

# Influencia de la distribución de presión en la simulación de ondas superficiales

Paula Cabrero Lample

Grado en Física  
Trabajo Fin de Grado

Tutoras:

Pilar García Navarro  
Isabel Echeverríbar Pérez



Universidad de Zaragoza

Zaragoza, Julio 2024

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Formulación de flujos promediados de lámina libre</b>	<b>2</b>
2.1	Aproximación hidrostática (Shallow Water) . . . . .	3
2.1.1	Ecuación de la energía para la aproximación hidrostática . . . . .	3
2.2	Modelos no hidrostáticos . . . . .	4
2.2.1	NHP-HE o hiperbólico elíptico . . . . .	4
2.2.2	Ecuación de la energía para el modelo NHP-HE . . . . .	5
2.2.3	NHP-HR o hiperbólico relajado . . . . .	6
2.2.4	Ecuación de la energía para el modelo NHP-HR . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Resolución numérica y validación con datos de laboratorio</b>	<b>7</b>
3.1	Validación de los modelos con datos de laboratorio . . . . .	8
3.2	Caso de propagación sobre un fondo variable . . . . .	9
3.3	Caso de ondas generadas por un pistón . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Casos de estudio para evaluación del error en la energía</b>	<b>12</b>
4.1	Problema de Riemann sobre fondo plano . . . . .	14
4.2	Problema de Riemann sobre fondo variable . . . . .	16
4.3	Propagación de un solitón sobre fondo plano . . . . .	18
4.4	Propagación de un solitón sobre fondo variable . . . . .	21
4.5	Discretización del término fuente para el modelo NHP-HE . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Agradecimientos</b>	<b>24</b>
<b>A</b>	<b>Anexos</b>	<b>26</b>
A.1	Integración del sistema de Euler en la vertical . . . . .	26
A.2	Deducción de la ecuación de la energía . . . . .	29
A.2.1	Modelo hidrostático o de Shallow Water . . . . .	29
A.2.2	Modelo no hidrostático hiperbólico elíptico o NHP-HE . . . . .	30
A.3	Resolución numérica de las ecuaciones . . . . .	33
A.3.1	Resolución del modelo SW y NHP-HE . . . . .	34
A.3.2	Resolución del modelo NHP-HR . . . . .	37
A.4	Análisis de la discretización de la malla para el caso de Beji . . . . .	38
A.5	Caso de ondas generadas por un pistón . . . . .	42

# 1. Introducción y objetivos

En la Física de Fluidos, el estudio de los flujos de lámina libre es relevante para la modelización de fenómenos, que van desde la evolución de las crecidas en un río [7], hasta el estudio de las ondas del océano [6]. Queda claro entonces la importancia de tener modelos que reproduzcan con suficiente precisión los fenómenos naturales para evitar, prevenir y mitigar catástrofes futuras.

En los flujos de lámina libre la fuerza motriz es la gravedad y su estudio, debido a la extensión espacial frente al grosor de la capa de agua, se suele abordar mediante modelos promediados en la columna líquida. El modelo por excelencia para la modelización de este tipo de flujos son las ecuaciones de *Shallow Water* (SW) o Aguas Poco Profundas, también llamadas ecuaciones de Saint-Venant. Estas ecuaciones, basadas en leyes de conservación de masa y cantidad de movimiento, asumen un flujo incompresible en el que la principal aproximación aplicada es una distribución de presión hidrostática en la vertical.

Sin embargo, hay ocasiones en las que realizar la aproximación hidrostática no es adecuado. Particularmente si se quiere estudiar fenómenos de carácter ondulatorio, en los que la longitud de onda es comparable o menor que la profundidad de agua. Las distintas aproximaciones que pueden utilizarse parten de diferentes formas de realizar la integración en la columna de la ecuación de momento en  $z$  (dirección vertical). Cuando los términos de la integral excepto el hidrostático son directamente considerados irrelevantes es cuando se obtiene la aproximación de *Shallow Water*. En cambio, si se consideran estos términos adicionales existen varias formas de abordar el estudio. Por un lado, están los modelos de tipo *Boussinesq*, como en [13], que, además del término hidrostático, mantienen todos los términos de la integral dando lugar a sistemas con derivadas de alto orden, de compleja resolución numérica. Por otro lado, los llamados *Dispersive Shallow Water Models*, de acuerdo a [8], empaquetan la gran mayoría de los términos en una variable dando lugar a una ecuación más sencilla pero con una nueva incógnita. En este trabajo, se utilizarán los modelos del segundo grupo, también llamados Modelos de Presión No Hidrostática (NHP), al igual que en [16, 3, 5].

Por ello es objetivo de este trabajo, que forma parte del proyecto de investigación PGC2018-094341-B-I00 del Ministerio de Ciencia e Innovación/FEDER, estudiar modelos más allá de los modelos de *Shallow Water* en los que la distribución de presión es la contribución de la presión hidrostática más un nuevo término de corrección, que será la presión no hidrostática. En todos los casos es necesario aplicar métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones. Se compararán las predicciones numéricas de los dos tipos de modelos con datos de laboratorio, comprobando su validez.

Asimismo, dado que estos sistemas resuelven la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento, es habitual monitorizar el error de conservación de la masa como indicio de calidad del método numérico dado que se trata de una de las ecuaciones a resolver, como ocurre en [16]. Sin embargo, sin resolver la ecuación de la energía, su conservación debería cumplirse. Por esta razón, es propósito de este trabajo desarrollar la ecuación de conservación de la energía de los modelos propuestos en ausencia de fricción y, adicionalmente, analizar lo que ocurre con esta magnitud al discretizar las ecuaciones. En este Trabajo Fin de Grado se analizará si los esquemas utilizados conservan o no la energía.

## 2. Formulación de flujos promediados de lámina libre

Consideremos el caso de un flujo incompresible 2D en el plano  $(x, z)$  y sin fricción, en el que el vector velocidad se expresa  $\mathbf{v} = (u, w)$ .

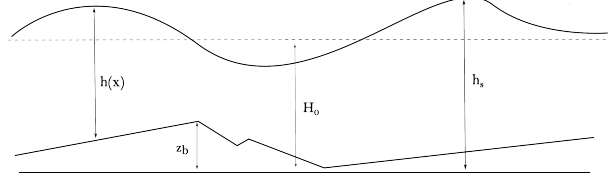


Figura 1: Principales variables involucradas.

La fuerza másica que actúa sobre el fluido es la gravedad,  $\mathbf{f}_m = -g\hat{\mathbf{z}}$ . Despreciando por simplicidad del análisis la fricción, el sistema es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (2.1c)$$

Para completar el modelo se necesita establecer unas condiciones de contorno en la superficie libre y en el fondo:

$$\frac{\partial h_s}{\partial t} = -u(h_s) \frac{\partial h_s}{\partial x} + w(h_s) \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = -u(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + w(z_b) \quad (2.2b)$$

donde  $h_s$  y  $z_b$  denotan la posición de la superficie libre y del fondo respectivamente, como se indica en la Figura 1 y  $h_s = h + z_b$ .

Es frecuente integrar las ecuaciones en el eje vertical [5] y formular el sistema resultante explícitamente en la variable  $h(x)$ , profundidad o calado. En ocasiones se establece la posición de la superficie libre desde una referencia por debajo del fondo, pero aquí este caso no se considera. Cuando se resuelve el sistema se obtiene en cada instante entonces el nivel o calado, que es una variable fundamental en los flujos de lámina libre y la forma más inmediata de caracterizar su estado en cada instante.

Igualmente es necesario definir velocidades promediadas en la vertical a partir de las velocidades puntuales. Así, si  $u(x, z)$  es la velocidad en el eje  $x$ , se define la velocidad promedio vertical como

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{h_s} u(x, z) dz \quad (2.3)$$

La definición es equivalente para la velocidad en la vertical.



## 2.1. Aproximación hidrostática (Shallow Water)

Una vez establecida la forma de proceder, se va a mostrar cómo con diferentes modelos o aproximaciones para el perfil de velocidad horizontal y en la presión se obtienen los diferentes modelos dominantes en la literatura. Partiendo de la ecuación del momento en  $z$ , (2.1c) e integrando en la vertical obtenemos:

$$\frac{p}{\rho} = g(h_s - z) + \int_z^{h_s} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz \quad (2.4)$$

Los modelos de presión hidrostática o modelos de Shallow Water (SW) desprecian los términos de aceleración vertical, tanto local como convectiva. Siendo estrictos, los modelos de Shallow Water hacen referencia a los modelos de lámina libre en los que se integra en la vertical, sin ninguna hipótesis sobre la ecuación para la presión, pero es común hacer un abuso de lenguaje y referirse a los modelos hidrostáticos como Shallow Water, como aquí se hará. Por tanto, solo queda una distribución de presión que es lineal con la profundidad,  $p = \rho g(h_s(x, t) - z)$ , es decir, la del caso hidrostático. Asumiendo también un perfil uniforme para la velocidad horizontal llegamos al sistema de SW sin fricción

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h\bar{u}^2 + g \frac{h^2}{2} \right) = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.5b)$$

Este sistema es suficiente para resolver las variables  $(h, hu)$ . El paso del sistema de Euler al sistema de *Shallow Water* se detalla en el Anexo A.1. A partir de ahora se denotará la velocidad media  $\bar{u}$  como  $u$  para relajar la notación.

### 2.1.1. Ecuación de la energía para la aproximación hidrostática

La ecuación de la energía del sistema se deduce de las ecuaciones para la masa y el momento. La ecuación de conservación resultante se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{hu^2}{2} + g \frac{h^2}{2} + ghz_b \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( \frac{hu^2}{2} + g \frac{h^2}{2} + ghz_b \right) \right) = 0 \quad (2.6)$$

En el Anexo A.2 se detalla un procedimiento para llegar a la ecuación 2.6 a partir del sistema 2.5. Definiendo la energía del sistema para el modelo *Shallow Water* como

$$E_{SW} = \frac{hu^2}{2} + gh \frac{(h + 2z_b)}{2} \quad (2.7)$$

se llega a una expresión para la conservación de la energía del sistema.

$$\frac{\partial E_{SW}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( E_{SW} + g \frac{h^2}{2} \right) \right) = 0 \quad (2.8)$$

## 2.2. Modelos no hidrostáticos

Aunque el modelo de *Shallow Water* está muy extendido en la Simulación de Flujos de Lámina Libre, al despreciar todo tipo de aceleración en el eje vertical, no es capaz de capturar fenómenos que se observan de tipo ondulatorio. Para formular el modelo no hidrostático todos los términos de aceleración en la vertical se agrupan en una nueva variable, la presión no hidrostática,  $p_{nh}$ .

$$\frac{p}{\rho} = g(h_s - z) + \frac{p_{nh}}{\rho} \quad (2.9)$$

Esta variable  $p_{nh}$  se puede entender como una corrección a la presión hidrostática. Retener este término adicional en la presión nos da un nuevo sistema de ecuaciones integrado en la vertical, tal que

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} + hp_{nh} \right) = (-gh + 2p_{nh}) \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial(hw)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (huw) = 2p_{nh} \quad (2.10c)$$

y asumiendo de ahora en adelante, salvo que se indique lo contrario, que todas las velocidades son valores promediados ya en la vertical. Además, con el objeto de simplificar la notación la variable  $p_{nh}$  representará ahora  $\bar{p}_{nh}/\rho$ .

Se trata de un sistema de tres ecuaciones para las 4 incógnitas asociadas al promedio vertical  $(h, u, w, p_{nh})$ . Por tanto, para obtener la solución es necesario introducir una nueva ecuación. Según sea esta ecuación distinguimos entre 2 modelos: el NHP-HE, también llamado hiperbólico elíptico [3]; y el NHP-HR, el hiperbólico relajado [10].

### 2.2.1. NHP-HE o hiperbólico elíptico

La ecuación adicional que introduce este modelo, que se conoce como *Depth Integrated Incompressibility Condition (DIIC)* [16, 9], es una reformulación de la ecuación de conservación de continuidad para flujo incompresible original  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Es relevante porque al integrar y tener una distribución hidrostática se pueden obtener soluciones que no cumplan esta condición de divergencia libre [5]. Con esta cuarta ecuación se pretende que la conservación de la masa se cumpla de forma estricta. Para derivar la DIIC, se parte de nuevo de la ecuación 2.1b y se integra en la vertical, de modo que las velocidades que aparecen en la ecuación 2.11 son puntuales y no promediadas en la vertical, salvo que se indique con la notación.

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} - u(x, h_s) \frac{\partial h}{\partial x} - u(x, h_s) \frac{\partial z_b}{\partial x} + u(x, z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + w(x, h_s) - w(x, z_b) \quad (2.11)$$

La diferencia con el procedimiento anterior está, por un lado, en los perfiles que se toman para las velocidades y por otro, en que solo se establece una condición de contorno, en el fondo,

y no en la superficie libre. Por ello, no se elimina la dependencia con la velocidad en la vertical, siendo necesario definirla tanto en  $x$  como en  $z$ , para que la velocidad vertical se siga considerando una velocidad uniforme tal que

$$u(x, z) \equiv \bar{u}(x), \quad (2.12)$$

mientras que para la velocidad en el eje  $z$  se supone un perfil lineal

$$w(x, z) = w(x, z_b) + \frac{w(x, h_s) - w(x, z_b)}{h}(z - z_b). \quad (2.13)$$

Sustituyendo ambas expresiones y aplicando la condición de contorno  $w(x, z_b) = u \frac{\partial z_b}{\partial x} = \bar{u} \frac{\partial z_b}{\partial x}$ , es decir, que  $\frac{\partial z_b}{\partial t} = 0$ , se tiene la expresión

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{2\bar{w} - 2\left(\bar{u} \frac{\partial z_b}{\partial x}\right)}{h} = 0 \quad (2.14)$$

Reorganizando y multiplicando la ecuación por  $h^2$  llegamos la ecuación adicional del modelo, en la que las velocidades son los valores promediados.

$$h \frac{\partial(hu)}{\partial x} + 2hw - hu \frac{\partial}{\partial x}(h + 2z_b) = 0 \quad (2.15)$$

El nombre NHP hiperbólico-elíptico proviene de esta cuarta ecuación adicional, que es una ecuación elíptica sin derivada temporal y no una ecuación de transporte.

### 2.2.2. Ecuación de la energía para el modelo NHP-HE

Para deducir la ecuación de la energía en este modelo, al igual que en el caso hidrostático, partimos de las ecuaciones de conservación de la masa y el momento para el modelo NHP. De nuevo, los detalles de cómo deducir esta ecuación se detallan en el Anexo A.2. Tras realizar los cálculos y reorganizar términos se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( h \frac{(u^2 + w^2)}{2} + g \frac{h^2}{2} + ghz_b \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( h \frac{(u^2 + w^2)}{2} + g \frac{h^2}{2} + ghz_b + hp_{nh} \right) \right) \\ = hp_{nh} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w - u \frac{\partial z_b}{\partial x}}{h/2} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Definimos de nuevo para este modelo la energía, de acuerdo a [3].

$$E_{NHP-HE} = \frac{h}{2}(u^2 + w^2) + gh \frac{(h + 2z_b)}{2} \quad (2.17)$$

Y así, la ecuación de conservación de la energía para el modelo NHP-HE queda

$$\frac{\partial E_{NHP-HE}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( E_{NHP-HE} + g \frac{h^2}{2} + hp_{nh} \right) \right) = hp_{nh} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w - u \frac{\partial z_b}{\partial x}}{h/2} \right) \quad (2.18)$$

Para el modelo NHP-HE se cumple que el término de la derecha de la ecuación es nulo, de acuerdo a la ecuación 2.14, ya que no es más que una reformulación de la DIIC. Por tanto, la ecuación de conservación de la energía para el modelo NHP-HE es compatible con:

$$\frac{\partial E_{NHP-HE}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( E_{NHP-HE} + g \frac{h^2}{2} + hp_{nh} \right) \right) = 0 \quad (2.19)$$

### 2.2.3. NHP-HR o hiperbólico relajado

El modelo NHP hiperbólico-relajado [10] se basa en aportar una nueva ecuación hiperbólica que regula la evolución de la presión no hidrostática. Esta ecuación adicional relaja la incompresibilidad del sistema.

$$\frac{\partial(hp_{nh})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{(hu)(hp_{nh})}{h} \right) + c_p^2 \left( \frac{\partial(hu)}{\partial x} + 2hw - hu \frac{\partial}{\partial x} (h + 2z_b) \right) = 0 \quad (2.20)$$

Aparece un parámetro nuevo,  $c_p^2$  relacionado con la compresibilidad y que tenemos que ajustar. Este parámetro representa la velocidad de la propagación de las ondas en la superficie del fluido [5] y se define como

$$c_p = \alpha \sqrt{gH_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{g} \frac{\partial p_{nh}}{\partial h}} \sqrt{gH_0} \quad (2.21)$$

siendo  $h \approx H_0$  el nivel o calado de referencia en el problema y  $\alpha$  el valor que cuantifica las variaciones de presión no hidrostática con la altura. En principio no va a existir un valor preferente para esta  $\alpha$ , pero sí que se tiene que cumplir que sea mayor que 1. Esto es porque la derivada que hay en la ecuación siempre es positiva, al aumentar la presión con la columna de agua. Valores típicos en la literatura suelen ser  $\alpha \in (1, 10)$  [10]. La ecuación 2.20 contiene la DIIC, pero multiplicada por  $c_p^2$ . Esto es así porque esta ecuación adicional se puede interpretar como una ecuación que propaga los errores numéricos a velocidad finita  $c_p^2$ , [10] y a diferencia de la DIIC que los propaga instantáneamente. De hecho, si se toma  $c_p \rightarrow \infty$  se recupera la relación para el modelo NHP-HE.

### 2.2.4. Ecuación de la energía para el modelo NHP-HR

En este caso la deducción es casi inmediata, notando que para derivar la ecuación 2.16 solo se ha usado el sistema 2.10 y por tanto es común para los dos modelos no hidrostáticos. Recordando que el término de la derecha de la ecuación 2.16 no es más que la DIIC dividida por  $h^2$  y que también la ecuación 2.20 la contiene se puede reescribir esta última ecuación de la forma

$$\begin{aligned} hp_{nh} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w - u \frac{\partial z_b}{\partial x}}{h/2} \right) &= -\frac{1}{c_p^2} p_{nh} \left( \frac{\partial(hp_{nh})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{(hu)(hp_{nh})}{h} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{c_p^2} p_{nh} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{hp_{nh}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{hp_{nh}^2}{2} \right) + \underbrace{\frac{p_{nh}^2}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} \right)}_{=0} \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 2.16 se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( h \frac{u^2 + w^2}{2} + g \frac{h^2}{2} + ghz_b + \frac{hp_{nh}}{2c_p^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( \frac{h(u^2 + w^2)}{2} + g \frac{h^2}{2} + ghz_b + hp_{nh} + \frac{hp_{nh}^2}{2c_p^2} \right) \right) = 0$$

Y definiendo la energía de acuerdo a [10]

$$E_{NHP-HR} = \frac{h}{2} \left( u^2 + w^2 + g(h + 2z_b) + \frac{p_{nh}^2}{c_p^2} \right) \quad (2.22)$$

Se obtiene la ecuación de conservación de la energía para el modelo NHP-HR

$$\frac{\partial E_{NHP-HR}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( E_{NHP-HR} + g \frac{h^2}{2} + hp_{nh} \right) \right) = 0 \quad (2.23)$$

Que tiene la misma forma que para el modelo NHP-HE pero se recuerda que la definición de la energía no es la misma.

### 3. Resolución numérica y validación con datos de laboratorio

Las ecuaciones gobernantes en todos los casos son ecuaciones no lineales en derivadas parciales que requieren resolución numérica. Para ello, se usa el método de los volúmenes finitos [15] que se basa en discretizar el dominio en una serie de celdas (volúmenes) y definir en los centros o las paredes de las mismas las variables discretas del problema, que serán el valor promedio de la correspondiente variable continua en esa celda, así como los flujos numéricos que las actualizan.

La resolución completa de las ecuaciones discretizadas se especifica en el Anexo A.3, pero se incluye aquí un breve resumen de cómo se lleva a cabo. Se utiliza un esquema explícito, con una discretización espacial de los flujos y el término fuente de tipo *upwind* [5]. En el caso del modelo NHP-HE se subdivide el paso de tiempo en dos etapas. En la etapa intermedia se resuelve el caso hidrostático (modelo SW) mediante un Solver de Roe que proporciona variables intermedias [5] que cumplen una hipótesis hidrostática:

$$h_i^* = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \sum_m (\tilde{\lambda} + \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}}_1)_i^{m-1/2} + \sum_m (\tilde{\lambda} - \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}}_1)_i^{m+1/2} \right] \quad (3.1a)$$

$$(hu)_i^* = (hu)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \sum_m (\tilde{\lambda} + \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}}_2)_i^{m-1/2} + \sum_m (\tilde{\lambda} - \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}}_2)_i^{m+1/2} \right] \quad (3.1b)$$

$$\text{donde } \tilde{\gamma}_i^{m+1/2} = \left( \tilde{\alpha}^m - \frac{\tilde{\beta}^m}{\tilde{\lambda}^m} \right)_i^{m+1/2}.$$

También se actualiza en esta etapa la velocidad vertical.

$$w_{i+1/2}^* = w_{i+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (u\delta w)_i^+ + (u\delta w)_{i+1}^- \right]. \quad (3.1c)$$

El valor del paso temporal para el Solver de Roe está limitado por la condición para el

CFL, número adimensional cuyas siglas provienen de Courant–Friedrichs–Lewy. El CFL, que debe ser menor o igual que 1 para garantizar un esquema numérico estable [15], restringe el paso de tiempo según

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{\max[\tilde{u} - \tilde{c}, \tilde{u}, \tilde{u} + \tilde{c}]} \quad (3.2)$$

donde  $\tilde{u}$  y  $\tilde{c}$  se obtienen mediante los promedios de Roe.

Las variables conservadas finales se obtienen con la corrección de la presión hidrostática. Las modificaciones en el campo de velocidades se consiguen forzando a que se cumpla la DIIC, para lo que es necesario un algoritmo iterativo, como es el método de Thomas o método de las matrices tridiagonales [12]. Por tanto, las variables al finalizar el paso de tiempo quedan corregidas:

$$h_i^{n+1} = h_i^* \quad (3.3a)$$

$$(hu)_i^{n+1} = (hu)_i^* + Q(\Delta p_{nh}) \quad (3.3b)$$

$$(w)_{i+1/2}^{n+1} = (w)_{i+1/2}^* + W(\Delta p_{nh}) \quad (3.3c)$$

Es importante notar que la variable  $w$  está desplazada con respecto a las demás. Esto es porque se definen las variables  $w$  y  $p_{nh}$  en las paredes y no en el centro de las celdas, para evitar errores en la corrección de la presión, de acuerdo a [5].

El sistema NHP-HR, en cambio, se resuelve en un único paso, también mediante un solver de Roe generalizado [5], pues se puede expresar como un sistema hiperbólico para las 4 variables. El paso temporal estará por tanto de nuevo limitado por la condición para el CFL menor o igual que 1.

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \sum_{m=1}^4 (\tilde{\lambda}^+ \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}})^m_{i-1/2} + \sum_{m=1}^4 (\tilde{\lambda}^- \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}})^m_{i+1/2} \right] + \Delta t \mathbf{S}_{nh}(\mathbf{U})_i^{n+1} \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{U} = (h, hu, hw, p_{nh})$  es el vector de variables conservadas y  $\mathbf{S}_{nh} = (0, 0, 2p_{nh}, -2c_p^2 w)$  es el vector de términos fuente no hidrostáticos.

### 3.1. Validación de los modelos con datos de laboratorio

La elaboración de un buen modelo numérico conlleva la comparación de los resultados que nos devuelve con datos experimentales. Solo de esta manera podemos saber si los fundamentos físicos aplicados son de relevancia en los casos ensayados y si, de esta manera, el modelo consigue reproducir lo que ocurre en la realidad. Por ello, una vez conocidos los algoritmos numéricos empleados en la resolución de las ecuaciones se van a simular dos casos, comparando los resultados numéricos con datos experimentales tomados en el laboratorio.

### 3.2. Caso de propagación sobre un fondo variable

El primer caso que se va a estudiar es el llevado a cabo por *Beji et. al* [1], por lo que informalmente nos referiremos a él como caso de Beji. El propósito del mismo es caracterizar cómo afecta la presencia de obstáculos en el fondo a la propagación de ondas superficiales y la consiguiente variación de la amplitud y la frecuencia de los distintos armónicos. En este fenómeno, además de los efectos no lineales, son relevantes los fenómenos de dispersión, por lo que se espera que los modelos no hidrostáticos, al tener en cuenta estos últimos, a diferencia del modelo hidrostático SW, ajusten mejor los datos experimentales [2, 5].

El montaje experimental consta de un obstáculo sumergido seguido de una playa que absorbe las distintas olas y asegura que nunca lleguen al contorno. Un esquema del mismo es el que se presenta en la Figura 2.

Se simula para los tres modelos considerados en este trabajo, con una discretización de  $\Delta x = 0,01m$  y un CFL de 0,95.

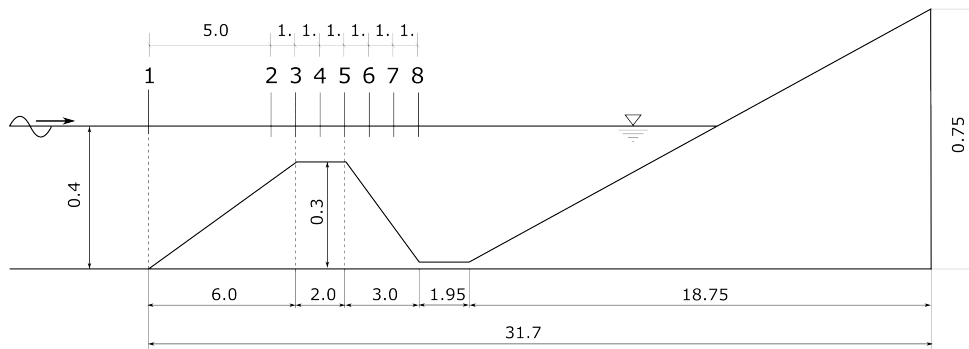


Figura 2: Montaje experimental para el caso de Beji

En las Figuras 3 y 4 se presenta la variación temporal de la perturbación superficial ( $\eta$ ) con respecto a la superficie de referencia (en reposo),  $H_0 = 0,4m$ , junto con los datos registrados en los experimentos. Se observa que el ajuste que proporciona el modelo NHP-HE es el más cercano a la realidad. En la mayoría de las sondas son indistinguibles los valores experimentales con el ajuste dado por el modelo NHP-HE, excepto en las 2 últimas sondas donde la discrepancia es un poco superior. Por otro lado, el modelo NHP-HR tiende a sobreestimar la amplitud de las mismas, además de generarnos más ondas de las que realmente tienen lugar. Para las sondas 7 y 8 se acerca más a la mediciones.

La representación temporal en las distintas sondas también nos permite ver qué ocurre con las ondas cuando se propagan por el canal. En las primeras sondas, al disminuir la profundidad del agua, a causa de la pendiente positiva del escalón, la onda cambia su forma y aumenta su amplitud. En la zona plana de menor calado se produce una transmisión de la energía a armónicos superiores. Y, en las últimas sondas, entrando en la zona de pendiente negativa, las ondas se descomponen a medida que aumenta el nivel, creando ondas de menor amplitud. Este último fenómeno parece estar mejor capturado por modelo HR.

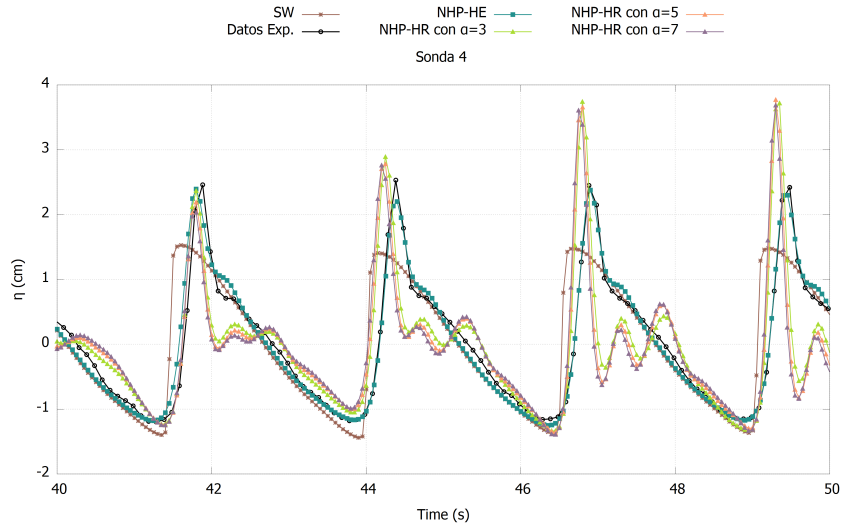


Figura 3: Variación respecto al nivel en reposo registrada en la Sonda 4 con las simulaciones de los modelos NHP-HE y SW para el caso de Beji.

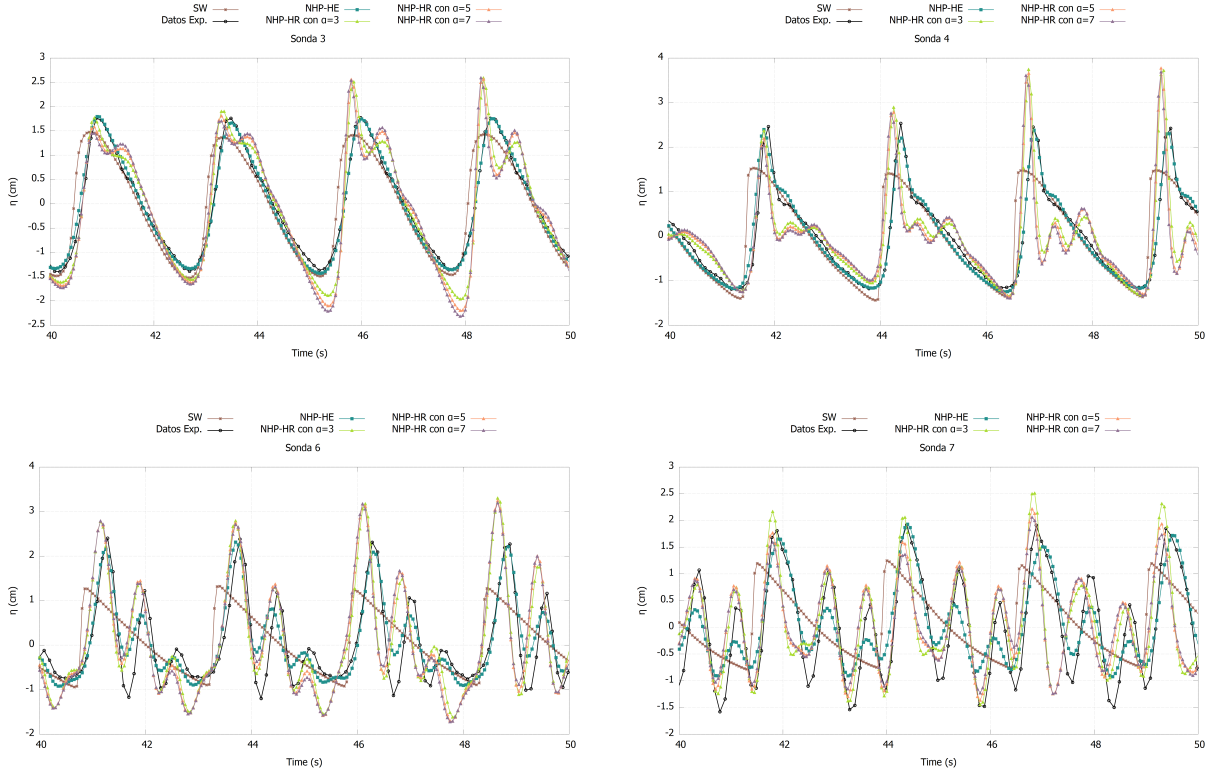


Figura 4: Perturbación respecto al nivel en reposo registrado en las sondas 3,4, 6 y 7 con las simulaciones de los modelos NHP-HE y SW para el caso de Beji.

Respecto al modelo SW, captura bien el primer armónico del problema. Sin embargo, en cuanto hay procesos de transmisión de energía entre armónicos, el modelo falla porque no tiene en cuenta estos fenómenos en su formulación. Se incluye en el Anexo A.4 un análisis de cómo afecta la discretización de la malla para el ajuste de los datos experimentales.



### 3.3. Caso de ondas generadas por un pistón

El caso reproducido por *Cea et al.*[4], al cual nos referiremos como caso de Cea en este texto, trata de caracterizar el comportamiento de las ondas superficiales que se generan por desplazamientos de un pistón. El montaje experimental se presenta en la Figura 5.

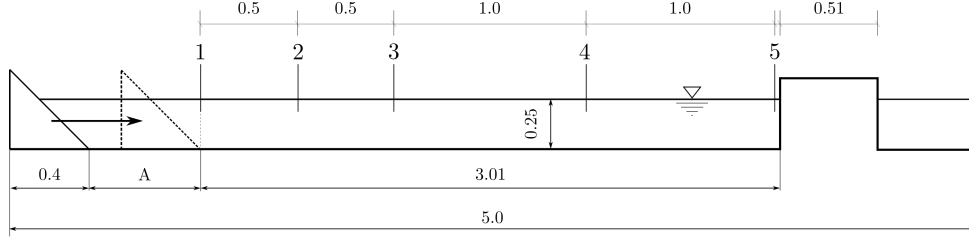


Figura 5: Montaje experimental para el caso de Cea

Las ondas se generan mediante un pistón con forma de cuña, cuyo movimiento causa una perturbación que se propaga hasta impactar en un obtáculo al final del canal. Se simula para distintos valores de nivel inicial  $H_0$  así como distintos desplazamientos máximos y velocidades del pistón para el modelo NHP-HE y para el modelo SW, comparando cómo reproducen ambos las ondas reales que se generan.

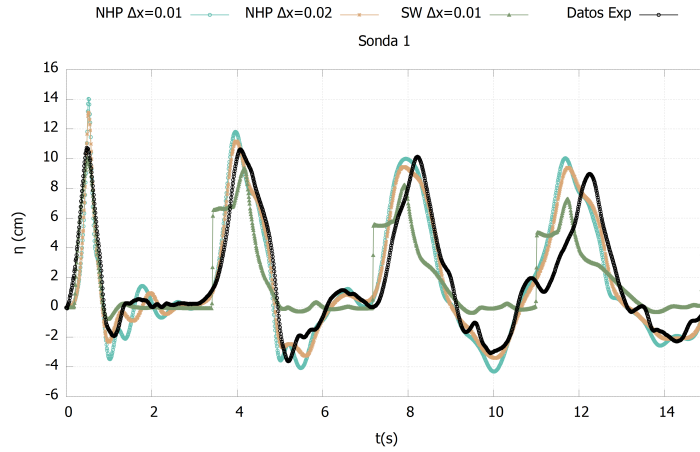
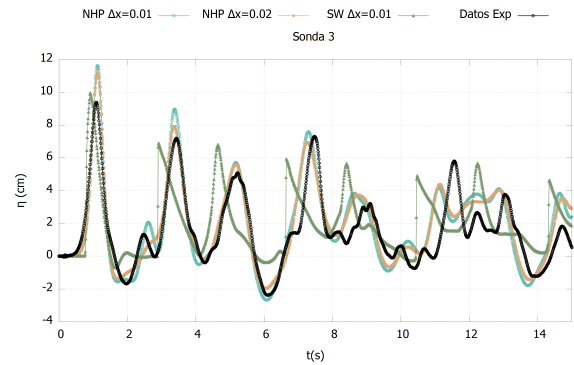
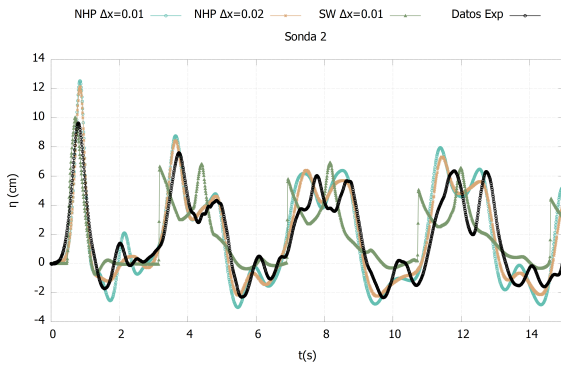


Figura 6: Variación respecto al nivel en reposo registrada en la Sonda 1 con las simulaciones de los modelos NHP-HE y SW con un nivel inicial  $H_0 = 0,25m$  y con el pistón rápido y para el caso de Cea.



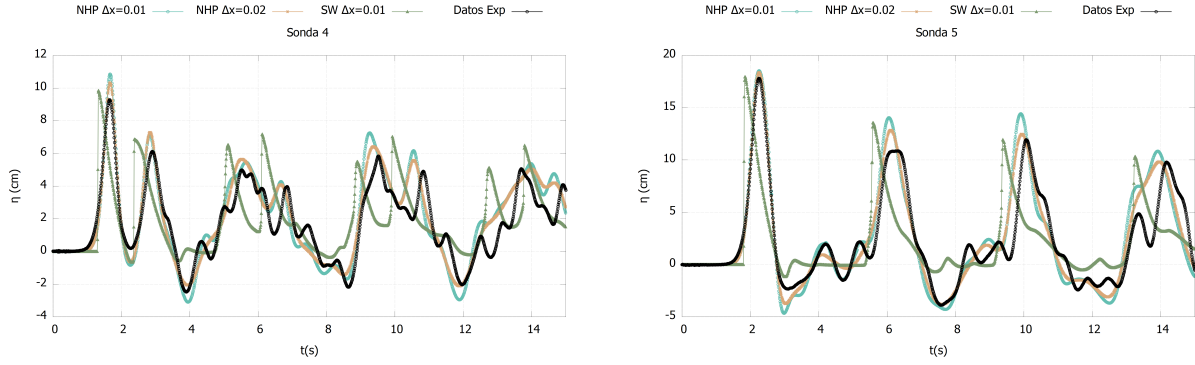


Figura 7: Perturbación respecto al nivel en reposo registrado en las sondas 2,3,4 y 5 con las simulaciones de los modelos NHP-HE y SW con un nivel inicial  $H_0 = 0,25\text{m}$  y con el pistón rápido para el caso de Cea.

Para el modelo NHP-HE, se han utilizado dos discretizaciones para estudiar la influencia de la malla en los resultados, pero vemos que realmente es prácticamente indiferente coger una malla u otra, ya que hay ondas que se ajustan mejor con una y viceversa.

Lo que sí cabe resaltar es que, aunque ningún modelo se ajusta exactamente a los datos experimentales, el modelo NHP-HE sí que consigue reproducir con bastante precisión las ondas con mayor amplitud y solo pierde precisión al reproducir las ondas secundarias que se generan conforme la onda se propaga. Se comprueba, por tanto, la potencia del modelo NHP-HE para la simulación de flujos más complejos y su idoneidad si se quiere predecir la evolución de un tsunami o deslizamiento del terreno.

En cambio, el modelo SW, de nuevo, reproduce correctamente la posición de las ondas pero no ajusta bien la forma de las mismas. Se adjunta en el Anexo A.5 el ajuste para otros dos casos simulados.

#### 4. Casos de estudio para evaluación del error en la energía

En la sección anterior se ha comprobado la necesidad de incorporar una distribución de presión no hidrostática si se quiere reproducir correctamente situaciones en las que los fenómenos de dispersión sean relevantes. El propósito de esta sección es estudiar más en profundidad los tres modelos propuestos y sus limitaciones.

A la hora de discretizar las ecuaciones siempre se comete cierto error numérico. El objetivo es que las ecuaciones resueltas que establecen la conservación de la masa y el momento se verifiquen al pasar al discreto, de modo que se obtengan resultados físicamente coherentes. Es habitual diseñar modelos que satisfagan al menos la conservación discreta de la masa [5]. Tanto es así que, por ejemplo, para el modelo NHP-HE la ecuación extra es otra reformulación de la ecuación de la divergencia original [3]. En el modelo NHP-HR también aparece en un término la DIIC. A la vista de los resultados está que es una buena aproximación al problema forzar la conservación de la masa. Sin embargo, hasta ahora no ha habido mucha preocupación sobre si los esquemas numéricos propuestos conservan o no la energía dado que su ecuación de transporte

no se está resolviendo de forma específica [3].

Respecto a la forma funcional de la energía, esta contiene tanto los términos debidos a la energía cinética del fluido, como aquellos de energía de presión y gravitatoria. Para el modelo NHP-HE la energía de presión que se considera es la hidrostática (Ecuación 2.18). Aunque pueda parecer erróneo no incluir la variable  $p_{nh}$  en la expresión de la energía, se recuerda que esta se ha introducido en el modelo como una corrección a la presión del sistema mediante una ecuación elíptica, no hay propagación de esta magnitud. Por tanto, es natural que aparezca en los términos de los flujos que modifican las variables de la celda considerada. En cambio, para el modelo NHP-HR (Ecuación 2.23) sí que se propaga la variable  $p_{nh}$  y por ello va aparecer en la expresión de la energía.

La expresión general para la conservación de esta misma en cualquiera de los tres casos se puede escribir como

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uF(E)) = S \quad (4.1)$$

El segundo término a la izquierda es el término de los flujos y el término a la derecha es el término fuente, que para los casos presentados es nulo pero se añade aquí para generalizar el desarrollo. Al integrar sobre el dominio completo se obtiene pues que la variación total de la energía en *un paso de tiempo*,  $\Delta t$ , viene dada por los flujos en los extremos del dominio, dados por el segundo término a izquierda del igual y por la presencia de un término fuente, a la derecha.

A continuación se va a presentar diferentes casos de prueba en los que se comprobará hasta qué punto los tres modelos conservan o no la energía. Aquí es importante hacer hincapié en que, para todos los modelos, la ecuación de la energía no es una ecuación que se imponga a las variables del sistema, ni se incorpora al modelo como una ecuación que haya que resolver. Tan sólo es una ecuación que se evalúa, y el hecho de que se cumpla deberá derivarse de la correspondencia entre las ecuaciones en el continuo y las ecuaciones discretizadas. Es una forma de comprobar si los errores inevitables que se cometen en las aproximaciones y en la discretización son despreciables y el modelo es adecuado o se tendría que buscar nuevos acercamientos a dichos problemas. Para obtener el error en la energía entre un paso temporal y el siguiente, se discretiza la ecuación de la energía con un esquema explícito centrado en las celdas. La energía en el instante  $t + \Delta t$  a partir de la energía en el instante  $t$  se obtiene, como se ha dicho, integrando la ecuación 4.1 en el dominio y en un paso temporal

$$\int_{\Delta t} \int_0^L \frac{\partial E}{\partial t} dx dt = - \int_{\Delta t} \int_0^L \frac{(uF(E))}{\partial x} dx dt + \int_{\Delta t} \int_0^L S dx dt \quad (4.2)$$

y aproximando al discreto queda

$$\sum_{i=0}^{NCELLS} E_i^{n+1} \Delta x = \sum_{i=0}^{NCELLS} E_i^n \Delta x + \Delta t (uF(E))_0^n - \Delta t (uF(E))_{NCELLS}^n + \Delta t \Delta x \sum_{i=0}^{NCELLS} S_i^n \quad (4.3)$$

Y el error en la energía se calcula para un paso de tiempo  $\Delta t$

$$\epsilon = \frac{\sum E_i^{n+1} \Delta x - \sum E_i^n \Delta x - \Delta t (uF(E))_0^n + \Delta t (uF(E))_{NCELLS}^n - \Delta t \Delta x \sum S_i^n}{\sum E_i^n \Delta x} \cdot 100 \quad (4.4)$$

Todos los errores se presentan en valor absoluto. La formulación es equivalente para los otros casos.

#### 4.1. Problema de Riemann sobre fondo plano

El primer caso de estudio será una rotura de presa ideal, también conocida como problema de Riemann. Consiste en una discontinuidad inicial que separa dos regiones de calado constante y velocidad nula sobre un fondo plano. Esta discontinuidad inicial se modeliza como una función escalón. De la propagación de esta discontinuidad se producen dos ondas, una onda de choque que viaja aguas abajo y una onda de rarefacción que lleva la dirección contraria, propagando la información de la presencia de la discontinuidad hacia aguas arriba. Se simula una rotura de presa con una discontinuidad inicial de  $0,2m$ . Se representan a continuación la distribución espacial de la superficie del fluido para algunos instantes de tiempo calculados con el modelo SW, y los dos modelos no hidrostáticos, en el caso de NHP-HR con  $\alpha = 3$ . Se ha supuesto una longitud de canal  $L = 1019m$ , una discretización espacial  $\Delta x = 0,025m$  y un paso de tiempo correspondiente a CFL 0,95. Se ha representado igualmente la presión no hidrostática calculada

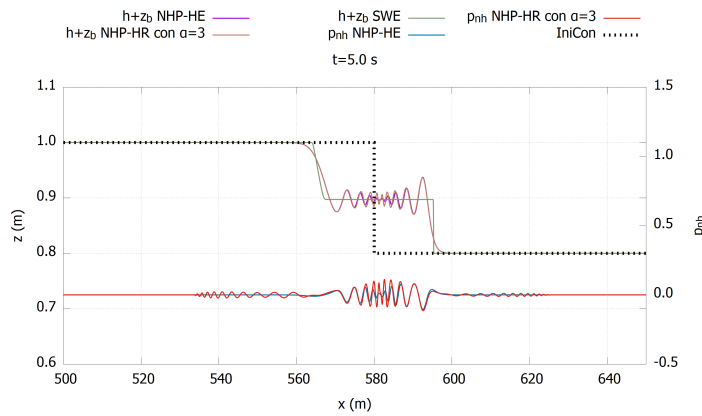


Figura 8: Distribución espacial de calado y presión del problema de Riemann sobre fondo plano, con la condición inicial

con los modelos NHP. Aunque ambos presentan una evolución del nivel muy similar, el NHP-HR genera más oscilaciones en la presión y es más dispersivo que el NHP-HE. Respecto a SW, observamos que propaga ambas ondas correctamente, pero no genera otras ondas secundarias.

Para estudiar cómo varía la energía para los modelos anteriores, escogiendo también distintos valores de  $\alpha$  para el NHP-HR, se representa la evolución temporal de este escalar, que puede verse en la Figura 9.

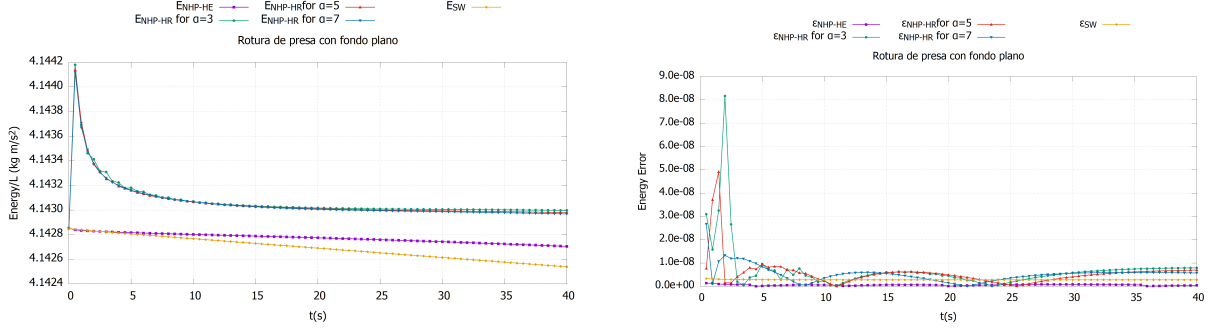


Figura 9: Evolución temporal de la energía y del error para el problema de Riemann plano con los distintos modelos

Para todos los modelos coincide la energía en  $t = 0$ , aunque su definición no sea la misma, dado que se establece  $w = 0$  y  $p_{nh} = 0$  para las condiciones iniciales y la discrepancia en la definición viene por la contribución de las velocidades. En el siguiente instante de tiempo la energía  $E_{NHP-HR}$  presenta un salto brusco, cuando ambos términos  $w^2$  y  $p_{nh}^2/c_p^2$  ya no son nulos. El cambio es mucho más pronunciado que para la  $E_{NHP-HE}$  por dos motivos. El primero es que este término  $p_{nh}^2/c_p^2$  es exclusivo del modelo NHP-HR pero, por otro lado, se observa que al cambiar el valor de  $\alpha$  la variación de la energía es similar. El segundo motivo lo justifica, ya que al ser el modelo NHP-HR más dispersivo, el valor de  $w^2$  es superior que para el modelo NHP-HE. Conforme avanza el tiempo, las energías se van estabilizando siendo superior para el modelo NHP-HR. Se observa también que el modelo que aparentemente mejor conserva la energía es el NHP-HE.

Se representa igualmente la evaluación del error, que se ha calculado según se ha comentado en la sección 3. En la Figura 9 el error refleja lo que veíamos en la gráfica de la energía. El modelo NHP-HR presenta mayor variación en los instantes iniciales, estabilizándose a los pocos segundos. Los pequeños saltos que se observan para los modelos NHP para tiempos posteriores pueden deberse a difusión numérica, dado el orden de error con el que se está tratando. En todo caso, el error siempre es inferior a  $10^{-7}$ .

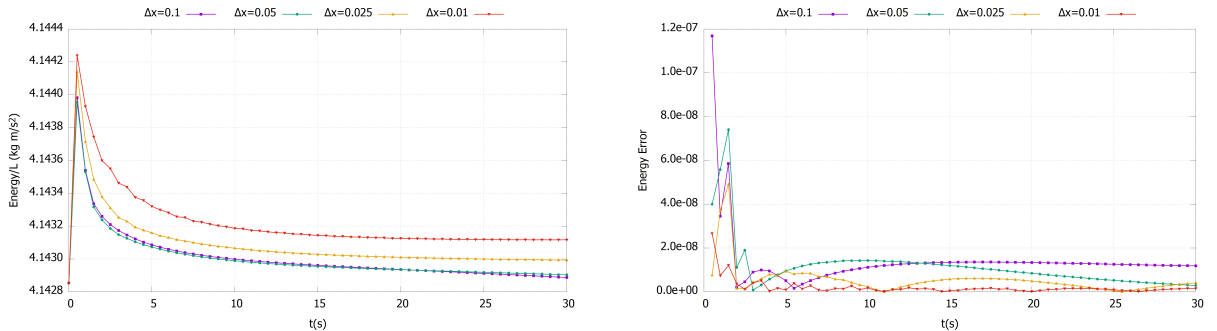


Figura 10: Análisis de convergencia para el modelo NHP-HR con  $\alpha = 5$  para el problema de Riemann plano.

Se quiere además ver que el esquema es consistente, es decir, que el error disminuye conforme se refina la malla. Se presenta en la Figura 15 la energía por unidad de longitud y el error para

el mismo caso de antes, con  $\alpha = 5$ , pero con diferentes discretizaciones.

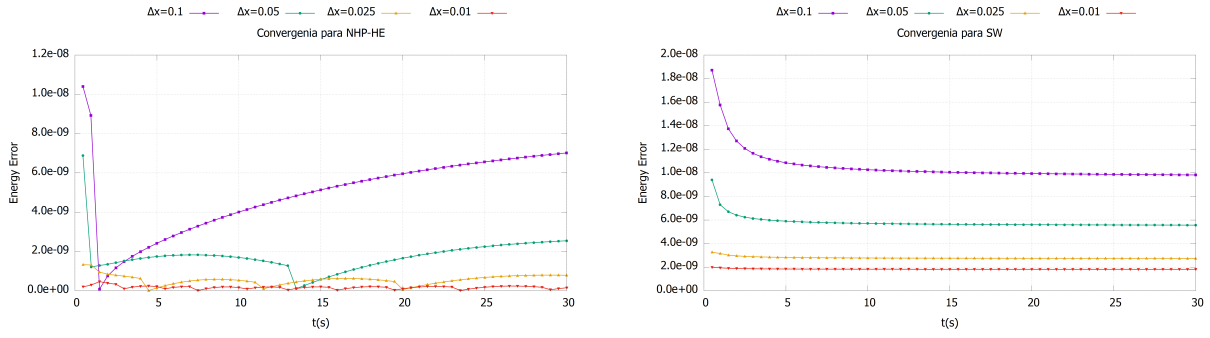


Figura 11: Análisis de la convergencia del error de NHP-HE y SW para el problema de Riemann plano.

Aunque la convergencia en cada modelo es distinta, en todos los casos se obtiene un esquema numérico convergente. El caso SW es el más sensible a la discretización, pues la reducción del error global con una malla computacional más fina es mayor. Por otro lado, el modelo NHP-HR es el menos variable, parece que para las discretizaciones escogidas ya se ha alcanzado la convergencia y en términos de error es casi indistinto escoger una u otra, tan solo durante los instantes iniciales. Si atendemos a la energía es cierto que la diferencia entre una y otra discretización es un poco superior pero de nuevo la diferencia es pequeña, así que seguir refinando más no reportará mejores beneficios, pero sí aumentará el tiempo de simulación significativamente.

#### 4.2. Problema de Riemann sobre fondo variable

Se quiere ahora comprobar la influencia del fondo sobre la conservación discreta de la energía. Es sabida la importancia de la discretización de los términos fuente de fondo en modelos de este tipo, como se indica en [14]. Con este propósito, se va a simular el mismo caso de antes pero con obstáculo sumergido parecido al de Beji, que se muestra en la Figura 12.

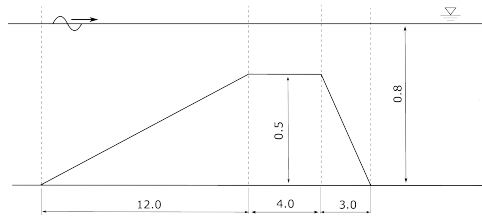


Figura 12: Esquema del obstáculo para la propagación de la onda en un fondo variable

En la evolución temporal se observa cómo la presencia del obstáculo modifica la forma de las ondas, aumentando la amplitud de la misma al disminuir el nivel y posteriormente, generando más ondas al repartirse la energía entre los distintos armónicos como ya se vio en el caso de Beji.

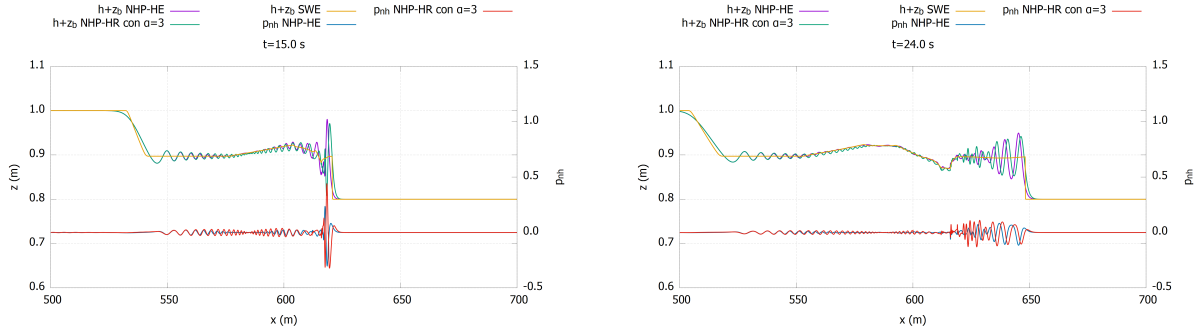


Figura 13: Evolución temporal del calado y la presión en el problema de Riemann sobre fondo variable

Para el análisis energético se presenta el caso representado en la Figura 22, pero con los tres valores del parámetro  $\alpha$  utilizados para el fondo plano.

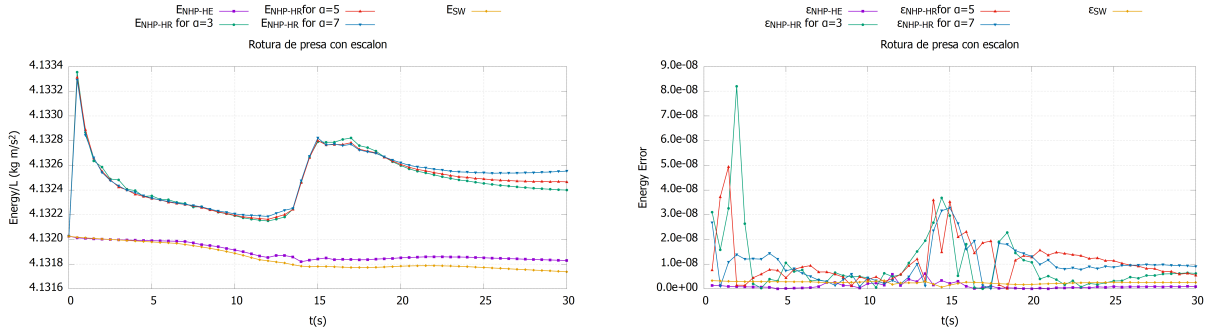


Figura 14: Evolución temporal de la energía y error para el problema de Riemann con fondo variable con los distintos modelos

Se observa que la presencia del fondo sí que afecta a la conservación de la energía, principalmente para el modelo NHP-HR, distinguiéndose el momento en el que la información sobre el fondo alcanza la onda que se propaga. A diferencia de la Figura 9 donde la energía se ha estabilizado prácticamente, al alcanzarse el obstáculo sumergido se produce una ligera disminución en la energía para luego aumentar a valores cercanos a los iniciales. Este aumento puede deberse a que el algoritmo y la discretización resuelven de forma más aproximada los puntos donde el fondo no es suave, sino que cambia de forma abrupta, generando como consecuencia ondas artificiales.

Respecto al error en la energía, refleja lo anterior: aumenta cuando la onda interacciona con el fondo debido a que se genera energía artificialmente. En los modelos de SW y el NHP-HE está mejor implementado el algoritmo que trata con el fondo, por lo que no es sorprendente que estos dos últimos modelos se comporten de manera similar, pues ambos se resuelven a partir del mismo esquema, en el que se ha tenido en cuenta el algoritmo seco-mojado de acuerdo a [14].

Respecto a la convergencia, se representa de nuevo la energía y el error para el modelo NHP-HR con  $\alpha = 5$

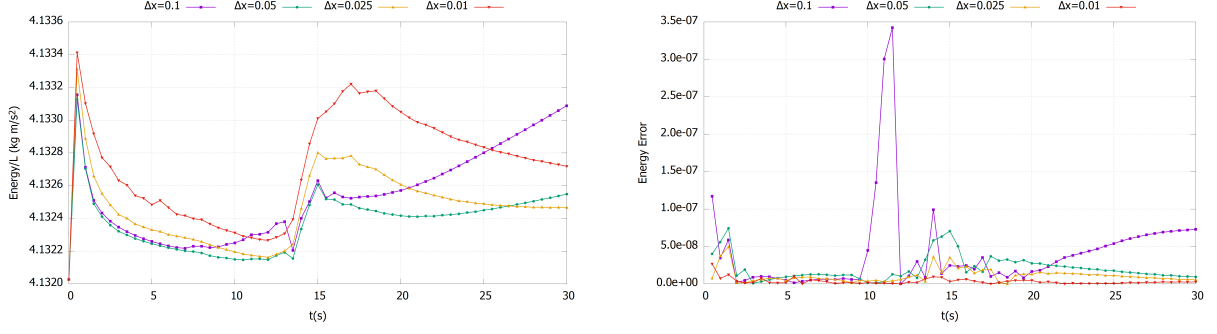


Figura 15: Análisis de convergencia para el modelo NHP-HR con  $\alpha = 5$  en fondo variable

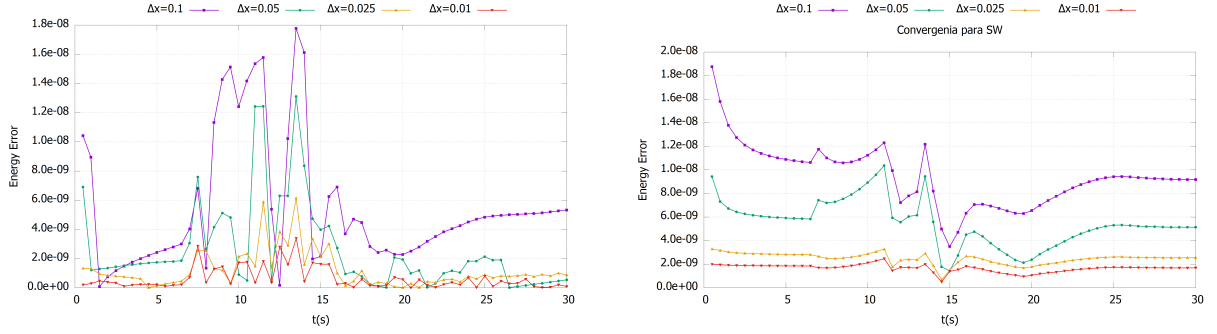


Figura 16: Análisis de convergencia para el modelo NHP-HR con  $\alpha = 5$

Las discretizaciones utilizadas son las mismas que para el caso del fondo plano pero, así como se dijo que todas resultaban válidas y no había mucha diferencia entre escoger una y otra, cuando se añade el obstáculo sí que parece que para  $\Delta x = 0,1m$  los errores serán bastante superiores que para los demás pasos espaciales. La gráfica del error de la energía en la Figura 15 presenta un pico anormal para esta malla. Si representamos el caso se observan puntos en los que el código no resuelve bien, que son responsables del crecimiento de la energía conforme avanza el tiempo.

Para los modelos NHP-HE y SW si comparamos la Figura 11 con la Figura 16 se comprueba que la tendencia subyacente en el error para los dos modelos es la misma, pero con el efecto añadido del fondo.

En general, se puede comentar la influencia del fondo y comprobar que el algoritmo que trata con él no conserva exactamente la energía, siendo el efecto más importante cuanto mayor es la discretización. También se puede deducir de esta comparación que si se toma un  $\Delta x$  suficientemente pequeño los efectos del obstáculo se minimizan.

### 4.3. Propagación de un solitón sobre fondo plano

El solitón es una onda que se propaga sin modificar su forma, debido a que los efectos dispersivos compensan los no lineales. Se trata de un problema clásico con una solución de referencia establecida en literatura [5].



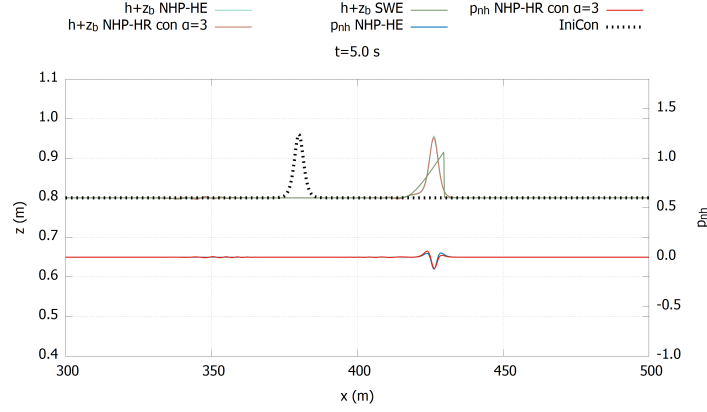


Figura 17: Evolución temporal de un solitón sobre un fondo plano con la condición inicial

La longitud del canal es  $L = 819$  m, la discretización de  $\Delta x = 0,025$  m y el CFL de nuevo 0,95. Al ser en el solitón importantes los efectos dispersivos para mantener la forma de la onda y al no considerarse estos en el modelo de SW, este modelo no propaga la onda correctamente, ya que sólo reproduce los efectos no lineales generando una acumulación de la masa en el frente de onda. Mientras, los modelos NHP, entre los cuales no se observa casi diferencia, sí conservan la forma del solitón, al compensar la no linealidad con su comportamiento dispersivo. Si la discretización no es suficiente, la onda puede ir perdiendo amplitud al propagarse, por eso es necesario un mínimo número de celdas para que este efecto no sea relevante. Se distingue también una onda de pequeña amplitud que se propaga aguas arriba, fenómeno que se ha reportado ya en otras ocasiones [5].

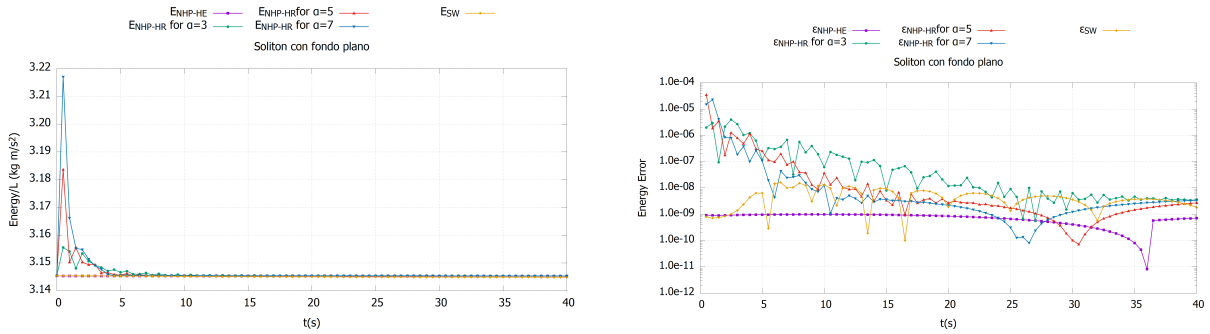


Figura 18: Evolución temporal de la energía y su error para un solitón con fondo plano con los distintos modelos

Con un análisis rápido, se podría decir que para este caso de test la energía se conserva peor, ya que los órdenes de magnitud del error son superiores. Sin embargo, si se estudia la gráfica del error, lo que se ve es que realmente el aumento de este error es sólo para el modelo NHP-HR. Además de tener un error superior en 3 órdenes de magnitud expone un comportamiento más errático y necesita de un mayor tiempo de estabilización. Los modelos SW y NHP-HE presentan un orden de error parecido a la rotura de presa, y aunque el error no evoluciona suavemente en el tiempo, al igual que antes este comportamiento a un orden de magnitud como el que se trata puede explicarse por la difusión numérica. Respecto a la energía, las oscilaciones iniciales son superiores para un mayor valor de  $\alpha$  al ser este modelo más dispersivo y generar más ondas.

Se analiza ahora cada modelo por separado, estudiando la convergencia de los mismos al refinar la malla computacional.

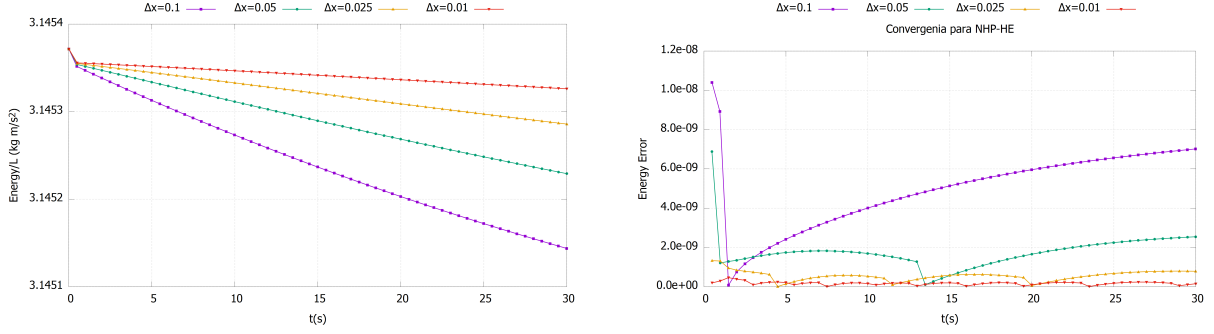


Figura 19: Análisis de la convergencia para el modelo NHP-HE con un solitón en fondo plano

En la Figura 19 se distingue cómo el modelo NHP-HE pierde energía, pero esta pérdida consigue disminuirse mucho con el refinamiento de la malla, llegando prácticamente a una conservación de la misma. Además, la pérdida de energía es lineal, salvo en el primer instante en el que al fijar nulas las condiciones iniciales para  $p_{nh}$  y  $w$  es necesario un pequeño reajuste. El error presenta ciertos saltos que ya se han visto en otros casos, pero más allá de ello son muy pequeños y para una malla de  $\Delta x = 0,01\text{m}$  está acotado por  $10^{-9}$ .

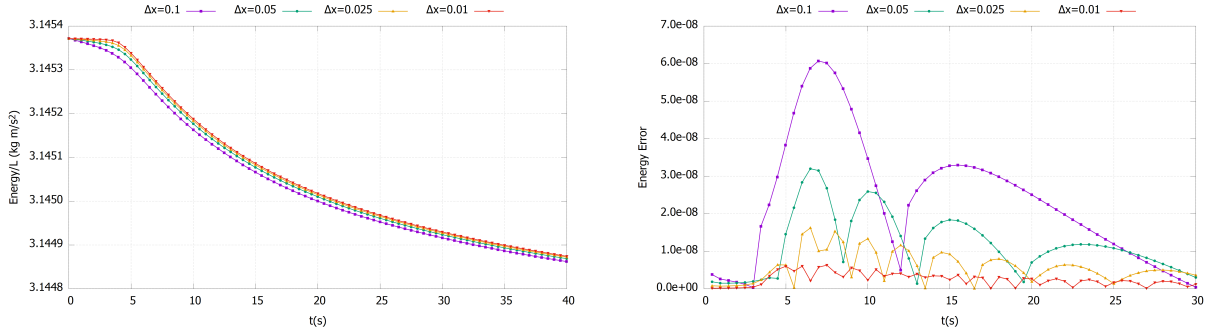


Figura 20: Análisis de la convergencia para el modelo NHP-HE con un solitón en fondo plano

En el caso de SW la conservación es peor y, además, el refinar la malla no consigue una mejora distinguible. No es sorprendente este resultado si se considera lo que ya se ha visto sobre el modelo de SW y la propagación del solitón.

Por último, las oscilaciones que se producen para el modelo NHP-HR no se consiguen eliminar al refinar la malla. De hecho, el efecto es el contrario, se producen más picos aunque en el computeo general la energía que se pierde en la propagación es menor y el error también es inferior.

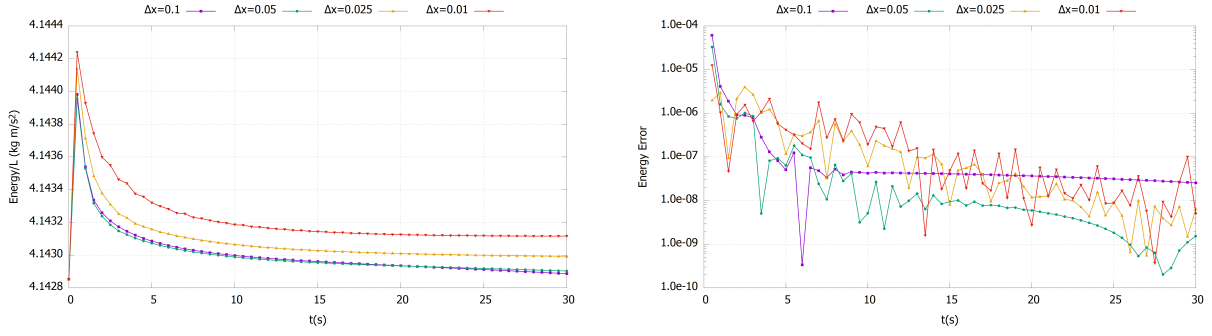


Figura 21: Análisis de la convergencia para el modelo NHP-HR con  $\alpha = 3$  con un solitón en fondo plano

#### 4.4. Propagación de un solitón sobre fondo variable

Se introduce de nuevo el obstáculo de la Figura 12 en el fondo.

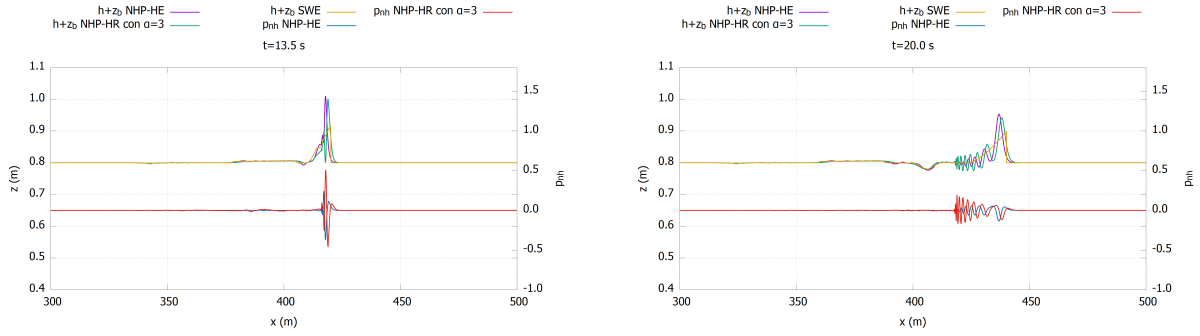


Figura 22: Evolución temporal del solitón sobre fondo variable

Cuando el solitón alcanza el obstáculo, que comienza en la posición  $L = 380\text{m}$ , la forma de este varía. Conforme aumenta  $z_b$ , la amplitud de la onda crece, siendo el modelo NHP-HR es el que antes aumenta la altura del solitón. Una vez ha pasado la zona de menor calado (mayor altura del obstáculo), se produce un fenómeno de dispersión, repartiéndose la energía entre los armónicos y la amplitud de la onda disminuye, además de generarse ondas secundarias que se propagan en las dos direcciones.

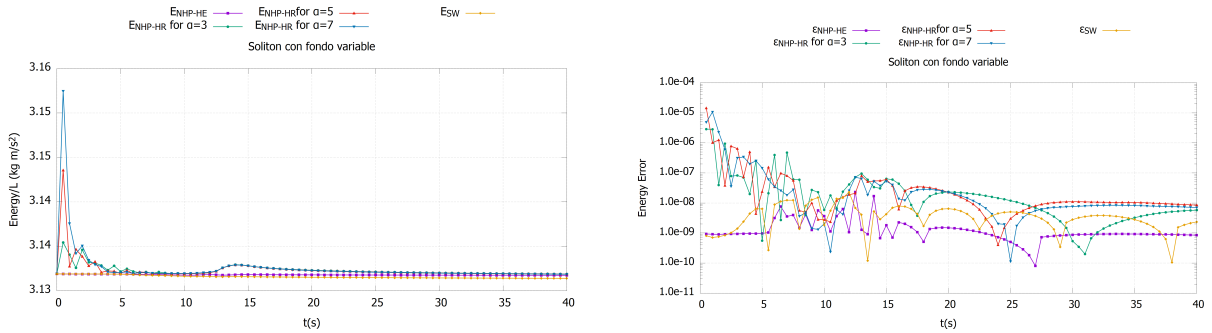


Figura 23: Evolución temporal de la energía y su error para un solitón con fondo variable

De nuevo, lo que ocurre es que las oscilaciones iniciales en la energía del modelo NHP-HR nos impiden distinguir cómo evoluciona para los otros modelos, ya que la variación de la energía de estos últimos es mucho más pequeña. Podemos observar en torno al segundo 10 una pequeña oscilación en la energía del modelo NHP-HR que se debe a la interacción del solitón con el fondo variable. Un detalle interesante en la gráfica del error de la energía es que para el modelo NHP-HE se distingue perfectamente el instante en el que se alcanza el obstáculo. De hecho si comparamos la curva con la Figura 18 se distingue una misma tendencia y magnitud, salvo el tiempo de interacción del solitón con el fondo variable, que ocurre entre los  $t = 5$  y los  $t = 20$  segundos.

Se comparan los resultados de cada modelo usando distintas discretizaciones.

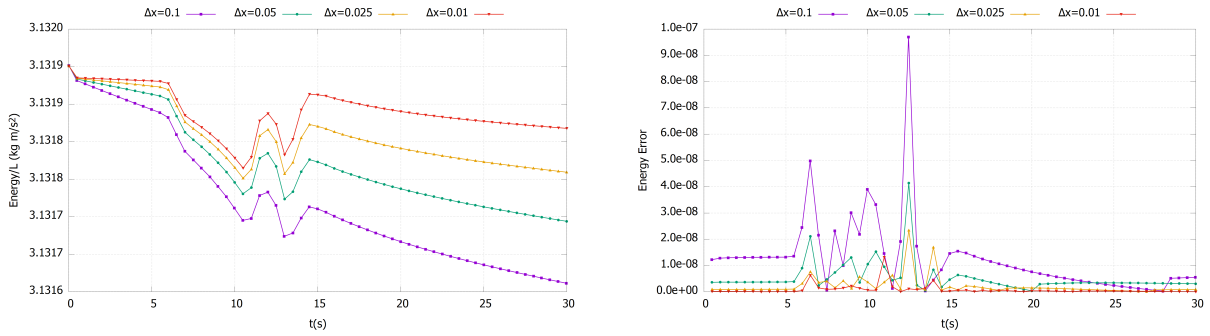


Figura 24: Análisis de la convergencia para el modelo NHP-HE con un solitón con fondo variable

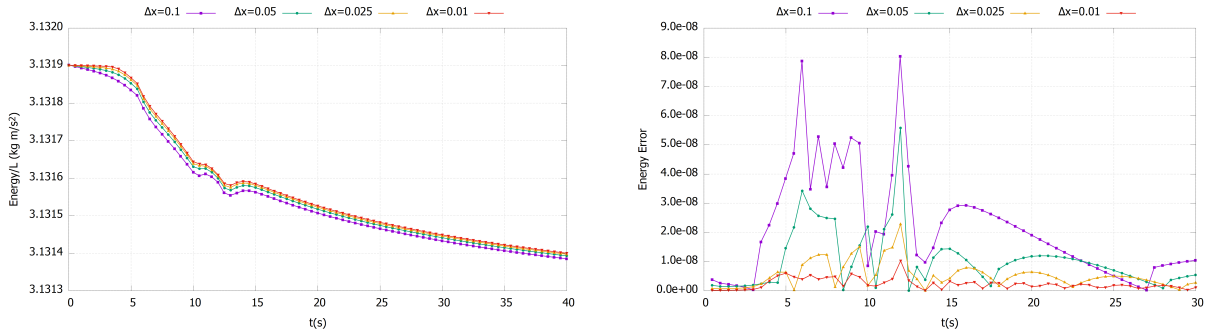


Figura 25: Análisis de la convergencia para el modelo SW con un solitón con fondo variable

Las tendencias para SW y NHP-HE son las mismas que se tenían para un solitón con fondo plano, siendo esta tendencia interrumpida por la presencia del obstáculo, que genera variaciones en la energía y en el error, haciendo que la cota máxima de error sea superior. Una vez superado el obstáculo los errores vuelven a disminuir. De nuevo la convergencia de la malla es adecuada y tiene más relevancia utilizar una malla más fina en el caso no hidrostático que en el hidrostático. Para el modelo HR se tiene, otra vez, que para una mayor discretización las oscilaciones iniciales de la energía son de mayor magnitud y tardan más tiempo en desaparecer.

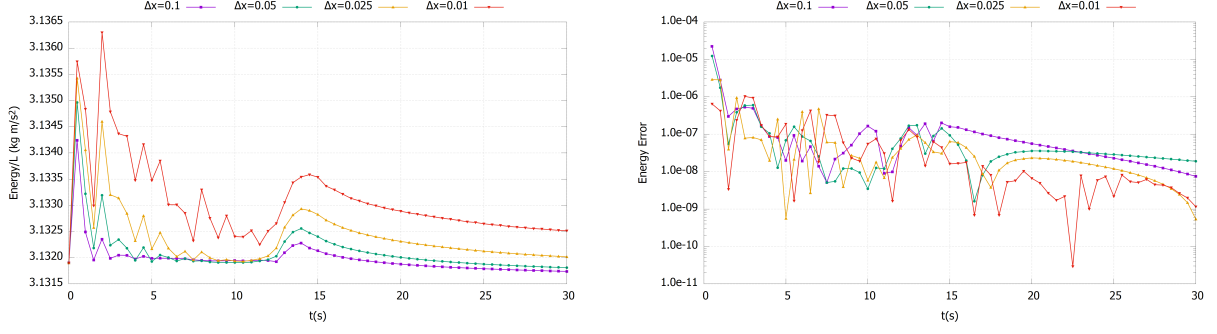


Figura 26: Análisis de la convergencia para el modelo NHP-HR con un solitón con fondo variable

#### 4.5. Discretización del término fuente para el modelo NHP-HE

Siguiendo con el análisis en la energía, se recuerda la expresión de la conservación para el modelo NHP-HE

$$\frac{\partial E_{NHP-HE}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( E_{NHP-HE} + g \frac{h^2}{2} + h p_{nh} \right) \right) = h p_{nh} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w - u \frac{\partial z_b}{\partial x}}{h/2} \right) \quad (4.5)$$

Durante todo el texto, se ha insistido en que el término de la derecha, que es el término fuente para la energía del modelo NHP-HE, es nulo. Este término tiene que ser 0 porque así se impone en la DIIC al resolver las ecuaciones (2.14).

En esta sección se quiere comprobar si la hipótesis es válida cuando se discretiza. Para ello, se presentan los valores máximos promedio de dicho término para los 4 casos estudiados en esta sección y para las distintas discretizaciones. Las siglas en la tabla PR, FP, SO y OB son para denotar respectivamente Problema de Riemann, Fondo Plano, Solitón y Obstáculo. Todos los valores tienen unidades de  $kgm/s^3$ .

$\Delta x$	0.1	0.05	0.025	0.01
PR, FP	$7,5 \cdot 10^{-10}$	$5,1 \cdot 10^{-10}$	$2,3 \cdot 10^{-10}$	$7,6 \cdot 10^{-11}$
PR, OB	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$5,1 \cdot 10^{-10}$	$2,3 \cdot 10^{-10}$	$7,6 \cdot 10^{-11}$
SO, FP	$2,2 \cdot 10^{-11}$	$3,8 \cdot 10^{-12}$	$5,1 \cdot 10^{-13}$	$5,8 \cdot 10^{-14}$
SO, OB	$5,6 \cdot 10^{-9}$	$3,0 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^{-9}$	$2,0 \cdot 10^{-10}$

Tabla 1: Cota superior para el valor del término 2.14 dividido por la longitud del canal para los casos estudiados en esta sección

Vemos como una mayor discretización hace que la cota superior disminuya en todos los casos de estudio. El mayor error en el término fuente para la rotura de presa se produce a consecuencia de la discontinuidad inicial, excepto para el caso de  $\Delta x = 0,1m$  en el que este valor ocurre durante la interacción de la onda con el fondo. De hecho, se puede comprobar que es así porque los valores máximos coinciden excepto para  $\Delta x = 0,1m$ . En cambio, para la propagación del solitón es en los instantes en los que la onda alcanza el obstáculo donde es mayor este término.

## 5. Conclusiones

Tras el análisis llevado a cabo, se puede comprobar la idoneidad de los modelos no hidrostáticos para reproducir con precisión distintos procesos donde sea relevante los fenómenos ondulatorios superficiales. Casos complejos como los estudiados de *Beji et al.* [1] y *L.Cea et al.* [4] se modelan adecuadamente con una hipótesis no hidrostática.

En cambio, los modelos de *Shallow Water* proporcionan una visión general de la evolución de las perturbaciones al reproducir los primeros armónicos, pero fallan en el detalle. Dependiendo de la situación que se quiera reproducir, es necesario plantearse qué es más relevante, si una mayor precisión con los modelos no hidrostáticos o un sistema computacionalmente más simple, con un modelo hidrostático.

En relación a la conservación de la energía, se comprueba que, a pesar de que los esquemas numéricos utilizados no fueren esta conservación, sí que se obtiene en la mayoría de los casos un error que es del orden de  $10^{-8}$  o inferior. Es adecuado, por tanto, decir que la energía se conserva de forma razonable. Por otro lado, se ha visto también que la presencia de un fondo variable sí que afecta a dicha conservación, empeorándola, aunque estos efectos pueden minimizarse usando una malla computacional suficientemente fina. Queda para trabajos futuros el estudio de posibles modificaciones que disminuyan el error que se produce en la energía debido al fondo. Algunos trabajos recientes siguen esa línea de investigación, la de buscar esquemas numéricos que respeten la conservación de la energía, aunque lo hacen basándose en hipótesis hidrostáticas [14]. Por ello, sería interesante la extensión de esas ideas a modelos no hidrostáticos.

Respecto a los dos modelos no hidrostáticos estudiados, parece que el hiperbólico elíptico presenta mejores prestaciones, tanto en el ajuste de los datos experimentales como en la conservación de la energía. El modelo hiperbólico relajado es también adecuado, pero se ha visto que excesivamente dispersivo y tiende a generar más ondas de las que realmente tienen lugar. Además, tarda más en estabilizarse y sus errores pueden ser órdenes de magnitud superiores.

En cuanto al modelo hidrostático, dentro de su rango de aplicabilidad, es también un esquema que conserva la energía bastante bien y presenta errores acotados por un orden de magnitud muy pequeño. Por último, se ha visto que el término fuente de la DIIC es para casi todos los casos prácticos prácticamente nulo cuando está discretizado, por lo que hacer esta aproximación no supondrá diferencias observables en los resultados.

## 6. Agradecimientos

Se quiere agradecer al Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A) por la financiación de este trabajo.

## Referencias

- [1] BEJI, S., AND BATTJES, J. A. Experimental investigation of wave propagation over a bar. Coastal Engineering 19 (1993).

- [2] BEJI, S., AND BATTJES, J. A. Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar. Coastal Engineering 23 (1994).
- [3] BRISTEAU, M. O., MANGENEY, A., SAINTE-MARIE, J., AND SEGUIN, N. An energy-consistent depth-averaged euler system: Derivation and properties. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B 20 (2015).
- [4] CEA, L., FERREIRO, A., VAZQUEZ-CENDON, M. E., AND J. PUERTAS. Experimental and numerical analysis of solitary waves generated by bed and boundary movements. International Journal for Numerical Methods in Fluids 46 (2004).
- [5] ECHEVERRIBAR, I., BRUFAU, P., AND GARCÍA-NAVARRO, P. Extension of a roe-type riemann solver scheme to model non-hydrostatic pressure shallow flows. Applied Mathematics and Computation 440 (2023).
- [6] ECHEVERRIBAR, I., BRUFAU, P., AND GARCÍA-NAVARRO, P. A fully eulerian two-layer model for the simulation of oil spills spreading over coastal flows. Physics of Fluids 35 (2023).
- [7] ECHEVERRIBAR, I., MORALES-HERNÁNDEZ, M., BRUFAU, P., AND GARCÍA-NAVARRO, P. 2d numerical simulation of unsteady flows for large scale floods prediction in real time. Advances in Water Resources 134 (2019).
- [8] ESCALANTE, C., AND DE LUNA, T. M. A general non-hydrostatic hyperbolic formulation for boussinesq dispersive shallow flows and its numerical approximation. Journal of Scientific Computing 83 (2020).
- [9] ESCALANTE, C., DE LUNA, T. M., AND CASTRO, M. J. Non-hydrostatic pressure shallow flows: Gpu implementation using finite volume and finite difference scheme. Applied Mathematics and Computation 338 (2018).
- [10] ESCALANTE, C., DUMBSER, M., AND CASTRO, M. J. An efficient hyperbolic relaxation system for dispersive non-hydrostatic water waves and its solution with high order discontinuous galerkin schemes. Journal of Computational Physics 394 (2019).
- [11] HIRSCH, C. Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics, second edition ed. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2007.
- [12] JOHN D. ANDERSON, J. Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1995.
- [13] MADSEN, P. A., AND SCHÄFFER, H. A. Higher-order boussinesq-type equations for surface gravity waves: Derivation and analysis. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 356 (1998).
- [14] MURILLO, J., AND GARCÍA-NAVARRO, P. Energy balance numerical schemes for shallow water equations with discontinuous topography. Journal of Computational Physics 236 (2013).
- [15] NAVARRO, P. G., MONTILLA, A. N., AND PATO, J. F. Introducción a la Mecánica de Fluidos Computacional. Prensa de la Universidad de Zaragoza, 2021.
- [16] YAMAZAKI, Y., KOWALIK, Z., AND CHEUNG, K. F. Depth-integrated, non-hydrostatic model for wave breaking and run-up. International Journal for Numerical Methods in Fluids 61 (2009).

## A. Anexos

### A.1. Integración del sistema de Euler en la vertical

En esta sección se va a ejemplificar como se realiza la transformación del sistema de Euler al sistema de ecuaciones integradas en la vertical. El sistema de Euler se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.1a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.1b})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (\text{A.1c})$$

ya que nos será más conveniente para realizar la integración. Para completar el sistema hacen falta las condiciones de contorno, que se vuelven a escribir aquí para esclarecer los cálculos.

$$\frac{\partial h_s}{\partial t} = -u(h_s) \frac{\partial h_s}{\partial x} + w(h_s) \quad (\text{A.2a})$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = -u(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + w(z_b) \quad (\text{A.2b})$$

Dado que estamos considerando un sistema sin fricción, no es necesario establecer condiciones de contorno dinámicas.

La principal herramienta para realizar esta integración es la regla de Leibniz o derivación bajo signo integral.

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dz \right) = f(x, b(x)) \frac{db(x)}{dx} - f(x, a(x)) \frac{da(x)}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dz \quad (\text{A.3})$$

Comenzamos por la ecuación de divergencia libre (Ecuación A.1a), integrando en  $z$  y aplicando A.3.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial w}{\partial z} dz = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{h_s} u(x, z) dz - u(x, h_s) \frac{\partial h_s}{\partial x} + u(x, z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + w(x, h_s) - w(x, z_b) \end{aligned}$$

Se aplican las condiciones de contorno A.2 y la definición de velocidad media (Ecuación 2.3) y se obtiene así la ecuación de conservación de la masa en función de  $h$ .

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial h_s}{\partial t} - \frac{\partial z_b}{\partial t} = \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Para la ecuación del momento en  $x$  se procede de igual manera

$$\int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial u^2}{\partial x} dz + \int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial(wu)}{\partial z} dz + \int_{z_b}^{h_s} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = 0 \quad (\text{A.4})$$



Desarrollando los 3 primeros términos

$$\begin{aligned}\int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial u}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{h_s} u dz - u(x, h_s) \frac{\partial h_s}{\partial t} + u(x, z_b) \frac{\partial z_b}{\partial t} \\ \int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial u^2}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{h_s} u^2 dz - u(x, h_s)^2 \frac{\partial h_s}{\partial x} + u(x, z_b)^2 \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ \int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial(wu)}{\partial x} dz &= w(x, h_s)u(x, h_s) - w(x, z_b)u(x, z_b)\end{aligned}$$

Se suman las tres contribuciones y se aplican las condiciones de contorno A.2 multiplicando la condición de contorno para la superficie por  $u(x, h_s)$  y para el fondo por  $u(x, z_b)$ . Todos los términos que no estén en las integrales se simplifican y la ecuación A.4 queda

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{h_s} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{h_s} u^2 dz + \int_{z_b}^{h_s} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = 0 \quad (\text{A.5})$$

Para poder seguir desarrollando la ecuación es necesario establecer tanto un perfil para la velocidad como para la presión. En este caso se va a asumir un perfil uniforme para la velocidad, es decir,

$$u(x, z) = \bar{u}(x) + 0(u(x, z)^2) \quad (\text{A.6})$$

Respecto a la presión, se toma la distribución no hidrostática definida para el modelo NHP para que el desarrollo sea más general.

$$\frac{p}{\rho} = g(h_s - z) + \frac{p_{nh}}{\rho} \quad (\text{A.7})$$

En concreto, desarrollando la integral de la presión

$$\begin{aligned}\int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( g(h_s - z) + \frac{p_{nh}}{\rho} \right) dz &= \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{h_s} g(h_s - z) dz + g(h_s - z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{h_s} \frac{p_{nh}}{\rho} dz - \frac{p_{nh}}{\rho}(x, h_s) \frac{\partial h_s}{\partial x} + \frac{p_{nh}}{\rho}(x, z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} &= \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} g h^2 \right) + g h \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h \bar{p}_{nh})}{\partial x} + 2 \frac{\bar{p}_{nh}}{\rho} \frac{\partial z_b}{\partial x} &= \end{aligned}$$

En este último paso se ha usado que  $h(x) = h_s - z_b$ , la definición de presión hidrostática promedio, que se define de manera equivalente a la velocidad promedio y por último que  $p_{nh}(x, h_s)$  es nula. Por tanto, la ecuación integrada en el eje x queda

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{(h\bar{u})^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 + h \frac{\bar{p}_{nh}}{\rho} \right) = -(gh + 2 \frac{\bar{p}_{nh}}{\rho}) \frac{\partial z_b}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

Notar que para  $p(x, z_b)$  se ha hecho la aproximación  $\bar{p}_{nh} = \frac{p_{nh}(x, h_s) + p_{nh}(x, z_b)}{2}$ .

Finalmente, para el momento en  $z$  se tiene

$$\int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial w}{\partial t} dz + \int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial(wu)}{\partial x} dz + \int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial w^2}{\partial z} dz + \int_{z_b}^{h_s} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz = - \int_{z_b}^{h_s} g dz$$

Para los términos de las velocidades

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial w}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{h_s} w dz - w(x, h_s) \frac{\partial h_s}{\partial t} + w(x, z_b) \frac{\partial z_b}{\partial t} \\ \int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial(wu)}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{h_s} uw dz - u(x, h_s) w(x, h_s) \frac{\partial h_s}{\partial x} + u(x, z_b) w(x, z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ \int_{z_b}^{h_s} \frac{\partial w^2}{\partial z} dz &= w(x, h_s)^2 - w(x, z_b)^2 \\ \int_{z_b}^{h_s} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= \frac{1}{\rho} (p(x, h_s) - p(x, z_b)) = gh - 2 \frac{\bar{p}_{nh}}{\rho} \\ \int_{z_b}^{h_s} g dz &= gh \end{aligned}$$

Como en las otras ocasiones se aplican las condiciones de contorno, esta vez multiplicando la condición para la superficie por  $w(x, h_s)$  y para el fondo por  $w(x, z_b)$  y se suman todos los términos llegando a la ecuación buscada

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{w}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{(h\bar{u})(h\bar{w})}{h} \right) = 2 \frac{\bar{p}_{nh}}{\rho} \quad (\text{A.9})$$

## A.2. Deducción de la ecuación de la energía

En esta sección se va a deducir a partir de las ecuaciones gobernantes para cada modelo propuesto, la ecuación de la energía asociada.

### A.2.1. Modelo hidrostático o de Shallow Water

Se recuerda que el sistema de ecuaciones para el caso de una distribución de presión hidrostática es el siguiente

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.10a})$$

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h\bar{u}^2 + g\frac{h^2}{2} \right) = -gh\frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (\text{A.10b})$$

A partir de ahora aunque se trabajen con velocidades medias se simbolizará con  $u$  en vez de  $\bar{u}$  para relajar la notación. Para llegar a la ecuación de la energía partimos de la ecuación A.10b y la multiplicamos por la velocidad  $u$ . Vamos a desarrollar cada uno de los términos por separado.

Para el primer término se tiene

$$u \frac{\partial(hu)}{\partial t} = u^2 \frac{\partial h}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial t} = u^2 \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right)$$

donde, desarrollando el último término

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{hu^2}{2} \right) = h \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \frac{u^2}{2} \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$u \frac{\partial(hu)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{hu^2}{2} \right) + \frac{u^2}{2} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{hu^2}{2} \right) - \frac{u^2}{2} \frac{\partial(hu)}{\partial x}$$

De nuevo

$$\frac{u^2}{2} \frac{\partial(hu)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{hu^2}{2} \right) - hu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{hu^2}{2} \right) - hu^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

Y así

$$u \frac{\partial(hu)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{hu^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{hu^2}{2} \right) + hu^2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{A.11})$$

Para el segundo término de la ecuación

$$u \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u(hu^2) \right) - hu^2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{A.12})$$

y para el tercero

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left( g \frac{h^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( g \frac{h^2}{2} \right) \right) - g \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Desarrollamos el segundo término a la derecha

$$g \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2 u}{2} \right) - g u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2}{2} \right)$$

Ahora usamos la ecuación de conservación de la masa (Ecuación A.10a) multiplicada escalarmente por  $h$ .

$$h \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial(hu)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2 u}{2} \right) - u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^2}{2} \right) = 0$$

Y por tanto

$$\begin{aligned} g \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} &= -g \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h^2}{2} \right) \\ u \frac{\partial}{\partial x} \left( g \frac{h^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( g \frac{h^2}{2} \right) \right) + g \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Respecto al término a la derecha de la ecuación 2.5b

$$ugh \frac{\partial z_b}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (ughz_b) - gz_b \frac{\partial(hu)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (ughz_b) + \frac{\partial}{\partial t} (ghz_b) \quad (\text{A.14})$$

Donde en el último paso se ha usado de nuevo la ecuación de conservación de la masa y que el fondo no cambia con el tiempo, es decir,  $\frac{\partial z_b}{\partial t} = 0$ . Finalmente, sumamos todos los términos (Ecuaciones A.11, A.12, A.13 y A.14), cancelamos términos.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( h \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{hu^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (u(hu^2)) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( g \frac{h^2}{2} \right) \right) + g \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (ughz_b) + \frac{\partial}{\partial t} (ghz_b) = 0$$

Agrupamos las derivadas puntuales y las convectivas

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{hu^2}{2} + g \frac{h^2}{2} + ghz_b \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( \frac{hu^2}{2} + g \frac{h^2}{2} + ghz_b \right) \right) = 0 \quad (\text{A.15})$$

Se ha visto pues un procedimiento para llegar a la ecuación deseada para la energía en el caso hidrostático.

### A.2.2. Modelo no hidrostático hiperbólico elíptico o NHP-HE

Para llegar a la ecuación de la energía de este modelo se parte del sistema no hidrostático integrado en la vertical, que se ha deducido en el Anexo A.1.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.16a})$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + g \frac{h^2}{2} + hp_{nh} \right) = (-gh + 2p_{nh}) \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (\text{A.16b})$$

$$\frac{\partial(hw)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (huw) = 2p_{nh} \quad (\text{A.16c})$$

Como el sistema tiene una parte común con el sistema hidrostático, se pueden ahorrar

cálculos utilizando los resultados ya alcanzados. Vimos que multiplicando la ecuación A.10b por la velocidad en la horizontal llegábamos a la ecuación A.15. Multiplicamos pues los términos no hidrostáticos<sup>1</sup> de la ecuación A.16b por  $u$ .

$$u \frac{\partial(h p_{nh})}{\partial x} h p_{nh} = \frac{\partial}{\partial x} (u h p_{nh}) - h p_{nh} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u 2 p_{nh} \frac{\partial z_b}{\partial x} = h p_{nh} \frac{u \frac{\partial z_b}{\partial x}}{h/2}$$

Por tanto, la ecuación 2.10b multiplicada por  $u$  queda

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( h \frac{u^2}{2} + g \frac{h^2}{2} + g h z_b \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( \frac{h u^2}{2} + g \frac{h^2}{2} + g h z_b + h p_{nh} \right) \right) = h p_{nh} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u \frac{\partial z_b}{\partial x}}{h/2} \right) \quad (\text{A.17})$$

Por otro lado, tomamos la ecuación A.16c y la multiplicamos por la velocidad vertical,  $w$ . Para el primer término de la ecuación observamos que

$$\frac{\partial(h w^2)}{\partial t} = w^2 \frac{\partial h}{\partial t} + 2 w h \frac{\partial w}{\partial t} = w^2 \frac{\partial h}{\partial t} + 2 \left( \frac{\partial(h w^2)}{\partial t} - w \frac{\partial(h w)}{\partial t} \right)$$

Despejando el término  $w \frac{\partial(h w)}{\partial t}$  queda

$$w \frac{\partial(h w)}{\partial t} = \frac{w^2}{2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h w^2}{2} \right)$$

Para el segundo término

$$\frac{\partial}{\partial x} (h u w^2) = w^2 \frac{\partial h u}{\partial x} + 2 h u w \frac{\partial w}{\partial x} = w^2 \frac{\partial(h u)}{\partial x} + 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} (h u w^2) - w \frac{\partial}{\partial x} (h u w) \right)$$

Despejamos  $w \frac{\partial}{\partial x} (h u w)$ .

$$w \frac{\partial}{\partial x} (h u w) = \frac{w^2}{2} \frac{\partial(h u)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h u \frac{w^2}{2} \right)$$

Y por tanto,

$$w \left( \frac{\partial(h w)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h u w) \right) - 2 p_{nh} = \underbrace{\frac{w^2}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h u)}{\partial x} \right)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h w^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( h u \frac{w^2}{2} \right) - w 2 p_{nh} = 0 \quad (\text{A.18})$$

---

<sup>1</sup>Es decir, los términos adicionales que contienen la  $p_{nh}$  y que no estaban en la ecuación A.10b

Así, sumando las ecuaciones A.17 y A.18 llegamos la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( h \frac{u^2 + w^2}{2} + g \frac{h^2}{2} + ghz_b \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \left( \frac{h(u^2 + w^2)}{2} + g \frac{h^2}{2} + ghz_b + hp_{nh} \right) \right) \\ = hp_{nh} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w - u \frac{\partial z_b}{\partial x}}{h/2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Si definimos la energía de acuerdo a [10] se llega a la expresión deseada.

### A.3. Resolución numérica de las ecuaciones

En esta sección se detalla en mayor profundidad el esquema numérico que se ha utilizado para la resolución de las ecuaciones gobernantes. El procedimiento que se sigue para realizar dicha discretización es el de los volúmenes finitos[15]. Este método consiste en la discretización del espacio mediante un conjunto de celdas que forman la malla computacional. En el centro o en el lado de cada celda se define el valor discreto de la variable como el promedio de la variable continua en esa celda. En el caso particular de 1D esto se traduce en un dominio formado por segmentos de longitud  $\Delta x$  como se muestra en la Figura 27.

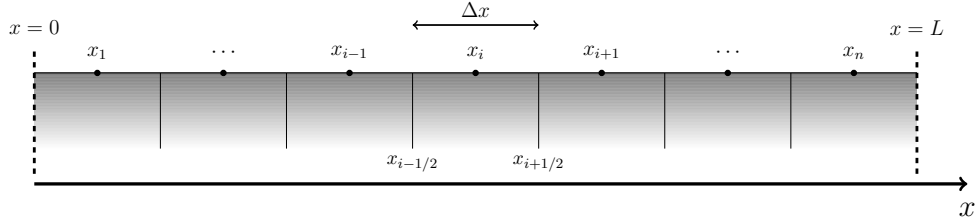


Figura 27: Dominio discreto para el método de los volúmenes finitos

Las variables promedio en los centros de las celdas tienen la expresión

$$\mathbf{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x} \mathbf{U}(x, t^n) dx \quad (\text{A.20})$$

Este método funciona especialmente bien para resolver sistemas de ecuaciones hiperbólicos, que se pueden expresar de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S} \quad (\text{A.21})$$

siendo  $\mathbf{U}$  el vector de las variables conservadas,  $\mathbf{F}$  el vector de los flujos físicos y  $\mathbf{S}$  el vector que contiene los términos fuente. Con el método de los volúmenes finitos presentado y aplicando que estamos en el caso de 1D el vector de variables conservadas en el instante  $t + \Delta t$  se obtiene como

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i-1/2}, t)) dt \right) + \int_{\Delta t} \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x} \mathbf{S}(\mathbf{U}, x) dx dt \quad (\text{A.22})$$

donde es necesario aproximar las integrales de los flujos y los términos fuente. Se define con esta ecuación el flujo numérico, que es la integral del flujo a lo largo de la pared en un paso de tiempo.

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, t)) dt \quad (\text{A.23})$$

Igualmente se puede realizar la aproximación para el flujo en la otra pared de la celda, así como la aproximación del término fuente, y por tanto la expresión A.22 queda

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^* \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{\mathbf{S}}_i \quad (\text{A.24})$$

Los flujos se suelen resolver utilizando las variables a izquierda y derecha de la pared en el tiempo  $t$ , es decir, con un esquema explícito. Resolviendo estos flujos se dice que se resuelve el Problema de Riemann. Respecto a los términos fuente, estos pueden discretizarse de dos

maneras, centrados en la celda, o como parte de los flujos numéricos, en las paredes.

Una forma de resolver el problema de Riemann consiste en utilizar el solver de Roe, cuyo principio se basa en la linealización del problema de Riemann a partir de la matriz Jacobiana que define el sistema.

Para entender mejor el procedimiento se va a explicar cómo se aplican estos métodos a las ecuaciones de los modelos presentados en este trabajo. En concreto, el modelo de SW y NHP se resuelven mediante un mismo esquema numérico, con un paso de tiempo  $\Delta t$  subdividido en dos pasos si se considera la distribución de presión no hidrostática[5].

La resolución de las ecuaciones NHP-HR es independiente y también se utiliza para ello un Solver de Roe.

### A.3.1. Resolución del modelo SW y NHP-HE

El sistema de ecuaciones NHP-HE 2.10 se puede reescribir

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}_b(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_{nh}(\mathbf{U}) \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial(hw)}{\partial t} + \frac{\partial(huw)}{\partial x} = 2p_{nh} \quad (\text{A.26})$$

$$h \frac{\partial(hu)}{\partial x} + 2hw - hu \frac{\partial}{\partial x}(h + 2z_b) = 0 \quad (\text{A.27})$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_b(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{nh}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(h \frac{\partial p_{nh}}{\partial x} + p_{nh} \frac{\partial(h+2z_b)}{\partial x}\right) \end{pmatrix},$$

Las dos primeras ecuaciones se escriben conjuntamente con la forma funcional de un sistema hiperbólico. Para resolver el modelo hidrostático basta resolver este sistema siendo  $\mathbf{S}_{nh}(\mathbf{U}) = 0$ . En el caso del modelo NHP-HE, como ya se ha comentado, resolver este sistema lleva a un estado intermedio para las variables conservadas en el paso temporal  $\mathbf{U}^{n*}$ .

El solver de Roe aplicado a este sistema hiperbólico con el término fuente hidrostático nulo queda

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{U}}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial x} = \mathbf{S}_b(\tilde{\mathbf{U}}) \quad (\text{A.28})$$

siendo  $\mathbf{J}$  la matriz Jacobiana de las variables conservadas.  $\tilde{\mathbf{U}}$  es el vector linealizado en las paredes de las celdas, a partir de los valores definidos en el centro de las mismas. Los promedios en las variables en las paredes para el computo de los flujos se obtienen a partir de la matriz Jacobiana localmente linealizada.

$$\delta \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{J}} \delta \mathbf{U}$$



que en este caso adopta la forma

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g\tilde{h} - \tilde{u}^2 & 2\tilde{u} \end{pmatrix}$$

Los valores promedios de las variables en las paredes son

$$\tilde{h}_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \quad \tilde{c}_{i+1/2} = \sqrt{g\tilde{h}} \quad \tilde{u}_{i+1/2} = \frac{u_{i+1}\sqrt{h_{i+1}} + u_i\sqrt{h_i}}{\sqrt{h_{i+1}} + \sqrt{h_i}}$$

Una vez se tiene los promedios de Roe la actualización de las variables conservadas del sistema se realiza mediante un esquema explícito *upwind*:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n*} - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} + \frac{\left[ \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^+ (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}) \right]_{i-1/2}^n + \left[ \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^- (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}) \right]_{i+1/2}^n}{\Delta x} = 0 \quad (\text{A.29})$$

siendo

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \tilde{u} + \tilde{c} & 0 \\ 0 & \tilde{u} - \tilde{c} \end{pmatrix}$$

la matriz linealizada de los valores propios,  $\tilde{\mathbf{P}}$  la matriz de sus vectores propios asociados y  $\tilde{\mathbf{A}}$  y  $\tilde{\mathbf{B}}$  los vectores que se definen como

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^1 \\ \tilde{\alpha}^2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{P}}^{-1}\delta\tilde{\mathbf{U}} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}^1 \\ \tilde{\beta}^2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{P}}^{-1}\tilde{\mathbf{H}}.$$

La actualización de las dos variables conservadas, que cumplen una hipótesis hidrostática, es pues la dada por las ecuaciones ??

$$h_i^* = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \sum_m (\tilde{\lambda} + \tilde{\gamma}\tilde{\mathbf{e}}_1)_i^{m-1/2} + \sum_m (\tilde{\lambda} - \tilde{\gamma}\tilde{\mathbf{e}}_1)_i^{m+1/2} \right] \quad (\text{A.30a})$$

$$(hu)_i^* = (hu)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \sum_m (\tilde{\lambda} + \tilde{\gamma}\tilde{\mathbf{e}}_2)_i^{m-1/2} + \sum_m (\tilde{\lambda} - \tilde{\gamma}\tilde{\mathbf{e}}_2)_i^{m+1/2} \right] \quad (\text{A.30b})$$

donde  $\tilde{\gamma}_i^{m+1/2} = \left( \tilde{\alpha}^m - \frac{\tilde{\beta}^m}{\tilde{\lambda}^m} \right)_i^{m+1/2}$ .  $m$  recorre el número de valores propios del sistema, 2 en este caso. El paso de tiempo es un paso de tiempo dinámico, estando restringido por la condición del CFL, que como se ha comentado es necesario que sea menor o igual que 1 para tener un esquema numérico estable.

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{\max[\tilde{u} - \tilde{c}, \tilde{u}, \tilde{u} + \tilde{c}]} \quad (\text{A.31})$$

La notación con asterisco en A.30 hace referencia al paso de tiempo intermedio que se está considerando.

Si sólo estuviésemos resolviendo el sistema hidrostático, el paso de tiempo estaría completo y se volvería a calcular los promedios de Roe con las nuevas variables actualizadas. En cambio, si se esta resolviendo el modelo no hidrostático hay que completar el paso de tiempo con una corrección de los términos hidrostáticos forzando a que se cumpla la DIIC, que se ha visto que es

exclusiva de este modelo. Este método se conoce como Pressure Correction Method [11]. Como la DIIC es una ecuación elíptica es necesario un procedimiento iterativo para realizarlo, que en este caso se lleva a cabo mediante el algoritmo de Thomas [12].

Antes de realizar la corrección se calcula la evolución de la velocidad  $w$ .

$$w_{i+1/2}^* = w_{i+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (u\delta w)_i^+ + (u\delta w)_{i+1}^- \right]. \quad (\text{A.32})$$

Un detalle importante en este punto es que las variables  $w$  y  $p_{nh}$  están definidas en las paredes de las celdas y no en los centros. El motivo de este desplazamiento es evitar posibles problemas numéricos que surjan de la corrección de los campos de velocidades.[5]

La corrección que se introduce a las variables es

$$h_i^{n+1} = h_i^* \quad (\text{A.33a})$$

$$(hu)_i^{n+1} = (hu)_i^* + Q(\Delta p_{nh}) \quad (\text{A.33b})$$

$$(w)_{i+1/2}^{n+1} = (w)_{i+1/2}^* + W(\Delta p_{nh}) \quad (\text{A.33c})$$

donde los términos  $Q(\Delta p_{nh})$  y  $W(\Delta p_{nh})$  son las expresiones discretas de los términos no hidrostáticos antes no considerados.

$$Q(p_{nh}) = -\Delta t \left[ h_i^{n+1} \frac{p_{nh,i+1/2}^{n+1} - p_{nh,i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + p_{nh,i}^{n+1} \frac{(h + 2z_b)_{i+1}^{n+1} - (h + 2z_b)_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] \quad (\text{A.34})$$

$$W(p_{nh}) = \Delta t 2p_{nh,i}^{n+1} \quad (\text{A.35})$$

Notar que ambas ecuaciones se evalúan en los centros de las celdas, por lo que al estar definida la presión en las paredes, se aproxima su valor en el centro de las celdas mediante el promedio de sus valores en la pared. Las expresiones para el calado y los caudales unidad de las celdas se sustituyen en la ecuación DIIC discretizada.

$$\left[ \frac{h_{i+1/2}(hu)_{i+1} - (hu)_i}{\Delta x} + 2h_{i+1/2}w_{i+1/2} - (hu)_{i+1/2} \frac{h_{i+1} + 2z_{b,i+1} - h_i - 2z_{b,i}}{\Delta x} \right]^{n+1} = 0$$

llegando al sistema buscado que es una ecuación para la presión no hidrostática.

$$A_{i+1/2} \mathbf{p}_{nh,i-1/2}^{n+1} + B_{i+1/2} \cdot \mathbf{p}_{nh,i+1/2}^{n+1} + C_{i+1/2} \cdot \mathbf{p}_{nh,i+3/2}^{n+1} = D_{i+1/2}$$

Los coeficientes tienen las siguientes expresiones, siendo  $\phi_{i+1/2} = h_{i+1} + 2z_{i+1} - h_i - 2z_i$ .

$$A_{i+1/2} = \left( \frac{\phi_i}{2} - 2h_i \right) (\phi_{i+1/2} - 2h_{i+1/2})$$

$$B_{i+1/2} = 16\Delta x^2 + \phi_{i+1/2}(\phi_i + \phi_{i+1} + 2h_{i+1} - 1 - 2h_{i+1}) \\ + 2h_{i+1/2}(\phi_{i/2} - \phi_{i+1/2} + 4h_{i+1/2})$$

$$C_{i+1/2} = \left( \frac{\phi_{i+1}}{2} - 2h_{i+1} \right) (\phi_{i+1/2} - 2h_{i+1/2})$$

$$D_{i+1/2} = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \left[ h_{i+1/2} \frac{(hu)_{i+1} - (hu)_i}{\Delta x} - (hu)_{i+1/2} \frac{\phi_{i+1/2}}{\Delta x} + 2h_{i+1/2} w_{i+1/2} \right]$$

Para resolverla se utiliza el método de Thomas o método para las matrices tridiagonales[12], completándose así el paso temporal completo y actualizando las variables conservadas con los nuevos valores calculados.

### A.3.2. Resolución del modelo NHP-HR

El modelo NHP-HR se puede escribir como un sistema hiperbólico de 4 ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \mathbf{B}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}_b(\mathbf{U}) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \mathbf{S}_{nh}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}_f(\mathbf{U}) \quad (\text{A.36})$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hw \\ hp_{nh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ q_u \\ q_w \\ q_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} q_u \\ \frac{1}{h} q_u^2 + \frac{1}{2} g h^2 + q_p \\ \frac{1}{h} q_u q_w \\ \frac{1}{h} q_u q_p + c_p^2 q_u \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_b(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(gh + 2p_{nh}) \\ 0 \\ 2c_p^2 u \end{pmatrix} \frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad \mathbf{S}_{nh}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2p_{nh} \\ -2c_p^2 w \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} c_p^2 q_u & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el solver de Roe mediante la linealización de las variables en las paredes de las celdas.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{K}(\tilde{\mathbf{U}}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial x} = \mathbf{S}_b(\tilde{\mathbf{U}}) + \mathbf{S}_{nh}(\tilde{\mathbf{U}}) + \mathbf{S}_f(\tilde{\mathbf{U}}) \quad (\text{A.37})$$

Y la expresión final para la actualización de las variables en el tiempo  $t + \Delta t$  es

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \sum_{m=1}^4 \left( \tilde{\lambda}^+ \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}} \right)_{i-1/2}^m + \sum_{m=1}^4 \left( \tilde{\lambda}^- \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}} \right)_{i+1/2}^m \right] + \Delta t \mathbf{S}_{nh}(\mathbf{U})_i^{n+1} \quad (\text{A.38})$$

#### A.4. Análisis de la discretización de la malla para el caso de Beji

En la sección 3 se ha visto que el modelo que mejor ajustaba los datos experimentales para el caso de *Beji et al.* [1] era el modelo NHP-HE. Se quiere estudiar también la influencia de la malla escogida y cual es la elección más adecuada.

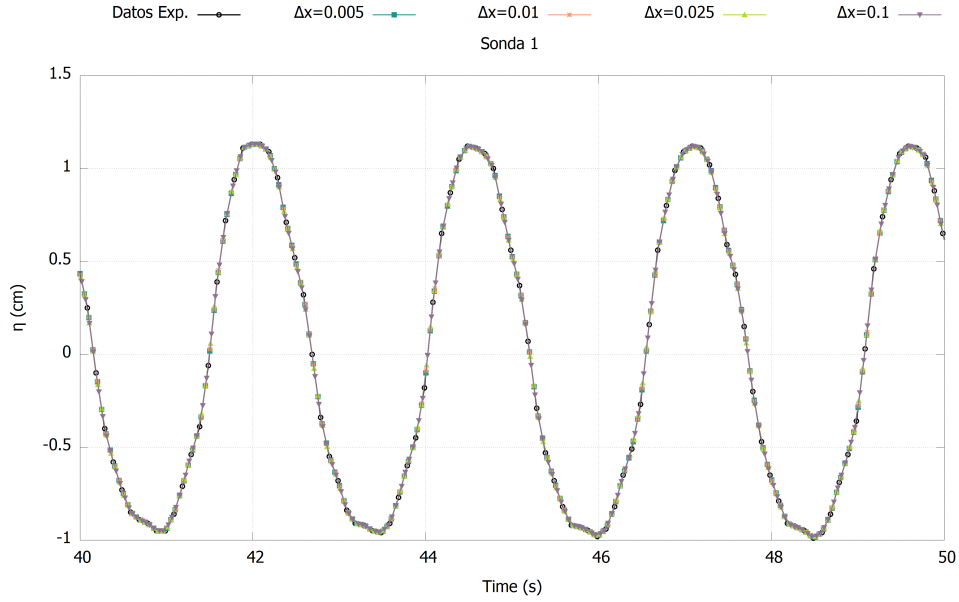


Figura 28: Variación del nivel en la sonda 1 para el caso de Beji con distintas mallas para el modelo NHP-HE

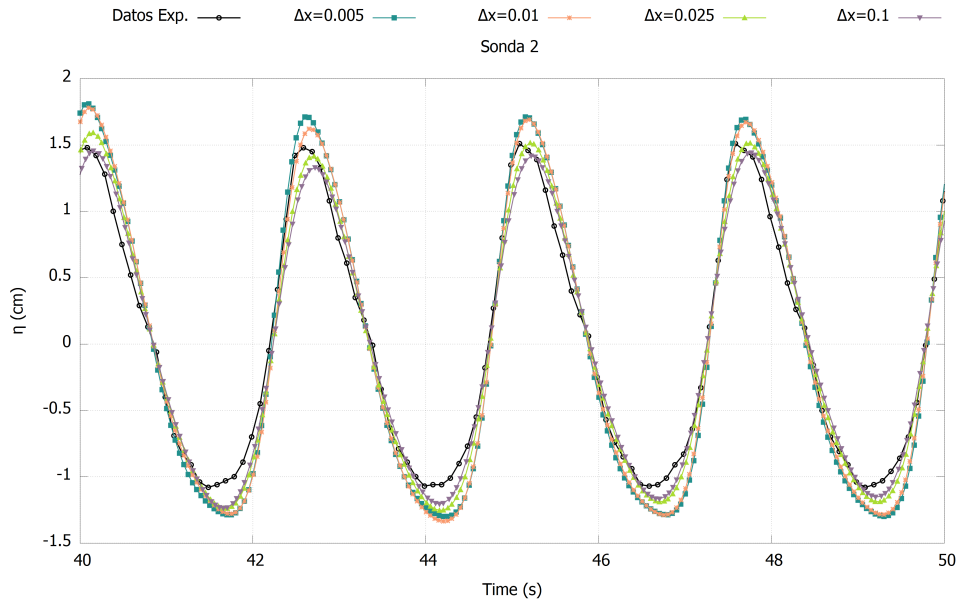


Figura 29: Variación del nivel en la sonda 2 para el caso de Beji con distintas mallas para el modelo NHP-HE

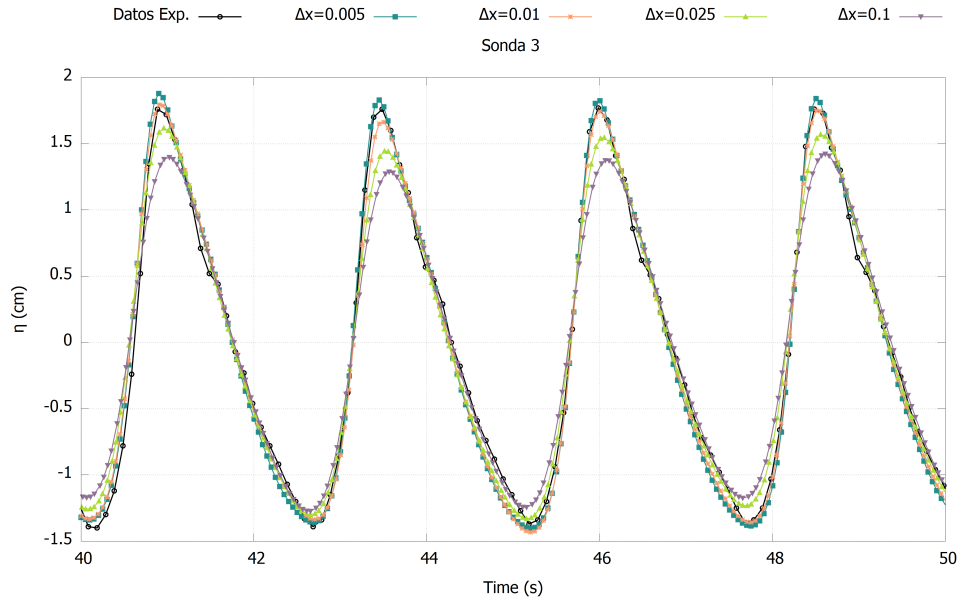


Figura 30: Variación del nivel en la sonda 3 para el caso de Beji con distintas mallas para el modelo NHP-HE

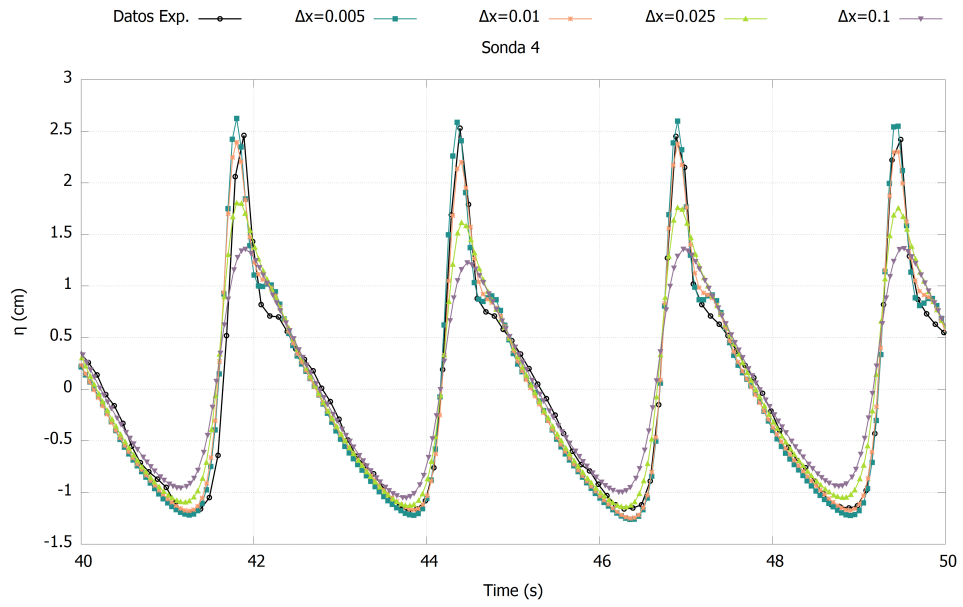


Figura 31: Variación del nivel en la sonda 4 para el caso de Beji con distintas mallas para el modelo NHP-HE

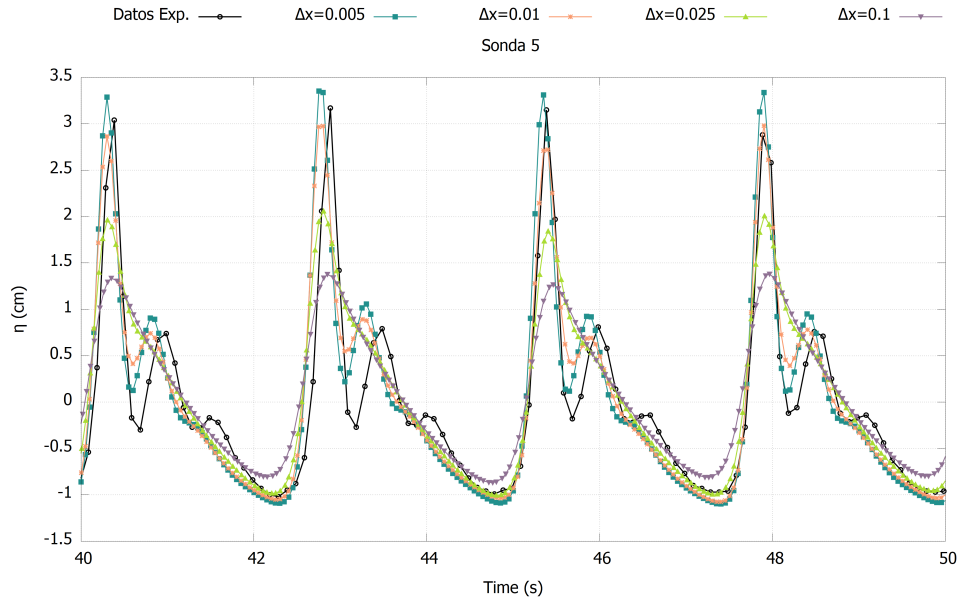


Figura 32: Variación del nivel en la sonda 5 para el caso de Beji con distintas mallas para el modelo NHP-HE

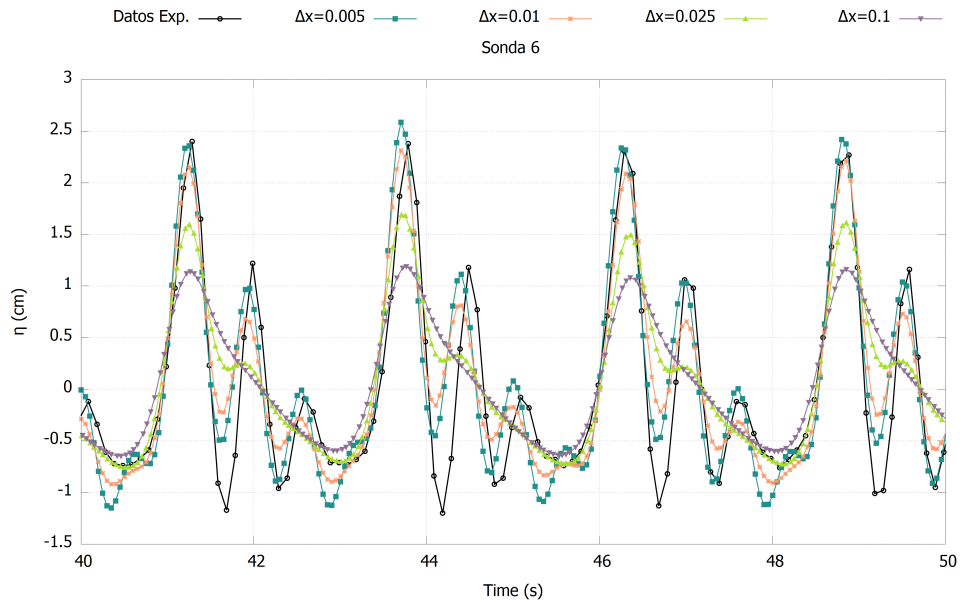


Figura 33: Variación del nivel en la sonda 6 para el caso de Beji con distintas mallas para el modelo NHP-HE

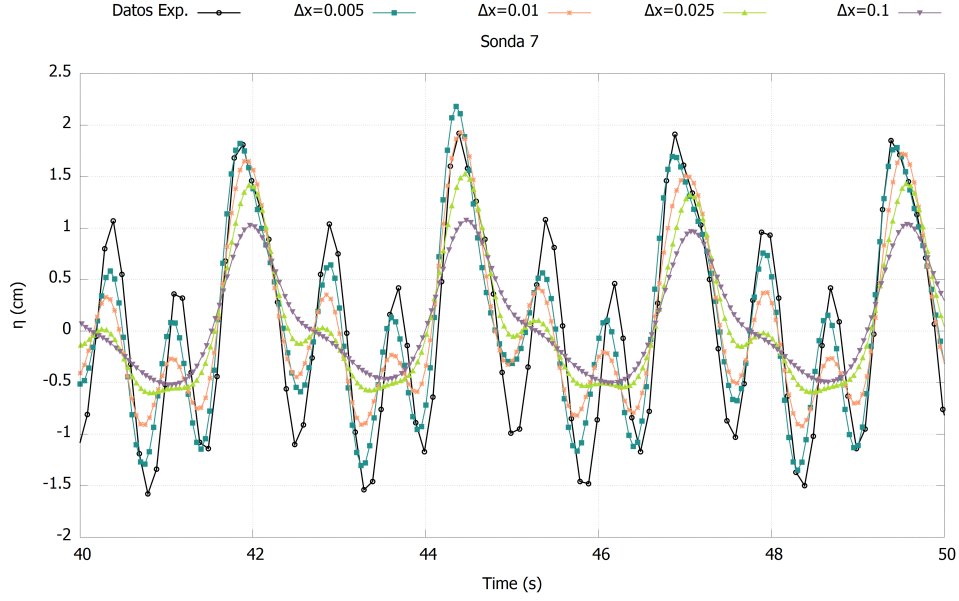


Figura 34: Variación del nivel en la sonda 7 para el caso de Beji con distintas mallas para el modelo NHP-HE

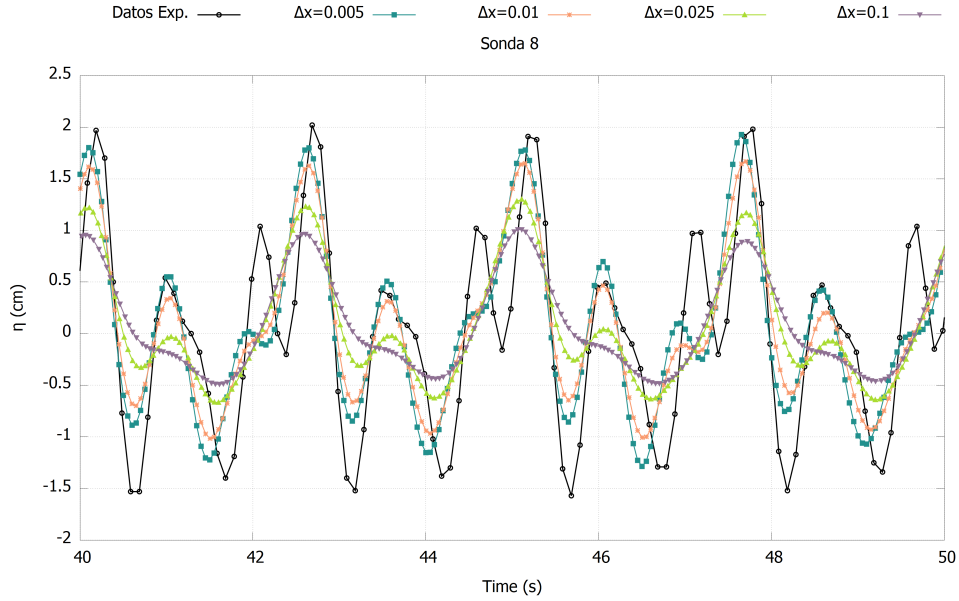


Figura 35: Variación del nivel en la sonda 8 para el caso de Beji con distintas mallas para el modelo NHP-HE

En la sonda 1 hay una concordancia total entre experimento y simulación porque se establece este caso como condición de contorno para simular este problema. Se observa que cuanto mayor es la discretización, mejor es el ajuste de los datos. De hecho, son necesarios valores muy pequeños de  $\Delta x$  para tener un ajuste adecuado. Esto también es debido al tamaño de las ondas que se generan, pues tienen una amplitud y anchura del orden de los centímetros, por lo que es necesario una discretización un orden de magnitud menor para poder discretizarlas sin que el error asociado a ello sea relevante. Además de ajustar los datos con mayor precisión buscar la mejor discretización permite seleccionar esta misma para luego evaluar la energía con esta mismo  $\Delta x$ .

### A.5. Caso de ondas generadas por un pistón

Se incluyen en este anexo las gráficas del caso de *Cea et al.* [4] que por elongación no se han podido añadir al cuerpo principal de este trabajo pero que son igualmente interesantes. El caso que se ha simulado en la sección 3 es para un nivel  $H_0 = 0,25\text{m}$  y un pistón rápido, que se corresponde con una velocidad de  $0,58\text{m/s}$  y una amplitud de desplazamiento de  $0,29\text{m}$ , tal como se describe en [4]. Para el mismo pistón pero con un menor nivel en reposo  $H_0 = 0,20\text{m}$  de nuevo se tienen resultados adecuados.

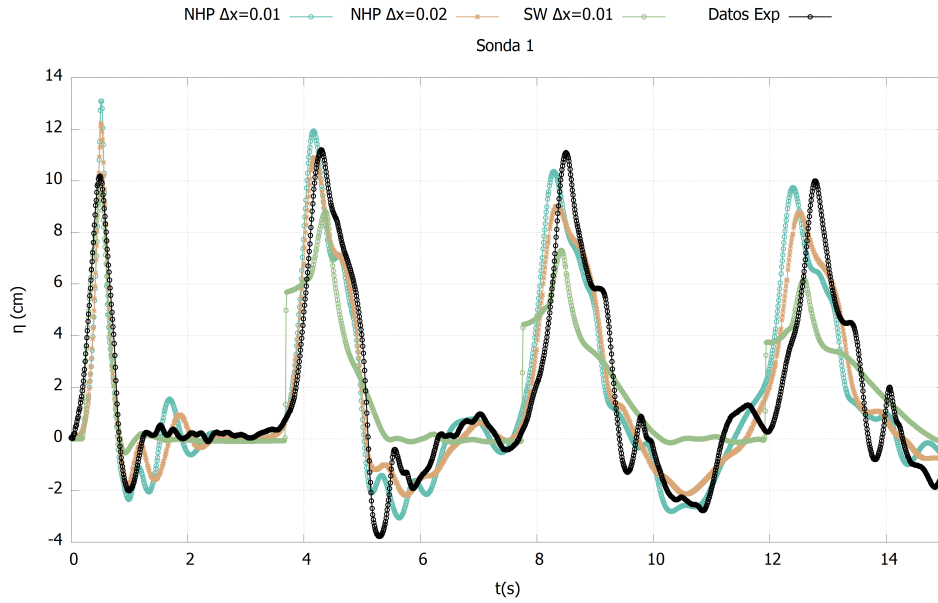


Figura 36: Variación respecto al nivel en reposo registrado por la Sonda 1, junto con los modelos NHP-HE y SW

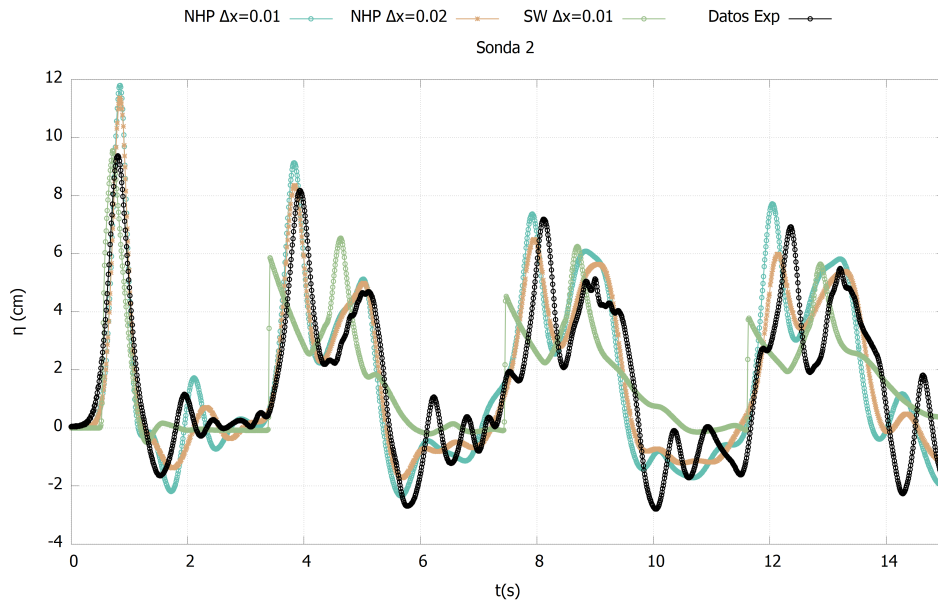


Figura 37: Variación respecto al nivel en reposo registrado por la Sonda 2, junto con los modelos NHP-HE y SW



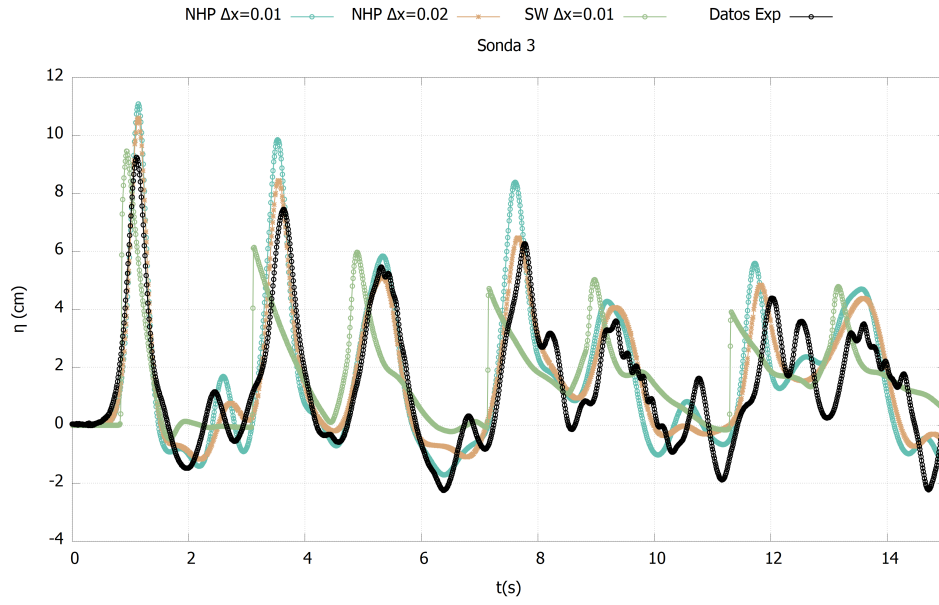


Figura 38: Variación respecto al nivel en reposo registrado por la Sonda 3, junto con los modelos NHP-HE y SW

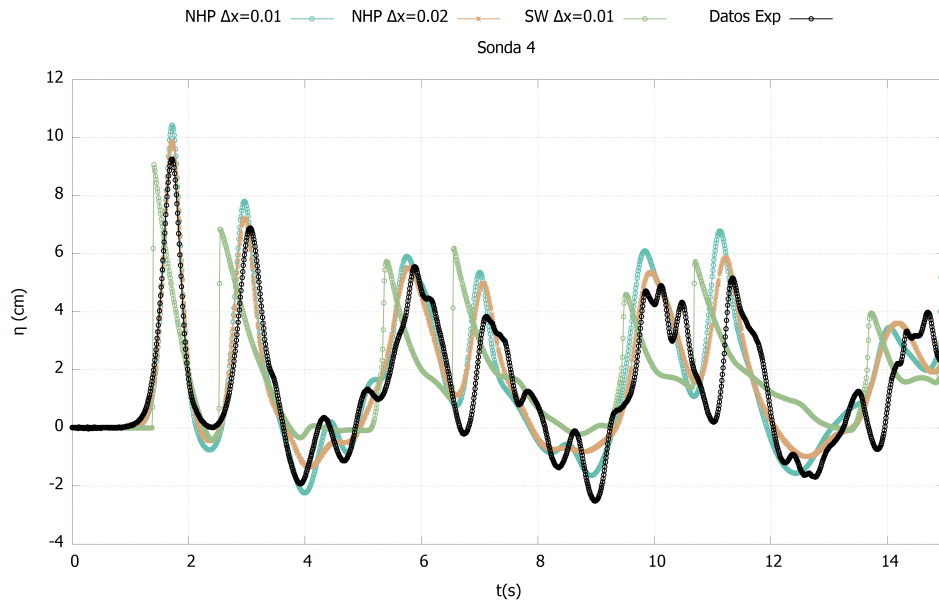


Figura 39: Variación respecto al nivel en reposo registrado por la Sonda 4, junto con los modelos NHP-HE y SW

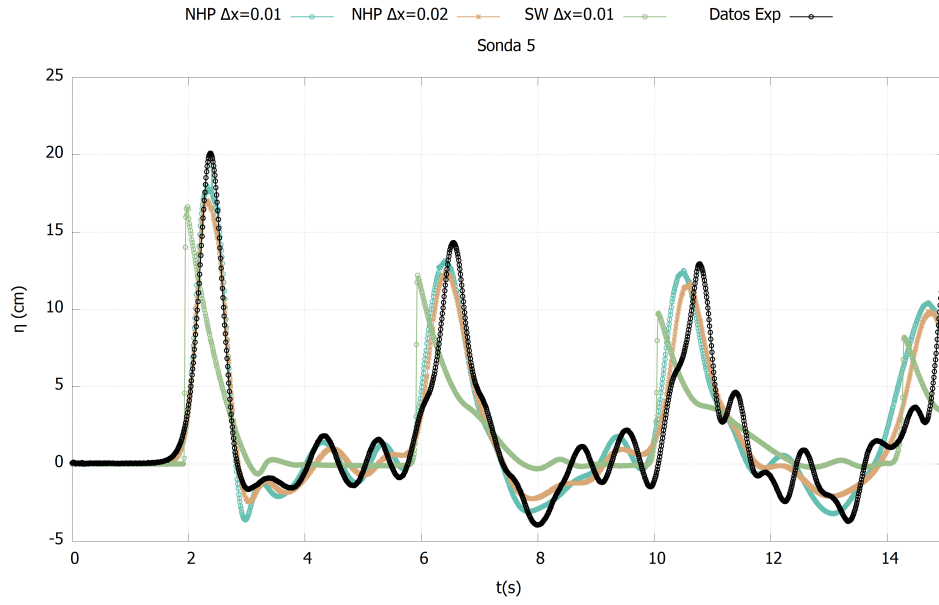


Figura 40: Variación respecto al nivel en reposo registrado por la Sonda 5, junto con los modelos NHP-HE y SW

También se incluyen los ajustes para el caso en el que el pistón se mueve con la frecuencia lenta, a una velocidad de 0,29m/s y con una amplitud de 0,58m.

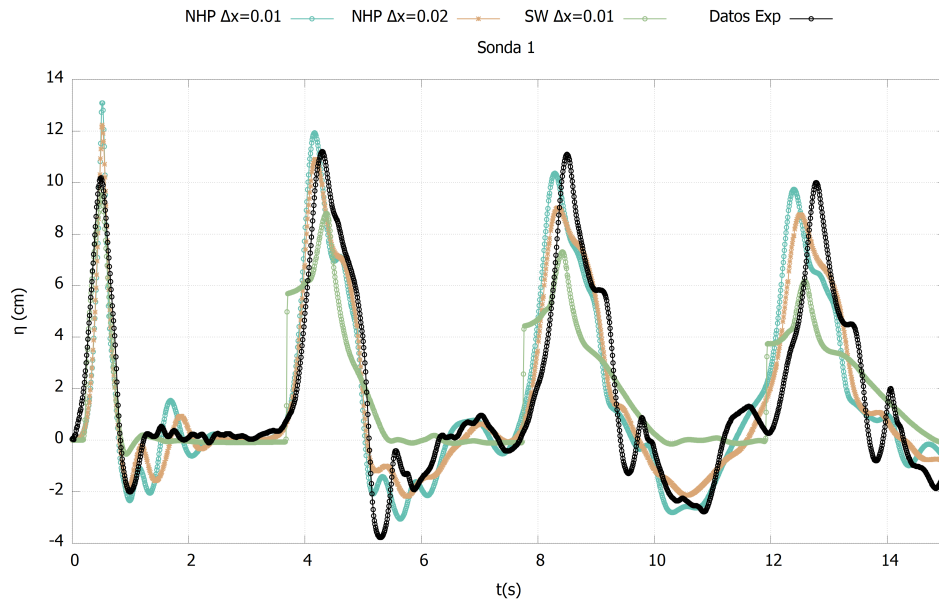


Figura 41: Variación respecto al nivel en reposo registrado por la Sonda 1, junto con los modelos NHP-HE y SW

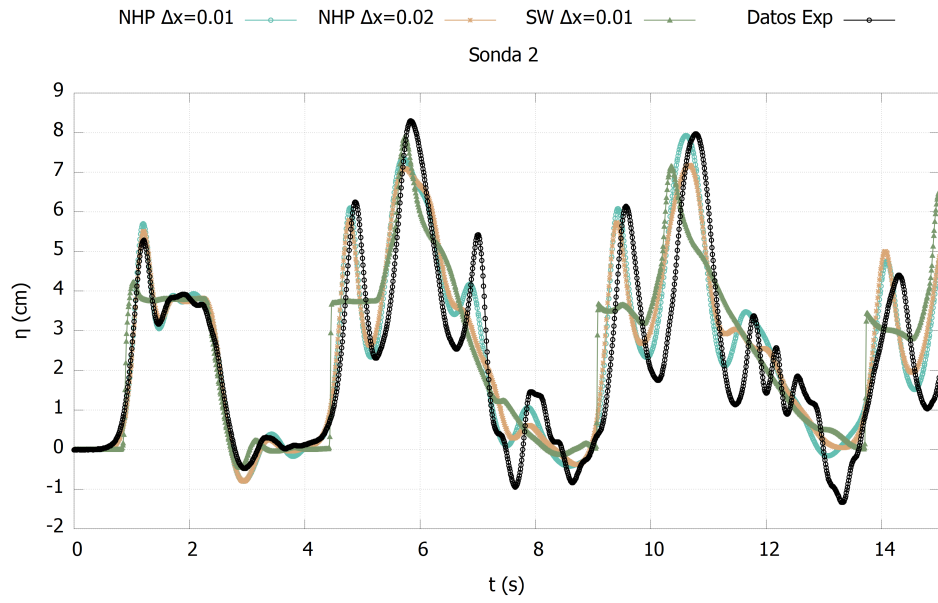


Figura 42: Variación respecto al nivel en reposo registrado por la Sonda 2, junto con los modelos NHP-HE y SW

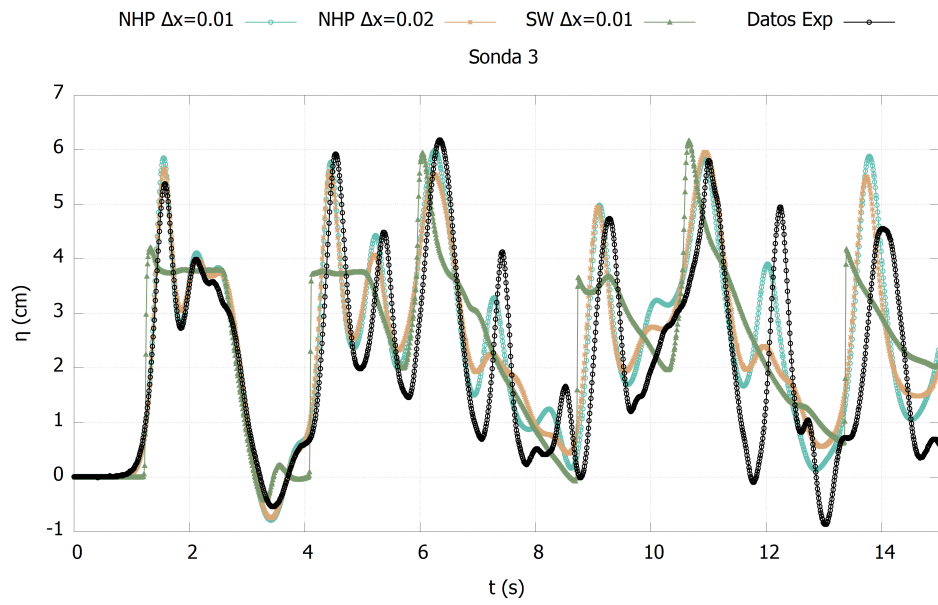


Figura 43: Variación respecto al nivel en reposo registrado por la Sonda 3, junto con los modelos NHP-HE y SW

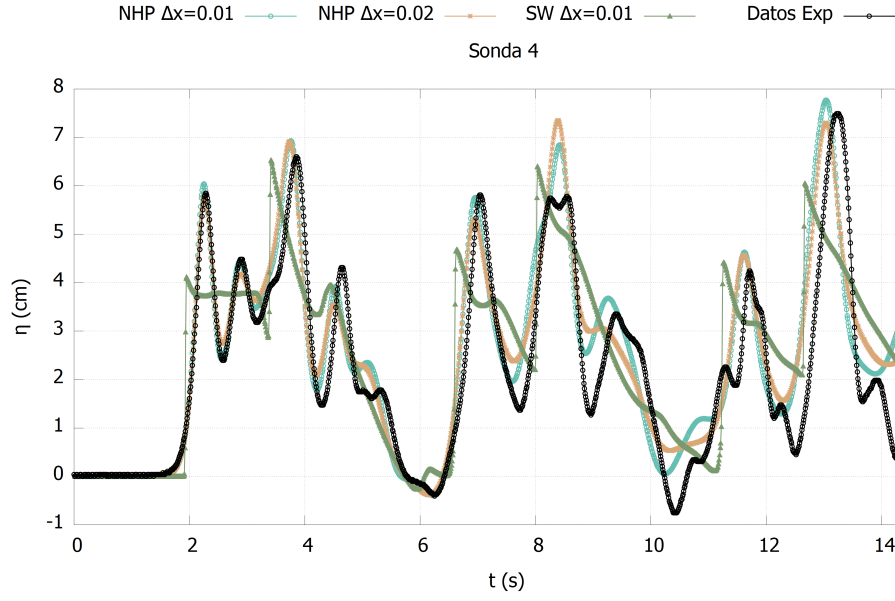


Figura 44: Variación respecto al nivel en reposo registrado por la Sonda 4, junto con los modelos NHP-HE y SW

En ambos casos, los datos experimentales se reproducen con mayor precisión de nuevo con el modelo NHP-HE, y de nuevo no hay preferencia por una malla computacional más fina para las dos escogidas en este modelo.

Por otro lado, para el modelo de SW se observa que en las sondas 3, 4 y 5 reproduce unas regiones planas, donde las ondas alcanzan su máximo que no se observaban para el pistón rápido. Estas zonas indican aún más si cabe que el modelo de SW no realiza un ajuste correcto de la situación a modelar.