

# **Aproximaciones en modelos de matemática actuarial**



**Marina Aguilar Salvador**  
Trabajo de fin de grado de Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Carmen Sangüesa Lafuente  
10 de Julio de 2024



# Abstract

Ruin theory is a field of applied probability that quantifies a firm's vulnerability to insolvency and ruin. In particular, we are about to study the classical model which starting with an initial capital  $u$  at time  $t = 0$ , describes both cash flows: incoming premiums and outgoing claims. In particular, it is assumed that the capital grows linearly with a constant rate  $c$ , and claims arrive according to a Poisson process. If the capital of the company becomes negative at any time, then the ruin occurs. This work aims to describe the ruin probability for this model. At the end, an approximation will be described since there does not always exist a way to describe an explicit expression for it.

The work is divided into four chapters. Chapter 1 establishes the essential probabilistic concepts that will be necessary to understand further contents. Specifically, it is divided into 7 sections. The first one introduces concepts such as probability space, a random variable, and the distribution function. The second one includes the definition of mathematical expectation of both discrete and continuous random variables and a statement of independent variables in terms of expectation, it also includes the definition of moments and its particular case, the variance. The description of the families of distribution that will be used in the following chapters can be found in the third section. The next section defines conditional expectation and includes some of its properties. In section number five we describe the convolution formula for independent random variables. A sixth section on the Laplace-Stieltjes transform that will be needed to calculate the approximation in Chapter 4. A final section defining the concept of compound distribution and its density function is included.

Chapter 2 describes the classical risk model and the probability of ruin. Firstly it introduces stochastic processes, in particular, it defines in more detail the Poisson process that will be used to explain the classical risk model. This chapter also defines the ruin probability. In order to give an expression of it, we describe a variable called the maximum aggregate loss and we use it to describe the ruin probability using the so called Beekman convolution formula. At the end we define the adjustment coefficient, which is necessary to give the Lundberg exponential bound for the probability of ruin. This chapter is based on Chapter 4 from [1], Chapter 1 from [2] and [7].

In Chapter 3 we study in more depth random sums (compound distributions) of the form:

$$S = X_1 + \cdots + X_N$$

were  $X_i$  are nonnegative random variables independent and identically distributed and  $N$  is independent of the previous  $X_i$ . As seen in Chapter 2, random sums allow us to describe the losses in the classical risk model. Random sums also allow us to compute ruin probabilities. Then we use the properties of the conditional expectation defined in Chapter 1 to describe the expectation and the generating function of  $S$ . That will give us the tools to give the ruin probability formula for a specific distribution, in particular, we give an explicit formula when the amounts claimed are exponentials. Finally, we will state and prove Panjer's recursion theorem which gives a recursion formula for calculating the distribution function of random sums of random variables in a risk model when the summands are discrete random variables, but not all types of  $N$  holds Panjer's formula, so we will explain in more detail those that satisfies it. In this chapter we have mainly used the third chapter of [1].

We will conclude with Chapter 4, which gives us the theoretical basis that will be used to give approximations for compound distributions, which are an alternative to usual methods. We will use it to obtain an approximation to the ruin probability formula when the claim amounts are exponential which is given in Chapter 3. We will compare this approximation with those obtained when we use classical discretization methods. To get the approximation we use Laplace-Stieljes transform and we describe some of its properties and an error bound using gamma-type operators. This Chapter is based on [3] and [4].

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>1. Conceptos probabilísticos</b>	<b>1</b>
1.1. Primeras definiciones . . . . .	1
1.2. Esperanza matemática . . . . .	2
1.2.1. Momentos . . . . .	2
1.3. Distribuciones de probabilidad . . . . .	3
1.3.1. Distribución Binomial . . . . .	3
1.3.2. Distribución geométrica . . . . .	3
1.3.3. Distribución binomial negativa . . . . .	3
1.3.4. Distribución de Poisson . . . . .	4
1.3.5. Distribución exponencial . . . . .	4
1.3.6. Distribución Gamma . . . . .	4
1.4. Esperanza condicionada y propiedades . . . . .	5
1.5. Convolución . . . . .	5
1.6. Transformada de Laplace-Stieltjes . . . . .	6
1.7. Distribución compuesta . . . . .	6
<b>2. Modelo de riesgo clásico y probabilidad de ruina.</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Introducción a los procesos estocásticos. El proceso de Poisson . . . . .	7
2.2.1. Procesos estocásticos . . . . .	7
2.2.2. Proceso de Poisson . . . . .	9
2.3. Modelo de riesgo . . . . .	9
2.3.1. Modelo de riesgo clásico . . . . .	10
2.4. Probabilidad de ruina . . . . .	10
2.4.1. Probabilidad de ruina como una suma . . . . .	11
<b>3. Modelo de Riesgo. Recursión de Panjer</b>	<b>15</b>
3.1. Distribución compuesta . . . . .	15
3.2. Distribución del número de reclamaciones . . . . .	17
3.3. Recursión de Panjer . . . . .	17
<b>4. Aproximaciones a la probabilidad de ruina</b>	<b>21</b>
4.1. Discretización de una variable aleatoria no negativa usando su transformada de Laplace-Stieltjes . . . . .	21
4.2. Aproximaciones para cantidades reclamadas exponenciales. . . . .	25
<b>Bibliografía</b>	<b>27</b>
<b>Anexos</b>	<b>1</b>

<b>A. Implementación de la recursión de Panjer en R</b>	<b>1</b>
A.1. Explicación código . . . . .	1
A.2. Ejemplo numérico . . . . .	2
<b>B. Aproximaciones de la probabilidad de ruina en R</b>	<b>3</b>
B.1. Explicación código . . . . .	3
B.2. Primer ejemplo numérico . . . . .	4
B.3. Segundo ejemplo numérico . . . . .	6

# Capítulo 1

## Conceptos probabilísticos

En este capítulo introducimos algunos conceptos de probabilidad y distribuciones probabilísticas que utilizaremos en los siguientes capítulos.

### 1.1. Primeras definiciones

Para cada experimento aleatorio podemos definir un espacio de probabilidad que nos va a permitir estudiarlo.

**Definición 1.** Sea  $\Omega$  espacio muestral, es decir, un conjunto formado por todos los sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos de  $\Omega$  con estructura de  $\sigma$ -álgebra y una función de probabilidad  $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  tal que para todo  $A \in \mathcal{F}$ ,  $P(A)$  denota la probabilidad del suceso  $A$ . Entonces llamamos espacio probabilístico a la terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Al resultado de un suceso aleatorio le corresponde un valor numérico, que puede ser continuo o discreto. Definimos formalmente este concepto como sigue.

**Definición 2.** Dado un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , definimos una variable aleatoria como una aplicación medible Borel  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a cada valor de  $X$  le corresponde una un número real. Decimos que una variable aleatoria es discreta si sus posibles valores constituyen un conjunto finito o numerable. Además, si existe una función medible  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  tal que  $P(X \in A) = \int_A f(x)dx$  para todo boleariano  $A$ , diremos que  $X$  es absolutamente continua.

La función de distribución de una variable aleatoria asigna a cada suceso definido la probabilidad acumulada hasta un cierto valor, y la función de supervivencia es su complementaria.

**Definición 3.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  espacio probabilístico, dada una variable aleatoria  $X$  definimos la función de distribución de  $X$  a la aplicación  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida por  $F(x) = P[X \leq x]$ . Además, definimos función de supervivencia de una variable aleatoria  $X$  como:

$$P(X > x) = 1 - F(x) \quad (1.1)$$

A continuación, recordamos el concepto de variables independientes.

**Definición 4.** Dada una colección de  $n$  variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, se dice que son independientes si cumplen

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n), \quad (1.2)$$

para cualesquiera conjuntos de Borel  $B_1, \dots, B_n \subseteq \mathbb{R}$ .

## 1.2. Esperanza matemática

Nos referimos a la esperanza matemática de una variable aleatoria como su valor esperado y recordaremos su expresión según la variable sea continua o discreta.

**Definición 5.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  espacio de probabilidad y sea  $X$  variable aleatoria definida en dicho espacio, entonces la esperanza o valor esperado de la variable aleatoria  $X$ , denotada por  $E[X]$ , está definida por la integral Lebesgue

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x dF(x) \quad (1.3)$$

siempre que  $\int_{\mathbb{R}} |x| dF(x) < \infty$ .

Podemos distinguir dos casos según sea una variable aleatoria discreta o continua.

**Proposición 1.1.** Sea  $X$  una variable aleatoria discreta que puede tomar valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , con probabilidad  $P(X = x_i)$ , definimos esperanza matemática de  $X$  como sigue:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \quad (1.4)$$

Siempre que  $\sum_i |x_i| P(X = X_i) < \infty$ . Análogamente, sea  $X$  una variable aleatoria continua con  $f(x)$  su función de densidad, entonces la esperanza matemática de  $X$  es

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (1.5)$$

Siempre que  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ .

El siguiente resultado relaciona la independencia entre variables aleatorias y su esperanza.

**Teorema 1.1.** Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes, entonces  $E[XY] = E[X]E[Y]$ .

### 1.2.1. Momentos

**Definición 6.** Sea  $X$  una variable aleatoria, llamamos el momento  $r$ -ésimo al valor esperado de  $X^r$  y definido por  $m_r = E[X^r]$ . El  $r$ -ésimo momento centrado de una variable aleatoria  $X$  denotado por  $\mu_r$  queda definido como el valor esperado de  $(X - EX)^r$  y viene dado por la siguiente fórmula

$$\mu_r = E[(X - EX)^r] \quad (1.6)$$

Concretamente para  $r = 2$ , recibe el nombre de varianza y lo definimos de la siguiente manera:

**Definición 7.** Sea  $X$  una variable aleatoria, llamaremos varianza de  $X$  al segundo momento centrado de  $X$  y la denotamos  $Var[X]$

$$Var[X] = \mu_2 = E[(X - E(X))^2] \quad (1.7)$$

Y llamamos desviación típica de  $X$  a la raíz cuadrada de la varianza de  $X$  denotada por  $\sigma$ , esto es

$$\sigma = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{\sigma^2} \quad (1.8)$$

luego  $Var(X) = \sigma^2$ .

Finalmente, recordamos el concepto de función generadora de momentos de una variable aleatoria

**Definición 8.** Sea  $X$  una variable aleatoria, su función generadora de momentos viene dada por  $M_X(t) = E[e^{tX}]$  para todo  $t$  tal que dicha esperanza existe.

**Observación 1.1.** Recordemos que la función generadora de momentos, si existe en un entorno del origen nos permite calcular los momentos de dicha variable mediante derivación sucesiva. Además la función generadora de momentos caracteriza a la distribución.

### 1.3. Distribuciones de probabilidad

En esta sección vemos algunas distribuciones de probabilidad importantes y que utilizaremos en los siguientes capítulos, indicaremos también el valor esperado, la varianza y la función generadora de momentos de cada una de ellas.

#### 1.3.1. Distribución Binomial

La distribución binomial cuenta el número de éxitos en  $n$  ensayos independientes con probabilidad de éxito  $p$ . Sea  $X$  una variable aleatoria discreta con distribución Binomial de parámetros  $n$  y  $p$  y denotada por  $X \sim Bin(n, p)$  entonces la probabilidad de obtener  $k$  éxitos en  $n$  ensayos es la siguiente:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (1.9)$$

La esperanza, la varianza y la función generadora de momentos de una variable aleatoria con función de distribución binomial son las siguientes:

$$E[X] = np \quad \text{Var}[X] = np(1-p) \quad m_X(t) = (1 - p + pe^t)^n \quad (1.10)$$

#### 1.3.2. Distribución geométrica

Una variable aleatoria geométrica cuenta el número de fracasos antes del primer éxito en ensayos independientes, cada uno de los intentos tiene probabilidad de acierto  $p$ . Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro  $p$  y expresada  $X \sim Geo(p)$ , la probabilidad de  $n$  fracasos antes del primer éxito, con probabilidad de éxito  $p$  es la siguiente:

$$P[X = k] = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

La esperanza, la varianza y la función generadora de momentos de una variable aleatoria geométrica son las siguientes:

$$E[X] = \frac{(1 - p)}{p} \quad \text{Var}[X] = \frac{1 - p}{p^2} \quad m_X(t) = \frac{p}{1 - (1 - p)e^t} \quad (1.12)$$

#### 1.3.3. Distribución binomial negativa

La distribución binomial negativa es una ampliación de las distribuciones binomial y geométrica. De hecho se utiliza para conocer el número de fracasos necesarios para conseguir  $r$  éxitos. Sea  $X$  una variable aleatoria discreta que sigue una distribución binomial negativa con parámetros  $r$  y  $p$  denotada por  $X \sim BN(r, p)$ , entonces la probabilidad de que en el  $k$ -ésimo ensayo independiente ocurra el  $r$ -ésimo éxito viene dado por la siguiente formula:

$$P[X = k] = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

La esperanza, la varianza y la función generadora de momentos de una variable aleatoria geométrica son las siguientes:

$$E[X] = \frac{r(1 - p)}{p} \quad \text{Var}[X] = \frac{r(1 - p)}{p^2} \quad m_X(t) = \left( \frac{p}{1 - (1 - p)e^t} \right)^r \quad (1.14)$$

Notar que la distribución geométrica es un caso concreto de la distribución binomial negativa en la que  $r = 1$ .

### 1.3.4. Distribución de Poisson

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta, se dice tiene una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$  denotada por  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$  si la probabilidad de que ocurra un suceso  $k$  veces viene dada por:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.15)$$

La esperanza, la varianza y la función generadora de momentos de una variable aleatoria con distribución de Poisson son las siguientes:

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \quad \text{Var}[X] = \lambda \quad m_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)) \quad (1.16)$$

### 1.3.5. Distribución exponencial

Sea  $X$  una variable aleatoria continua decimos que tiene una distribución exponencial de parámetro  $\lambda > 0$  y lo denotamos  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  si tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 \quad (1.17)$$

La esperanza, la varianza y la función generadora de momentos de una variable aleatoria con función de distribución exponencial son las siguientes:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2} \quad m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad (1.18)$$

**Observación 1.2.** Una variable aleatoria exponencial es adecuada para describir tiempos de espera.

### 1.3.6. Distribución Gamma

Una variable aleatoria continua  $X$  que sigue una distribución gamma de parámetros  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$  la denotamos por  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  tiene función de densidad:

$$f(x) = \frac{\beta(\beta x)^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0 \quad (1.19)$$

donde  $\Gamma(\alpha)$  es la función Gamma, es decir,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (1.20)$$

La esperanza, la varianza y la función generadora de momentos de una variable aleatoria con función de distribución gamma son las siguientes:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{Var}[X] = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad m_X(t) = \frac{1}{1 - (1 - t/\beta)^\alpha} \quad (1.21)$$

Podemos relacionar la distribución gamma con otras distribuciones, por ejemplo la suma de  $n$  exponenciales independientes de parámetro  $\lambda$  es una distribución  $\Gamma(n, \lambda)$  con  $\lambda > 0$ , es decir, la distribución exponencial es un caso particular de Gamma cuando  $\alpha = 1$ . Una variable aleatoria gamma es adecuada para describir tiempos de espera.

## 1.4. Esperanza condicionada y propiedades

Dadas dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  definidas sobre el mismo espacio probabilístico, la esperanza condicionada  $E[X|Y = y]$  representa el valor esperado de la variable  $X$  dado que la  $Y$  toma el valor  $y$ . La existencia de dicha esperanza queda garantizada gracias al Teorema de Radon-Nikodym que establece una relación entre dos medidas definidas en el mismo espacio. Para su cálculo diferenciamos los casos más usuales según sean variables aleatorias discretas o continuas. Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias discretas y  $P(X|Y = y)$  la probabilidad de  $X$  cuando  $Y = y$ , entonces la esperanza condicionada es

$$E[X|Y = y] = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i | Y = y) \quad (1.22)$$

Análogamente, para  $X$  e  $Y$  variables aleatorias continuas y  $f(x|y)$  el valor de la función de densidad de  $X$  condicionada a  $Y = y$ , la esperanza condicionada es

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) \quad (1.23)$$

La siguiente propiedad la utilizaremos posteriormente.

**Teorema 1.2.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  espacio de probabilidad, y sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias , entonces siempre que exista  $E[X]$ , tenemos*

$$E[E(X|Y)] = E[X] \quad (1.24)$$

## 1.5. Convolución

La operación de convolución para distribuciones nos permite calcular la función de distribución de la suma de dos variables aleatorias independientes. Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes, entonces:

$$F_{X+Y}(s) = P[X + Y \leq s] = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x) dF_X(x) =: F_X * F_Y(s)$$

Llamamos a  $F_X * F_Y(s)$  la convolución de las funciones de distribución de las variables  $X$  e  $Y$ . Si al menos una de las funciones de distribución  $F_X$  ó  $F_Y$  es absolutamente continua, entonces  $F_X * F_Y$  es absolutamente continua.

Si ambas variables son discretas, sean sus respectivas funciones de masa de probabilidad  $F_X$  y  $F_Y$ , entonces la función de distribución y su respectiva función de masa de probabilidad son:

$$F_X * F_Y(s) = \sum_x F_Y(s-x) f_X(x) \quad f_X * f_Y(s) = \sum_x f_Y(s-x) f_X(x), \quad \forall x \text{ con } f(x) > 0 \quad (1.25)$$

Análogamente, si  $X$  e  $Y$  son variables continuas, entonces:

$$F_X * F_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x) f_X(x) dx \quad f_X * f_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(s-x) f_X(x) dx \quad (1.26)$$

La  $n$ -ésima convolución de  $F$ , denotada por  $F^{*n}$  y viene definida como sigue:

$$F^{*0}(x) = \delta_0(x), \quad n = 0 \quad \text{con} \quad \delta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

$$F^{*n} = F^{*(n-1)} * F = \underbrace{F * \dots * F}_{n \text{ veces}}, \quad n \geq 1 \quad (1.28)$$

**Observación 1.3.** Utilizando la función generadora de momentos, se puede probar que la convolución de distribuciones binomiales y Poisson resulta en una distribución binomial o Poisson. Del mismo modo, la convolución de distribuciones geométricas genera una distribución binomial negativa y la convolución de distribuciones exponenciales produce una distribución gamma.

## 1.6. Transformada de Laplace-Stieltjes

La transformada de Laplace es una herramienta útil en muchas áreas de las matemáticas, formalmente la definimos de la siguiente manera:

**Definición 9.** Dada  $f: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos la transformada de Laplace de  $f$  como la integral

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \quad (1.29)$$

Definimos la transformada de Laplace-Stieltjes similar a la transformada de Laplace y muy utilizada en el área de la probabilidad cuando se trabaja con variables aleatorias no negativas.

**Definición 10.** Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa con función de distribución  $F(x)$ , definimos la transformada de Laplace-Stieltjes de  $X$  como

$$\phi_X(t) = E(e^{-tu}) = \int_0^\infty e^{-st} dF(u) \quad (1.30)$$

De hecho en el caso que  $X$  sea una variable aleatoria continua con función de densidad  $f(x)$ , entonces la transformada de Laplace-Stieltjes de  $X$  se simplifica a

$$\phi_X(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(u) du \quad (1.31)$$

Notar que la transformada de Laplace-Stieltjes coincide con la función generadora de momentos, excepto por un cambio de signo en el exponente. Además  $|\phi(t)| < 1$  para todo  $t \geq 0$ , por lo que esta transformada siempre existe y además caracteriza la distribución de partida. Además dadas dos variables aleatorias independientes  $X$  e  $Y$ , la suma  $Z = X + Y$  satisface

$$\phi_Z(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t) \quad (1.32)$$

## 1.7. Distribución compuesta

Las distribuciones compuestas son de gran utilidad en matemática actuarial, como veremos en los siguientes capítulos.

**Definición 11.** Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias positivas independientes e idénticamente distribuidas y sea  $N$  una variable aleatoria no negativa, entera e independiente de  $X_i$ , entonces  $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$  es una variable aleatoria a la que llamamos distribución compuesta. Condicionando a los posibles valores de  $N$ , la función de distribución de  $S_N$  viene dada por

$$G_{S_N}(x) = P[S \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X_1 + \dots + X_N \leq x | N = n] P[N = n] \quad (1.33)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P[X_1 + \dots + X_n \leq x] P[N = n], \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.34)$$

Donde en la última igualdad hemos utilizado la independencia entre  $N$  y  $X_1, X_2, \dots$ . De hecho, su función de distribución se puede expresar utilizando la fórmula de convolución como sigue:

$$G_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) P(N = n) \quad (1.35)$$

donde  $F$  es la función de distribución de  $X_i$  y  $F^{*n}$  la  $n$ -ésima convolución de  $F$ . Si  $X_i$  es absolutamente continua, con función de densidad  $f$ , si derivamos en (1.35) podemos calcular una expresión para su función derivada:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{*n}(x) P[N = n] \quad (1.36)$$

donde  $f^{*n}$  denota la  $n$ -ésima convolución de la función de densidad  $f$ .

## Capítulo 2

# Modelo de riesgo clásico y probabilidad de ruina.

### 2.1. Introducción.

Nos situamos en el punto de mira de una entidad aseguradora y comenzamos con un ejemplo concreto: Consideramos todas las pólizas que cubren incendios en apartamentos de un barrio en una ciudad y que están suscritas por una compañía de seguros, en este caso los bienes asegurados tienen un valor comparable y las probabilidades de incendio probablemente no difieran mucho de un edificio a otro es decir, tal conjunto de pólizas constituye una cartera de seguros homogénea.

En un negocio de seguros encontramos distintas ramas, tales como incendios, automóviles, robos, salud, propiedad, pensiones, etc. Dentro de cada rama podemos encontrar carteras de seguros que cubren riesgos distintos, por ejemplo, dentro del riesgo de incendio podemos diferenciar entre casas unifamiliares, adosadas, apartamentos, tiendas, sitios industriales para los que hay que diseñar distintas carteras de seguros ya que las probabilidades de incendio podrían variar y las cantidades reclamadas podrían ser incomparables. Por ello trabajamos con una cartera específica caracterizada por elementos de naturaleza tanto determinista como estocástica como pueden ser el capital inicial de la aseguradora, el número de sucesos con sus respectivas cantidades reclamadas y el tiempo de ocurrencia entre ellos.

En este trabajo describiremos un modelo de riesgo clásico, que es aquel para el que el número de imprevistos siguen un proceso de Poisson. Para ello primero describimos dicho proceso.

### 2.2. Introducción a los procesos estocásticos. El proceso de Poisson

La evolución en el tiempo del capital en una compañía de seguros se describirá mediante un proceso estocástico. Por ello comenzamos con una introducción a los procesos estocásticos en general, y el proceso de Poisson en particular, que será necesaria para entender lo siguiente.

#### 2.2.1. Procesos estocásticos

Los procesos estocásticos se utilizan en el estudio de las magnitudes aleatorias que evolucionan respecto al tiempo. Matemáticamente podemos definirlo del siguiente modo:

**Definición 12.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio probabilístico e  $I \subseteq [0, \infty)$  un intervalo temporal. Un proceso estocástico  $Z = \{Z_t\}_{t \in I}$  es un conjunto de variables aleatorias  $Z_t: \Omega \rightarrow E$  donde  $E \subseteq \mathbb{R}$  se denomina espacio de estados.

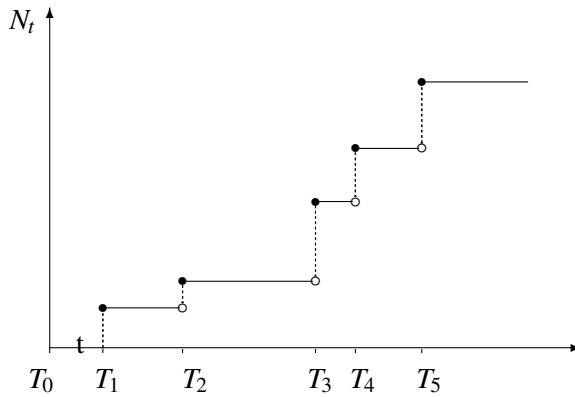
Según la cardinalidad del conjunto  $I$  podemos diferenciar dos casos importantes, procesos estocásticos en tiempo discreto si  $I$  es un conjunto numerable, por ejemplo,  $I = 1, 2, \dots$ , o un proceso estocástico

en tiempo continuo si  $I$  es un conjunto infinito no numerable, por ejemplo  $I = [0, \infty)$ . El proceso estocástico número de reclamaciones en una compañía de seguros hasta el instante  $t$  es un ejemplo de proceso en tiempo continuo.

Análogamente, podemos diferenciar procesos estocásticos con espacio de estados discreto, por ejemplo  $E = \{0(\text{falso}), 1(\text{verdadero})\}$  (si estamos observando la ocurrencia o no de un determinado evento), o continua, por ejemplo el precio en bolsa de una acción:  $E = [0, \infty)$ .

**Definición 13.** Sea  $Z_t$  un proceso estocástico definido sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y sea  $\omega \in \Omega$ , la trayectoria del proceso está formada por los valores que el proceso toma sobre  $\omega$  para cada instante de tiempo  $t$ , esto es, por el conjunto  $\{Z_t(\omega), t \in I\}$ .

El siguiente gráfico dibuja una posible trayectoria  $(N_t, t \geq 0)$  del número de reclamaciones recibidas por una aseguradora hasta un tiempo  $t$ . Los instantes de tiempo  $T_i$  serán aleatorios, y representarán los momentos donde se produce una nueva reclamación.



Possible trayectoria del número de reclamaciones con respecto al tiempo

La evolución en el tiempo del capital en una compañía de seguros según el modelo de riesgo clásico será un proceso estocástico con incrementos estacionarios e independientes, que se define como:

**Definición 14.** Sea  $(Z(t), t \geq 0)$  un proceso estocástico entonces decimos que  $(Z(t), t \geq 0)$  tiene incrementos estacionarios e independientes si verifica que:

- Dados  $n$  instantes de tiempo  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables  $Z(t_2) - Z(t_1), \dots, Z(t_n) - Z(t_{n-1})$  son independientes, es decir, si hay independencia entre los incrementos ocurridos en intervalos disjuntos.
- Dado un instante de tiempo arbitrario  $s \geq 0$  y un intervalo de tiempo  $t > 0$ , las distribuciones de  $Z(t+s) - Z(s)$  y  $Z(t) - Z(0)$  coinciden, es decir, la distribución de los incrementos en un intervalo de tiempo depende de su longitud pero no del instante inicial de observación.

Introducimos ahora los procesos de recuento que se pueden definir como procesos estocásticos en los que las variables aleatorias contabilizan el número de veces que se repite un determinado suceso. Formalmente lo definimos como sigue:

**Definición 15.** Se dice que un proceso estocástico  $(N(t), t \geq 0)$  es un proceso de recuento si satisface:

- (I).  $N(t) \geq 0$ .
- (II).  $N(t) \in \mathbb{N} \quad \forall t$ .
- (III). Si  $h < t$  entonces  $N(h) \leq N(t)$ .
- (IV). Para  $h < t$ ,  $N(t) - N(h)$  cuenta el número de sucesos que han ocurrido en el intervalo  $(h, t]$ .

Ejemplos de procesos de recuento son los coches que pasan por un determinado punto de la carretera o las reclamaciones de una compañía de seguros.

Una vez definidos estos conceptos, veamos un ejemplo importante y muy utilizado en los siguientes apartados: El proceso de Poisson.

### 2.2.2. Proceso de Poisson

Veremos como el proceso de Poisson es un proceso de recuento definido en tiempo continuo y espacio de estados discretos y por ello, es adecuado para describir el número de reclamaciones en una compañía de seguros, lo que será muy útil en modelos de riesgo.

Trabajaremos más adelante con procesos de Poisson homogéneos, que se define como sigue.

**Definición 16.** Un proceso de Poisson homogéneo  $(N(t), t \geq 0)$  de intensidad  $\lambda$ , verifica:

- (I).  $N(0) = 0$ .
- (II). Tiene incrementos estacionarios e independientes.
- (III).  $N(t)$  tiene distribución de Poisson de media  $\lambda t$ .
- (IV). Las trayectorias del proceso son funciones continuas a derecha y con límites a izquierda.

**Observación 2.1.** A partir de un instante arbitrario, el proceso que se observa es de nuevo un proceso de Poisson, esta es una consecuencia de la propiedad de incrementos estacionarios e independientes.

**Definición 17.** Dado un proceso de Poisson de intervalo  $X$ , definimos  $W_i$  el tiempo entre la  $(i-1)$ -ésima llegada y la  $i$ -ésima para  $i = 1, 2, \dots$  por ejemplo,  $W_1$  denota el primer tiempo de llegada.

Notemos que

$$P(W_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

esto es,  $W_1$  es exponencial de parámetro  $\lambda$ . Se puede probar que esto es generalizable a cualquier tiempo entre llegadas, ya que el proceso de Poisson es de incrementos estacionarios e independientes. Una propiedad que utilizaremos más adelante es la siguiente:

**Proposición 2.1.** Dado  $(N(t), t \geq 0)$  un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$ , los tiempos entre llegadas  $W_1, W_2, \dots$  son variables independientes, idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ .

### 2.3. Modelo de riesgo

Como ya hemos mencionado antes, una cartera de seguros está caracterizada por elementos que describiremos brevemente a continuación:

Denotamos por  $T_1, T_2, \dots$  los instantes de llegada de las reclamaciones, respectivamente  $W_1, W_2, \dots$  es el tiempo que transcurre entre sucesivas reclamaciones, es decir,  $W_n = T_n - T_{n-1}$ .

El número total de sucesos durante un periodo de tiempo  $[0, t]$  es  $N(t) := \sup\{i \geq 1 : T_i \leq t\}$  para  $t \geq 0$  y la cantidad reclamada asociada a  $T_n$  es  $X_n$ , por tanto  $S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$  es el importe total reclamado a la aseguradora en un periodo de tiempo  $t$ .

Llamamos  $\Pi(t)$  a los ingresos de aseguradora en un tiempo  $t$ , y  $U(t)$  denota el capital de esta en un instante de tiempo  $t$ , así  $U(0) = 0$  será el capital inicial de la aseguradora. Podemos expresar el capital de la compañía en un instante  $t$  como sigue:

$$U(t) = u + \Pi(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (2.2)$$

### 2.3.1. Modelo de riesgo clásico

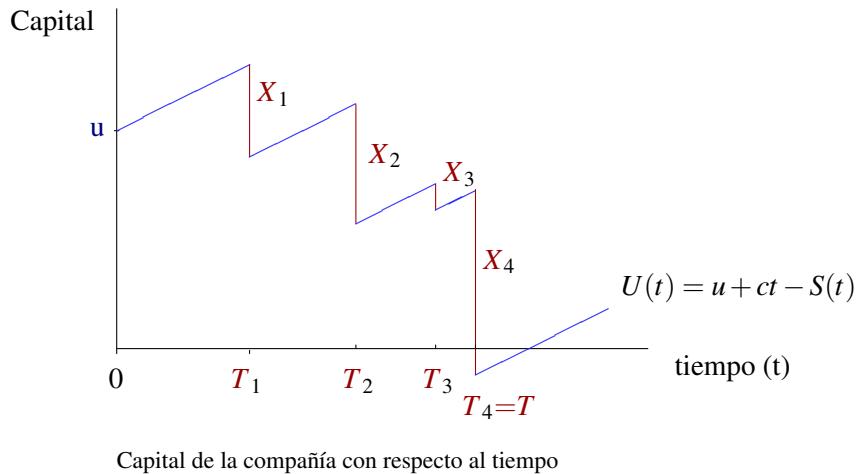
El objetivo en este trabajo es analizar un modelo de riesgo clásico que se caracteriza por lo siguiente:

- Los ingresos son lineales y por tanto  $\Pi(t) = ct, c > 0$ , donde  $c$  representará la tasa de ingresos de la compañía por unidad de tiempo.
- El número total de reclamaciones ( $N(t), t \geq 0$ ) sigue un proceso de Poisson homogéneo de intensidad  $\lambda$ .
- Las cantidades reclamadas  $X_1, X_2, \dots$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, no negativas e independientes del proceso de llegadas, con distribución común  $F_{X_1}$ .

Si el total de cantidades reclamadas en un tiempo determinado es mayor que el capital inicial  $u$  mas la suma de los ingresos en dicho tiempo, entonces  $U(t) < 0$ , es decir, el capital es negativo, si esto ocurre decimos que hemos alcanzado la ruina en un tiempo  $t$  y al primer  $t$  en alcanzar la ruina lo denotamos  $T$  y lo podemos expresar del siguiente modo:

$$T = \begin{cases} \inf\{t \mid t \geq 0, U(t) < 0\} & \text{si } U(t) < 0 \text{ para algún } t \\ \infty & \text{si } U(t) \geq 0 \text{ para todo } t \end{cases}$$

A continuación vemos una representación gráfica del modelo:



Si no hay reclamaciones, los ingresos anuales de la compañía son fijos, crecientes y con pendiente  $c$ . Notar que en los instantes  $T_i$  en el que se produce la  $i$ -ésima reclamación el capital desciende una cantidad  $X_i$  que se representa con un salto. Notar que en la cuarta reclamación se ha producido la ruina de la compañía.

### 2.4. Probabilidad de ruina

En esta sección buscamos determinar la probabilidad de ruina en el modelo de riesgo clásico y bajo la condición de de beneficio neto que definiremos a continuación.

**Definición 18.** La función probabilidad de ruina la expresamos como sigue:

$$\psi(u) = P(\text{Ruina, con capital inicial } u) = P(T < \infty)$$

Es decir, si  $T = \infty$  significa que nunca se alcanza a la ruina.

A continuación vamos a definir la condición de beneficio neto y el factor de recargo. Veremos que la primera es muy importante para garantizar que la ruina no sea un suceso seguro. El factor de recargo lo

utilizaremos más adelante para dar una cota de la probabilidad de ruina. Recordemos por la proposición 2.1 que en un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  los tiempos entre llegadas  $W_i$  son exponenciales, y por tanto  $E[W_i] = 1/\lambda$ .

**Definición 19.** Sean  $(W_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  los tiempos entre reclamaciones, entonces decimos que si se cumple  $cEW_i - EX_i = c/\lambda - EX_i > 0$ , entonces diremos que se cumple la condición de beneficio neto. El factor de recargo  $\theta$  se define como  $c = (1 + \theta)\lambda E[X_i]$ , y por tanto:

$$\theta = \frac{c}{\lambda E[X_i]} - 1 \quad (2.3)$$

Notemos que la condición de beneficio neto, nos asegura que tenemos más ingresos esperados que pérdidas esperadas por cada ciclo entre dos reclamaciones consecutivas. Notemos que  $\theta = 0$  significa que  $c = \lambda EX_i$ , por lo que la compañía no llegaría a la solvencia (los ingresos esperados por ciclo igualarían a las pérdidas). El factor de recargo, es por tanto una medida de la solvencia de la compañía.

Con el objetivo de dar una expresión que nos permita calcular la probabilidad de ruina, definimos la variable pérdida máxima acumulada como la máxima diferencia en el tiempo entre los ingresos de la aseguradora en dicho tiempo y los gastos de los que se tienen que hacer cargo y la denotamos por  $L$ , entonces:

$$L = \sup\{S(t) - ct \mid t \geq 0\}$$

Observar que si  $L > u$  entonces existe un instante  $t$  tal que el capital para dicho  $t$  es negativo, es decir, la compañía sufre la ruina y podemos concluir que  $L > u$  y  $T < \infty$  son equivalentes y por ello:

$$\psi(u) = P(L > u) = 1 - F_L(u) \quad (2.4)$$

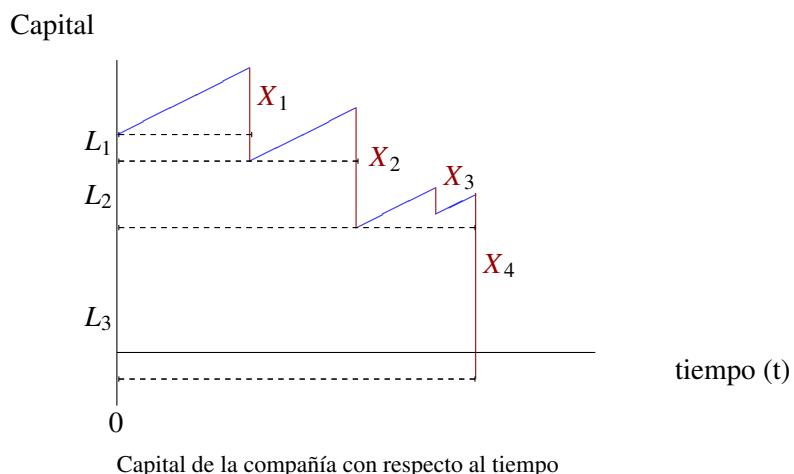
#### 2.4.1. Probabilidad de ruina como una suma

En esta sección estudiamos la probabilidad de no ruina y cómo se puede escribir como suma aleatoria donde el número aleatorio de sumandos sigue una distribución geométrica.

Comenzamos probando que podemos descomponer  $L$  en una suma de variables aleatorias, para ello consideramos los momentos en los que el proceso alcanza sus puntos más bajos y notamos que estos necesariamente van a suceder en momentos en los que la aseguradora se hace cargo de algún siniestro. Definimos descenso récord de la siguiente manera: En el primer instante en el que el capital de la compañía de seguros se sitúe por debajo de  $u$ , se producirá el primer descenso récord, y  $L_1$  será la diferencia entre ese mínimo y  $u$ . En general, denotamos por  $L_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  a la diferencia entre el último mínimo histórico y el anterior. Sea  $M$  el número aleatorio de descensos récord en toda la vida de la compañía, tenemos:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_M \quad (2.5)$$

Entendemos mejor este concepto a través de la siguiente representación:



Destacar que la ocurrencia de un siniestro no implica que tenga asociado un cantidad  $L_j$ , en nuestra gráfica esto sucede con la tercera reclamación, es cierto que el capital sufre una caída pero no es lo suficiente para llegar al mínimo alcanzado con la reclamación anterior. A su vez, tener asociado un  $L_j$ , no significa ruina, sino que se ha alcanzado un nuevo mínimo histórico, como ejemplo la cantidad  $L_1$ , donde tras la primera reclamación el capital es menor que el inicial, análogamente ocurre con la segunda reclamación  $L_2$  y no es hasta la cuarta reclamación que volvemos a tener un mínimo histórico y en este caso  $u < 0$ , y por ello estamos en ruina. Concretamente, en la trayectoria dibujada arriba, se han producido 3 descensos récord, y el último (que ha sucedido en la cuarta reclamación), es el que ha provocado la ruina de la compañía.

El proceso de Poisson, al ser de incrementos estacionarios e independientes, no tiene memoria y por ello la probabilidad de que un determinado descenso récord sea el último siempre es la misma, además, los descensos récord futuros se producirán independientemente de los descensos récord pasados. De este hecho, se puede demostrar que  $M$  sigue una distribución geométrica y que las cantidades  $L_1, L_2, \dots$  son independientes e idénticamente distribuidas. El parámetro de  $M$  que es la probabilidad de que el descenso récord anterior sea el último, es igual a la probabilidad de no llegar a ruina con un capital inicial igual a 0, por lo que es igual a  $1 - \psi(0)$ . Así  $L$  es una suma aleatoria geométrica. La distribución de  $L$  viene dada por el siguiente resultado:

**Teorema 2.1** (Distribución de la pérdida máxima acumulada). *Sea un modelo de riesgo clásico que satisface la condición de beneficio neto. Definimos  $p := \frac{\lambda E(X_1)}{c}$ . Sea  $M$  el número aleatorio de descensos récord y  $L$  la pérdida máxima acumulada, de modo que  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_M$  se tiene que  $M$  es independiente de  $(L_j)_{j \in \mathbb{N}}$  y tiene distribución geométrica:*

$$P(M = n) = (1 - p)p^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.6)$$

Además la distribución de descensos récord es la siguiente:

$$P(L_1 \leq u) = \frac{1}{E(X_1)} \int_0^u P(X_1 > s) ds, \quad u \geq 0 \quad (2.7)$$

Esta expresión recibe el nombre de distribución de equilibrio.

**Observación 2.2.** *La deducción del resultado anterior es larga pero se puede probar usando técnicas elementales. Este no es el objetivo del trabajo pero en [2] podemos encontrar una prueba utilizando transformada de Laplace.*

De la expresión de la función de distribución para una distribución compuesta vista en (1.35), podemos deducir el siguiente resultado:

**Corolario 2.1** (Fórmula de convolución de Beekman). *Si  $L_1$  es la distribución de equilibrio vista en el teorema anterior, la probabilidad de ruina puede ser expresada por la fórmula de convolución de Beekman:*

$$\psi(u) = P(L > u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)p^n P(L_1 + \dots + L_n > u) \quad (2.8)$$

**Observación 2.3.** *La fórmula de convolución de Beekman nos señala que la probabilidad de ruina se calcula como la cola de una suma geométrica. Además a partir de la distribución de equilibrio (2.7) podemos deducir que los descensos récord son variables continuas.*

**Observación 2.4.** *En particular el resultado anterior nos garantiza que, bajo la condición de beneficio neto, la ruina no es segura, ya que  $\psi(u) \leq \psi(0) = p$ , donde la última igualdad se puede comprobar particularizando en  $u = 0$  en (2.8).*

Aunque el corolario 2.1 nos indica la forma de calcular la probabilidad de ruina, sólo es posible encontrar una expresión explícita para (2.8) en ejemplos muy concretos, por ello, utilizamos algunas

fórmulas recursivas para el cálculo aproximado de la probabilidad, por ejemplo, la fórmula de recursión de Panjer, que lo veremos en el siguiente capítulo.

Vamos a finalizar este capítulo dando una cota superior para la fórmula de la probabilidad de ruina, primero introducimos algunos conceptos:

**Definición 20.** Dado el modelo de riesgo clásico con cantidades reclamadas distribuidas como  $X \geq 0$  con  $\mu_1 = E[X]$  el coeficiente de ajuste  $R$  es la solución positiva de la siguiente ecuación en  $r$  (siempre que dicha solución exista):

$$1 + (1 + \theta)\mu_1 r = m_X(r) \quad (2.9)$$

Donde  $m_X(r)$  es la función generadora de momentos de  $X$  y  $\theta$  es el factor de recargo definido en (2.3).

Para todos los valores de  $r$  se cumple que  $m_X(t)$  es estrictamente convexa ya que  $m''_X(t) = E[X^2 e^{tX}] > 0$ ,  $m'_X(0) = \mu_1 < (1 + \theta)\mu_1$  y salvo excepciones,  $m_X(t) \rightarrow \infty$ , por ello existe un único  $r > 0$  que satisface la ecuación y es el coeficiente de ajuste. Notar que para  $\theta \downarrow 0$  el límite del coeficiente de ajuste  $R$  es 0 de otro modo, si  $\theta \uparrow \infty$ ,  $R$  tiende a la asíntota de  $m_X(r)$  ó a  $\infty$ . El coeficiente de ajuste de la ecuación anterior es equivalente a la solución en  $r$  de la ecuación  $\lambda + cr = \lambda m_X(r)$ . Sea  $S(1)$  la cantidad total reclamada en un intervalo de longitud 1, entonces  $c - S$  es el beneficio en ese intervalo. Puesto que  $S$  es una suma aleatoria donde el número de sumandos sigue una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$  se tiene que  $m_S(r) = \exp\{\lambda(m_X(r) - 1)\}$  por (1.16) y (3.1). Teniendo en cuenta lo último, el coeficiente de ajuste  $R$  es solución de las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$e^{Rc} = E[e^{Rs}] \Leftrightarrow e^{Rc} = E[e^{-R(c-S)+Rc}] \Leftrightarrow m_{c-S}(-R) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{R} \log m_S(r) \quad (2.10)$$

**Ejemplo (Coeficiente de ajuste en una distribución exponencial)** Sea  $X$  distribuida exponencialmente con parámetro  $\beta = \frac{1}{\mu_1}$ . El coeficiente de ajuste correspondiente es la solución positiva de

$$1 + (1 + \theta)\mu_1 r = m_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r} \quad (2.11)$$

Para la última igualdad recordamos (1.17) y para despejar  $r$ , primero multiplicamos a ambos lados ( $\beta - r$ ):

$$(\beta - r) + (\beta - r)(1 + \theta)\mu_1 r = \beta \quad (2.12)$$

Pasamos todo al mismo lado de la igualdad y sacando  $r$  factor común, las soluciones son  $r = 0$  (solución trivialmente excluida) y  $r$  tal que

$$1 - (\beta - r)(1 + \theta)\mu_1 = 0 \quad (2.13)$$

es decir,

$$r = R = \frac{\theta\beta}{1 + \theta} \quad (2.14)$$

Este caso admite una expresión explícita para el coeficiente de ajuste.

Veamos ahora un conocido resultado de F. Lundberg en teoría de ruina.

**Teorema 2.2** (Cota exponencial de Lundberg para la probabilidad de ruina). *Dado un modelo de riesgo clásico con capital inicial  $u$  y coeficiente de ajuste  $R$ , entonces la probabilidad de ruina satisface la siguiente desigualdad:*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad (2.15)$$

*Demostración.* Definimos  $\psi_k(u)$  para  $-\infty < u < \infty$  y  $k = 0, 1, 2, \dots$  como la probabilidad de arruinarse antes o en la  $k$ -ésima reclamación, concretamente cuando  $u < 0$ ,  $\psi_k(u) = 1$ . Notar que  $\psi_k(u)$  es creciente en  $k$ , así para el caso  $k \rightarrow \infty$ ,  $\psi_k(u)$  crece hasta su límite que será  $\psi(u)$  para todo  $u$ , así, basta probar que  $\psi_k(u) \leq e^{-Ru}$  para cada  $k$ .

Para  $k = 0$  se satisface la desigualdad ya que si el capital  $u < 0$  entonces la probabilidad  $\psi_0(u) = 1$  y  $\psi_0(u) = 0$  si  $u \geq 0$ . Para  $k \neq 0$ , vamos a obtener la siguiente expresión recursiva para  $\psi_k(u)$  en la que  $x$  representa la magnitud de la primera reclamación y  $t$  el instante de tiempo en el que ocurre  $x$ , en particular utilizamos que el primer tiempo de llegada en un proceso de Poisson tiene distribución exponencial (recordar proposición 2.1).

$$\psi_k(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_{k-1}(u + ct - x) dF_{X_1}(x) \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (2.16)$$

Expliquemos la expresión anterior, notar intuitivamente que a partir del tiempo  $t$  observaríamos un proceso de Poisson (recordar la observación 2.1), en el que el capital inicial ha disminuido una cantidad  $x$ , es decir, tras la primera reclamación, el capital restante sería  $u + ct - x$ .  $\psi_{k-1}$  representa la probabilidad de ruina desde ese momento hasta la  $k$ -ésima reclamación (ya que en ese intervalo habrán  $k - 1$  reclamaciones), es decir, la probabilidad de ruina a partir de la primera reclamación.

Apliquemos inducción, supongamos que se cumple para  $k - 1$ , es decir,  $\psi_{k-1}(u) \leq e^{-Ru}$  con  $u$  real. Entonces, a partir de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \psi_k(u) &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-R(u + ct - x)\} dF(x) e^{-\lambda t} dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda \exp\{-t(\lambda + Rc)\} dt \int_0^\infty e^{Rx} dF(x) \\ &= e^{-Ru} \frac{\lambda}{\lambda + cR} m_Y(R) = e^{-Ru} \end{aligned}$$

Donde la ultima igualdad viene dada por la ecuación (2.5) del coeficiente de ajuste. □

## Capítulo 3

# Modelo de Riesgo. Recursión de Panjer

En este capítulo estudiamos más en profundidad las distribuciones compuestas, que como hemos visto, se utilizan para expresar las pérdidas de una compañía de seguros en un intervalo de tiempo y, sobre todo, se utilizan para calcular la probabilidad de ruina en el modelo de riesgo clásico, además veremos la recursión de Panjer que la utilizamos para expresar o aproximar su probabilidad.

### 3.1. Distribución compuesta

Suponer que  $S$  es una variable aleatoria compuesta descrita como en la introducción, utilizamos la siguiente notación:

$$\mu_k = E[X^k] \quad F(x) = P(X \leq x) \quad G(s) = P(S \leq s)$$

Vamos a calcular  $E[S]$ . Primero condicionaremos a  $N$  y luego utilizamos la independencia entre  $X_i$  y  $N$ . Se sigue del siguiente modo:

$$\begin{aligned} E[S] &= E[E[S|N]] = \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \dots + X_N | N = n] P[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \dots + X_n | N = n] P[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \dots + X_n] P[N = n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \mu_1 P[N = n] = \mu_1 E[N] \end{aligned}$$

Observemos que en la penúltima desigualdad es donde se ha aplicado la independencia entre  $X_1, \dots, X_n$  y  $N$ . Notar que el valor esperado del total reclamado coincide con el número de reclamaciones esperadas multiplicadas por las dimensiones de dichas reclamaciones.

Utilizamos la misma técnica para calcular la función generadora de momentos:

$$\begin{aligned} m_S(t) &= E[e^{tS}] = E[E[e^{tS}|N]] = \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{t(X_1+\dots+X_N)} | N = n] P[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{t(X_1+\dots+X_n)}] P[N = n] = \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}] P[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{tX_1}] E[e^{tX_2}] \dots E[e^{tX_n}] P[N = n] = \sum_{n=0}^{\infty} \{m_X(t)\}^n P[N = n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \left( e^{\log m_X(t)} \right)^n P[N = n] \\ &= E \left[ e^{\log m_X(t) \cdot N} \right] = m_N(\log m_X(t)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

**Ejemplo (Una distribución compuesta con forma cerrada.)** Queremos ver cuál es la función de distribución de  $S$  cuando  $N$  sigue una distribución geométrica de parámetro  $p$  con  $0 < p < 1$ , y  $X$  una distribución exponencial de parámetro  $\beta$ . Para ello primero calculamos la función generadora de momentos de  $S$  e intentamos identificarla con la función generadora de momentos de una variable aleatoria conocida. Para facilitar los cálculos denotamos  $q = 1 - p$  y recordamos (1.12) tenemos que:

$$m_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} pq^n = \frac{p}{1 - qe^t} \quad (3.2)$$

Recordad que  $X \sim \exp(\beta)$  y por (1.18) su función generadora de momentos es  $m_X(t) = (1 - t/\beta)^{-1}$ . A partir de la expresión obtenida arriba de  $m_S(t)$  tenemos:

$$m_S(t) = m_N(\log(m_X(t))) = \frac{p}{1 - qm_X(t)} = p + q \frac{p}{p - t/\beta} \quad (3.3)$$

Ahora consideremos una variable aleatoria  $X$  con función de distribución:

$$G(x) = p + q(1 - e^{-p\beta x}) = 1 - qe^{-p\beta x}, \quad x \geq 0 \quad (3.4)$$

Notar que  $m_S(t)$  coincide con la función generatriz de una variable cuya función de distribución es  $G(x)$  en (3.4) y así por la unicidad de la función generadora de momentos, se sigue que la función de distribución de  $S$  es (3.4), y por tanto tiene un salto en 0 de longitud  $p$  y de 0 en adelante se comporta como una distribución exponencial de parámetro  $p$ .

Gracias a este ejemplo y a la fórmula de convolución de Beekman, podemos escribir de manera explícita la probabilidad de ruina cuando las cantidades reclamadas son exponenciales.

Sea  $X_i \sim \text{Exp}(\beta)$ , sustituyendo la función de distribución de la exponencial en la distribución de equilibrio vista en (2.7) obtenemos:

$$\mathbb{P}(L_i \leq u) = \beta \int_0^u e^{-\beta s} ds = 1 - e^{-\beta u} \quad (3.5)$$

Así  $L_i$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $\beta$  y podemos utilizar el ejemplo anterior con  $N \sim \text{Geo}(1-p)$  y  $X_i \sim \text{Exp}(\beta)$ , concretamente de (3.4) deducimos que  $\mathbb{P}(L \leq u) = 1 - pe^{-(1-p)\beta u}$ , es decir, podemos expresar la probabilidad de ruina en este caso como sigue:

$$\psi(u) = \mathbb{P}(L > u) = pe^{-\beta u(1-p)} \quad (3.6)$$

Este es uno de los pocos casos en los que la probabilidad de ruina se puede calcular de modo explícito. Veamos ahora en otro ejemplo el cómputo de una suma aleatoria en la que  $N$  es Poisson y las cantidades reclamadas son exponenciales para observar que en este caso, no podemos dar una fórmula cerrada.

**Ejemplo (Distribución compuesta con cantidades reclamadas exponenciales y  $N$  Poisson.)** Sean  $X_i \sim \text{Exp}(\beta)$  y  $N \sim \text{Poi}(\lambda)$ , queremos calcular la distribución de  $\sum_{i=0}^N X_i$ . Por (1.17), sabemos que  $f(x) = \beta e^{-\beta x}$ , entonces  $X_1 + \dots + X_n$  por ser suma de exponenciales, es una variable aleatoria gamma de parámetros  $n$  y  $\beta$  con función de densidad

$$f^{*n}(x) = \frac{\beta^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0 \quad (3.7)$$

Como  $N$  es una variable aleatoria de Poisson de parámetro  $\lambda$ , utilizando (1.36) podemos calcular la función de distribución de  $\sum_{i=0}^N X_i$ , que tendrá como derivada la siguiente expresión:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \frac{\beta^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0 \quad (3.8)$$

Sin embargo, no es posible dar una expresión explícita para dicha expresión. Por tanto, si las cantidades reclamadas son exponenciales, la distribución de la pérdida máxima acumulada adolece de este problema.

### 3.2. Distribución del número de reclamaciones

Como se ha indicado en el capítulo anterior, un modelo frecuente para describir la distribución del número de reclamaciones es la variable aleatoria de Poisson. Este es un modelo sencillo, ya que únicamente tenemos que estimar un parámetro. Sin embargo, la adecuación de esta distribución debería contrastarse con datos históricos. En los casos prácticos, no siempre tendremos datos suficientes para contrastar si una distribución de Poisson es adecuada para  $N$ . Sin embargo notemos que en una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$ , tanto la esperanza como la varianza son iguales a  $\lambda$ . Si  $\text{Var}[N]/E[N] > 1$ , es decir, existe una sobredispersión, entonces una posible candidata sería la distribución binomial negativa como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo (Distribución de Poisson)** Imaginar que un conductor de coche provoca un número de accidentes anuales que siguen una distribución  $\text{Poi}(\lambda)$ . El parámetro  $\lambda$  es desconocido y diferente para cada conductor. Asumimos que  $\lambda$  es resultado de una variable aleatoria  $\Lambda$ , entonces la distribución condicionada al número de accidentes  $N$  anuales es  $\text{Poi}(\lambda)$  con  $\Lambda = \lambda$ . Veamos cuál es la distribución marginal de  $N$ : Sea  $U(\lambda) = P(\Lambda \leq \lambda)$  la función de distribución de  $\Lambda$ , entonces podemos escribir las probabilidades marginales de  $N = n$  como sigue:

$$P(N = n) = \int_0^\infty P(N = n | \Lambda = \lambda) dU(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} dU(\lambda) \quad (3.9)$$

Asumimos que  $\Lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  entonces:

$$m_N(t) = E[E[e^{tN} | \Lambda]] = E[e^{\Lambda(e^t - 1)}] = m_\Lambda(e^t - 1) \quad (3.10)$$

$$= \left( \frac{\beta}{\beta - (e^t - 1)} \right)^\alpha = \left( \frac{p}{1 - (1-p)e^t} \right)^\alpha \quad (3.11)$$

donde  $p = \beta/(\beta + 1)$ . Notar que la fórmula anterior coincide con la función generadora de momentos de una binomial negativa de parámetros  $\alpha$  y  $p$  y  $p = \frac{\beta}{\beta+1}$ , es decir,  $BN(\alpha, \frac{\beta}{\beta+1})$ , por tanto sustituyendo en (1.14) tenemos  $E[N] = \frac{\alpha}{\beta}$  y  $\text{Var}[N] = \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta^2}$  por lo que la binomial negativa sería un modelo que describiría la sobredispersión debida a la aleatoriedad de  $\Lambda$ . El valor de  $\Lambda$  no es una variable aleatoria observable para un conductor concreto, pero si pudiéramos observar a dicho conductor por un largo periodo de tiempo, notaríamos que la frecuencia de accidentes observados en un año, converge a su frecuencia a largo plazo, siempre que su patrón de siniestros no cambie.

### 3.3. Recursión de Panjer

En el año 1981, Panjer describió un método para calcular recursivamente la función de masa de probabilidad de una distribución compuesta cuando las cantidades reclamadas son discretas. Esta fórmula es muy conocida en el entorno actuarial y aparece en la mayoría de los libros de texto actuales en esta materia. Una de las utilidades de esta fórmula es dar aproximaciones para la probabilidad de ruina, como veremos más adelante. El resultado es el siguiente:

**Teorema 3.1.** Considerar una distribución compuesta  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  donde los sumandos  $X_i$  son variables aleatorias que toman valores sobre los enteros no negativos, con función de masa de probabilidad  $p(x)$ ,  $x = 0, 1, \dots$ . Considerar que  $N$ , el número aleatorio de sumandos tiene función de masa de probabilidad  $q_n = P(N = n)$ , satisfaciendo que

$$q_n = \left( a + \frac{b}{n} \right) \cdot q_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Sea  $g(s) = P(S = s)$ ,  $s = 0, 1, \dots$  entonces se satisfacen las siguientes relaciones de probabilidad:

$$g(0) = \begin{cases} P(N = 0) & \text{si } p(0) = 0; \\ m_N(\log p(0)) & \text{si } p(0) > 0; \end{cases} \quad (3.13)$$

Donde  $m_N$  es la función generatriz de momentos de  $N$ , y

$$g(s) = \frac{1}{1-ap(0)} \sum_{h=1}^s \left( a + \frac{bh}{s} \right) p(h) f(s-h), \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

*Demostración.* Notar que por ser reclamaciones independientes e idénticamente distribuidas y no negativas, tenemos que  $P(X_1 + \dots + X_n = 0) = p^n(0)$ , entonces el valor de  $f(0)$  lo obtenemos de (1.35) a partir de

$$F(S=0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) p^n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \exp[n \log(p(0))] \quad (3.15)$$

Para hallar la segunda igualdad, escribimos  $T_k = X_1 + \dots + X_k$  y notar que por idéntica distribución tenemos la siguiente igualdad:

$$E \left[ a + \frac{bX_1}{s} \middle| T_k = s \right] = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E \left[ a + \frac{bX_i}{s} \middle| T_k = s \right] = a + \frac{b}{sk} E[T_k | T_k = s] = a + \frac{b}{k}. \quad (3.16)$$

Análogamente, podemos describir la misma esperanza como sigue:

$$E \left[ a + \frac{bX_1}{s} \middle| T_k = s \right] = \sum_{h=0}^s \left( a + \frac{bh}{s} \right) P[X_1 = h | T_k = s] \quad (3.17)$$

Utilizando que  $P[X_1 = h | T_k = s] = P[X_1 = h, T_k - X_1 = s - h] / P[T_k = s]$  y que las  $X_i$  son independientes, se sigue de (3.16) y (3.17)

$$a + \frac{b}{k} = \sum_{h=0}^s \left( a + \frac{bh}{s} \right) \frac{P[X_1 = h] P[T_k - X_1 = s - h]}{P[T_k = s]} \quad (3.18)$$

Utilizando los resultados (3.12) y (3.18) tenemos que para  $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k P(T_k = s) = \sum_{k=1}^{\infty} q_{k-1} \left( a + \frac{b}{k} \right) P(T_k = s) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} q_{k-1} \sum_{h=0}^s \left( a + \frac{bh}{s} \right) P(X_1 = h) P(T_k - X_1 = s - h) \\ &= \sum_{h=0}^s \left( a + \frac{bh}{s} \right) P(X_1 = h) \sum_{k=1}^{\infty} q_{k-1} P(T_k - X_1 = s - h) \\ &= \sum_{h=0}^s \left( a + \frac{bh}{s} \right) P(X_1 = h) p(h) g(s-h) \\ &= ap(0)g(s) + \sum_{h=1}^s \left( a + \frac{bh}{s} \right) P[X_1 = h] p(h) g(s-h). \end{aligned}$$

Notemos que en la penúltima igualdad se ha tenido en cuenta que  $P(T_k - X_1 = s - h) = P(X_2 + \dots + X_k = s - h) = P(X_1 + \dots + X_{k-1} = s - h) = P(T_{k-1} = s - h)$  lo cual es cierto por ser  $X_i$  idénticamente distribuidas para todo  $i$ , y por tanto el segundo sumatorio coincide con  $g(s-h)$ . De la expresión anterior podemos obtener:

$$g(s)(1-ap(0)) = \sum_{h=1}^s \left( a + \frac{bh}{s} \right) p(h) g(s-h) \quad (3.19)$$

Y finalmente nos quedaría:

$$g(s) = \frac{1}{1-ap(0)} \sum_{h=1}^s \left( a + \frac{bh}{s} \right) p(h) g(s-h) \quad (3.20)$$

□

**Ejemplo (Distribuciones apropiadas para la recursión de Panjer)** Las distribuciones que satisfacen la relación (3.12) son las siguientes:

I. Distribución de Poisson, notar:

$$q_n = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = \frac{\lambda}{n} \underbrace{\frac{e^{-\lambda} \lambda^{n-1}}{(n-1)!}}_{q_{n-1}} \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.21)$$

Así  $a = 0$  y  $b = \lambda \geq 0$  y (3.13) y (3.14) se simplifica como sigue:

$$\begin{aligned} g(0) &= e^{-\lambda(1-p(0))}; \\ g(s) &= \frac{1}{s} \sum_{h=1}^s \lambda h p(h) f(s-h); \end{aligned}$$

Si  $a + b = 0$ , entonces  $q_0 = 1$  y  $q_j = 0$  para  $j = 1, 2, \dots$ , y obtenemos una distribución  $Poi(0)$ .

II. Distribución de Pascal o distribución binomial negativa, notar:

$$\begin{aligned} q_n &= \binom{r+n-1}{n} (1-p)^r p^n \\ &= \left( (1+p) + \frac{(1-p)(r-1)}{n} \right) \underbrace{\binom{r+n-2}{n} (1-p)^r p^{n-1}}_{q_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

De aquí obtenemos  $a = 1-p$  y  $b = (1-p)(r-1) = a(r-1)$ , es decir, una distribución  $BN(r, p)$  con  $p = 1-a$  y  $r = 1+b/a$ , y por lo tanto  $0 < a < 1$  y  $a+b > 0$ .

III. Distribución Binomial, observar:

$$\begin{aligned} q_n &= \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \\ &= \left( \frac{p}{p-1} + \frac{p(k+1)}{(1-p)n} \right) \underbrace{\binom{k}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{k-n+1}}_{q_{n-1}}, \quad 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Despejando obtenemos  $a = p/(p-1)$  y  $b = p(k+1)/(1-p)$  entonces  $a < 0$  y  $b = -a(k+1) > 0$ .

Hemos visto que si  $a + b = 0$  estamos ante una distribución  $Poi(0)$ , excluyendo este caso, existen valores de  $a$  y  $b$  para los que  $q_n = (a + \frac{b}{n})q_{n-1}$  para todo  $n = 1, 2, \dots$  no admite ninguna distribución de probabilidad válida, estos casos son los siguientes:

- Una probabilidad no puede ser negativa pero en el caso de  $q_0$  tampoco puede ser 0 ya que entonces tendríamos  $q_n = 0$  para  $n = 1, 2, \dots$  y la suma de probabilidades no será 1, por tanto  $q_0 \leq 0$  no es factible y como consecuencia  $q_0 > 0$ .
- $a + b < 0$  implica  $q_1 < 0$ , lo que tampoco es posible por ser una probabilidad.
- Si  $a < 0$  y  $a \neq b/n$ , entonces  $(a + b/n) < 0$  para algún  $n$  y las probabilidades serían negativas, por lo tanto, no es factible.
- si  $a \geq 1$  y  $a + b > 0$ , entonces  $nq_n = ((n-1)a + a + b)q_{n-1}$ , así  $q_n > \frac{q_1}{n}, n = 1, 2, \dots$  y por tanto  $\sum_n q_n = \infty$  y tampoco es factible ya que la suma de probabilidades debería dar 1.

**Ejemplo** Si  $X$  son variables aleatorias enteras y no negativas, consideramos una distribución de Poisson compuesta con  $\lambda = 4$  y  $P(X = 1, 2, 3) = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ , utilizando el ejemplo anterior, tenemos:

$$g(s) = \frac{1}{s} [f(s-1) + 4f(s-2) + 3f(s-3)], \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Comenzando con el valor  $f(0) = e^{-4} \approx 0,0183$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} g(1) &= f(0) = e^{-4}, \\ g(2) &= \frac{1}{2} [f(1) + 4f(0)] = \frac{5}{2}e^{-4}, \\ g(3) &= \frac{1}{3} [f(2) + 4f(1) + 3f(0)] = \frac{19}{6}e^{-4} \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

En el apéndice A tenemos un programa de R que nos iría calculando la función de masa de probabilidad en este caso.

## Capítulo 4

# Aproximaciones a la probabilidad de ruina

El objetivo de este capítulo es encontrar una aproximación a una distribución compuesta, es decir, a la distribución de sumas aleatorias, para ello tratamos de sustituir cada sumando por una variable aleatoria discreta cuya función de masa de probabilidad podamos calcular a través de la transformada de Laplace. Primero damos una introducción de los procesos gamma que utilizaremos más adelante.

**Definición 21.** Sea  $(S(u), u \geq 0)$  un proceso estocástico , diremos que es un proceso gamma si verifica:

- I.  $S(0) = 0$ .
- II. Tiene incrementos estacionarios e independientes.
- III.  $S(u)$  tiene densidad gamma de parámetros  $\alpha = u$  y  $\beta = 1$ .
- IV. Las trayectorias del proceso son funciones continuas a derecha y con límites a izquierda.

### 4.1. Discretización de una variable aleatoria no negativa usando su transformada de Laplace-Stieltjes

Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa y sea  $F$  su función de distribución, denotamos por  $\phi_X$  la transformada de Laplace-Stieltjes de  $X$  definida:

$$\phi_X(t) := E[e^{-tX}] = \int_0^\infty e^{-tu} dF(u), \quad t > 0 \quad (4.1)$$

Con el objetivo de discretizar  $X$ , definimos para todo  $t > 0$  la variable aleatoria  $X^{\bullet t}$  que toma valores  $\frac{k}{t}$ ,  $k \in \mathbf{N}$  de modo que:

$$P\left(X^{\bullet t} = \frac{k}{t}\right) = \frac{(-t)^k}{k!} \phi_X^{(k)}(t), \quad k \in \mathbf{N} \quad (4.2)$$

donde  $\phi_X^{(k)}$  denota la  $k$  – éSIMA derivada de  $\phi_X$ , sea  $F_t(x)$  la función de distribución de  $X^{\bullet t}$ :

$$F_t(x) := P(X^{\bullet t} \leq x) = \sum_{k=0}^{[tx]} \frac{(-t)^k}{k!} \phi_X^{(k)}, \quad x \geq 0 \quad (4.3)$$

donde  $[x]$  se refiere al mayor número entero que es menor o igual que  $x$ . No es contenido de este trabajo, pero está probado que  $F_t$  converge a  $F$  en todo punto de continuidad de  $F$  (es decir, se da la convergencia en distribución de  $X^{\bullet t}$  a  $X$ ) [5], y por ello, podemos utilizar  $X^{\bullet t}$  para aproximar  $X$ .

Para calcular la función de masa de probabilidad de  $X^{\bullet t}$  se necesita la transformada de Laplace-Stieltjes de  $X$  y sus derivadas. Como ejemplo, vamos a ver cómo quedaría la aproximación cuando  $X$  sigue una distribución gamma  $\Gamma(\beta, \alpha)$ , entonces su transformada de Laplace-Stieltjes es la siguiente:

$$\phi_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + t}\right)^\beta \quad (4.4)$$

Observar que coincide con la función generadora de momentos vista en (1.21) con el signo cambiado. Unos cálculos sencillos nos llevarían a probar que la función de masa de probabilidad de  $X^{\bullet t}$  es la siguiente ( ver [5]):

$$P(X^{\bullet t} = k/t) = \binom{\beta + k - 1}{k} \left( \frac{t}{t + \alpha} \right)^k \left( \frac{\alpha}{t + \alpha} \right)^\beta, \quad k \in \mathbb{N}, t > 0 \quad (4.5)$$

Nuestro objetivo es aplicar este método a una suma aleatoria de variables aleatorias. Veamos como hacerlo:

Sea  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, aplicamos (4.2) a cada una de las  $X_i$  para obtener  $(X_i^{\bullet t})_{i \in \mathbb{N}^*}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. De este modo podemos utilizar  $\sum_{i=1}^M X_i^{\bullet t}$  para obtener una aproximación de  $\sum_{i=1}^M X_i$ . Una de las ventajas computacionales de este método es la siguiente: Si podemos calcular la transformada de Laplace de  $\sum_{i=1}^M X_i$ , entonces el método se puede aplicar directamente obteniendo  $(\sum_{i=1}^M X_i)^{\bullet t}$ . En relación a esto, veamos el siguiente resultado:

**Proposición 4.1.** *Sea  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  una sucesión de v.a.i.i.d con función de distribución común  $F$ , consideramos  $(X_i^{\bullet t})_{i \in \mathbb{N}^*}$ , con  $t > 0$  una sucesión de v.a.i.i.d cuya función de masa de probabilidad viene dada al aplicar (4.2) para cada  $X_i$ , entonces:*

(a) *Se cumple*

$$X_1^{\bullet t} + \cdots + X_n^{\bullet t} \equiv (\mathcal{L})(X_1 + \cdots + X_n)^{\bullet t}, \quad t > 0, n \in \mathbb{N}^*$$

donde  $\equiv (\mathcal{L})$  significa igualdad en distribución.

(b) *Sea  $M$  una variable aleatoria no negativa e independiente de  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ . Se cumple:*

$$\sum_{i=1}^M X_i^{\bullet t} \equiv (\mathcal{L}) \left( \sum_{i=1}^M X_i \right)^{\bullet t}, \quad t > 0$$

*Demostración.* Probamos el apartado (a) por inducción sobre  $n$ . Sea  $t > 0$ , y  $k \in \mathbb{N}$ , el caso  $n = 1$  es trivial, para el caso general, primero probaremos que si  $X_1$  e  $Y_1$  son independientes (no necesariamente idénticamente distribuidas), entonces  $X_1^{\bullet t} + Y_1^{\bullet t} \equiv (\mathcal{L})(X_1 + Y_1)^{\bullet t}$ , para ello utilizamos (4.2) como sigue:

$$P\left((X_1 + Y_1)^{\bullet t} = \frac{k}{t}\right) = \frac{(-t)^k}{k!} \phi_{X_1 + Y_1}^{(k)}(t) = \frac{(-t)^k}{k!} (\phi_{X_1}(t) \phi_{Y_1}(t))^{(k)}$$

donde la segunda igualdad es cierta por ser  $X_1$  e  $Y_1$  independientes. A continuación aplicamos la regla de Leibniz para derivadas de un producto de orden superior.

$$\begin{aligned} P\left((X_1 + Y_1)^{\bullet t} = \frac{k}{t}\right) &= \frac{(-t)^k}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \phi_{X_1}^{(j)}(t) \phi_{Y_1}^{(k-j)}(t) \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{(-t)^j}{j!} \phi_{X_1}^{(j)}(t) \frac{(-t)^{k-j}}{(k-j)!} \phi_{Y_1}^{(k-j)}(t) \\ &= \sum_{j=0}^k P\left(X_1^{\bullet t} = \frac{j}{t}\right) P\left(Y_1^{\bullet t} = \frac{k-j}{t}\right) = P\left(X_1^{\bullet t} + Y_1^{\bullet t} = \frac{k}{t}\right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Así pues, asumimos que (a) se cumple para  $n$  y vemos que para  $n+1$ , tenemos por (4.6) aplicado a  $Y_1 = X_2 + \cdots + X_{n+1}$  lo siguiente:

$$X_1^{\bullet t} + \cdots + X_n^{\bullet t} + X_{n+1}^{\bullet t} \equiv (X_1)^{\bullet t} + (X_2 + \cdots + X_{n+1})^{\bullet t} \equiv (\mathcal{L})(X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1})^{\bullet t}$$

El apartado (b) se sigue a partir del apartado (a), ya que para todo  $x \geq 0$  tenemos,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^M X_i^{\bullet t} \leq x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(M=n)P(X_1^{\bullet t} + \dots + X_n^{\bullet t} \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(M=n)P((X_1 + \dots + X_n)^{\bullet t} \leq x) = P\left(\left(\sum_{i=1}^M X_i\right)^{\bullet t} \leq x\right) \end{aligned}$$

Lo que prueba el apartado (b).  $\square$

**Observación 4.1.** Consideramos  $\mathcal{C}[0, \infty)$  el conjunto de funciones continuas definidas en  $[0, \infty)$  y continuas por la derecha en 0. A partir de ahora consideramos que  $F \in \mathcal{C}[0, \infty)$  donde  $F$  es la función de distribución común a todas las variables de la sucesión  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ . Esto asegura que  $F_t$  definido en (4.3) satisface  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_t(x) = F(x)$  para todo  $x \geq 0$ .

El objetivo ahora es verificar una propiedad que hace esta aproximación bastante interesante: La convergencia uniforme de la aproximación vista utilizando el método anterior. Esto significaría que los errores de aproximación se mantendrán estables en  $x$ , lo que a priori, puede no suceder con otras aproximaciones. Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa con función de distribución  $F \in \mathcal{C}[0, \infty)$ . Sea  $(S(u), u \geq 0)$  un proceso gamma como en la definición 21, se cumple que (ver [5]):

$$F_t(x) = EF\left(\frac{S[\lfloor tx \rfloor] + 1}{t}\right), \quad x \geq 0 \quad (4.7)$$

De este modo hemos conseguido expresar  $F_t$  en función de un operador de tipo gamma al cual denotamos  $L_t^*$  y que se define de forma que dada una función  $f$  definida en  $[0, \infty)$ , el operador viene dado por la expresión:

$$L_t^* f(x) := Ef\left(\frac{(S[tx] + 1)}{t}\right), \quad x \geq 0 \quad (4.8)$$

siempre que  $L_1^*|f|(x) < \infty$ ,  $x \geq 0$ ,  $t > 0$ , es decir, el operador está bien definido.

Vamos a utilizar la fórmula (4.7) para evaluar la distancia entre  $\sum_{i=1}^M X_i$  y  $\sum_{i=1}^M X_i^{\bullet t}$  y estudiar la cota de error de la aproximación. Dadas dos funciones  $f$  y  $g$  definidas en  $[0, \infty)$ , definimos la norma infinito:

$$\|f - g\| := \sup_{x \geq 0} |f(x) - g(x)|$$

Recordar que dadas dos variables aleatorias no negativas  $X$  e  $Y$  y sus respectivas funciones de distribución  $F$  y  $G$ , entonces la distancia de Kolmogorov de  $X$  e  $Y$  es la máxima distancia entre sus funciones de distribución, es decir, utilizando la notación anterior:

$$d(X, Y) := \|F - G\| \quad (4.9)$$

en nuestro caso, tenemos  $X$  y  $X^{\bullet t}$  variables aleatorias no negativas y sus respectivas funciones de distribución  $F$  y  $L_t^*F$ , definido según (4.8), y siguiendo lo anterior llegamos a dar una expresión de la distancia entre  $X$  y  $X^{\bullet t}$  en términos del operador de tipo gamma:

$$d(X, X^{\bullet t}) := \|F - L_t^*F\| \quad (4.10)$$

Dado que nuestro objetivo se centra en evaluar la distancia entre  $\sum_{i=1}^M X_i$  y  $\sum_{i=1}^M X_i^{\bullet t}$ , vemos un resultado que nos facilita aplicar lo visto en nuestro caso:

**Proposición 4.2.** Sea  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  una sucesión de variables aleatorias no negativas independientes e idénticamente distribuidas y función de distribución  $F \in \mathbf{C}[0, \infty)$ . Sea para cada  $t > 0$ ,  $(X_i^{\bullet t})$  una sucesión de variables aleatorias discretas no negativas independientes e idénticamente distribuidas cuya función de masa de probabilidad viene dada en (4.2). Sea  $L_1^*$  definido en (4.8), entonces:

(a) Dada  $F^{*n}$  la función de distribución de  $X_1 + \dots + X_n$ , entonces  $L_t^* F^{*n}$  la función de distribución de  $X_1^{\bullet t} + \dots + X_n^{\bullet t}$ , y se verifica:

$$d(X_1 + \dots + X_n, X_1^{\bullet t} + \dots + X_n^{\bullet t}) = \|F^{*n} - L_t^* F^{*n}\|, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

(b) Sea  $M$  una variable aleatoria no negativa e independiente de  $(X_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ , entonces para todo  $t > 0$

$$d\left(\sum_{i=1}^M X_i, \sum_{i=1}^M X_i^{\bullet t}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(M=n) \|L_t^* F^{*n} - F^{*n}\|$$

*Demostración.* Hemos visto en la proposición (4.1) que la función de distribución de  $X_1^{\bullet t} + \dots + X_n^{\bullet t}$  coincide con la función de distribución de  $(X_1 + \dots + X_n)^{\bullet t}$  que es  $L_t^* F^{*n}$ , por lo que el apartado (a) se sigue inmediatamente al sustituir en (4.10). Para demostrar el apartado (b), aplicamos la desigualdad triangular y el apartado (a),

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=1}^M X_i, \sum_{i=1}^M X_i^{\bullet t}\right) &= \sup_x \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} P(M=n) \left| P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) - P\left(\sum_{i=1}^n X_i^{\bullet t} \leq x\right) \right| \right\} \\ &\leq \sup_x \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} P(M=n) \left| P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) - P\left(\sum_{i=1}^n X_i^{\bullet t} \leq x\right) \right| \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(M=n) \|L_t^* F^{*n} - F^{*n}\| \end{aligned}$$

□

**Observación 4.2.** Vemos que la aproximación que planteamos es invariante respecto a un cambio de escala en la sucesión inicial  $(X_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ , es decir, sea  $X$  una variable aleatoria no negativa y  $X^{\bullet t}$  descrita según (4.2) para  $t > 0$ , se tiene que:

$$(cX)^{\bullet t} \equiv (\mathcal{L})cX^{\bullet ct}, \quad t > 0, c > 0 \quad (4.11)$$

Esto se puede probar aplicando  $\phi_{cX}^{(k)}(t) = c^k \phi_X^{(k)}(ct)$  para  $k \in \mathbf{N}$ , en (4.3),

$$P((cX)^{\bullet t} \leq x) = \sum_{k=0}^{[tx]} \frac{(-t)^k}{k!} \phi_{cX}^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{[ctx/c]} \frac{(-ct)^k}{k!} \phi_X^{(k)}(ct) = P(X^{\bullet ct} \leq \frac{x}{c})$$

esto demuestra que  $(cX)^{\bullet t}$  y  $cX^{\bullet ct}$  tienen la misma función de distribución y esto prueba (4.11). Como consecuencia tenemos que  $\sum_{i=1}^M (cX_i)^{\bullet t} \equiv (\mathcal{L})c \sum_{i=1}^M X_i^{\bullet ct}$  entonces:

$$d\left(\sum_{i=1}^M cX_i, \sum_{i=1}^M (cX_i)^{\bullet t}\right) = d\left(c \sum_{i=1}^M X_i, c \sum_{i=1}^M (X_i)^{\bullet ct}\right) = d\left(\sum_{i=1}^M X_i, \sum_{i=1}^M (X_i)^{\bullet ct}\right) \quad (4.12)$$

Donde hemos utilizado que  $d(cX, cY) = d(X, Y)$  lo cual es cierto por definición. Esta observación será útil para dar simplificaciones en la notación.

En el siguiente resultado damos (sin demostración) una cota de error para la aproximación vista en el caso particular de una distribución gamma de parámetro de forma  $\beta$  y parámetro de escala 1 (aunque la observación 4.2 nos indica que el resultado es cierto para cualquier parámetro de escala). Este resultado nos da una cota de error cuando discretizamos una suma aleatoria con sumandos gamma. Como caso particular, veremos el comportamiento de esta aproximación la probabilidad de ruina cuando las cantidades reclamadas son gamma.

**Teorema 4.1.** Sea  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas cuya función de distribución es la de una  $\Gamma(\beta, 1)$  (es decir, una distribución gamma de parámetro de forma  $\beta$ ) y sea  $(X_i^{\bullet t})_{i \in \mathbb{N}^*}$  para  $t > 0$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas cuya función de distribución viene dada en (4.5). Dada  $M$  una variable aleatoria entera no negativa e independiente de  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  tal que  $P(M > 0) > 0$ . Definimos  $m := \min\{n \in \mathbb{N}^* : P(M = n) > 0\}$ , donde  $\mathbb{N}^*$  denota los enteros estrictamente positivos. Entonces si  $m\beta \geq 1$ , se cumple:

$$d \left( \sum_{i=1}^M X_i, \sum_{i=1}^M X_i^{\bullet t} \right) \leq c_2(m\beta) P(M > 0) \frac{1}{t} \leq \left( 1 + \frac{3e^{-1}}{4} + \frac{\sqrt{e^{-2} + 4}}{4} \right) \frac{1}{t} \quad (4.13)$$

con  $c_2$  definido como sigue:

$$c_2(\beta) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left( a(\beta) + \frac{3}{4} b(\beta) + \frac{1}{4} \sqrt{b(\beta)^2 + 4a(\beta)^2} \right) \quad (4.14)$$

para

$$a(\beta) := (\beta - 1)^{(\beta-1)} e^{-(\beta-1)} \quad (4.15)$$

$$b(\beta) := \max \left\{ x_1^{(\beta-1)} e^{-x_1} (\beta - 1 - x_1), x_2^{(\beta-1)} e^{-x_2} (x_2 - (\beta - 1)) \right\}, \quad (4.16)$$

donde

$$x_1 = \beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4\beta - 3} \quad y \quad x_2 = \beta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4\beta - 3}.$$

## 4.2. Aproximaciones para cantidades reclamadas exponenciales.

En esta sección es utilizaremos la aproximación anterior en el caso en que  $X_i \sim \text{Exp}(\beta)$  y  $N \sim \text{Geo}(p)$  para calcular la probabilidad de ruina.

Sea  $X_i \sim \text{Exp}(\beta)$ , hemos visto en (3.5) que la distribución de equilibrio de  $L_i$  también es exponencial y por lo tanto utilizando la fórmula de convolución de Beekman, podemos expresar la probabilidad de ruina como:

$$\psi(u) = P \left( \sum_{i=1}^M L_i > u \right) \quad (4.17)$$

donde  $M$  es una geométrica de parámetro  $1 - p$  y  $L_i$  es exponencial de parámetro  $\beta$ . Puesto que la distribución exponencial es continua, vamos a utilizar la aproximación del Capítulo 4 para discretizar la variable aleatoria  $L_i$ . Denotamos  $L_i^{\bullet t}$  a la discretización de la variable aleatoria  $L_i$  y utilizando (4.2) podemos ver que su función de masa de probabilidad es la siguiente:

$$P \left( L_i^{\bullet t} = \frac{k}{t} \right) = \frac{(-t)^k}{k!} \left( (-1)^k \frac{\beta k!}{(\beta + t)^{k+1}} \right) = \frac{t^k \beta}{(\beta + t)^{k+1}} \quad (4.18)$$

Observar que  $L_i^{\bullet t} = \frac{1}{t} Z_i$  donde  $Z_i \sim \text{Geo} \left( \frac{\beta}{\beta + t} \right)$  ya que podemos expresarla de la siguiente forma

$$P \left( L_i^{\bullet t} = \frac{k}{t} \right) = \frac{t^k \beta}{(\beta + t)^{k+1}} = \frac{\beta}{\beta + t} \left( \frac{t}{\beta + t} \right)^k \quad (4.19)$$

donde

$$\frac{t}{\beta + t} = 1 - \frac{\beta}{\beta + t} \quad (4.20)$$

Es decir, utilizando esta aproximación, obtenemos que la probabilidad de ruina puede expresarse como una suma geométrica de variables aleatorias geométricas. De esta manera obtendríamos la siguiente aproximación para la probabilidad de ruina:

$$\psi_{ap}(u) = P \left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^N Z_i > u \right) = P \left( \sum_{i=1}^N Z_i > tu \right) \quad (4.21)$$

Podemos comparar la aproximación estudiada con las aproximaciones calculadas en [6], y aunque no las vamos a demostrar, diferenciamos entre cota superior e inferior. Para la cota superior, aproximamos  $L_i$  por  $h([L_i/h] + 1)$ , es decir, discretizamos los valores de  $L_i$  en un intervalo de longitud  $h$  a su valor en el extremo superior. Llamando  $N_i = [L_i/h] + 1$ , tendríamos:

$$\psi_u(u) = P\left(h \sum_{i=1}^N N_i > u\right) = P\left(\sum_{i=1}^N N_i > \frac{u}{h}\right), \quad u \geq 0 \quad (4.22)$$

La cota inferior viene dada approximando  $L_i$  por  $h[L_i/h]$ , es decir, discretizamos los valores de  $L_i$  en un intervalo de longitud  $h$  por su valor en el extremo inferior. Llamando  $K_i = [L_i/h]$ , tendríamos:

$$\psi_l(u) = P\left(\sum_{i=1}^N K_i > \frac{u}{h}\right), \quad u \geq 0 \quad (4.23)$$

También podemos comparar con el valor exacto de la probabilidad de ruina, recordamos por (3.6) que el valor exacto de la probabilidad de ruina en este caso viene dada por:

$$\psi(u) = pe^{-\beta u(1-p)}, \quad u \geq 0 \quad (4.24)$$

En el anexo B encontramos un ejemplo numérico para comprobar el comportamiento de las aproximaciones usando la recursión de Panjer y  $t = 1/h$ , para obtener las mismas longitudes de discretización. Utilizaremos el paquete de R "actuar" el cual está pensado para realizar cálculos asociados a la matemática actuarial y en particular permite discretizar una variable continua por los métodos anteriormente descritos y aplicar la recursión de Panjer.

# Bibliografía

- [1] KAAS, R., GOOVARTS, M., DHAENE, J., DENUIT, M., 2008. *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*, 2<sup>a</sup> edición. Springer.
- [2] ROLSKI, T., SCHMIDLI, H., SCHMIDT, V., TEUGELS, J., 1999. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley Chichester.
- [3] SANGÜESA, C., 2008. *Error bounds in approximations of random sums using gamma-type operators*. *Insurance: Mathematics and Economics* 42, 484-491.
- [4] ADELL, J.A., SANGÜESA, C., 1999. *Direct and converse inequalities for positive linear operators on the positive semi-axis*. *J Austral. Math. Soc. (Series A)* 66 , 91.
- [5] ADELL, J.A., DE LA CAL, J., 1994. *Approximating gamma distributions by normalized negative binomial distributions*. *Journal of Applied Probability* 31, 391-400.
- [6] SACHEZ, M.C., SANGÜESA, C., 2022. *Trabajo de fin de grado. El modelo de riesgo clásico en matemática actuarial*. Disponible en <https://zaguan.unizar.es/record/124832/files/TAZ-TFG-2022-4728.pdf>.
- [7] SANGÜESA, C., *Apuntes de máster. El proceso de Poisson*.

## Anexo A

# Implementación de la recursión de Panjer en R

Utilizaremos un código en R para calcular la recursión de Panjer de una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$  y podremos calcular el ejemplo planteado en el capítulo 3. Para ello primero explicamos el código.

### A.1. Explicación código

El objetivo es implementar en R las siguientes funciones, las cuales ya hemos visto que satisfacen la fórmula de la recursión de Panjer en una distribución de Poisson

$$g(0) = e^{-\lambda(1-p(0))};$$
$$g(s) = \frac{1}{s} \sum_{h=1}^s \lambda h p(h) g(s-h);$$

El código utilizado es el siguiente:

```
Panjer.Poisson<-function(p, lambda){  
  if (sum(p)>1 || any(p<0)) stop("p es un parámetro, no una densidad")  
  if (lambda * sum (p) >727) stop("underflow")  
  cumul<-g<-exp(-lambda * sum(p))  
  r<-length(p)  
  s<-0  
  repeat{  
    s<-s+1  
    m<-min(s, r)  
    last<-lambda / s*sum(1:m * head(p,m)*rev(tail(f,m)))  
    g<-c(g,last)  
    cumul<- cumul+last  
    if (cumul > 0.99999999) break }  
  return(g)  
}
```

A continuación desglosamos el código para entenderlo mejor. Recordar que el parámetro  $p$  es un vector de probabilidades que contiene los valores  $p(1), p(2), \dots$ , así podemos denotar  $g(0) = 1 - \sum_{h=1}^s p(h)$ , es por esto que en primer lugar descartamos la posibilidad de que la suma de los componentes de este vector sea mayor que 1. Además el parámetro 'lambda' representa  $\lambda$  y no debería ser demasiado grande, por ello el programa se detiene si  $\lambda(1 - p(0)) > 727$  ya que en ese caso el valor de  $g(0)$  es demasiado pequeño. Utilizamos la operación *if* para implementar estas dos condiciones:

```
if (sum(p)>1 || any(p<0)) stop("p es un parámetro, no una densidad")
if (lambda * sum (p) >727) stop("underflow")
```

El valor de  $g(0)$  se calcula teniendo en cuenta la siguiente expresión  $f(0) = 1 - \sum_{h=1} p(h)$  y utilizamos una variable a la que llamamos 'cumul' para almacenar sus valores.

```
cumul<-f<-exp(-lambda * sum(p))
```

Para el cálculo de  $g(s)$  definimos una variable  $s$  que inicializamos en 0 y  $r$  otra variable que la definimos como la longitud de del vector de probabilidades  $p$ . Con estas variables definidas, iniciamos un bucle que calculará su valor utilizando las funciones *head*, *rev* y *tail* donde *head* permite visualizar las primeras observar las primeras filas de datos, *rev* que coloca los componentes de un vector en orden inverso y *tail* permite obtener las ultimas filas de datos.

```
r<-length(p)
s<-0
repeat{
  s<-s+1
  m<-min(s, r)
  last<-lambda / s*sum(1:m * head(p,m)*rev(tail(f,m)))
  g<-c(g,last)
}
```

Y para obtener el valor final de  $g(s)$ :

```
cumul<- cumul+last
```

## A.2. Ejemplo numérico

Vamos a utilizar el código explicado para obtener el valor numérico en el ejemplo (3.3) donde el vector de probabilidades es  $(0,25,0,5,0,25)$  y  $\lambda = 4$

```
pp<-Panjer.Poisson (c(0.25,0.5,0.25), 4)*exp(4)
pp
```

Y obtenemos como resultado los valores de  $g(h)$  para  $h \in [1,45]$

```
> pp
[1] 1.000000e+00 1.000000e+00 2.500000e+00 3.166667e+00 4.041667e+00 4.841667e+00
[7] 5.084722e+00 5.225198e+00 5.011136e+00 4.574011e+00 4.029415e+00 3.396260e+00
[13] 2.769663e+00 2.187919e+00 1.675382e+00 1.249070e+00 9.071473e-01 6.429161e-01
[19] 4.454841e-01 3.020311e-01 2.006358e-01 1.307244e-01 8.360731e-02 5.253967e-02
[25] 3.246425e-02 1.973779e-02 1.181592e-02 6.968883e-03 4.051640e-03 2.323273e-03
[31] 1.314549e-03 7.342762e-04 4.050717e-04 2.207826e-04 1.189382e-04 6.335096e-05
[37] 3.337365e-05 1.739438e-05 8.972154e-06 4.581298e-06 2.316326e-06 1.159951e-06
[43] 5.754559e-07 2.828892e-07
```

## Anexo B

# Aproximaciones de la probabilidad de ruina en R

El objetivo es obtener un resultado numérico de la probabilidad de ruina cuando  $X_i \sim \text{Exp}(\beta)$  y  $N \sim \text{Geo}(p)$  utilizando la aproximación del Capítulo 4 y comparar los resultados con los obtenidos en [6]. Para ello, calculamos en R la probabilidad de ruina utilizando la recursión de Panjer con la aproximación calculada y comparamos el resultado con las aproximaciones en [6] y con su valor exacto.

### B.1. Explicación código

Dividimos la explicación en dos partes, primero obtendremos una cota superior e inferior de la probabilidad de ruina utilizando el método de [6] y a continuación calcularemos la misma probabilidad con la aproximación descrita anteriormente en ( 4.19 ). Una vez tengamos ambos cálculos, podremos compararlos.

Vamos a utilizar el paquete "actuar" que incluye funciones específicas de matemática actuarial. Puesto que algunas funciones específicas para el cálculo numérico de dicha probabilidad requieren una distribución discreta, vamos a utilizar una función que sirve para discretizar las funciones de distribución continuas, esta función se llama "discretize" y en nuestro caso la utilizamos para discretizar una distribución exponencial de parámetro  $\beta$ . Esta función admite varios métodos de discretización, en concreto utilizaremos los métodos "upper" y "lower", el resultado será una distribución definida en  $0, h, 2h, \dots$  donde  $h$  es la longitud de discretización.

```
fL<-discretize(pexp(x,beta), from= 0, to = 1000, step=h, method="lower")
fU<-discretize(pexp(x,beta), from= 0, to = 1000, step=h, method="upper")
```

En este caso hemos tomado un rango de discretización de 0 a 1000 y la orden "pexp" indica la función de distribución de una exponencial de parámetro  $\beta$ .

Una vez obtenida la discretización, podemos utilizamos la función "aggregateLoss" con los sumandos parametrizados que nos permite aproximar la distribución de la pérdida máxima acumuladas. Concretamente utilizaremos el método "recursivo" en el cual utiliza el algoritmo de Panjer.

```
FL<-aggregateDist(method = "recursivo", model.freq= "geometric", model.sev = fL,
prob= 1-p, x.scale = h)
FU<-aggregateDist(method = "recursivo", model.freq= "geometric", model.sev = fU,
prob= 1-p, x.scale = h)
```

La entrada "model.sev" es un vector de probabilidades de las cantidades reclamadas, que en nuestro caso se ha calculado con la función de discretización, y "model.freq" representa la distribución del número

de reclamaciones, que en esta caso es geométrica de parámetro  $1 - p$  como hemos visto en (2.6). Por último obtenemos una aproximación a la probabilidad de ruina para la cota superior e inferior.

```
psiL<-function(u){1-FU(u)}
psiU<-function(u){1-FL(u)}
```

Una vez calculada la aproximación a la probabilidad de ruina usando este método, repetimos el proceso pero con la aproximación calculada en el Capítulo 4.

```
fJ<-dgeom((0:1000), j)
FJ<-aggregateDist(method = "recursive", model.freq= "geometric", model.sev = fJ,
prob= 1-p, x.scale = h)
psiJ<-function(u){1-FJ(u)}
```

En este caso la función "aggregateDist" utiliza de nuevo el método "recursive" con la misma distribución para el número de reclamaciones que en los casos anteriores, sin embargo, ahora la función de distribución de las cantidades reclamadas es la geométrica de parámetro  $j$  calculada en el Capítulo 4. Utilizamos la expresión explícita calculada en (3.6) en el que cantidades reclamadas son exponenciales y número de sucesos tiene una distribución geométrica para calcular la probabilidad exacta de ruina.

```
psiE<-function(U){p*exp(-beta*u*(1-p))}
```

Finalmente escribimos los resultados en un vector para poder compararlos con la siguiente orden.

```
cbind(u=u, lower= 1- FU(u), psiE=psiE(u), upper=1-FL(u) , aproximación=1-FJ(u))
```

Y terminamos con una representación gráfica de los resultados obtenidos.

```
plot(u, 1- FL(u),xlim=c(0,15), type="l", col="green", ylab= " ")
lines(u, 1- FU(u),xlim=c(0,15), type="l", col="blue", ylab= " ")
lines(u, 1- FJ(u),xlim=c(0,15), type="l", col="black", ylab= " ")
lines(u, p*exp(-beta*u*(1-p))),xlim=c(0,15), type="l", col="red",
ylab= " Probabilidad de ruina")
legend("topright", legend = c("cota inferior ", "valor exacto",
"cota superior", "aproximación"), lwd = 3, col=c("blue", "red", "green", "black"))
```

## B.2. Primer ejemplo numérico

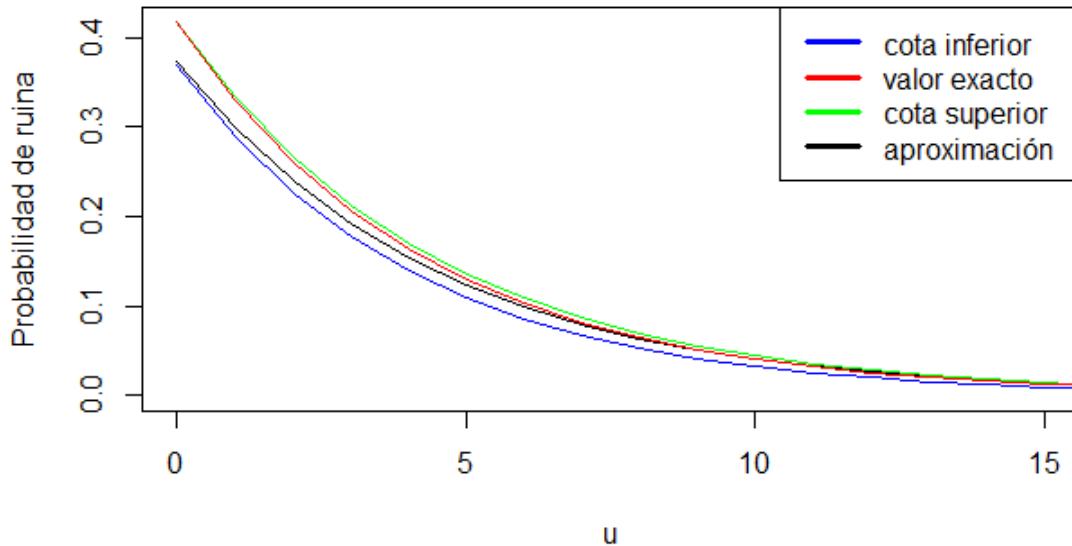
Primero debemos introducir el capital inicial para el que vamos a calcular la probabilidad, concretamente hemos establecido que sea un vector que toma valores de 0 a 100 aunque tan solo utilizaremos la primera mitad para hacer la comparación. También es importante definir la longitud de discretización  $h$ , el parámetro de la distribución exponencial  $\beta$ , la constante  $c$  y el parámetro  $\lambda$  necesarios para calcular la probabilidad  $p = \lambda E[X_i]/c$ , con  $E[X_i] = 1/\beta$ , entonces:

```
h<-0.5
beta<-0.4
media<-1/beta
c<-1.2
lambda<-0.2
p<-lambda*media/c
u<-seq(0,1000)
j<- beta/(beta + 1/h)
```

Con estos parámetros, imprimimos la siguiente tabla con la probabilidad de riesgo para cada método y para cada valor de  $u$ . La primera y tercera columna son los resultados al utilizar el método "*lower*" y "*upper*" respectivamente, la segunda columna es el valor exacto de las probabilidades y la cuarta es el valor obtenido al utilizar la aproximación descrita en el Capítulo 4.

	u	lower	psiE	upper	aproximación
[1,]	0	3.690086e-01	4.166667e-01	4.166667e-01	3.731343e-01
[2,]	1	2.894223e-01	3.299540e-01	3.332084e-01	2.992389e-01
[3,]	2	2.270008e-01	2.612871e-01	2.664669e-01	2.399778e-01
[4,]	3	1.780422e-01	2.069105e-01	2.130936e-01	1.924526e-01
[5,]	4	1.396428e-01	1.638503e-01	1.704110e-01	1.543394e-01
[6,]	5	1.095252e-01	1.297513e-01	1.362777e-01	1.237741e-01
[7,]	6	8.590321e-02	1.027487e-01	1.089813e-01	9.926190e-02
[8,]	7	6.737595e-02	8.136565e-02	8.715240e-02	7.960411e-02
[9,]	8	5.284457e-02	6.443261e-02	6.969580e-02	6.383934e-02
[10,]	9	4.144726e-02	5.102351e-02	5.573574e-02	5.119662e-02
[11,]	10	3.250808e-02	4.040499e-02	4.457189e-02	4.105766e-02
[12,]	11	2.549687e-02	3.199629e-02	3.564415e-02	3.292661e-02
[13,]	12	1.999780e-02	2.533753e-02	2.850464e-02	2.640584e-02
[14,]	13	1.568476e-02	2.006452e-02	2.279516e-02	2.117643e-02
[15,]	14	1.230193e-02	1.588889e-02	1.822930e-02	1.698266e-02
[16,]	15	9.648699e-03	1.258224e-02	1.457797e-02	1.361942e-02
[17,]	16	7.567706e-03	9.963747e-03	1.165801e-02	1.092224e-02
[18,]	17	5.935533e-03	7.890187e-03	9.322913e-03	8.759200e-03
[19,]	18	4.655381e-03	6.248157e-03	7.455536e-03	7.024531e-03
[20,]	19	3.651327e-03	4.947850e-03	5.962194e-03	5.633395e-03
[21,]	20	2.863823e-03	3.918151e-03	4.767968e-03	4.517760e-03
[22,]	21	2.246165e-03	3.102743e-03	3.812945e-03	3.623064e-03
[23,]	22	1.761721e-03	2.457030e-03	3.049213e-03	2.905554e-03
[24,]	23	1.381760e-03	1.945696e-03	2.438456e-03	2.330139e-03
[25,]	24	1.083748e-03	1.540777e-03	1.950034e-03	1.868679e-03
[26,]	25	8.500092e-04	1.220125e-03	1.559443e-03	1.498606e-03
[27,]	26	6.666826e-04	9.662042e-04	1.247087e-03	1.201823e-03
[28,]	27	5.228951e-04	7.651270e-04	9.972956e-04	9.638143e-04
[29,]	28	4.101192e-04	6.058961e-04	7.975375e-04	7.729409e-04
[30,]	29	3.216663e-04	4.798028e-04	6.377910e-04	6.198679e-04

Observar que los valores obtenidos para la aproximación descrita en el Capítulo 4 se encuentra siempre entre la probabilidad de ruina calculada con los métodos "*lower*" y "*upper*". Para que sea más sencilla la comprensión de los datos, dibujamos la gráfica en la que se puede observar cómo esta aproximación es mejor que las anteriores, (excepto en torno a 0, ya que el método "*upper*" da la probabilidad exacta de ruina en el 0).



### B.3. Segundo ejemplo numérico

Podemos repetir los cálculos con datos diferentes, por ejemplo:

```

h<-0.25
beta<-1
media<-1/beta
c<-1.2
lambda<-0.6
p<-lambda*media/c
u<-seq(0,1000)
j<- beta/(beta + 1/h)

```

En este caso, ocurre de manera similar al anterior, el valor de la aproximación estudiada en el Capítulo 4 es siempre menor que la aproximación por el método *"upper"* y mayor que la calculada con el método *"lower"*, de hecho observamos de nuevo que cuando  $u$  es pequeño, la aproximación del Capítulo 4 es menor que el valor real y por tanto se asemeja más a la calculada por el método *"lower"*:

	u	lower	psiE	upper	aproximación
[1,]	0	4.378235e-01	5.000000e-01	5.000000e-01	4.444444e-01
[2,]	1	2.574040e-01	3.032653e-01	3.128666e-01	2.774645e-01
[3,]	2	1.513323e-01	1.839397e-01	1.957711e-01	1.732197e-01
[4,]	3	8.897087e-02	1.115651e-01	1.225005e-01	1.081402e-01

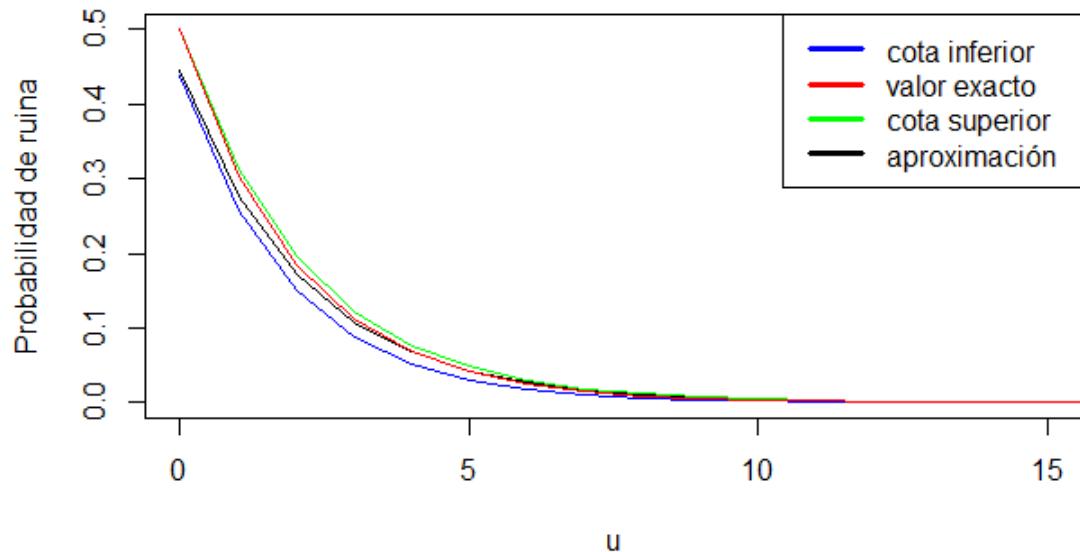
Y según aumenta  $u$ , la aproximación del Capítulo 4 es mayor que el valor real y por tanto se asemeja más a la aproximación calculada por el método *"upper"*:

```

[27,] 26 0.000000e+00 1.130165e-06 2.541505e-06 2.127919e-06
[28,] 27 0.000000e+00 6.854795e-07 1.590304e-06 1.328450e-06

```

Gráficamente obtenemos :



De este modo, hemos visto que la aproximación calculada en el último capítulo es mejor que las calculadas por los métodos "upper" (excepto para valores de  $u$  próximos a 0) y "lower" y que funciona para distintos valores de  $h$ .