Desarrollo en series de polinomios ortogonales

Sergio García Lorenzo
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Dirigido por Pedro J. Miana Sanz
Julio de 2024

Summary

The work focuses on the development of the theory of function approximation using orthogonal polynomials, specifically Laguerre and Hermite polynomials. The structure of the work is divided into three main chapters:

1. Introduction to orthogonal polynomials and approximation theory: this chapter provides an overview of the theory of differentiation and its importance in the study of smooth functions. The Taylor theorem is introduced as a fundamental pillar for the theory of function approximation:

   Taylor's theorem: *Let f be a function that is $(n+1)$-times differentiable on an interval containing c. Then, for each x in this interval, there exists a number z between c and x such that:*

   $$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x),$$

   where

   $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

   It is also introduced the Sturm-Liouville equations, which are essential in the field of partial differential equations. We end up by giving two examples of this kind of problems where we introduce the Hermite and Laguerre polynomials.

2. Expansions of Hermite polynomials: this chapter explores Hermite polynomials, essential for solving differential equations in physical and mathematical contexts. Hermite polynomials $H_n(x)$ are orthogonal with respect to the weight function e^{-x^2} over the entire real line. The orthogonality condition is given by:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,2^n n!\,\delta_{m,n},$$

   where $\delta_{m,n}$ is the Kronecker delta. Some others properties will be given to demonstrate the following theorem:

   Theorem 2.4 (Approximation theorem for Hermite polynomials): *If a real function $f(x)$ defined on $\mathbb{R}$ is piecewise C^∞ on every finite interval $[-a,a]$ and if the integral*

   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x)\,dx$$

   is finite, then the series

   $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)$$

   with coefficients

   $$c_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(y) H_n(y)\,dy$$

   converges to $f(x)$ at every point of continuity of f.

   This chapter also includes practical examples to illustrate everything that has been shown.

3. Expansions of Laguerre Polynomials: this chapter follows the essence of the previous one as the main objective is the same as before: demonstrate the approximation theorem. But now, the focus is the Laguerre polynomials, another important set of orthogonal polynomials. Laguerre polynomials $L_n^\alpha(x)$ are orthogonal with respect to the weight function $x^\alpha e^{-x}$ over the interval $[0,\infty)$. The orthogonality condition is given by:

$$\int_0^\infty L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{m,n}.$$

   Other important properties will be given to demonstrate the following theorem :
   Theorem 3.1 (Approximation theorem for Laguerre polynomials). *If $f(x)$ is piecewise C^∞ and satisfies that*

$$\int_0^\infty e^{-x}x^2 f^2(x)\,dx,$$

   is finite, the polynomial series

$$\sum_{n=0}^\infty c_n L_n^\alpha(x)$$

   with coefficients

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha f(x)L_n^\alpha(x)\,dx$$

   converges to $f(x)$ for $0 \le x < \infty$ and at every continuity point.

   Examples are provided to demonstrate the practical use of these polynomials in function approximation.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a los polinomios ortogonales y teoría de aproximación

Gracias a la teoría de la diferenciación podemos hacer un estudio exhaustivo de funciones suaves. Por ejemplo, sabemos hallar máximos y mínimos o intervalos de decrecimiento y crecimiento y de concavidad y convexidad. Brook Taylor, en 1712, introdujo el primer teorema importante de aproximación de funciones usando la diferenciación:

Teorema de Taylor

Sea f una función $(n+1)$-veces diferenciable en un intervalo que contiene a c, donde n es un entero no negativo. Entonces, para cada x en ese intervalo, existe un número z entre c y x tal que:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x),$$
$$\textit{donde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Paralelamente, los polinomios ortogonales surgen de manera natural en el ámbito de las ecuaciones diferenciales parciales, concretamente en la teoría de Sturm-Liouville. Las ecuaciones de Sturm-Liouville son de la forma:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y + \lambda r(x)y = 0,$$

donde p, q y r son funciones conocidas y continuas en un intervalo $[a,b]$ con $a < b$, y λ es el valor propio. También se definen unas condiciones de contorno o frontera que son los valores que toma la función y y $\frac{dy}{dx}$ en los puntos a y b. Así, el problema que queremos resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, & a \leq x \leq b, \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

cumpliendo que $|\alpha_1 + \beta_1| \neq 0, \quad |\alpha_2 + \beta_2| \neq 0, \quad p \in C^1([a,b]), \quad p(x) > 0, \quad r(x) \leq 0$ para todo $\quad x \in [a,b], \quad$ y las funciones $\quad q, r \in C([a,b])$. Este es el problema de Sturm-Liouville regular. El objetivo es hallar los valores de λ para los que existe una solución y. Estos valores reciben el nombre de valores propios y su correspondiente solución, función propia. Las soluciones de estos problemas cumplen una serie de propiedades:

1. Todos los valores propios son reales.
2. Existe un número infinito de valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_m < ... < \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.
3. Asociado a cada valor propio existe una única función propia ϕ_n linealmente independiente. Además esta función tiene $n-1$ raices en el intervalo $[a,b]$.
4. Funciones propias de valores propios distintos son ortogonales con respecto a la funciones peso $r(x)$: $\int_a^b r(x)\phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = 0 \quad \text{si } n \neq m$.
5. El sistema $\mathscr{F} = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x), \dots\}$ forma un sistema ortogonal completo por lo que toda función $f \in C^1([a,b])$ a trozos se puede escribir como:
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x),\ donde\ \ a_n = \frac{\langle f, \phi_n\rangle}{\langle \phi_n, \phi_n\rangle}.$$
6. Se verifica el cociente de Rayleigh:
$$\lambda_n = \frac{p(a)\phi_n(a)\phi_n'(a) - p(b)\phi_n(b)\phi_n'(b) + \int_a^b p(x)(\phi_n(x))^2 - q(x)\phi_n(x)^2\,dx}{\int_a^b \phi_n(x)^2 r(x)\,dx}.$$

Como acabamos de ver, estos problemas están muy relacionados con los polinomios ortogonales. Vamos a introducir dos ejemplos importantes para este trabajo:

1. Si tomamos $p(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}, q(x) = nx^{\alpha}e^{-x}, r(x) = 0$, tenemos la siguiente ecuación:
$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dx}\left(x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dy}{dx}\right) + ne^{-x}x^{\alpha}y \\
&= x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d^2y}{dx^2} - x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dy}{dx} + (\alpha+1)x^{\alpha}e^{-x}\frac{dy}{dx} + ne^{-x}x^{\alpha}y \\
&= x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha+1-x)x^{\alpha}e^{-x}\frac{dy}{dx} + ne^{-x}x^{\alpha}y \\
&= x\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha+1-x)\frac{dy}{dx} + ny.
\end{aligned}$$
A esta ecuación la llamaremos ecuación de Laguerre.
2. Si tomamos $p(x) = e^{-x^2}, q(x) = 2ne^{-x^2}, r(x) = 0$, tenemos lo siguiente:
$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right) + 2ne^{-x^2}y \\
&= e^{-x^2}\frac{d^2y}{dx^2} - 2xe^{-x^2}\frac{dy}{dx} + 2ne^{-x^2}y \\
&= \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny.
\end{aligned}$$
A esta ecuación la llamaremos ecuacion de Hermite.

En matemáticas, un sistema de polinomios ortogonales es un conjunto de polinomios que satisfacen una condición de ortogonalidad cuando se integran con un peso dado sobre un intervalo específico. Es decir, un sistema de polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}$ es ortogonal con respecto a la función peso $w(x)$ en el intervalo $[a,b]$ si satisface la propiedad:

$$\int_a^b p_m(x)p_n(x)w(x)\,dx = 0, \quad \text{para } m \neq n.$$

Estas familias de polinomios tienen propiedades particulares que simplifican significativamente la aproximación de funciones mediante desarrollos polinómicos. En este trabajo hablaremos sobre dos sistemas de polinomios ortogonales: Laguerre y Hermite. En el segundo capítulo de [5] podemos encontrar información mas detallada sobre estos polinomios ortogonales.

Capítulo 2

Desarrollo en series de polinomios de Hermite

Este capítulo aborda los polinomios de Hermite, comenzando con sus propiedades de ortogonalidad y su aplicación en el desarrollo de funciones. Se explica el teorema de aproximación para los polinomios de Hermite y se presentan ejemplos prácticos que ilustran el uso de estos polinomios en la aproximación de funciones. En este capítulo se sigue una estructura similar a [2, pág. 60 hasta 76] que se usará para completar algunos detalles. También presentaremos los libros [5] y [4] que servirán al lector para profundizar en ciertos aspectos.

2.1. Propiedades de los polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite, nombrados en honor al matemático francés Charles Hermite, son una familia importante de polinomios ortogonales que surgen en la resolución de ecuaciones diferenciales asociadas a problemas físicos y matemáticos.

La definición de los polinomios de Hermite $H_n(x)$ se da a través de la fórmula de Rodrigues:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

donde n es un parámetro que determina el orden del polinomio. De acuerdo a esta definición los primeros polinomios de Hermite son:

$$H_0(x) = 1, \;\; H_1(x) = 2x, \;\; H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

En [3, pág. 250-253] podemos encontrar más ejemplos y casos especiales.
En general podemos denotar:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!},$$

donde la función $[x]$ denota el máximo número entero menor que x. Una propiedad destacada de los polinomios de Hermite es su ortogonalidad con respecto a la función peso $w(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Si consideramos el producto interno:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\, dx,$$

donde f y g son funciones continuas definidas en este intervalo, entonces si $m \neq n$:

$$\langle H_m(x), H_n(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\, dx = 0.$$

Esta propiedad de ortogonalidad que demostraremos más adelante, es fundamental en el desarrollo de funciones en series de polinomios de Hermite.
La funcion generadora de estos polonomios viene dada por:

$$G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)t^n}{n!}=e^{2xt-t^2}. \tag{2.1}$$

Para probar esto basta hacer el desarrollo de taylor en $t=0$ de la funcion G.

$$G(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k G(t,x)}{\partial t^k}t^k.$$

Y vemos que

$$\frac{\partial^k G(t,x)}{\partial t^k}=\frac{\partial^k(e^{x^2-(x-t)^2})}{\partial t^k}=e^{x^2}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(e^{-(x-t)^2}\right)=(-1)^k e^{x^2}\frac{\partial^k}{\partial(x-t)^k}\left(e^{-(x-t)^2}\right)=e^{x^2}e^{-(x-t)^2}H_k(x-t).$$

Tomando $t=0$ obtenemos finalmente que:

$$\frac{\partial^k G(t,x)}{\partial t^k}=H_k(x),$$

y estaría probado (2.1). Si derivamos la funcion G con respecto de t vemos que se cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}-G(t,x)(2x-2t)=0.$$

Luego usando (2.1) y sabiendo que una serie de potencias puede ser derivada termino a termino tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}(x)t^n}{n!}-2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)t^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)t^{n+1}}{n!}=0.$$

Por lo tanto, llegamos a lo siguiente:

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0. \tag{2.2}$$

Ahora derivando G con respecto a x tenemos que:

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}-2tG(t,x)=0$$

Luego, igual que antes derivamos usando (2.1) y tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n'(x)t^n}{n!}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)t^{n+1}}{n!}=0.$$

O lo que es equivalente,

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x). \tag{2.3}$$

Usando las equaciones obtenidas en (2.2) y (2.3) obtenemos fácilmente la siguiente ecuación diferencial:

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+H_n'(x)=0.$$

Así que derivando esta última ecuación y usando la igualdad (2.3) de nuevo, obtenemos:

$$\begin{aligned}&H_{n+1}'-2H_n(x)-2xH_n'(x)+H_n''(x)=2(n+1)H_n(x)-2H_n(x)-2xH_n'(x)+H_n''(x)\\&=H''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Luego hemos demostrado que $u=H_n$ es una solución de la ecuación diferencial

$$u''(x)-2xu'(x)+2nu(x)=0.$$

Haciendo cambios de variables podemos llegar a otras ecuaciones diferenciales. Vease [5, pág 253-254], como por ejemplo, tomando $u_n(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}H_n(x)$ llegamos a que es una solución particular de la ecuación:

$$u''(x)+(2n+1-x^2)u(x)=0. \tag{2.5}$$

En [4, pág 106] se pueden encontrar más ecuaciones y representaciones que cumplen estos polinomios.

2.2. Ortogonalidad de los polinomios de Hermite

Una vez probado todo esto, estamos en condiciones de demostrar la ortogonalidad de los polinomios de Hermite. Para $n \neq m$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = 0.$$

Para ello vamos a usar lo que acabamos de ver. Tomando $u_n(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}H_n(x)$ tenemos que:

$$u_n''(x) + (2n+1-x^2)u_n(x) = 0,$$

$$u_m''(x) + (2m+1-x^2)u_m(x) = 0.$$

Y multiplicando la primera ecuacion por u_m y la segunda por u_n y restandolas obtenemos:

$$\frac{d}{dx}(u_n'(x)u_m(x) - u_m'(x)u_n(x)) + 2(n-m)u_m(x)u_n(x) = 0.$$

Integrando en $(-\infty, +\infty)$ obtenemos:

$$(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} u_m(x)u_n(x)\,dx = (n-m)\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = 0. \tag{2.6}$$

Y ya estaría probada la ortogonalidad. Para hallar el valor cuando $n = m$, cambiamos el índice n por $n-1$ en la relación de recurrencia (2.2) y multiplicamos por H_n. A continuación restamos (2.2) multiplicada por H_{n-1} lo que nos da:

$$H_n^2(x) + 2(n-1)H_n(x)H_{n-2}(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - 2nH_{n-1}^2(x) = 0.$$

Multiplicando (2.6) por e^{-x^2} e integrando en $(-\infty, +\infty)$ y usando la ortogonalidad para los indices distintos obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)\,dx = 2n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{n-1}^2(x)\,dx = 2^2n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{n-2}^2(x)\,dx.$$

Luego reiterando llegamos a que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)\,dx = 2^{n-1}n!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_1^2(x)\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}, \tag{2.7}$$

donde hemos usado que $H_1(x) = 2x$ y que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}4x^2\,dx = 2\sqrt{\pi}$.

2.3. Desarrollo en series de polinomios de Hermite

Queremos probar que una función real f definida en $(-\infty, +\infty)$ puede ser expresada como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x), \tag{2.8}$$

siendo H_n los polinomios de Hermite y c_n los coeficientes que determinaremos usando la propiedad de ortogonalidad de estos polinomios. Para ello nos ayudaremos de [1] que nos servirá de guia para la demostración.
Multiplicando la serie (2.8) por $e^{-x^2}H_m$, integrando en $(-\infty, +\infty)$ y utilizando las propiedades (2.6) y (2.7) llegamos a que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f(x)H_m(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\,dx = 2^m m!\sqrt{\pi}c_m.$$

Lo que implica:

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)\, dx. \tag{2.9}$$

Para establecer condiciones suficientes tal que una función pueda ser expresada como en (2.8) necesitamos un lema, que para su demostración primero tendremos que probar una representación integral de los polinomios de Hermite.
Empezaremos hallando otra función generatriz como lo hemos hecho previamente en (2.1).

Lema 2.1. *Sea $x \in \mathbb{R}$ y $t < |1|$ entonces se tiene la siguiente igualdad para los polinomios de Hermite:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{2^n n!} t^n = (1-t)^{1/2} e^{2x^2 t/(1+t)}.$$

Demostración. Para empezar, usando la transformada de Laplace se puede demostrar fácilmente que:

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} cos 2xt\ dt.$$

Luego derivamos la expresión anterior $2n$ veces con respecto a x, lo que podemos hacer dentro de la integral ya que la integral está acotada por la integral absolutamente convergente $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2+2at}\ dt$ para un a finito tal que $|x| \leq a$.

Comparando el resultado con la definición de los polinomios de Hermite, obtenemos:

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt)\ dt.$$

Similarmente, podemos hacer lo mismo para los términos impares:

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin(2xt)\ dt.$$

Combinando ambas expresiones obtenemos que:

$$H_n(x) = \frac{2^n(-i) e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2itx} t^n\ dt.$$

Una vez visto esto, vamos con lo que queremos probar:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} t^n &= \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (2t)^n x \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2+2iux+2ivy} (uv)^n\, du\, dv \\
&= \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2+2iux+2ivy} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2uvt)^n}{n!}\, du\, dv \\
&= \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2+2iux+2ivy-2uvt}\, du\, dv.
\end{aligned}$$

Y ahora, usando dos veces la formula familiar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 s^2 - 2sb}\ ds = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{b^2}{a^2}},$$

obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} t^n = (1-t^2)^{-1/2} e^{[2xyt-(x^2+y^2)t^2]/(1-t^2)}.$$

Y fijando un $x = y$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{2^n n!} t^n = (1-t)^{1/2} e^{2x^2 t/(1+t)}.$$

$\square$

Lema 2.2. *Sean H_n los polinomios de Hermite, entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente igualdad:*

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{1+x^2} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\, dx.$$

Demostración. Por lo visto en el lema anterior,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{2^n n!} t^n = (1-t)^{1/2} e^{2x^2 t/(1+t)}.$$

Una vez sabemos esto, empezamos multiplicando por el término $\frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$. Luego en el lado derecho de la igualdad anterior nos queda:

$$(1-t)^{1/2} e^{2x^2 t/(1+t)} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} = \frac{(1-t)^{1/2}}{1+x^2} e^{2x^2 t/(1+t) - x^2} = \frac{(1-t)^{1/2}}{1+x^2} e^{x^2(\frac{t-1}{t+1})}.$$

A continuación, integramos en $(-\infty, \infty)$. Luego tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{2^n n!} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} t^n\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-t)^{1/2}}{1+x^2} e^{x^2(\frac{t-1}{t+1})}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (1-t^2)^{-1/2} \frac{e^{-y^2}\sqrt{1+t}(1+y^2-t(1-y^2))}{(1-t)\sqrt{1-t}}\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{1+y^2-t(1-y^2)}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{1+y^2-t(1-y^2)}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{1+y^2(1-t(\frac{1-y^2}{1+y^2})}\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^n \frac{e^{-y^2}}{1+y^2}\, dy.$$

Para la tercera igualdad hemos usado el cambio de variable:

$$x = y\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \quad 1+x^2 = \frac{1+y^2-t(1-y^2)}{1-t}$$

Luego tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{2^n n!} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} t^n\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^n \frac{e^{-y^2}}{1+y^2} t^n\, dy.$$

Y usando el teorema de la convergencia dominada ya que ambos integrandos son positivos y comparando los coeficientes de t se tiene que:

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{1+x^2} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\, dx.$$

□

Lema 2.3. *Si la función real $f(x)$ definida en el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ es continua a trozos en todo subintervalo [-a,a] y si la integral:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) e^{-x^2} f^2(x)\, dx, \tag{2.10}$$

es finita, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{(2^n n!\sqrt{\pi})}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)\, dx = 0. \tag{2.11}$$

Demostración. Primero empezamos escribiendo la integral (2.11) como una suma de tres integrales. Sea a $\in \mathbb{R}$:

$$\frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)H_n(x) = \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\left[\int_{-\infty}^{-a} e^{-x^2} f(x)H_n(x)\,dx\right.$$
$$\left.+\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\phi(x)H_n(x)\,dx+\int_{a}^{\infty} e^{-x^2} f(x)H_n(x)\,dx\right] = g_1+g_2+g_3.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que:

$$|g_1| \leq \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{-a} e^{-x^2}|f(x)||H_n(x)|\,dx \leq \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\left[\int_{-\infty}^{-a}\frac{H_n^2}{1+x^2}e^{-x^2}\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\left[\int_{-\infty}^{-a} e^{-x^2}(1+x^2)f^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_n^2}{1+x^2}e^{-x^2}\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\left[\int_{-\infty}^{-a} e^{-x^2}(1+x^2)f^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Similarmente,

$$|g_3| \leq \left[\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_n^2}{1+x^2}e^{-x^2}\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{a}^{\infty} e^{-x^2}(1+x^2)f^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Nuestro siguiente paso es probar que la integral

$$g = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_n^2}{1+x^2}e^{-x^2}\,dx,$$

está acotada para todo n. Para ello usamos el lema previo,

$$g = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n\frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\,dx. \tag{2.12}$$

Reescribimos (2.12) usando que el integrando es par como:

$$g = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}\left[\int_{0}^{1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n\frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\,dx+\int_{1}^{\infty}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n\frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\,dx\right]. \tag{2.13}$$

Ahora hacemos el cambio de variable $y = \frac{1}{x}$ en la segunda integral de (2.13) y obtenemos:

$$g = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}\left[\int_{0}^{1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n\frac{e^{-x^2}+(-1)^n e^{-x^2}}{1+x^2}\,dx\right].$$

y usando que $e^{-x^2}+(-1)^n e^{-x^2} \leq 2, \quad \forall\, 0 \leq x \leq 1$ tenemos que:

$$g \leq 4\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{0}^{1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n\frac{dx}{1+x^2}.$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la integral. Podemos hacer el cambio de varaible de $\frac{1-x^2}{1+x^2} = \sqrt{1-t}$, luego $\frac{dx}{1+x^2}$=$\frac{dt}{4\sqrt{t(1-t)}}$, de donde obtenemos:

$$4\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n\frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{(n-1)}{2}}dt = \beta(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

por lo tanto:

$$g \leq \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Y usando la formula de Stirling $\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}[1+r(x)]$ donde $r(x)$ es una función acotada para todo x, obtenemos que, efectivamente, está acotada para todo n. Por hipotesis sabemos que (2.10) es finita, luego dado un $\varepsilon \geq 0$ exite un $a = a(\varepsilon) \geq 0$ que no depende de n tal que:

$$|g_1| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad |g_3| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.14}$$

Queremos ver que g_2 también cumple que $|g_2| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Para ello volvemos sobre la ecuación diferencial (2.5)

$$u''(x) + (2n+1)u(x) = x^2u(x).$$

Tomando las conocidas condiciones iniciales $u(0) = H_n(0)$ y $u'(0) = H_n(0)$ obtenemos que:

$$u(x) = \alpha_n\left[cos\sqrt{2n+1}x - \frac{n\pi}{2} + r_n(x)\right],$$

donde

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, & \text{si } n \text{ es par },\\ 2\frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2n+1}\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}, & \text{si } n \text{ es impar },\end{cases}$$

y

$$r_n(x) = \frac{1}{\alpha_n\sqrt{2n+1}}\int_0^x y^2u(y)\sin[\sqrt{2n+1}(x-y)]\,dy.$$

Vamos a encontrar una cota para esta funcion que nos serivirá para lo que queremos demostrar. Para ello, usamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\begin{aligned}|r_n(x)| &\leq \frac{1}{\alpha_n\sqrt{2n+1}}\left[\int_0^{|x|}y^4\,dy\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{|x|}u^2(y)dy\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \frac{1}{\alpha_n\sqrt{2n+1}}\left[\int_0^{|x|}y^4\,dy\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^{\infty}u^2(y)dy\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2^nn!\sqrt{\pi}^{\frac{1}{2}}}{\alpha_n\sqrt{2n+1}}\frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Usando la formula de Stirling, obtenemos que: $\alpha(x) \approx 2^{\frac{(n+1)}{2}}n^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}}$ y $2^nn!\sqrt{\pi} = 2^{n+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}e^n\pi$ cuando $n \to \infty$ luego sustituyendo en la cota obtenida, nos queda que $|r_n(x)| \leq C|x|^{\frac{5}{2}}n^{-\frac{1}{4}}$ con C una constante. Luego hemos demostrado que para cualquier x finito, tenemos la fórmula asintótica :

$$u(x) = \alpha_n\left[cos(\sqrt{2n+1}x - \frac{n\pi}{2})\right].$$

Una vez obtenida esta identidad, podemos seguir con lo que queriamos demostrar: $|g_2| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Vamos a verlo usando esta última identidad:

$$g_2 = \alpha_n \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \left[\int_{-a}^{a} e^{-x^2} f(x) \cos(\sqrt{2n+1}x - \frac{n\pi}{2})\, dx + \int_{-a}^{a} e^{-x^2} f(x) r_n(x)\, dx \right].$$

Y como $f(x)e^{-x^2}$ es continua a trozos y por lo tanto absolutamente integrable en $[-a,a]$ la primera integral tiende a 0 cuando n tiende a ∞. La segunda integral tambien tiende a 0 por lo que acabamos de probar. Luego eligiendo un $N = N(\varepsilon)$ tenemos que $\forall n \geq N$ $|g_2(n)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ Combinando (2.14) y lo que acabamos de ver, obtenemos que $\forall n \geq N, \quad |g_1 + g_2 + g_3| \leq \varepsilon$. □

Una vez probado este lema estamos en condiciones de probar lo siguiente:

Teorema 2.4. *Si la función real $f(x)$ definida en $\mathbb{R}$ es C^∞ a trozos en todo intervalo finito $[-a,a]$ y si la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x), dx$$

es finita, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)$ con los coeficientes

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)\, dx,$$

converge a $f(x)$ en todo punto de continuidad.

Demostración. Primero notamos que debido a las hipótesis impuestas sobre $f(x)$ tenemos la existencia de la integral (2.9) luego podemos calcular los coeficientes c_n. Sea S_n la suma de los primeros $n+1$ terminos de la serie (2.8). Luego tenemos que

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} H_n(x) c_n = \sum_{n=0}^{m} H_n(x) \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(y) H_n(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(y) K_m(x,y)\, dy, \quad (2.15)$$

donde

$$K_m(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{m} \frac{H_n(x) H_n(y)}{n! 2^n}. \quad (2.16)$$

Para hallar otra expresión de la función $K_m(x,y)$, tambien conocida como núcleo, usamos la ecuación (2.2). Primero la multiplicamos por $H_n(y)$ y a la ecuación resultante le restamos la mismo pero con las variables cambiadas:

$$[H_{n+1}(x)H_n(y) - H_{n+1}(y)H_n(x)] - 2n[H_n(x)H_{n-1}(y) - H_n(y)H_{n-1}(x)] = 2(x-y)H_n(x)H_n(y),$$

dividiendo por $n!2^n$ y sumando en n hasta m tenemos que:

$$2(x-y) \sum_{n=1}^{m} \frac{H_n(x)H_n(y)}{n!2^n} = \frac{H_{m+1}(x)H_m(y) - H_{m+1}(y)H_m(x)}{m!2^m} - 2(x-y),$$

donde hemos usado que $H_0 = 1$ y $H_1 = 2x$. Luego nos queda que:

$$K(x,y) = \frac{H_{m+1}(x)H_m(y) - H_{m+1}(y)H_m(x)}{(x-y)m!2^{m+1}\pi}. \quad (2.17)$$

Nótese que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y) e^{-x^2}\, dx = 1, \quad (2.18)$$

que es consecuencia de (2.16) y de las propiedades (2.7) y (2.6) y de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_0(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq 0, \\ \sqrt{\pi}, & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Ahora supongamos que x es un punto de continuidad de f. Y consideramos la diferencia $S_m(x) - f(x)$. Usando lo visto anteriormente en (2.18), (2.17) y (2.15) llegamos a que:

$$S_m(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} K_m(x,y) f(y) - f(x)\ dy = \frac{H_{m+1}(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(y) \phi(x,y)\ dy - \frac{H_m(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{m+1}(y) \phi(x,y)\ dy. \tag{2.19}$$

Donde $\phi(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ que es continua como función de y es continua a trozos en $(-\infty, \infty)$. Ademas la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+y^2) \phi(x,y) e^{-y^2}\ dy,$$

es finita, ya que $\phi(x,y)$ está acotada en cualquier entorno de $x = y$ ya que $\phi(x, x-0) = f'(x-0)$ y $\phi(x, x+0) = f'(x+0)$ que existen ambos si x es un punto de continuidad. Luego para un $b > x$ suficientemente grande,

$$\int_b^{\infty} e^{-y^2} (1+y^2) \phi^2(x,y)\ dy = \int_b^{\infty} e^{-y^2} (1+y^2) \left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right)^2 dy = O(1) \int_b^{\infty} e^{-y^2} [f^2(y) - f^2(x)]\ dy.$$

Donde la última integral es finita por hipótesis. Similarmente, se puede ver lo mismo para el intervalo $(-\infty, -b)$ Luego por el lema anterior,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^{m+1}(m+1)! \sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_{m+1}(y) \phi(x,y)\ dy = \lim_{m\to\infty} \frac{(m)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^m m! \sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_m(y) \phi(x,y)\ dy = 0.$$

Por lo probado anteriormente y por la fórmula de Striling, cada una de las expresiones

$$\frac{[2^{2m+1}(m+1)! \sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}}{(m+1)^{\frac{1}{4}}} \frac{H_m(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}, \quad \frac{(2^m m! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}} \frac{H_{m+1}(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}},$$

están acotadas cuando m tiende a infinito. Luego la última parte de (2.19) tiende a 0. Concluimos:

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = f(x).$$

□

2.4. Ejemplos

Vamos a ver algún ejemplo para ilustrar mejor esta sección. Sea $f(x) = x^{2p}$ con p un número natural. Satisface las condiciones del teorema anterior. En este caso:

$$x^{2p} = \sum_{n=0}^{2} c_{2n} H_{2n}.$$

donde

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)! \sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\infty} x^{2p} e^{-x^2} H_{2n}(x)\ dx$$

Luego substituyendo la definición de H_{2n} e integrando por partes n veces obtenemos que:

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\infty} x^{2p} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(e^{-x^2})\, dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \int_{\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2p-2n}\, dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2n)!} \Gamma(p-n+\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos que:

$$c_{2n} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(2n)!(p-n)!},$$

donde hemos usado la identidad

$$2^{2p-2n}\Gamma(p-n+\frac{1}{2})(p-n)! = \sqrt{\pi}(2p-2n)!.$$

Luego la expresión final es:

$$x^{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}} \sum_{n=0}^{p} \frac{H_{2n}(x)}{(2n)!(p-n)!}.$$

Similarmente podemos encontrar que

$$x^{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}} \sum_{n=0}^{p} \frac{H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(p-n)!}.$$

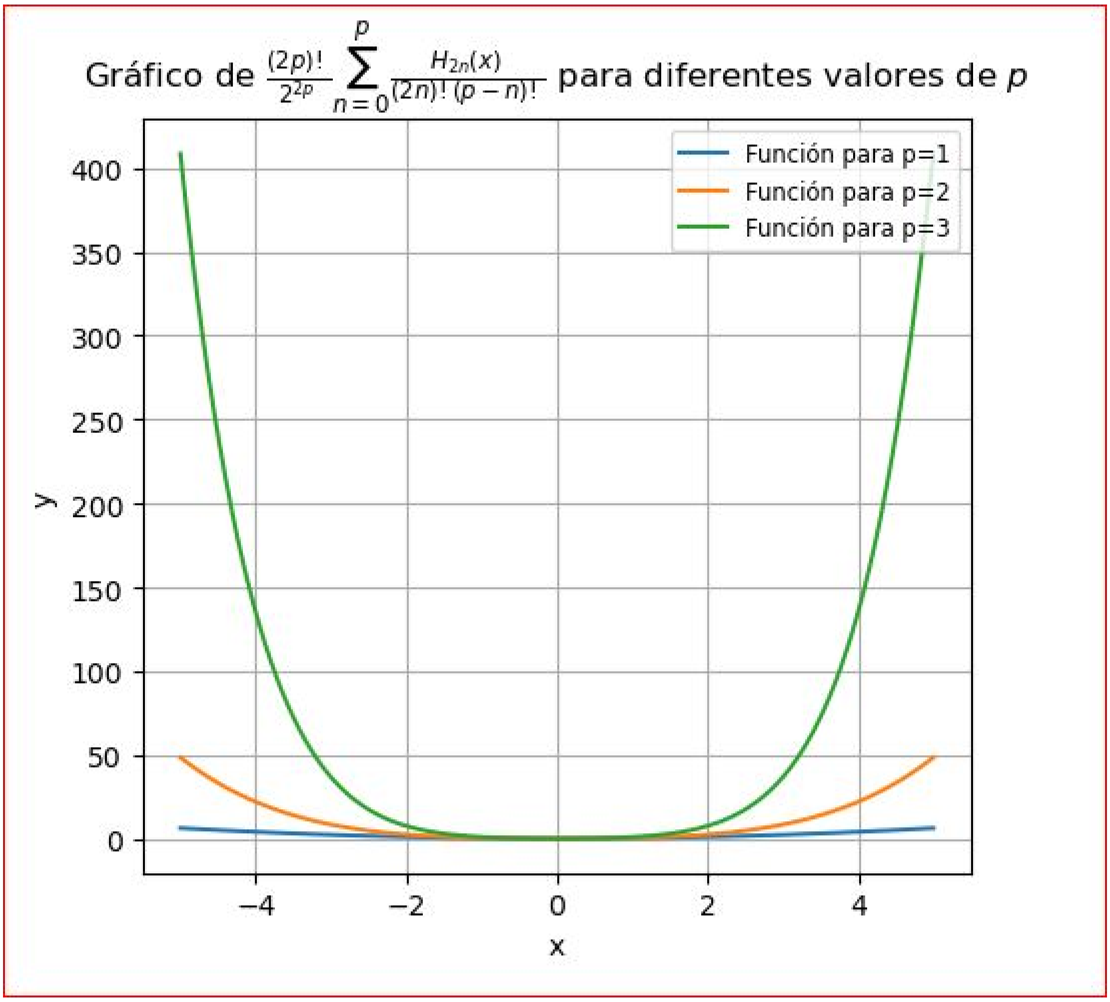

Figura 2.1: Gráfica de la expresión anterior para distintos valores de p.

Vamos a ver ahora otro ejemplo mas ilustrativo. Sea $f(x) = e^{-x^2}$ que cumple las condiciones del teorema. En este caso,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} H_{2n}(x),$$

donde los coeficientes

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} H_{2n}(x)\, dx.$$

Por lo visto en el lema 1,

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt)\, dt.$$

Así que ya podemos calcular los coeficientes:

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{2(-1)^n}{\pi(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2xt)\, dx = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{\pi}(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2 2t^{2n})}\, dt \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}(2n)!} \frac{1}{2^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}(2n)!} \frac{1}{(2)^{n+\frac{1}{2}}} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (2)^{n+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Luego tenemos que:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (2)^{n+\frac{1}{2}}} H_{2n}(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

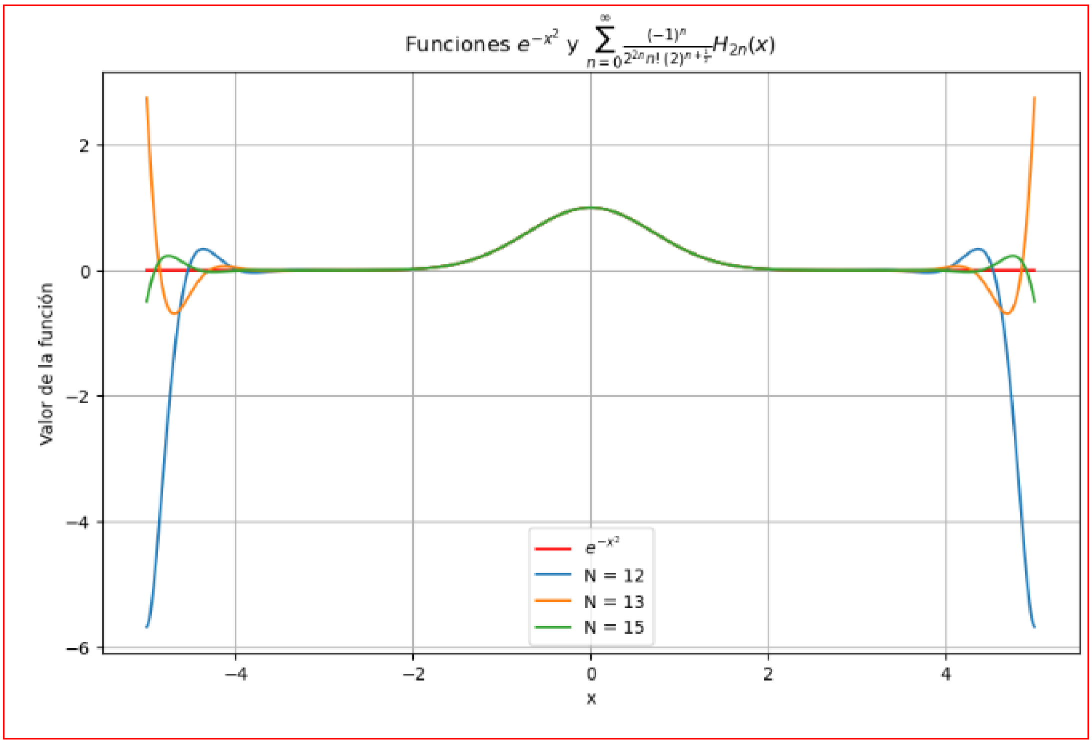

Figura 2.2: Gráfica de la función gaussiana y su aproximación para distintas cantidades de sumandos.

Capítulo 3

Desarrollo en series de polinomios de Laguerre

En este capítulo se exploran los polinomios de Laguerre de forma similar al cápitulo anterior, es decir, empezaremos mencionando alguna de las propiedades de estos polinomios que nos servirán de ayuda para demostrar la ortogonalidad de estos. A continuación se demostrará el teorema de aproximación de estos polinomios y para finalizar, se mostrarán ejemplos para visualizar la aplicación práctica en la aproximación de funciones. Para todo esto, nos ayudaremos principalemente de [2, pág. 76 hasta 91] que nos ayudará a profundizar en ciertos detalles pero haciendo hincapié en la teoría de aproximación. También usaremos [1, pág. 11,12] para la demostración del teorema de aproximación. Y por último también se referenciará [5] y [4] que servirá al lector para indagar en ciertos detalles.

3.1. Propiedades de los polinomios de Laguerre

La representación general de los polinomios de Laguerre viene dada por la fórmula de Rodrigues vease [4, pág 101]:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x}{n!} x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+\alpha}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde n es un parámetro que determina el orden del polinomio y α es un parámetro que vamos a restringir a $(-1,\infty)$.
Los primeros tres polinomios para un α arbitrario en dicho intervalo son:

- $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$,
- $L_1^{(\alpha)}(x) = 1+\alpha-x$,
- $L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}[(1+\alpha)(2+\alpha)-2(2+\alpha)x+x^2]$.

Podemos encontrar más ejemplos y propiedades especiales en [3, pág. 239].

Estos polinomios son característicos debido a que forman un sistema ortogonal respecto a la función peso $w(x) = e^{-x}x^{\alpha}$. Es decir, cumplen:

$$\int_0^{\infty} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) e^{-x} x^{\alpha}\, dx = \delta_{m,n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

Ya que en el caso $(n=m)$:

$$\int_0^{\infty} \left[L_n^{(\alpha)}(x)\right]^2 e^{-x} x^{\alpha}\, dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

Estos polinomios cumplen:

$$xL_n^{(\alpha)}(x)'' + (\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)' + nL_n^{(\alpha)}(x) = 0,$$

y

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (2n+1+\alpha-x)L_n^{(\alpha)}(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$$

En [4, pag 100-105] se muestran mas ecuaciones y expresiones que satisfacen estos polinomios pero no mencionaremos debido a que no son útiles para el objetivo del trabajo. Estas propiedades que acabmos de mencionar las demostraremos a continuación ya que son fundamentales en el desarrollo de funciones en series de polinomios de Laguerre.

3.2. Ortogonalidad de los polinomios de Laguerre

Para empezar, comenzamos demostrando:

$$w_\alpha(x,t) = (1-t)^{-\alpha-1} e^{\frac{-xt}{(1-t)}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n \qquad |t|<1. \tag{3.1}$$

Como vemos, considerando w como una funcion de la variable compleja t, es analítica en el disco $|t|<1$, luego tendrá una expresión de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{\alpha}(x)t^n$ con $|t|<1$. Y estos coeficientes sabemos que tienen la forma de:

$$c_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C (1-t)^{-\alpha-1} e^{\frac{-tx}{(1-t)}} t^{-n-1}\, dt.$$

Con C un disco cerrado conteniendo el punto $t=0$ y dentro del disco $|t|<1$. Haciendo el cambio de variable $u = \frac{x}{(1-t)}$ tenemos que:

$$c_n^{\alpha}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{2\pi i}\int_{C'} \frac{e^{-u}u^{n+\alpha}}{(u-x)^{n+1}}\, du.$$

Donde C' es un entorno de $u=x$ suficientemente pequeño. Evaluamos la integral por el teorema del residuo y obtenemos:

$$c_n^{\alpha}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\left[\frac{d^n}{du^n} e^{-u}u^{n+\alpha}\right]_{u=x} =: L_n^{\alpha}(x).$$

Derivando en (3.1) respecto a t, obtenemos:

$$(1-t^2)\frac{\partial w_\alpha(x,t)}{\partial t} + [x-(1-t)(1+\alpha)]w_\alpha(x,t) = 0.$$

Luego sustituyendo lo que acabamos de ver, llegamos a:

$$(1-t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nL_n^{(\alpha)}(x)t^{n-1} + [x-(1-t)(1+\alpha)]\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n = 0.$$

Luego, tenemos por Taylor:

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (x-\alpha-2n-1)L^{\alpha}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0. \tag{3.2}$$

Haciendo lo mismo pero derivando para x,

$$(1-t)\frac{\partial w_\alpha(x,t)}{\partial t} + tw(x) = 0,$$

obtenemos que:

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} + \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^{n+1} = 0.$$

Luego se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} - \frac{dL_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{dx} + L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0. \tag{3.3}$$

Usando lo obtenido en (3.2) y (3.3), tenemos que:

$$(x-n-1)\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} + (n+1)\frac{dL_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{dx} + (2n+2+\alpha-x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = 0. \tag{3.4}$$

Reemplazando n por $n-1$ en (3.4) y usando (3.3) de nuevo obtenemos:

$$x\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} = nL_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x). \tag{3.5}$$

Una vez obtenida esta ecuación, que expresa la derivada del polinomio de Laguerre en términos de otros polinomios de Laguerre, queremos encontrar una ecuacion de recurrencia. Es decir una ecuación que involucre los términos α y $\alpha+1$. Para ello, en (3.1) vemos que $(1-t)w_{\alpha+1}(x,t) = w_\alpha(x,t)$ y comparando los coeficientes de las mismas potencias de t tenemos que:

$$L_n^{(\alpha+1)}(x) - L_n^{(\alpha-1)}(x-1) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

Sustituyendo otra vez (3.1) en la igualdad $\frac{\partial w_\alpha(t,x)}{\partial x} = -tw_\alpha(x,t)$. Obtenemos que:

$$\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

Ahora derivando (3.5) con respecto a x y usando (3.3) y (3.5) para eliminar $\frac{dL_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{dx}$ y $L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ tenenemos que:

$$x\frac{d^2L_n^{(\alpha)}(x)}{dx} + (\alpha+1-x)\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} + nL_n^{(\alpha)}(x) = 0.$$

Luego $u(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$xu''(x) + (\alpha+1-x)u'(x) + nu(x) = 0.$$

Haciendo cambios de variable $u(x) = e^{-x^2/2}x^\nu L_n^\alpha(x)$, podemos ver facilmente que es solución de la ecuación diferencial (para más detalle vease [3, pág. 243]:

$$xu''(x) + (\alpha+1-2\nu)u'(x) + \left[n + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\nu(\nu-\alpha)}{x}\right]u(x) = 0, \tag{3.6}$$

y $e^{-x^2/2}x^{\alpha+1/2}L_n^{(\alpha)}(x^2)$ es solución de:

$$u''(x) + \left[4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x^2}\right]u(x) = 0.$$

Una vez visto todo esto, queremos probar la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre con el peso $w(x) = e^{-x}x^\alpha$ en el intervalo $0 \leq x < \infty$. Para ellos definimos:

$$u_n(x) = e^{\frac{-x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^\alpha(x).$$

Y por lo que acabamos de ver en (25) $u_n(x)$ y $u_m(x)$ satisfacen la siguiente ecuación diferencial:

$$(xu_n'(x))' + \left(n + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x}\right)u_n(x) = 0$$
$$(xu_m'(x))' + \left(m + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x}\right)u_m(x) = 0.$$

Restando a la primera ecuación multiplicada por u_m la segunda multiplicada por u_n e integrando en 0 a ∞ obtenemos:

$$x(u_n'(x)u_m'(x)-u_m'(x)u_n(x))\Big|_0^\infty+(n-m)\int_0^\infty u_n(x)u_m(x)dx=0.$$

Para $\alpha>-1$ el primer término desaparece en ambos límites luego

$$\int_0^\infty u_m(x)u_n(x)\,dx=0 \quad si \quad m\neq n,$$

o

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)\,dx=0\,si \quad m\neq n,\ \ \alpha>-1. \tag{3.7}$$

El valor de la integral (26) para $m=n$ podemos hallarlo como sigue: reemplazamos el índice n por $n-1$ en la relación de recurrencia (3.2) y lo multiplicamos por L_n^α. A esto, le restamos (3.2) multiplicado por L_{n-1}^α y obtenemos:

$$n[L_n^\alpha(x)]^2-(n+\alpha)[L_{n-1}^\alpha(x)]^2-(n+1)L_{n+1}^\alpha L_{n-1}^\alpha(x)+2L_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(x)+(n+\alpha-1)L_n^\alpha(x). \tag{3.8}$$

Multiplicando por $e^{-x}x^\alpha$, integrando en el intervalo $(0,\infty)$ y usando la propiedad de ortogonalidad que acabamos de ver tenemos que:

$$n\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha[L_n^\alpha(x)]^2\,dx=(n+\alpha)\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha[L_{n-1}^\alpha(x)]^2\,dx. \tag{3.9}$$

Reiterando, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha[L_n^\alpha(x)]^2\,dx&=\frac{(n+\alpha)(n+\alpha+1)\cdots(\alpha+2)}{n!}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha[L_1^\alpha(x)]^2\,dx\\&=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Así que tenemos un sistema ortonormal dado por $\left\{\phi_n(x)=\left[\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right]^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}L_n^\alpha(x)\right\}_{n\geq 0}$.

3.3. Desarrollo en series de polinomios de Laguerre

Una de las propiedades más importantes de los polinomios de Laguerre, igual que los de Hermite, es que una función real definida en el intervalo (0,∞) puede ser expandida de la forma

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty c_nL_n^\alpha(x) \quad 0<x<\infty, \tag{3.11}$$

si la función f cumple ciertas condiciones generales. Los coeficientes c_n pueden ser determinados usando la propiedad de ortogonalidad que acabamos de ver. Es decir, si multiplicamos (3.11) por $e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha$, e integrando término a término sobre el intervalo $(0,\infty)$ obtenemos que:

$$c_n=\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha f^2(x)L_n^\alpha(x)\,dx. \tag{3.12}$$

Este desarrollo es válido si f es C^∞ a trozos y si se comporta bien en los puntos $x=0$ y $x=\infty$.

Teorema 3.1. *Si la función real $f(x)$ definida en $(0,\infty)$ es C^∞ a trozos en todos los subintervalos de la forma $[x_1,x_2]$ con $0<x_1<x_2<$ y si la integral*

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha f^2(x)\,dx,$$

es finita, entonces la serie $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{\alpha}(x)$ con los coeficientes de

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} f^2(x) L_n^{\alpha}(x)\, dx,$$

converge a $f(x)$ en cada punto de continuidad de f.

Demostración. Empezamos definiendo la función S_m. Sea

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n L_n^{\alpha}(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} K_m(x,y) f(y)\, dy,$$

donde $K_m(x,y) = \sum_{n=0}^{m} \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(x)$ para $x,y>0$. Para hallar otra expresión de la función $K_m(x,y)$, también conocida como núcleo, volvemos a la ecuacion de recurrencia (21). Esta ecuación la multiplicamos por $L_n^{\alpha}(y)$ y le restamos la misma con las variables cambiadas, luego nos queda que

$$(n+1)[L_{n+1}^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(y) - L_{n+1}^{\alpha}(y)L_n^{\alpha}(x)] + (n+\alpha)[L_n^{\alpha}(y)L_{n-1}^{\alpha}(x) - L_n^{\alpha}(x)L_{n-1}^{\alpha}(y)] = L_n^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(y)(y-x).$$

Multiplicando ambos lados por $\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}$ y sumando en n hasta m obtenemos que:

$$K_m(x,y) = \sum_{n=0}^{m} \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(x) = \frac{(m+1)!}{\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{L_{m+1}^{\alpha}(x)L_m^{\alpha}(y) - L_{m+1}^{\alpha}(y)L_m^{\alpha}(x)}{y-x} \right).$$

Una vez visto esto, estamos en condiciones de probar que

$$S_m(x) - f(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} \varphi_m(x,y)(f(y)-f(x))\, dy,$$

tiende a 0 cuando $m \to \infty$. Tomamos $a<t<b$ luego existen A y B tales que $0<A<a<b<B$ que cumplen que

$$\int_0^{H} y^{\alpha} e^{-y} \varphi_m^2(y,x)\, dy < C, \qquad \int_G^{\infty} y^{\alpha} e^{-y} \varphi_m^2(y,x)\, dy < C,$$

para una constante $C>0$ ver [5, pág. 617, fórmula (27)]. [1] Luego tomando un $\varepsilon>0$, existen $A,B>0$ cumpliendo que

$$\left\| \int_0^{H} e^{-y} y^{\alpha} \varphi_m(t,y)\,(f(y)-f(t))\, dy \right\| \le \frac{\varepsilon}{3},$$
$$\left\| \int_G^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} \varphi_m(t,y)\,(f(y)-f(t))\, dy \right\| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nótese que

$$\varphi_m(x,y) = \frac{\sqrt{(m+1)(m+\alpha+1)}}{\pi m} \frac{(xy)^{\frac{-\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x+y}{2}}}{y-x} \left(T_m(x,y) + \frac{U_m(x,y)}{\sqrt{m}} \right),$$

donde T_m y U_m son funciones introducidas y estudiadas en [2, pág. 612 y 613], cumpliendo que T_m y $\frac{U_m}{\sqrt{m}}$ son funciones acotadas. Ahora definimos

$$F(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \quad x \neq y > 0,$$

la cual es continua para todo $y>0$. Además,

$$\int_H^{G} e^{-y} y^{\alpha} \varphi_m(x,y)(f(y)-f(x))\, dy = C_m x^{-\alpha/2-1/4} e^{x/2} \int_H^{G} e^{-y/2} y^{\alpha/2-1/4} \left(T_m(x,y) + \frac{U_m(x,y)}{\sqrt{m}} \right) F(x,y)\, dy,$$

[1] Esta demostración se puede hacer análoga a la del capítulo anterior, demostrando unos lemas previos, pero excedería el trabajo en longitud. Es por eso que hemos dado una demostración alternativa referenciada.

donde $\sup_{m\geq 1} C_m < \infty$. Vemos que si m $\rightarrow \infty$

$$\int_H^G e^{-y/2} y^{\alpha/2-1/4} \frac{U_m(x,y)}{\sqrt{m}} F(x,y)\, dy \rightarrow 0,$$

$$\int_H^G e^{-y/2} y^{\alpha/2-1/4} T_m(x,y) F(x,y)\, dy \rightarrow 0,$$

para el segundo límite hemos usado el lema de Riemann-lebesgue. Luego concluimos que

$$\left\| \int_H^G e^{-y} y^{\alpha} \varphi_m(x,y)(f(y)-f(x))\, dy \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

□

3.4. Ejemplos

Para ilustrar lo que acabamos de ver, vamos a ver unos ejemplos. Sea en este caso $f(x) = e^{-x}$ que satisface las condiciones del teorema ya que $1 > \frac{1}{2}$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{\alpha}(x),$$

donde

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-2x} x^{\alpha} L_n^{\alpha}(x)\; dx.$$

Luego susituimos en la definición de los polinomios e integrando por partes n veces obtenemos que calculamos los coeficientes como antes y obtenemos:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-2x} x^{\alpha} L_n^{\alpha}(x)\; dx \\ &= \frac{(1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha})\; dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-2x} x^{n+\alpha}\; dx = \frac{1}{2^{1+n+\alpha}}. \end{aligned}$$

Luego tenemos que:

$$e^{-x} = 2^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n L_n^{\alpha}(x) \quad 0 \leq x < \infty.$$

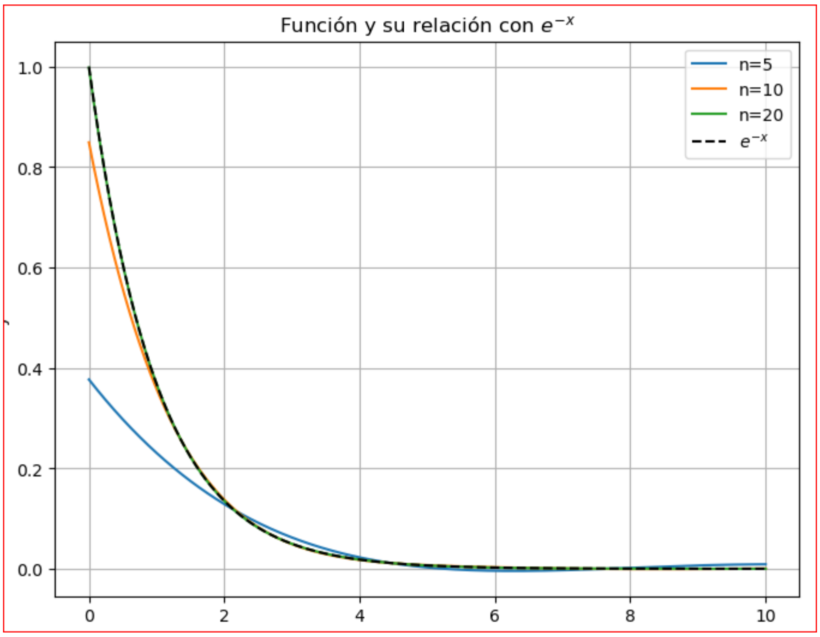

Figura 3.1: e^{-x} junto a la función calculada con distintas cantidades de sumandos.

Vamos ahora con otro ejemplo más general: Sea la función $f(x) = x^v$ con v un número natural que satisface las condiciones del teorema 3 si $v > \frac{-1}{2}(\alpha+1)$ y

$$x^v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{\alpha}(x),$$

donde

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{v+\alpha} L_n^{\alpha}(x)\, dx.$$

Susituyendo, como en el ejemplo anterior, en la definición,

$$c_n = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} x^v \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})\, dx = \frac{(-1)^n v(v-1)\cdots(v-n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{v+\alpha}\, dx$$
$$= (-1)^n \frac{\Gamma(v+\alpha+1)\Gamma(v+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(v-n+1)}$$

Luego

$$x^v = \Gamma(v+\alpha+1)\Gamma(v+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^{\alpha}(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(v-n+1)}$$

En particular, si v es un entero positivo, la serie anterior termina tras un número finito de términos y tenemos

$$x^p = \Gamma(p+\alpha+1)p! \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n L_n^{\alpha}(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)(p-n)!}$$

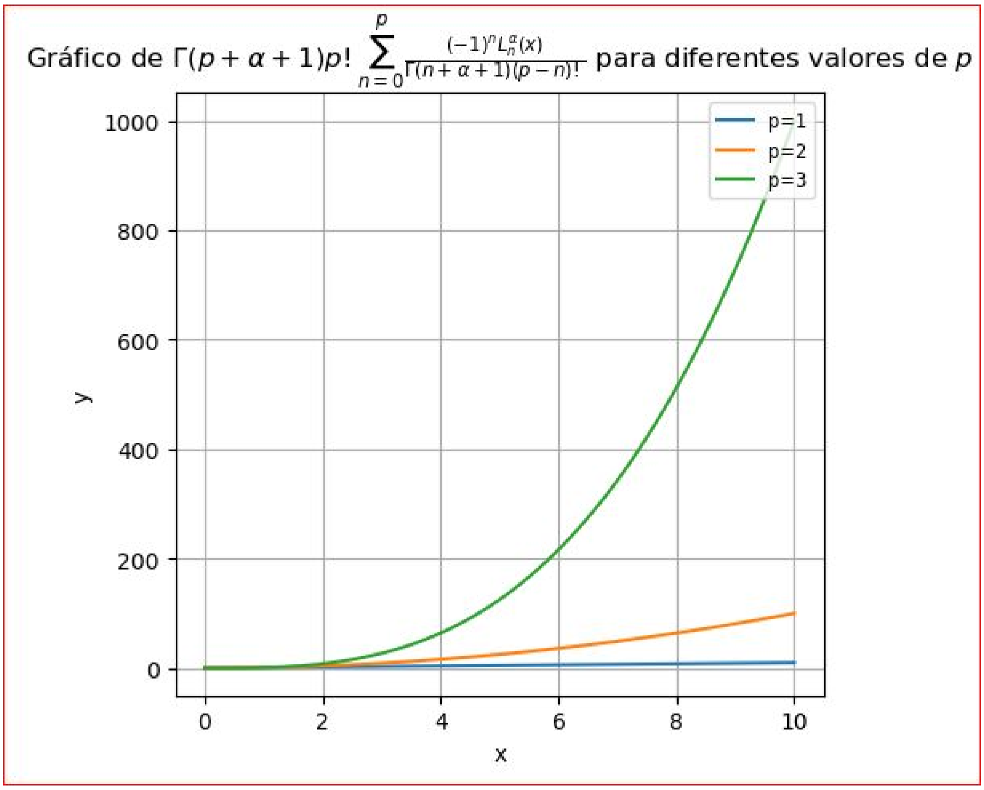

Figura 3.2: Gráfica de la expresión anterior para distintos valroes de p.

Bibliografía

[1] L. ABADIAS Y P. MIANA, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, (288-310).

[2] N.N. LEBEDEV Y R.A. SILVERMAN, *Special Functions*, Physico-Technical Institute Academy of Sciences, U.S.S.R, 1965.

[3] W.MAGNUS, F.OBERHETTINGER Y R.P. SONI, *Formulas and Theorems for the Special Functions for the Mathematical Physics*, SpringerVerlag Berlin Heidelberg GmbH, 1966.

[4] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, 1975.

[5] J.V. USPENSKY, *On the development of arbitrary functions in series of Hermite's and Laguerre's polynomials,* Annals of Mathematics Vol 28, 1926, (593–619).