,...,x_n) := min(x_1,...,x_n)$, es decir que el sistema no funciona si falla algún componente.

2. El sistema en paralelo de orden n es $\phi_{n:n},(x_1,...,x_n) := max(x_1,...,x_n)$, es decir que el sistema no funciona unicamente si fallan todos los componentes.

Ejemplo 6. Un ejemplo de un sistema en series es muchas pilas conectadas en serie a un ventilador, este solo funciona si todas las pilas funcionan, puesto que si una falla el ventilador se apaga. Por otro lado un sistema en paralelo podría ser una lámpara con varias bombillas, pues la lámpara dejará de iluminar solo si dejan de funcionar todas las bombillas.

Definición 18. El sistema k-sobre-n se define como:

$$\phi_{n-k+1:n}(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1+\cdots+x_n \geq k \\ 0, & \text{si } x_1+\cdots+x_n < k \end{cases}$$

Es un sistema que falla en el momento que k componentes fallan. Se suele utilizar en sistemas donde se ponen componentes redundantes para asegurar el funcionamiento de un sistema. Por ejemplo, imaginemos que un avión necesita dos motores para funcionar. Un sistema 2 de 3 incluiría un tercer motor adicional (de modo que estarían los 3 motores en funcionamiento al inicio del vuelo). De esta manera, se aumenta la seguridad del vuelo.

Definición 19. Para $k = 1,\dots,n$, el sistema lineal consecutivo k-sobre-n:G es el sistema que funciona cuando al menos k componentes consecutivos funcionan, es decir, su función de estructura es

$$\phi_{k:n:G|l}(x_1,\dots,x_n) = 1 \text{ si y solo si existe } i \in \{0,\dots,n-k\} \text{ tal que } x_{i+1} = \cdots = x_{i+k} = 1.$$

El sistema lineal consecutivo k-sobre-n:F es el sistema que falla cuando al menos k componentes consecutivos fallan, es decir, su función de estructura es

$$\phi_{k:n:F|l}(x_1,\dots,x_n) = 0 \text{ si y solo si existe } i \in \{0,\dots,n-k\} \text{ tal que } x_{i+1} = \cdots = x_{i+k} = 0.$$

Además, profundizando aún más en la proposición anterior, todo sistema coherente es caracterizado por sus conjuntos de camino o corte.

Teorema 2.1. *Sea ϕ un sistema coherente de orden n y sean $P_1,\dots,P_r$ y $C_1,\dots,C_s$ sus conjuntos minimos de camino y corte respectivamente, entonces*

$$\phi(x) = \max_{i=1,...r} \min_{j\in P_i} x_j \tag{2.1}$$

y

$$\phi(x) = \min_{i=1,...s} \min_{j\in C_i} x_j \tag{2.2}$$

para todo $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \{0,1\}^n$.

Demostración. La demostración es trivial y se basa únicamente en que el sistema estará encendido si al menos uno de todos los conjuntos mínimos de camino tiene todas sus componentes encendidas, o que todos los conjuntos mínimos de corte tengan al menos una componente encendida. ■

El teorema anterior muestra que cualquier sistema coherente puede descomponerse como sistemas en serie conectados en paralelo o como sistemas en paralelo conectados en serie (con posibles componentes comunes). Aquí podemos usar la notación introducida anteriormente para sistemas en serie y en paralelo y escribir (2.1) y (2.2) como

$$\phi(x) = \max_{i=1,\dots,r} \phi_{P_i}(x)$$

y

$$\phi(x) = \min_{i=1,\dots,s} \phi_{C_i}(x),$$

respectivamente. También se pueden escribir usando productos y coproductos como

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^{r} \coprod_{j\in P_i} x_j$$

y

$$\phi(x) = \coprod_{i=1}^{s} \prod_{j\in C_i} x_j \quad ,$$

donde el coproducto $\coprod$ es definido como

$$\coprod_{i\in P} x_i = 1 - \prod_{i\in P}(1 - x_i).$$

Notemos que obtenemos un polinomio de grado n y que estas representaciones son una alternativa a la original, una vez hayan sido detectados los conjuntos de camino y corte mínimos. Por ejemplo, para el sistema ϕ considerado anteriormente en el ejemplo 4, obtenemos

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = x_1 \coprod x_2x_3 = 1-(1-x_1)(1-x_2x_3) = x_1 + x_2x_3 - x_1x_2x_3.$$

2.2. Tiempo de vida de los sistemas

En la sección anterior hemos visto como es el estado de los sistemas para un tiempo fijo, sin embargo nos centraremos de ahora en adelante en las relaciones entre el tiempo de vida de los componentes y como estos afectan al tiempo de vida del sistema, esto es, supondremos que el instante de cada componente se puede describir mediante una variable aleatoria, lo que implica que el instante de fallo de sistema también lo es. Nos centraremos principalmente en el cálculo de la función de fiabilidad (vista en 1.1) del sistema conociendo las funciones de fiabilidad de los componentes. Así como tendremos también en cuenta las principales funciones de envejecimiento.

Asumiremos de ahora en adelante que $X_1,\dots,X_n$ son variables aleatorias no negativas dadas en un espacio probabilistico $(\Omega,\mathscr{S},P)$, que representan los tiempos de vida de los componentes. Llamaremos T al tiempo de vida del sistema.

Por lo tanto, sería de gran importancia poder relacionar el tiempo de vida del sistema T con los conjuntos de corte o de camino vistos en esta sección. Esto es algo que logramos observando que el sistema esta funcionando si hay algun conjunto de camino cuyos componentes esten todos encendidos o si todos los conjuntos de corte tienen alguna componente en funcionamiento, luego el tiempo de vida del sistema T puede ser obtenido del tiempo de vida de los componentes como sigue.

Proposición 5. Sea ψ un sistema semicoherente de orden n conconjuntos minimos de camino $P_1,\dots,P_r$ y de corte $C_1,\dots,C_s$, entonces el tiempo de vida T del sistema, puede ser escrito como

$$T = \max_{1\le j\le r} \min_{i\in P_j} X_i \tag{2.3}$$

y

$$T = \min_{1\le j\le s} \max_{i\in C_j} X_i. \tag{2.4}$$

Demostración. Demostración análoga a la del Teorema 2.1 sustituyendo el tiempo de vida T del sistema por la función estructural ϕ. ■

Ejemplo 7. Sea ahora el sistma coherente considerado anteriormente en el ejemplo 4, sabemos que tiene conjuntos mínimos de corte $\{\{1\},\{2,3\}\}$, por lo tanto usando (2.4) podemos expresar su tiempo de vida $T = \psi(X_1,X_2,X_3) = \min(X_1,\max(X_2,X_3))$.

Las expresiones 2.4 y 2.3 nos indican que existe una función $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. De modo que el tiempo de vida de los sistemas puede reescribirse como $T = \psi(X_1,\ldots,X_n)$. Por ejemplo, el tiempo de vida de un sistema en paralelo de n componentes es $T = max(X_1,\ldots,X_n)$

Para estudiar estos sistemas deberemos comprobar en cada instante de tiempo t si las componentes (el sistema) funcionan o no, por lo que es conveniente definir las variables aleatorias Booleanas, que nos indican este comportamiento.

Definición 20. Para un tiempo fijo t, definimos las variables aleatoria Booleanas como

$$B_i(t) := 1_{\{X_i>t\}},\ para\ i = 1,\ldots,n,$$

donde la función 1_A es la función indicadora del conjunto A,1 si A es cierto y 0 si es falso.

Para i fijo, $B_i(t), t \geq 0$, constituiría lo que se llama un proceso estocástico (un conjunto de variables aleatorias definidas en el espacio probabilístico inicial, que nos indican la evolución en el tiempo de la componente i-ésima.

Ahora en vista de la anterior definición es natural escribir el estado del sistema para un tiempo t fijo como,

$$B(t) = \phi(B_1(t),\ldots,B_n(t)) = 1_{\{T>t\}},$$

donde asumiremos que $B(0) = 1$, puesto que en $t = 0$ todas las componentes están encendidas y $B(\infty) = 0$, ya que para $t > max(X_1,\ldots,X_n)$ todas las componentes estarán apagadas.

Denotamos la funcion de fiabilidad del sistema como

$$\overline{F}_T(t) := P(T > t).$$

De igual manera podemos denotar la función de fiabilidad de los componentes como

$$\overline{F}_i(t) := P(X_i > t).$$

Mientras que por otra parte sus respectivas funciones de distribución las denotaremos como

$$F_T(t) := P(T \leq t) = 1 - \overline{F}_T(t)$$

y

$$F_i(t) := P(T_i \leq t) = 1 - \overline{F}_i(t).$$

Conviene ahora tener en cuenta los modelos mas importantes asi como las diferentes caracteristicas del tiempo de vida de los sistemas.

De una gran importancia es, saber como se comporta nuestro sistema de componentes a partir de un instante de tiempo t (suponiendo que entonces el sistema todavía está en funcionamiento), debido a esto nace el concepto de tiempo de vida residual desarrollado a continuación.

Definición 21. El tiempo de vida residual es la variable aleatoria $T_t = (T - t|T > t)$, el cual representa el tiempo de vida de una variable aleatoria que esta funcionando en el instante t (contado a partir de dicho instante). Su función de fiabilidad es

$$\overline{F}_T(x|t) := P(T - t > x|T > t) = \frac{P(T > x+t)}{P(T > t)} = \frac{\overline{F}_T(x+t)}{\overline{F}_T(t)}$$

Ilustremos esta definición mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8. Sea una variable aleatoria exponencial de parametro λ, entonces, mediante un sencillo cálculo el tiempo de vida residual de una exponencial de parametro λ es:

$$\overline{F}_T(x|t) = \frac{\overline{F}_T(x+t)}{\overline{F}_T(t)} = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x}.$$

Luego, la funcion de fiabilidad del tiempo de vida residual de una exponencial, es su propia función de fiabilidad. Este fenómeno se conoce como propiedad de ausencia de memoria. Esto quiere decir que una nueva componente usada un tiempo t, tiene el mismo comportamiento, a partir de ahora que una componente nueva.

Ahora, hay una serie de funciones de interés usadas para describir el proceso de envejecimiento, tendremos unicamente en cuenta dos, que son las siguientes, el tiempo residual medio (TRM), definido como

$$m_T(t) = E(T_t) = E(T-t|T>t)$$

para todo $t>0$ tal que $\overline{F}_T(t)>0$, que haciendo uso de la Proposición 1 puede ser calculada como

$$m_T(t) = \int_0^\infty \overline{F}_T(x|t)dx = \int_0^\infty \frac{\overline{F}_T(x+t)}{\overline{F}_T(t)}dx = \frac{1}{\overline{F}_T(t)}\int_t^\infty \overline{F}_T(x)dx.$$

Dada una variable aleatoria absolutamente continua, a la segunda función, se le conoce como tasa de fallo (TF) y se define como

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{\overline{F}_T(t)}$$

para todo $t>0$ tal que $\overline{F}_T(t)>0$. Una interpretación que se le puede dar a la tasa de fallo es que es una función que mide la verosimilitud de que a un individuo le ocurra cierto suceso de interés a lo largo del tiempo.

Recordemos, con el objetivo de aclarar este concepto, que la función de densidad se puede calcular como límite de tasas de probabilidad, mediante la siguiente fórmula,

$$f_T(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P(t \le T \le t+h)}{h}.$$

Ejemplo 9. Continuando con el ejemplo 8, sea el modelo exponencial de parametro λ, entonces su tiempo residual medio es

$$m_T(t) = \frac{1}{exp(-\frac{t}{\lambda})}\int_t^\infty exp(-\frac{x}{\lambda})dx = \frac{1}{\lambda} \text{ (evidente por el ejemplo 8)},$$

por otro lado la tasa de fallo es

$$h_T(t) = \frac{\frac{exp(\frac{-t}{\lambda})}{\lambda}}{exp(\frac{-t}{\lambda})} = \frac{1}{\lambda},$$

por tanto, en una distribución exponencial la tasa de fallo es constante.

2.3. Representación de la distribución de los tiempos de vida usando signaturas

Es de vital importancia cuando se habla sobre sistemas el tener expresiones útiles para la función de fiabilidad $\overline{F}_T(t)$, para ello en esta sección se verá una expresión de ella en función de los instantes de fallo ordenados en el tiempo, que permitirá deducir de un modo sencillo muchas propiedades del sistema.

Supondremos salvo que se diga lo contrario que los tiempos de vida de los componentes son independientes e identicamente distribuidos, por lo que el tiempo de vida de los componentes sera representado solo por la función distribución común F $(\overline{F})$. Además asumiremos a partir de ahora (mientras no se diga lo contrario) que los tiempos de vida de las componentes son variables aleatorias absolutamente continuas.

Recordemos, para el siguiente Teorema la noción de estadisticos ordenados(Definición 8) presentada en la introducción.

Teorema 2.2. *Si T es el tiempo de vida de un sistema coherente donde los tiempo de vida de las componentes $X_1,\dots,X_n$ tiene una función distribución F, entonces*

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}(t), \quad \forall t > 0, \tag{2.5}$$

donde $s_1,\dots,s_n$ son coeficientes no negativos tal que $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$ y que no depende de F y donde $\overline{F}_{i:n}(t)$ son la función de fiabilidad de $X_{i:n}$ para $i = 1,\dots,n$. Ademas, estos coeficientes satifacen que $s_i = P(T = X_{i:n})$ para $i = 1,\dots,n$.

Demostración. Observamos en primer lugar que los eventos $\{T = X_{i:n}\}$, para $i = 1,\dots,n$ son una partición del espacio probabilistico Ω, además por la continuidad de F, se tiene que $P(X_{i:n} = X_{j:n}) = 0$ si $i \neq j$. , luego tenemos que $T = X_{i:n}$ son sucesos incompatibles para $i = 1,2,\dots,n$. Por tanto tenemos,

$$\overline{F}_T(t) = P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} P(\{T > t\} \cap \{T = X_{i:n}\}) = \sum_{i=1}^{n} P(T = X_{i:n})P(T > t | T = X_{i:n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(T = X_{i:n})P(X_{i:n} > t | T = X_{i:n}) = \sum_{i=1}^{n} P(T = X_{i:n})P(X_{i:n} > t) = \sum_{i=1}^{n} P(T = X_{i:n})\overline{F}_{i:n}(t).$$

La cuarta igualdad se ha dado haciendo uso de la independencia entre $\{X_{i:n} > t\}$ y $\{T = X_{i:n}\}$ Puesto que el último suceso, al ser los tiempos de vida independientes e idénticamente distribuídos, sólo depende de la estructura del sistema. Ahora llamando s_i a $P(T = X_{i:n})$, se obtiene el resultado, puesto que $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} P(T = X_{i:n}) = 1$, por ser $\{T = X_{i:n}\}$, con $i = 1,\dots,n$ una partición del espacio probabilístico. Además, s_i sólo depende de la función de estructura del sistema, pues es la que determina si el sistema funciona o no dependiendo de qué componentes funcionan y cuáles no. ■

Definición 22. Al vector $\mathbf{s} = (s_1,\dots,s_n)$, se le conoce como signatura del sistema. Como hemos indicado, estos coeficientes dependen unicamente de la estructura del sistema y puede ser calculada de la siguiente manera

$$s_i = \frac{|A_i|}{n!} \text{ para } i = 1,...,n,$$

donde $|A_i|$ es la cardinalidad del conjunto A_i de todas las permutaciones ρ del conjunto $[n] = 1,...,n$ que satisfacen que $\psi(X_1,...,X_n) = X_{i:n}$ cuando $X_{\rho(1)} < ... < X_{\rho(n)}$, donde ψ indica el funcionamiento o no del sistema en función de los tiempos de vida de este (véase la Proposición 5).

Ejemplo 10. Para el sistema coherente con tiempo de vida $\psi = \text{mín}(X_1, \text{máx}(X_2, X_3))$, tenemos las siguientes opciones (permutaciones):

Donde J es la variable aleatoria tal que $T = X_{J:n}$ para cada una de las permutaciones de las componentes. Por lo tanto, su signatura es $s = (s_1 = 1/3, s_2 = 2/3, s_3 = 0)$. Así, a partir de (2.5), su función de fiabilidad se puede escribir como

$$\bar{F}_T(t) = \frac{1}{3}\bar{F}_{1:3}(t) + \frac{2}{3}\bar{F}_{2:3}(t)$$

para todo t.

σ	$X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < X_{\sigma(3)}$	ψ	J
(1, 2, 3)	$X_1 < X_2 < X_3$	$X_1 = X_{1:3}$	1
(1, 3, 2)	$X_1 < X_3 < X_2$	$X_1 = X_{1:3}$	1
(2, 1, 3)	$X_2 < X_1 < X_3$	$X_1 = X_{2:3}$	2
(2, 3, 1)	$X_2 < X_3 < X_1$	$X_3 = X_{2:3}$	2
(3, 1, 2)	$X_3 < X_1 < X_2$	$X_1 = X_{2:3}$	2
(3, 2, 1)	$X_3 < X_2 < X_1$	$X_2 = X_{2:3}$	2

Cuadro 2.1: Permutaciones y Valores de ψ y J

Por el teorema anterior nos es útil obtener expresiones adecuadas para $\overline{F}_{i:n}(t)$, dado que conociendo dichas funciones de distribución y las $P(T = X_{i:n})$, obtenemos la función de fiabilidad del sistema de componentes.

Proposición 6. Si $X_1,...,X_n$ son v.a.i.i.d. con función distribución F, entonces la función de fiabilidad de $X_{i:n}$ es

$$\overline{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} F^j(t)\overline{F}^{n-j}(t). \tag{2.6}$$

Demostración. Consideremos la v.a. de Bernoulli, definidas como $B_i(t) = 1$ si y solo si $X_i > t$. Entonces $N(t) := \sum_{i=1}^{n} B_i(t)$, nos da el numero de componentes encendidas en el tiempo t, que ademas sigue una distribucion binomial $Bin(n, p_t)$, (definida en 2) donde $p_t = \overline{F}(t)$, por lo tanto

$$\overline{F}_{i:n}(t) = P(X_{i:n} > t) = P(N(t) > n-i) = \sum_{k=n-i+1}^{n} \binom{n}{k} F^{n-k}(t)\overline{F}^{k}(t),$$

y haciendo el cambio de variable $j = n-k$ se obtiene el resultado.

■

De los dos resultados anteriores, tenemos el siguiente

Corolario 2.3. Si $X_1,...,X_n$ son v.a.i.i.d. con función distribución F, entonces la función de fiabilidad del sistema es

$$\overline{F_T}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=n-k+1}^{n} s_i \right) \binom{n}{k} F^{n-k}(t)\overline{F}^{k}(t).$$

Demostración. Haciendo uso de la Proposición anterior y el Teorema 2.2, se obtiene $\overline{F_T}$ de la siguiente manera,

$$\overline{F_T}(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} F^j(t)\overline{F}^{n-j}(t),$$

e intercambiando el orden de los sumatorios tenemos que

$$\overline{F_T}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=n-k+1}^{n} s_i \right) \binom{n}{k} F^{n-k}(t)\overline{F}^{k}(t).$$

■

Ejemplo 11. Consideremos el sistema k-sobre-n, el sistema se apaga por primera vez cuando fallan $n-k+1$ componentes, por lo que las todas las signaturas seran 0 excepto para s_{n-k+1}, cuyo valor sera 1. Ahora haciendo uso del Corolario 2.3 tenemos que

$$\overline{F_T}(t) = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{i=n-p+1}^{n} s_i \right) \binom{n}{p} F^{n-p}(t)\overline{F}^{p}(t) = \sum_{p=1}^{k} \binom{n}{p} F^{n-p}(t)\overline{F}^{p}(t).$$

Veamos a continuación que información podemos obtener conociendo la signatura de un sistema. Como primera inquietud, se puede pensar si la signatura del sistema dual tiene alguna relación con la signatura del sistema original, veamos que en efecto, esta relación existe.

Proposición 7. Sea $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ la signatura de un sistema T cuyas componentes $X_1, \ldots, X_n$ son v.a.i.i.d., entonces la signatura del sistema dual T^D es $\mathbf{s}^D = (s_n, \ldots, s_1)$.

Demostración. La demostración se basa en que $P(T^D = X_{i:n}) = P(T = X_{n-i+1:n})$, puesto que es equivalente que el sistema dual este encendido si al menos hay i componentes encendidos a que en el sistema original esté encendido si estan encendidos al menos $n-i+1$ componentes. Concluyendo la demostración. ∎

El cálculo de la esperanza conociendo la signatura es trivial, pues haciendo uso de nuevo del Teorema 2.5, se obtiene facilmente que

$$E(T) = \sum_{i=1}^{n} s_i E(X_{i:n}),$$

pues $E(T) = E(\sum_{i=1}^{n} s_i X_{i:n}) = \sum_{i=1}^{n} s_i E(X_{i:n})$, una propiedad similar se mantiene para las funciones de densidad si las funciones de distribución son absolutamente continuas,

$$f_T(t) = \sum_{i=0}^{n} s_i f_{i:n}(t),$$

que se obtiene trivialmente del teorema 2.5.

Proposición 8. Si $X_1, \ldots, X_n$ son IID $\sim F$ y F es absolutamente continua con densidad f, entonces la densidad de $X_{i:n}$ es

$$f_{i:n}(t) = i\binom{n}{i} f(t) F^{i-1}(t) \bar{F}^{n-i}(t).$$

Demostración. A partir de (2.6) tenemos

$$\bar{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} F^j(t) \bar{F}^{n-j}(t).$$

Diferenciando esta expresión obtenemos

$$\frac{d}{dt}\bar{F}_{i:n}(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} F^j(t) \bar{F}^{n-j}(t)\right).$$

Aplicando la regla del producto, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\bar{F}_{i:n}(t) = f(t)\sum_{j=1}^{i-1} \binom{n}{j} jF^{j-1}(t)\bar{F}^{n-j}(t) - f(t)\sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j}(n-j)F^j(t)\bar{F}^{n-j-1}(t).$$

Simplificando, tenemos

$$\frac{d}{dt}\bar{F}_{i:n}(t) = nf(t)\sum_{j=1}^{i-1} \binom{n-1}{j-1} F^{j-1}(t)\bar{F}^{n-j}(t) - nf(t)\sum_{j=0}^{i-1} \binom{n-1}{j} F^j(t)\bar{F}^{n-j-1}(t).$$

Reindexando la primera suma para que inicie en $k=0$ (donde $k = j-1$), obtenemos

$$\frac{d}{dt}\bar{F}_{i:n}(t) = nf(t)\sum_{k=0}^{i-2} \binom{n-1}{k} F^{k}(t)\bar{F}^{n-k-1}(t) - nf(t)\sum_{j=0}^{i-1} \binom{n-1}{j} F^j(t)\bar{F}^{n-j-1}(t).$$

Al simplificar, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\bar{F}_{i:n}(t) = -nf(t)\binom{n-1}{i-1}F^{i-1}(t)\bar{F}^{n-i}(t).$$

Finalmente, recordando que $f_{i:n}(t) = -\frac{d}{dt}\bar{F}_{i:n}(t)$, tenemos

$$f_{i:n}(t) = i\binom{n}{i}f(t)F^{i-1}(t)\bar{F}^{n-i}(t).$$

■

Ejemplo 12. Continuando el ejemplo anterior, 11, vemos que

$$f_T(t) = \sum_{i=0}^{n} s_i f_{i:n}(t) = f_{n-k+1:n}(t).$$

Ahora si las componentes tienen una distribución exponencial $F_i(t) = 1 - e^{\frac{-t}{\mu}}$, entonces, haciendo uso del Teorema anterior:

$$f_T(t) = (n-k+1)\binom{n}{n-k+1}\frac{1}{\mu}e^{\frac{-t}{\mu}}(1-e^{\frac{-t}{\mu}})^{n-k}(e^{\frac{-t}{\mu}})^{k-1} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}\frac{1}{\mu}(1-e^{\frac{-t}{\mu}})^{n-k}(e^{\frac{-t}{\mu}})^{k}.$$

Capítulo 3

Propiedades de envejecimiento

En este capítulo estudiaremos principalmente el proceso de envejecimiento del sistema y como este se relaciona con el envejecimiento de las componentes, dicha información la podemos encontrar en [1]. Para ello usaremos las principales clases de envejecimiento, las cuales serán definidas mas adelante y estableceremos algunas condiciones de preservación de dichas clases bajo la formación de sistemas coherentes.

Introduzcamos antes un concepto muy a tener en cuenta para la comprensión de esta sección como es el orden estocástico usual que es una herramienta importante en la teoría de probabilidad y estadística para comparar distribuciones de probabilidad. Este concepto se utiliza para determinar cuándo una variable aleatoria es mayor que otra en un sentido probabilístico.

Sea X y Y dos variables aleatorias. Decimos que X es menor o igual que Y en el orden estocástico usual(denotado como $X \leq_{ST} Y$) si y solo si: $P(X > t) \leq P(Y > t) \quad$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Equivalentemente, esta relación puede expresarse en términos de las funciones de distribución F_X y F_Y de X y Y, respectivamente, como: $F_X(t) \geq F_Y(t) \quad$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

En otras palabras, $X \leq_{ST} Y$ si la probabilidad de que X tome un valor mayor que t es siempre menor o igual a la probabilidad de que Y tome un valor mayor que t. Esta relación proporciona una forma de comparar la "magnitud"de dos variables aleatorias en términos de sus distribuciones de probabilidad.

3.1. Principales clases de envejecimiento

En un primer lugar, hay que tener en cuenta que las clases de envejecimiento que veremos a continuación, pueden describir el proceso de envejecimiento tanto del sistema como de las componentes. Sea X una v.a. no negativa representando el tiempo de vida de una componente, donde F es su función de distribución y $\overline{F} = 1 - F$ su función de fiabilidad. Como en el capitulo anterior consideramos el tiempo de vida residual $X_t = (X - t|X > t)$ y el tiempo residual medio (TRM). Además, si F es absolutamente continua entonces $f = F'$ es representa su función de densidad y $h = f/\overline{F}$ su tasa de fallo (TF). Consideremos a continuación las siguientes clases de envejecimiento.

Definición 23. Se dice que X tiene una Tasa de Fallo Creciente (Decreciente), TFC (TFD), si $X_s \geq_{ST} X_t$ $(\leq_{ST})$ para todo $s \leq t$ (siempre que dichas variables aletorias condicionales existan)

Esta definición recoge los conceptos de envejeciento natural (antinatural) en caso de ser positivo (negativo), que no significa que sea mejor o peor, sino que conforme pasa el tiempo el sistema tiene una mayor (menor) probabilidad de fallar, como podríamos suponer que sucede de una manera intuitiva en la mayoria de sistemas, cuanto mas uso tiene algo, este debería tener mas probabilidades de dejar de funcionar.

En este caso la propiedad TFC (TFD) significa que cuanto mas pasa el tiempo, el tiempo de vida residual disminuye, y esto puede reescribirse, (recordando la Definición 21) como:

$$\frac{\overline{F}(x+s)}{\overline{F}(s)} \geq (\leq) \frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(t)} \Leftrightarrow \overline{F}(x+s)\overline{F}(t) - \overline{F}(x+t)\overline{F}(s) \geq (\leq) 0 \quad \forall x \geq 0. \tag{3.1}$$

La distribución exponencial pertenece a ambas clases, ya que tiene una tasa de fallo constante en $[0,\infty)$ (recuerdese el ejemplo 9).

Definición 24. Se dice que X es Mejor (Peor) Nueva que Usada, MNU (PNU) si $X \geq_{ST} X_t$ $(\leq_{ST})$ para todo $t \geq 0$ (siempre que dicha variable aletoria condicional exista)

En primer lugar notar que necesitamos asumir que X es no negativa y que de nuevo la distribución exponencial pertenece a ambas clases ya que $X =_{ST} X_t$ para todo $t \geq 0$. Ahora de una manera analoga a lo anterior se ve que esta propiedad puede ser reescrita como

$$\frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(0)} \geq (\leq) \frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(t)} \Leftrightarrow \overline{F}(x)\overline{F}(t) \geq (\leq) \overline{F}(x+t) \quad \forall x \geq 0. \tag{3.2}$$

Para interpretar esta fórmula, recordemos la siguiente definición: Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple la propiedad de superaditividad(subaditividad) si para cualquier par $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tenemos que $f(x) + f(y) \geq (\leq) f(x+y)$. Haciendo uso de esta propiedad, tenemos que $ln\overline{F}$ es superaditiva (subaditiva), esto es debido a que, $\ln(\overline{F}(x)\overline{F}(t)) = \ln(\overline{F}(x)) + \ln(\overline{F}(t))$ y dado que $\overline{F}(x)\overline{F}(t) \geq \overline{F}(x+t)$, tenemos $\ln(\overline{F}(x)\overline{F}(t)) = \ln(\overline{F}(x)) + \ln(\overline{F}(t)) \geq \ln(\overline{F}(x+t))$, por lo que $\ln\overline{F}$ es superaditiva.

Obviamente TFC implica MNU Y TFD implica PNU debido a que (3.1) implica (3.2) (basta tomar en (3.1), $s = 0$). Veamos a continuación otras dos clases de envejecimiento, las cuales se definen de la siguiente manera.

Definición 25. Se dice que X tiene una Tasa de fallo Media creciente (Decreciente), TFMC (TFMD) si la función

$$A(t) = \frac{1}{t}\int_0^t h(x)dx = -\frac{1}{t} ln\overline{F}(t)$$

es creciente (decreciente) para todo $t \geq 0$.

Sea ahora $c \in (0,1)$ y $t \geq 0$ entonces por se $A(t)$ creciente, tenemos que

$$\frac{1}{ct}\ln\overline{F}(ct) \geq \frac{1}{t}\ln\overline{F}(t) \Leftrightarrow \ln\overline{F}(ct) \geq c\ln\overline{F}(t) \Leftrightarrow \ln\overline{F}(ct) \geq \ln\overline{F}^c(t) \Leftrightarrow \overline{F}(ct) \geq \overline{F}^c(t). \tag{3.3}$$

La distribución exponencial pertenece a ambas clases y ademas tenemos que

$$TFC \implies TFMC \implies MNU$$

, donde la primera implicación es trivial por la definición de estas y para la segunda implicación basta expresar $x = c_1(x+y)$ con $c_1 = x/(x+y)$, $y = c_2(x+y)$ con $c_2 = y/(x+y)$, y aplicar (3.3) para obtener (3.2)

De modo analogo se puede ver que

$$TFD \implies TFMD \implies PNU$$

A continuación, tenemos las siguientes dos clases, las cuales representan el comportamiento de la esperanza del tiempo de vida residual.

Definición 26. Se dice que X tiene Vida Residual Media Creciente (Decreciente), VRMC (VRMD) si la función vida residual media:

$$m(t) = E(X-t|X>t) = \frac{1}{\overline{F}(t)}\int_0^t \overline{F}(x)dx$$

es una función creciente (decreciente) para todo $t > 0$.

Notamos que un envejecimiento natural (antinatural) viene representado por la clase VMRD (VRMC), pues que la esperanza del tiempo residual aumente (disminuya) tiene por significado que cuanto mas pasa el tiempo menos durará el sistema. Veamos un ejemplo concreto de la clase VRMD.

Ejemplo 13. Sea X una variable aleatoria con distribución Weibull (introducida en la definición 5) con parametro escala $\lambda = 1$ y forma $k = 0{,}5$, entonces su función vida residual media es:

$$m(t) = \frac{1}{\overline{F}(t)} \int_0^t \overline{F}(t)dx = \frac{1}{e^{-\sqrt{x}}} \int_0^t e^{-\sqrt{x}}dx = \frac{-2(\sqrt{x}+1)e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}} = -2(\sqrt{x}+1),$$

la cual es una función decreciente, por lo tanto esta distribución de Weibull tiene vida residual media decreciente.

Una clase mas débil se define como sigue.

Definición 27. Se dice que X es Mejor (Peor) Nueva que Usada en Esperanzas, MNUE (PNUE), si $E(X) \geq E(X-t|X>t)(\leq)$ para todo $t \geq 0$

Claramente tenemos que TFC $\Rightarrow$ VRMD $\Rightarrow$ MNUE, por como están definidas las clases de envejcimiento. Y de modo análogo podemos ver que TFD $\Rightarrow$ VRMC $\Rightarrow$ PNUE.

Gracias a esto se puede observar por ejemplo que la variable aleatoria del ejemplo anterior pertenece a la clase peor nueva que usada.

Además,también por como están definidas, se tiene que $MNU \Rightarrow MNUE$ y que $PNU \Rightarrow PNUE$ por la definición de estas mismas.

Por último tenemos la siguiente clase, pero antes es importante introducir el orden de la razón de verosimilitud que es un concepto estadístico y de teoría de decisiones utilizado para comparar distribuciones de probabilidad en términos de su tendencia a producir valores más grandes. Este orden se basa en la razón de verosimilitud, que compara la verosimilitud de dos distribuciones de probabilidad para cada posible valor de la variable aleatoria.

Para dos variables aleatorias X e Y con funciones de densidad de probabilidad $f_X(x)$ y $f_Y(x)$, respectivamente, se dice que X está ordenada por la razón de verosimilitud respecto a Y (denotado como $X \leq_{LR} Y$) si la razón $\frac{f_X(x)}{f_Y(x)}$ es no decreciente en x. Es decir, a medida que x aumenta, la relación entre las densidades de probabilidad de X e Y no disminuye. Se puede demostrar (aunque no es trivial) que el orden de razon de verosimilitud es mas fuerte que el orden estocástico usual.

Basándonos en este orden, tenemos la siguiente clase, la cual es la mas fuerte de todas

Definición 28. Se dice que X tiene una Razón de Verosimilitud Creciente (Decreciente) RVC (RVD) si $X_s \geq_{LR} X_t (\leq_{LR})$ para todo $0 \leq s \leq t$.

Claramente la condición RVC (RVD) implica la TFC (TFD) (puesto que el orden de la razón de verosimilitud es mas fuerte que el orden estocástico usual).

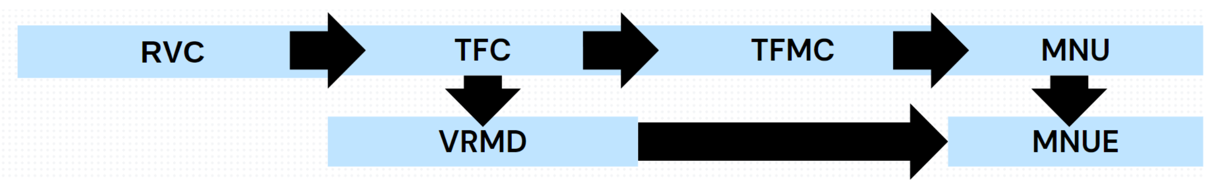

Figura 3.1: Relaciones entre las clases de envejecimiento

3.2. Sistemas con componentes identicamente distribuidas

Una pregunta que viene a la cabeza al pensar en sistemas de componentes identicamente distribuidas es si podemos encontrar una función que relacione la distribución del sistema con la distribución de las componentes. Comencemos dando una descripción de dicha función, que recibira el nombre de distorsión. Dicha función generará la función distribución del sistema $F_T(t) = q(F(t))$, donde $q : [0,1] \to [0,1]$ es una función creciente tal que $q(0) = 0$ y $q(1) = 1$ pues en el instante inicial el sistema estara encendido y a su vez cuando ha pasado un tiempo suficiente el sistema no estará encendido, a esta función la llamaremos función de distorsión. De manera similar, la función de fiabilidad satisface $\overline{F}_T(t) = \overline{q}(\overline{F}(t))$ para todo $t \geq 0$, donde $\overline{q} = 1 - q(1-u)$ para todo $u \in [0,1]$ es otra función de distorsión.

Para obtener resultados acerca de las propiedades de envejecimiento del sistema en función de las de los componentes, nos basamos en el siguiente resultado, que nos garantiza la existencia de una función de distorsión en el caso de componentes independientes e idénticamente distribuidos.

Teorema 3.1. *Si T es la vida útil de un sistema semi-coherente y las vidas útiles de los componentes $(X_1, \ldots, X_n)$ son independientes e idénticamente distribuidas con función de fiabilidad común $\overline{F}$, entonces la función de fiabilidad de T puede escribirse como:*

$$\overline{F}_T(t) = \overline{q}(\overline{F}(t))$$

para todo t, donde $\overline{q}$ es una función de distorsión. Esta función es infinitamente diferenciable (de hecho es un polinomio de grado n.

Demostración. Por el Corolario 2.3 tenemos que

$$\overline{F}_T(t) = \overline{q}(\bar{F}(t)), \tag{3.4}$$

donde

$$\overline{q}(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=n-k+1}^{n} s_i \right) \binom{n}{k} (1-u)^{n-k} u^k \tag{3.5}$$

, en la cual$\overline{q}(u)$ es una función de distorsión, ya que $F_T(t)$ es una función de supervivencia. Esto es, si $s < t$

$$\bar{u}(\bar{F}(s)) = \bar{F}_T(s) \geq \bar{F}_T(t) = \bar{u}(\bar{F}(t)). \tag{3.6}$$

Como $\bar{F}(t), t \in \mathbb{R}$ es una función decreciente que recorre todo el intervalo $[0,1]$, se sigue la propiedad crecimiento de $\bar{q}$ (esto es, si tenemos $0 \leq a < b \leq 1$, existen $s \leq t$ tal que $F\bar{(}s) = b$ y $F\bar{(}t) = a$, con lo que $\bar{q}(b) \geq \bar{q}(a)$). El resto de las propiedades son triviales.

■

Veamos a continuación si las propiedades de envejecimiento mentadas en la sección anterior se conservan o no en el sistema. Para ello usaremos la siguiente definición.

Definición 29. Decimos que una clase de envejecimiento $\mathscr{A}$ es **preservada** por una distorsión q si y solo si $q(F) \in \mathscr{A}$ para todo $F \in \mathscr{A}$

Ahora presentamos el siguiente resultado, que nos indica qué propiedades debe verificar la distorsión para preservar una determinada clase de fiabilidad

Teorema 3.2. *Sea $F_q = q(F)$ una distribución distorsionada tal que q es diferenciable. Entonces:*

(i) La clase TFC (TFD) se preserva por q si y sólo si $\alpha(u) = \frac{u\overline{q}'(u)}{\overline{q}(u)}$ es decreciente (creciente) para $u \in (0,1)$.

(ii) La clase MNUE (MNU) se preserva por q si y sólo si $\overline{q}$ es submultiplicativa (supermultiplicativa), es decir,

$$\overline{q}(uv) \leq \overline{q}(u)\overline{q}(v), (\geq) \text{ para todo } u, v \in [0,1]. \tag{3.7}$$

(iii) La clase TFMC (TFMD) se preserva por q si y sólo si q satisface

$$\overline{q}(u^c) \geq (\overline{q}(u))^c, (\leq) \text{ para todo } u, c \in [0,1]. \tag{3.8}$$

(iv) Si F es absolutamente continua y RVC y existe un $u_0 \in [0,1]$ tal que $\beta(u) = u\overline{q}''(u)/\overline{q}'(u)$ es no negativa y decreciente en $[0,u_0]$ y $\overline{\beta}(u) = (1-u)\overline{q}''(u)/\overline{q}'(u)$ es no decreciente en $[u_0,1]$, entonces F_q es RVC.

Demostración. Para demostrar (i), derivando la distribución distorsionada, obetenemos que la función de tasa de fallo la podemos reescribir como

$$h_q(t) = \alpha(\overline{F}(t))h(t).$$

Si asumimos que α es decreciente (creciente) y h es creciente, entonces h_q es creciente (decreciente) ya que $\overline{F}$ siempre es decreciente.

Recíprocamente, si asumimos que la clase TFC (TFD) se preserva, entonces se preserva para una distribución exponencial de parámetro 1 con función de fiabilidad $\overline{F}(t) = e^{-t}$ y función de tasa de fallo $h(t) = 1$ para $t \geq 0$. Por lo tanto, $h_q(t) = \alpha(e^{-t})$ es creciente (decreciente) para $t \in (0,\infty)$ y así α decrece (crece) en $(0,1)$.

Para demostrar (ii), notamos que por (3.2), F_q es MNU (MNU) si y sólo si

$$\overline{q}(\overline{F}(x+t)) \leq \overline{q}(\overline{F}(x))\overline{q}(\overline{F}(t)), \ (\geq) \text{ para todo } x,t \geq 0.$$

Si asumimos que F es MNU y q es submultiplicativa, es decir, satisface (3.7), entonces

$$\overline{q}(\overline{F}(x+t)) \leq \overline{q}(\overline{F}(x)\overline{F}(t)) \leq \overline{q}(\overline{F}(x))q(\overline{F}(t))$$

para todo $x,t \geq 0$ y así F_q es MNU, donde la primera desigualdad es debida a que $\bar{q}$ es decreciente y a que por ser F MNU, se verifica (3.2)

Recíprocamente, si la clase MNU se preserva, entonces se preserva para una distribución exponencial estándar, es decir,

$$\overline{q}(\overline{F}(x+t)) \leq \overline{q}(\overline{F}(x))\overline{q}(\overline{F}(t))$$

se cumple para todo $t,x \geq 0$ y $\overline{F}(z) = e^{-z}$. Así,

$$\overline{q}(e^{-x}e^{-t}) \leq \overline{q}(e^{-x})q(e^{-t})$$

se cumple para todo $t,x \geq 0$ y por lo tanto (3.7) se cumple. La prueba para la clase MNU es similar.

Finalmente, para demostrar (iii) notamos que, según (4.1), F_q es TFMC (TFMD) si y sólo si

$$\overline{q}(\overline{F}(ct)) \geq (\overline{q}(\overline{F}(t)))^c$$

para todo $c \in (0,1)$ y todo $t \geq 0$.

Si asumimos que F es TFMC y (3.8) se cumple, entonces

$$\overline{q}(\overline{F}(ct)) \geq \overline{q}(\overline{F}(t)^c) \geq (\overline{q}(\overline{F}(t)))^c$$

para todo $c \in (0,1)$ y todo $t \geq 0$.

Recíprocamente, si la clase TFMC se preserva, también se preserva para la distribución exponencial estándar. Así obtenemos

$$\overline{q}(e^{-ct}) \geq (\overline{q}(e^{-t}))^c$$

para todo $c \in (0,1)$ y todo $t \geq 0$. Por lo tanto, (3.8) se cumple. La prueba para la clase TFMD es análoga.

La prueba de (iv) se puede encontrar en Navarro et al.(2014) ([2]) ■

Hacemos especial hincapié en la importancia de este Teorema, pues nos da las condiciones para las cuales las clases de envejecimiento son heredadas por el sistema.

Veamos un ejemplo para ilustrar el Teorema, centrandonos unicamente en el primer apartado, puesto que el resto se aplicarían de un modo análogo.

Ejemplo 14. Consideremos sistemas con componentes independientes e idénticamente distribuidos (IID) según una distribución F y con tiempos de vida definidos como $T_1 = \text{mín}(X_1, \text{máx}(X_2, X_3))$ y $T_2 = \text{máx}(X_1, \text{mín}(X_2, X_3))$. Calculemos ahora, usando el Teorema 3.1 sus funciones de distorsión.

Sabemos que T_1 tiene signatura $s = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ (recordar el ejemplo 10) y T_2 $s = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, cosa que podríamos deducir de forma análoga al ejemplo anteriormente mencionado. Obsérvese que ambos sistemas son duales. Por lo tanto usando (3.5)

$$\bar{q}_1(u) = 0 + \frac{2}{3}\binom{3}{2}(1-u)u^2 + 1\binom{3}{3}(1-u)^0u^3 = 2u^2 - 2u^3 + u^3 = 2u^2 - u^3$$

y

$$\bar{q}_2(u) = \frac{1}{3}\binom{3}{1}(1-u)^2u + 1\binom{3}{2}(1-u)u^2 + 1\binom{3}{3}(1-u)^0u^3 = u - 2u^2 + u^3 + 3u^2 - 3u^3 + u^3 = u + u^2 - u^3$$

Sus funciones de distorsión respectivas son $\bar{q}_1(u) = 2u^2 - u^3$ y $\bar{q}_2(u) = u + u^2 - u^3$.

Por lo tanto, las funciones α correspondientes son:

$$\alpha_1(u) = \frac{u\bar{q}_1'(u)}{\bar{q}_1(u)} = \frac{4u - 3u^2}{2u^2 - u^3} = \frac{4 - 3u}{2 - u}$$

$$\alpha_2(u) = \frac{u\bar{q}_2'(u)}{\bar{q}_2(u)} = \frac{1 + 2u - 3u^2}{1 + u + u^2 - u^3} = \frac{1 + 2u - 3u^2}{1 + u - u^2}$$

para $u \in (0,1)$. Se puede demostrar mediante el estudio del signo de la primera derivada que α_1 es estrictamente decreciente, sin embargo, α_2 no es monotona en $(0,1)$. Por lo tanto, la clase IFR se preservaría en T_1 pero no se preservaría en T_2. Además, la clase DFR no se preserva en estos sistemas, pues ninguna de estas funciones es decreciente en $(0,1)$.

Capítulo 4

Generalización de las signaturas para componentes intercambiables

Hemos visto en el primer capítulo la gran importancia de las signaturas para expresar la distribución del tiempo de vida de un sistema coherente

Sin embargo, en los capítulos anteriores nos hemos centrado en sistemas donde los tiempos de vida son independientes e identicamente distribuídos. Como esta suposición no es siempre realista, en este capítulo nos vamos a centrar en generalizar esta propiedad. Concretamente, vamos a considerar que los tiempos de vida son variables aleatorias intercambiables. Esta propiedad generaliza el concepto de independencia e idéntica distribución. Este es el objetivo de la sección 4.1, que esta basada en el estudio de los sistemas coherentes cuando las componentes tienen tiempos de vida intercambiables [3]. Al final de esta capítulo veremos una aplicación de las signaturas al número de componentes sin funcionar en el momento del fallo del sistema, esta sección se basa en el estudio del comportamiento del sistema conforme van fallando las componentes [7].

4.1. Componentes intercambiables

Ahora, intuitivamente se puede tener una idea del significado de *Componentes intercambiables*, que no es otra cosa que, la posición donde este situada cada componente, no afectará a las propiedades del sistema.

Definición 30. Sean $X_1,\dots,X_n$ los tiempos de vida de las componentes, decimos que la secuencia de los tiempos de vida son intercambiables si,

$$P(X_1 \le t_1,\dots,X_n \le t_n) = P(X_{\pi(1)} \le t_1,\dots,X_{\pi(n)} \le t_n)$$

para cualquier permutación $\phi = (\pi(1),...,\pi(n)$ de $\{1,...,n\}$.

En este capítulo supondremos que las componentes, en lugar de ser variables independientes identicamente distribuidas, son intercambiables. Vemos en un primer lugar que la primera es un caso particular de otra debido a que, bajo la suposición de independencia e idéntica distribución

$$P(X_1 \le t_1,\dots,X_n \le t_n) = P(X_1 \le t_1)\cdots P(X_n \le t_n) = P(X_{\pi(1)} \le t_1)\cdots P(X_{\pi(n)} \le t_n) = P(X_{\pi(1)} \le t_1,\cdots,X_{\pi(n)} \le t_n)$$

para cualquier permutación $\pi = (\pi(1),...,\pi(n))$ de $\{1,...,n\}$. Veamos a continuación un ejemplo trivial de cuyos tiempos de vida de las componentes son intercambiables.

Ejemplo 15. Supongamos que dos tiempos de vida X_1 y X_2 tienen una distribución exponencial, cuyo parámetro es a su vez una variable aleatoria U, igual para ambas, y además se tiene que $(X_1|U = u)$ es independiente de $(X_2|U = u)$, entonces los tiempos de vida son intercambiables, ya que

$$P(X_1 \le t_1,X_2 \le t_2) = P(X_2 \le t_1,X_1 \le t_2)$$

por la forma en la que se han definido. Este ejemplo describiría situaciones en las que hay una fuente común aleatoria (condiciones atmósféricas, por ejemplo), que modifica el parámetro común de ambas distribuciones.

Hemos visto previamente la importancia de conocer la signatura en el Teorema 2.2 en adelante, por lo que sería ideal que los sistemas con componentes intercambiables poseyeran tambien dicha signatura. Veamos que, en efecto, es cierto, pero antes realicemos una pequeña definición para simplificar la demostración.

Definición 31. Sea Σ el conjunto de todas las permutaciones en el conjunto $\{1,\dots,n\}$ y sea ψ una función de tiempo de vida, como la definida en (2.3) y (2.4) entonces definimos la función $I_\psi : \Sigma \to \{1,\dots,n\}$ como sigue

$$I_\psi(\sigma) = j \textit{ si y solo si } \psi(x_1,\dots,x_n) = x_{j:n} \quad \textit{para todo } (x_1,\dots,x_n) \in \chi_\sigma$$

donde $\chi_\sigma = \{\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(n)}\}$.

Teorema 4.1. *Sea $X = (X_1,\dots,X_n)$ un vector aleatorio absolutamente continuo cuyas variables son intercambiables, y $T = \psi(X_1,\dots,X_n)$ un sistema coherente, entonces se cumple*

1. $F_T(t) = P(T \le t) = \sum_{i=1}^n s_i P(X_{i:n} \le t) = \sum_{i=1}^n s_i F_{i:n}(t)$
2. $s_i = \frac{|A_i|}{n!}$ *para* $i = 1,...,n$
   donde $|A_i|$ *es la cardinalidad del conjunto* A_i *de todas las permutaciones* ρ *del conjunto* $[n] = 1,...,n$ *que satisfacen que* $\psi(x_1,...,x_n) = x_{i:n}$ *cuando* $x_{\rho(1)} < ... < x_{\rho(n)}$.

Demostración. Debido a que X es absolutamente continuo, $P(X_i = X_j) = P(X_{i:n} = X_{j:n}) = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j$. Por lo tanto,

$$P(T \le t) = \sum_{i=1}^n P(T = X_{i:n} \le t) = \sum_{i=1}^n P(T = X_{i:n} \mid X_{i:n} \le t) P(X_{i:n} \le t).$$

Bajo la convención $X_{n+1:n} = +\infty$, las siguientes relaciones se cumplen salvo en conjuntos de probabilidad cero:

$$\{X_{i:n} \le t\} = \bigcup_{j=i}^n \{X_{j:n} \le t < X_{j+1:n}\} = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcup_{j=i}^n \{X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(j)} \le t < X_{\sigma(j+1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\}$$

$$= \bigcup_{r=1}^n \bigcup_{\sigma\in I_\sigma^{-1}(r)} \bigcup_{j=i}^n \{X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(j)} \le t < X_{\sigma(j+1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\}.$$

Donde el la última igualdad únicamente particionamos el conjunto de permutaciones según el número de componentes fallidas que hacen que el sistema deje de funcionar.

Por lo tanto todos los elementos de las uniones son distintos. Se sigue que

$$P(T = X_{i:n} \mid X_{i:n} \le t) = \frac{P(I_\sigma(\sigma) = i, X_{i:n} \le t)}{P(X_{i:n} \le t)} = \frac{\sum_{\sigma\in I^{-1}(i)} \sum_{j=i}^n P(X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(j)} \le t < X_{\sigma(j+1)} < \cdots < X_{\sigma(n)})}{\sum_{\sigma\in\Sigma} \sum_{j=i}^n P(X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(j)} \le t < X_{\sigma(j+1)} < \cdots < X_{\sigma(n)})}.$$

Cuando j y t son fijos, las probabilidades anteriores no dependen de $\sigma \in S_n$. Por lo tanto, las últimas sumas del numerador y del denominador se cancelan, y obtenemos $P(T = X_{i:n} \mid X_{i:n} \le t) = \frac{\#\{\sigma : I_\sigma(\sigma) = i\}}{n!} = s_i = P(T = X_{i:n})$, para $i = 1,...,n$, lo cual completa la demostración.

■

La importancia de este Teorema recae en el hecho de que las variablea aleatorias intercambiables poseen la misma signatura que las variales aleatorias independientes identicamente distribuidas.

Ejemplo 16. Este ejemplo es una versión simplificada de un modelo propuesto por Casanova, Mercier y Sangüesa en [6]. Muestra el interés de considerar componentes cuyos tiempos de vida son v.a. intercambiables. Imaginemos un sistema con n componentes que en el instante $t=0$ empieza a funcionar. Los tiempos de vida iniciales son v.a.i.i.d. $X_1^1,...,X_n^1$ con función de distribución F_1 (primer ciclo). Sea $X_{1:n}$ el instante de fallo de la primera componente. Si $T > X_{1:n}$, ahora el sistema funcionará con $n-1$ componentes y parece razonable pensar que el hecho de trabajar con menos componentes produzca un estrés en las componentes que todavía funcionan, de modo que el tiempo de vida residual $(X_i - X_{i:n} | X_i > X_{1:n})$ siga a partir de entonces una distribución diferente a la que le correspondería si los fallos no afectasen al comportamiento futuro, que sería la dada en la definición 23. Consideramos que, a partir de ese momento, los tiempos de vida residuales de las componentes que todavía funcionan son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F_2. A estos tiempos de vida residuales los podemos llamar $X_1^2,...,X_{n-1}^2$ (la etiquetas de abajo podrían no coincidir con las componentes originales, ya que el fallo ha podido producirse en cualquier momento). Este sería el segundo ciclo.

De esta manera supongamos que estamos en el ciclo $i-1$, sean $X_1^{i-1},...,X_{n-i+2}^{i-1}$ i.i.d. que representan los tiempos de vida residuales de las componentes que todavía funcionan. Sea $X_{i:n}$ el tiempo de fallo de la i-ésima componente, los tiempos de vida residuales de las componentes que todavía funcionan, serían i.i.d. con función de distribución F_i (denotadas por $X_1^i,...,X_{n-i+1}^i$).

Notemos que los tiempos de vida $(X_1,...,X_n)$ de las componentes son variables aleatorias dependientes, pues el fallo de las componentes afecta al comportamiento posterior de las que quedan con vida, pero, por construcción, son variables aleatorias intercambiables (ya que el papel que juegan las componentes con vida en cada ciclo es simétrico).

Supongamos que las variables X_i^j con $j=1,...,n-1$ e $i=1,...,n-j+1$ son absolutamente continuas con función de densidad f^j. La función de densidad conjunta de $(X_1,...,X_n)$ la podríamos escribir como

$$f(t_1,...,t_n) = f_{\pi(1)}(t_{(1)}) f_{\pi(2)|\pi(1)}(t_{(2)}|t_{(1)}) \cdots f_{\pi(n)|\pi(1),...,\pi(n-1)}(t_{(n)}|t_{(1)},\ldots,t_{(n-1)}) \quad \text{con } t_i \geq 0 \text{ e } i=1,...,n \tag{4.1}$$

donde $(t_{(1)} \ldots t_{(n)})$ es el vector $(t_1,...,t_n)$ con las componentes ordenadas de menor a mayor y $(\pi(1),...,\pi(n))$ es la permutación que ordena las variables $(X_1,...,X_n)$ en orden de fallo (de menor a mayor). Notemos que por construcción

$$f_{\pi(i)|\pi(1),...,\pi(i-1)}(t_{(i)}|t_{(1)},\ldots,t_{(i-1)}) = f^i(t_{(i)} - t_{(i-1)}),$$

y por tanto, podemos escribir (4.1) como

$$f(t_1,...,t_n) = f^1(t_{(1)}) \cdot f^2(t_{(2)} - t_{(1)}) \cdots f^n(t_{(n)} - t_{(n-1)}).$$

Veamos un ejemplo concreto de esta distribución.

Consideremos que los tiempos de vida iniciales son v.a.i.i.d. exponenciales de parámetro λ_1 (por tanto $E(X_1) = \frac{1}{\lambda_1}$). Supongamos que en el ciclo j, el tiempo de vida residual de las componentes que todavía funcionan es una exponencial de parámetro λ_j. Entonces por lo previamente visto, tenemos que la función de densidad de $(X_1,...,X_n)$ se escribiría como

$$f(t_1,...,t_n) = e^{-\lambda_1 t_{(1)}} e^{-\lambda_2 (t_{(2)} - t_{(1)})} \cdots e^{-\lambda_n (t_{(n)} - t_{(n-1)})} \quad t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0.$$

Un modelo como el aqui descrito puede encontrarse en [5].

4.2. Aplicación de las signaturas al número de componentes sin funcionar en el momento del fallo del sistema

A la hora de estudiar sistemas de componentes, nos es de gran importancia conocer como se comporta el sistema conforme van fallando las componentes de este, por eso nuestro objetivo va a ser estudiar, dado un instante de tiempo t, propiedades sobre el número de componentes que han fallado, así como el numero de componentes que han fallado en el instante en el cual el sistema ha dejado de funcionar.

Esto se ve reflejada en las dos siguientes definiciones.

Definición 32. Llamaremos $\mathscr{N}$ a la variable aleatoria que representa el número de componentes que no funcionan en el momento que el sistema deja de funcionar.

En un primer lugar observamos la cercana relación que posee esta variable aleatoria con la signatura, pues si el vector de tiempos de vida es absolutamente continuo,

$$P(\mathscr{N}=i)=P\left\{\sum_{j=1}^{n}1(\{X_j\leq T\})=i\right\}=P(T=X_{i:n})=s_i.$$

La cantidad de componentes que fallan en el momento en el que el sistema deja de funcionar nos da una idea de cuántos repuestos se deberían utilizar para reemplazar dichos componentes que no funcionan.

Definición 33. Sea un sistema de componentes con tiempo de vida T, denotamos $S_n(t)$ a la variable aleatoria que representa el número de componentes que han dejado de funcionar hasta el tiempo t.

En el siguiente Teorema, estudiaremos la distribución del número de componentes que han dejado de funcionar después de un tiempo t mientras el propio sistema se encuentre en funcionamiento, es decir, el estudio de la variable aleatoria condicional $(\mathscr{N}-S_n(t)|T>t)$. Esta variable aleatoria es potencialmente útil para entender el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo, por ello es de gran valor conocer la esperanza de esta, $E(\mathscr{N}-S_n(t)|T>t)$, pues nos dice la media del número de fallos desde un tiempo t hasta que el sistama deje de funcionar. Veamos el valor de esta información mediante el siguiente ejemplo, supongamos que un proveedor ofrece una garantía de un año para un sistema que consta de componentes. Después del año , la garantía puede extenderse a petición del cliente. Para fijar el precio del período de garantía extendida, el número de componentes que han dejado de funcionar desde el inicio hasta el fin de la garantía es una cantidad útil para el proveedor, pues cuanto mas grande sea este número mayor debería ser el precio de la garantía.

Teorema 4.2. *Sean $X_1,X_2,\ldots,X_n$ tiempos de vida independientes identicamente distibuidos con una distribución absolutamente continua. Entonces, para $t>0$*

$$P\{\mathscr{N}-S_n(t)=m|T>t\}=\frac{1}{P\{T>t\}}\sum_{i=max(m,k_\psi)}^{z_\psi+1}[P\{X_{i-m+1:n}>t\}-P\{X_{i-m:n}>t\}]s_i \quad para\ i=1,\ldots,z_\psi,$$

donde z_ψ representa el número máximo de componentes fallidos que pueden hacer que el sistema pueda seguir funcionando, y k_ψ es el número mínimo de componentes que pueden hacer que el sistema deje de funcionar.

Demostración. Particionando sobre los posibles valores de $\mathscr{N}$,

$$P\{\mathscr{N}-S_n(t)=m|T>t\}=\frac{1}{P\{T>t\}}\sum_i P\{S_n(t)=i-m,T>t,\mathscr{N}=i\}.$$

Mientras el sistema este funcionando en un tiempo t, el número de componentes que no funcionan en ese momento, $S_n(t)$, no puede ser mas grande que z_ψ, es decir $0\leq i-m\leq z_\psi+1$. Por otra parte, $S_n(t)$ tiene que ser mayor que k_ψ, por lo que $k_\psi\leq i-m\leq z_\psi+1$, esto se representa como $P\{k_\psi\leq\mathscr{N}\leq$

$z_\psi + 1\} = 1$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
P\{\mathcal{N} - S_n(t) = m \mid T > t\} &= \frac{1}{P\{T > t\}} \sum_{i=\text{máx}(m,k_\psi)}^{z_\psi+1} P\{S_n(t) = i - m, X_{i:n} > t, T = X_{i:n}\} = \\
&= \frac{1}{P\{T > t\}} \sum_{i=\text{máx}(m,k_\psi)}^{z_\psi+1} P\{S_n(t) = i - m, S_n(t) \leq i - 1, T = X_{i:n}\} = \\
&= \frac{1}{P\{T > t\}} \sum_{i=\text{máx}(m,k_\psi)}^{z_\psi+1} P\{S_n(t) = i - m \mid T = X_{i:n}\} P\{T = X_{i:n}\} = \\
&= \frac{1}{P\{T > t\}} \sum_{i=\text{máx}(m,k_\psi)}^{z_\psi+1} [P\{X_{i-m+1:n} > t | T = X_{i:n}\} - P\{X_{i-m:n} > t | T = X_{i:n}\}] s_i = \\
&= \frac{1}{P\{T > t\}} \sum_{i=\text{máx}(m,k_\psi)}^{z_\psi+1} [P\{X_{i-m+1:n} > t\} - P\{X_{i-m:n} > t\}] s_i,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde la última igualdad se ha seguido un razonamiento análogo al realizado en la prueba del Teorema 2.2. ■

Creemos que el Teorema 4.2 se puede extender a variables aleatorias intercambiables, pero eso quedará para una futura línea de trabajo.

Por el teorema anterior, podemos calcular el valor esperado de la variable aleatoria $(\mathcal{N} - S_n(t) | T > t)$, mediante el Teorema anterior y es:

$$E(\mathcal{N} - S_n(t) = m | T > t) = \sum_{m=1}^{z_\psi} m P\{\mathcal{N} - S_n(t) | T > t\}.$$

Veamos un ejemplo de aplicación de este resultado a continuación.

Ejemplo 17. Queremos calcular la $E(\mathcal{N} - S_n(t) | X_{n-k+1:n} > t)$ del sistema coherente k-sobre-n de la Definición 18.

Sabemos que $P\{\mathcal{N} = n - k + 1\} = 1$, por como está definido el sistema, por lo tanto, $T = X_{n-k+1:n}$, y

$$E(\mathcal{N} - S_n(t) | X_{n-k+1:n} > t) = E(\mathcal{N} | X_{n-k+1:n} > t) - E(S_n(t) | X_{n-k+1:n} > t) = (n-k+1) - E(S_n(t) | X_{n-k+1:n} > t) \tag{4.3}$$

y usando la Proposición 1, tenemos que

$$\begin{aligned}
E(S_n(t) | X_{n-k+1:n} > t) &= \sum_{i=1}^{n-k} P\{S_n(t) \geq i | X_{n-k+1:n} \geq t\} \\
&= \sum_{i=1}^{n-k} P\{X_{i:n} \leq t | X_{n-k+1:n} \geq t\} \\
&= (n-k) - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{P\{X_{i:n} > t\}}{P\{X_{n-k+1:n} > t\}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Por lo tanto, usando (4.3) y (4.4) obtenemos que

$$E(\mathcal{N} - S_n(t) | X_{n-k+1:n} > t) = 1 + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{P\{X_{i:n} > t\}}{P\{X_{n-k+1:n} > t\}}.$$

Bibliografía

[1] JORGE NAVARRO, *Introduction to System Reliability Theory*, Springer Nature Switzerland, 2022. .

[2] JORGE NAVARRO, *"Preservation of reliability classes under the formation of coherent systems"*, 444-454, 2014.

[3] JORGE NAVARRO, TOMÁS RYCHLIK, *"A family of distributions to model load sharing systems"*, Journal of Multivariate Analysis 98, 102-113, 2007.

[4] SERKAN ERYILMAZ, *"The Number of Failed Components in a Coherent System With Exchangable Components "*, Transactions on reliability, Vol 61, Nº1, IEEE, 203-207, 2012.

[5] HSIN-HUI LIN, KAUNG-HWA CHEN,RONG-TSORNG WANG, *"A multivariate Exponential Shared-Load Model"*, Transactions on reliability, Vol. 42. Nº1, IEEE, 165-171, 1993.

[6] EMILIO CASANOVA, SOPHIE MERCIER, CARMEN SANGÜESA *"A model for schtocastic dependence implied by failures among deteriorating components"*, WILEY, 2023.

[7] R. RANDLES AND D. WOLFE, *Introduction to the theory of nonparametric statistics*, New York: Wiley, 1991