

El complejo de Salvetti para grupos de Artin de ángulo recto



Pablo Lozano Roche
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Julio de 2024

Abstract

In this project we study a certain type of groups called Artin Groups. In particular, we focus on a very special class of Artin Groups known as right-angled Artin Groups (RAAGs).

The project begins with an introductory chapter in which we show some algebraic and topologic definitions and results. We introduce free groups, presentations of groups, the fundamental group and some Homotopy Theory. All these concepts will be very useful in the next chapters to study the algebraic and geometric properties of Artin groups.

Once the foundations have been laid, we will define Artin groups in terms of group presentations and we will show the relation between Artin groups and graphs. We will also display some examples of Artin groups with their associated graphs. Artin groups are very closely related to another type of groups called Coxeter groups. We will also define these groups and show some examples.

Afterwards, we will present the geometric interpretation of Coxeter groups, showing that Coxeter groups can be represented as discrete reflection groups. This interpretation will enable us to describe geometrically Artin groups, showing a Theorem that highlights the relation between Artin and Coxeter groups. We will also display an example that demonstrates the usefulness of the Theorem.

Artin groups can be classified according to the order of their associated Coxeter group. We will prove that if an Artin group is finite type, then its associated graph is complete. We will also show a counterexample that demonstrates that the converse of this result is not true in general. Then, we will study the main properties of right-angled Artin groups, proving a result about the special subgroups of RAAGs generated by complete subgraphs.

Finally, we will study a geometric construction associated to RAAGs, known as the Salvetti complex, which allows us to easily determine the homology groups of a RAAG. Before showing how the Salvetti complex is built, we will study some aspects of Homology Theory. We will define Δ -complexes and CW-complexes, and we will study some Simplicial Homology and some Singular Homology. These theories will allow us to build the Salvetti complex and compute its homology.

Índice general

Abstract	III
1. Preliminares algebraicos	1
1.1. Grupos libres	1
1.2. Presentaciones de grupos	4
1.2.1. Ejemplos de presentaciones de grupos	4
1.3. Grupo fundamental	5
1.3.1. Ejemplos de grupos fundamentales	6
1.4. Homotopía de orden superior	6
1.4.1. Ejemplos de espacios clasificadores	7
2. Grupos de Artin y grupos de Coxeter	9
2.1. Grupos de Artin: definición y ejemplos	9
2.1.1. Ejemplos de grupos de Artin	9
2.2. Grupos de Coxeter: definición y ejemplos	11
2.2.1. Ejemplos de grupos de Coxeter	11
2.3. Interpretación geométrica de los grupos de Coxeter	12
2.4. Descripción geométrica de los grupos de Artin	13
2.5. Grupos de Artin de tipo finito e infinito	15
2.6. Grupos de Artin de ángulo recto	17
3. Homología y el complejo de Salvetti	19
3.1. Δ -complejos	19
3.2. CW-complejos	20
3.2.1. Ejemplos de CW-complejos	21
3.3. Homología	21
3.3.1. Homología Simplicial	21
3.3.2. Homología Singular	23
3.4. El complejo de Salvetti	25
3.4.1. Homología del complejo de Salvetti	26

Capítulo 1

Preliminares algebraicos

Para poder definir los grupos de Artin correctamente y entender los aspectos geométricos relacionados con ellos, debemos introducir previamente una serie de conceptos. Por ello, en este primer capítulo mostraremos varias definiciones y resultados que serán de gran utilidad en los capítulos posteriores.

1.1. Grupos libres

El primer concepto que debemos definir y que aparecerá en el trabajo de manera recurrente es el de grupo libre, que se define de la siguiente manera:

Definición 1.1 (Grupo libre). Sea F un grupo, X un conjunto no vacío y $\sigma : X \rightarrow F$ una función inyectiva. Entonces, se dice que F es libre sobre X si para cada función $\alpha : X \rightarrow G$ con G grupo, existe un único homomorfismo $\beta : F \rightarrow G$ tal que $\alpha = \beta\sigma$. Cuando un grupo es libre sobre algún conjunto, se le denomina grupo libre.

La condición mostrada en esta definición se conoce como propiedad universal de los grupos libres. Sin embargo, esta definición no garantiza la existencia de grupos libres. Por ello, demostraremos a continuación el siguiente teorema:

Teorema 1.1 (Existencia del grupo libre). Si X es un conjunto no vacío, existe un grupo F y una función $\sigma : X \rightarrow F$ tal que F es libre sobre X .

Demostración. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera. Tomamos un conjunto disjunto con X con el mismo cardinal:

$$X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}.$$

Definimos el conjunto $A = X \cup X^{-1}$. Una palabra en A se define como una secuencia ordenada de elementos de $X \cup X^{-1}$. Así, el conjunto de palabras finitas en A es:

$$\begin{aligned} A^* &= \{a_1 \cdots a_n \mid a_i \in A, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \\ &= \{x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n} \mid x_i \in X, \epsilon_i = \pm 1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}. \end{aligned}$$

Para $n = 0$, la secuencia es vacía y la denominaremos *palabra vacía*. Ahora, podemos definir la siguiente operación binaria en A^* :

$$\begin{aligned} A^* \times A^* &\longrightarrow A^* \\ (a_1 \cdots a_n, b_1 \cdots b_n) &\longmapsto a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_n \end{aligned}$$

Esta operación es claramente asociativa y su elemento neutro es la palabra vacía, la cual denotaremos como 1. A continuación, consideramos la relación de equivalencia sobre los elementos de A^* generada por:

$$\forall a, b \in A^* \quad \forall x \in X: \quad axx^{-1}b \sim ab, \quad ax^{-1}xb \sim ab$$

De esta forma, los elementos de X^{-1} se comportan como inversos multiplicativos de los elementos de X . Ahora, definimos el conjunto de clases de equivalencia $F = A^*/\sim$. Para $a \in A^*$, denotaremos su clase de equivalencia como $[a] \in F$. Claramente, si $a \sim a'$ y $b \sim b'$, entonces $ab \sim a'b'$. Esto nos permite definir el producto de clases de equivalencia como $[a][b] = [ab]$. Como la operación binaria de A^* es asociativa, el producto definido sobre F también lo es:

$$([a][b])[c] = [(ab)c] = [a(bc)] = [a]([b][c]).$$

Además, este producto tiene elemento neutro y es la clase de equivalencia de la palabra vacía:

$$[a][1] = [a \cdot 1] = [a] = [1 \cdot a] = [1][a].$$

Por otro lado, si tenemos una palabra $a = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$, podemos definir su inverso como $a^{-1} = x_n^{-\epsilon_n} \cdots x_1^{-\epsilon_1}$. De esta manera, cada elemento de F tiene su inverso:

$$[a][a^{-1}] = [aa^{-1}] = [1].$$

Por lo tanto, el conjunto F dotado de esta operación es un grupo. Definimos la función:

$$\begin{aligned} \sigma: \quad X &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

Veamos que con está función σ , F es libre sobre X . Sea $\alpha: X \longrightarrow G$ una función cualquiera con G grupo. Por ser G un grupo, para cualquier elemento $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $gg^{-1} = 1_G$. En particular, para cada $x \in X$ existe $(\alpha(x))^{-1}$. Definimos la función:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}: \quad A^* &\longrightarrow G \\ x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n} &\longmapsto g_1^{\epsilon_1} \cdots g_n^{\epsilon_n} \end{aligned}$$

donde $g_i = \alpha(x_i)$. Notemos que si $a \sim b$, entonces $\bar{\beta}(a) = \bar{\beta}(b)$. Así, podemos definir la siguiente función:

$$\begin{aligned} \beta: \quad F &\longrightarrow G \\ [a] &\longmapsto \bar{\beta}(a) \end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que β es un homomorfismo:

$$\beta([a][b]) = \beta([ab]) = \bar{\beta}(ab) = \bar{\beta}(a)\bar{\beta}(b) = \beta([a])\beta([b]).$$

Además, $\forall x \in X$ se verifica que:

$$\beta\sigma(x) = \beta([x]) = \bar{\beta}(x) = \alpha(x).$$

Es decir, $\beta\sigma = \alpha$. Por último, veamos que el homomorfismo β es único. Supongamos que existe otro homomorfismo $\gamma: F \longrightarrow G$ tal que $\gamma\sigma = \alpha$. Entonces se tiene que $\gamma\sigma = \beta\sigma$, luego $\gamma = \beta$ sobre $Im(\sigma)$. Sin embargo, es evidente que $F = \langle Im(\sigma) \rangle$, luego $\gamma = \beta$.

Recapitulando, hemos visto que para cada función $\alpha: X \longrightarrow G$ con G grupo, existe un único homomorfismo $\beta: F \longrightarrow G$ tal que $\alpha = \beta\sigma$. Por lo tanto F es libre sobre X . □

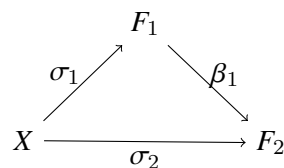
Hemos visto que dado cualquier conjunto existe un grupo libre sobre dicho conjunto. Veamos ahora que el grupo libre es único salvo isomorfismos.

Teorema 1.2 (Unicidad del grupo libre). Sean F_1 y F_2 grupos libres sobre un conjunto X . Entonces $F_1 \cong F_2$.

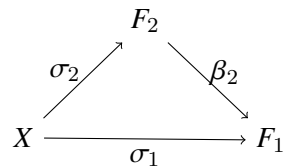
Demostración. Por ser F_1 y F_2 grupos libres sobre X , tenemos los siguientes diagramas conmutativos:



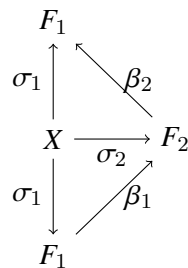
Como F_2 es un grupo libre, en particular es un grupo, luego en el diagrama correspondiente a F_1 podemos tomar $G = F_2$. Además, como la función α es arbitraria, podemos tomar $\alpha = \sigma_2$. Así, tenemos el diagrama:



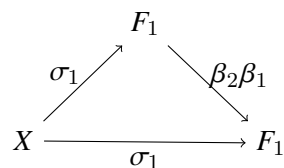
Con un razonamiento análogo, pero intercambiando los papeles de F_1 y F_2 se obtiene el siguiente diagrama:



Uniendo ambos diagramas tenemos:



Tomando el exterior de este diagrama se deduce el siguiente diagrama conmutativo:



Sin embargo, la aplicación identidad 1_{F_1} también haría conmutar este diagrama, luego por unicidad $\beta_2 \beta_1 = 1_{F_1}$. Utilizando un argumento análogo se deduce también que $\beta_1 \beta_2 = 1_{F_2}$. Por lo tanto β_1 es un isomorfismo y $F_1 \cong F_2$.

□

Este resultado es en realidad un caso particular del siguiente teorema general, cuya demostración es análoga a la anterior:

Teorema 1.3. *Sea F_1 un grupo libre sobre un conjunto X_1 y sea F_2 un grupo libre sobre otro conjunto X_2 . Si se cumple que $|X_1| = |X_2|$, entonces $F_1 \cong F_2$.*

En las secciones posteriores, al grupo libre sobre un conjunto X de n elementos lo denotaremos F_n .

1.2. Presentaciones de grupos

Un resultado relevante sobre los grupos libres, es que cualquier grupo se puede obtener como la imagen de un grupo libre [1]. La descripción de un grupo como imagen de un grupo libre es lo que se conoce como presentación del grupo. Para ser más rigurosos podemos dar la siguiente definición:

Definición 1.2 (Presentación). Dado un grupo G , una presentación de G es un epimorfismo $\pi : F \rightarrow G$, donde F es un grupo libre.

De esta manera, si denotamos $R = \text{Ker}(\pi)$, tenemos que $R \triangleleft F$ y por el primer teorema de isomorfía y por la sobreyectividad de π , se cumple que $F/R \simeq G$. A los elementos de R se les denomina relaciones de la presentación.

Sea ahora $\pi : F \rightarrow G$ la presentación de un cierto grupo G y sea Y un conjunto de generadores de F . Sea también S un subconjunto de F tal que $S^F = \text{Ker}(\pi)$. Aquí, S^F denota el menor subgrupo normal de F que contiene a S . Si denotamos $X = \pi(Y)$, entonces por construcción X es un conjunto de generadores de G . Por otro lado, un elemento $r \in F$ será una relación de la presentación π si y solo si puede expresarse como $r = (s_1^{\epsilon_1})^{f_1} \cdots (s_k^{\epsilon_k})^{f_k}$, con $s_i \in S$, $\epsilon_i = \pm 1$ y $f_i \in F$. Vemos por tanto que la presentación π , junto con los conjuntos Y y S , determina un conjunto de generadores y de relaciones para el grupo G . Así, podemos expresar G de manera unívoca como:

$$G = \langle Y | S \rangle.$$

No obstante, en ocasiones resulta conveniente describir el grupo a partir de sus generadores (el conjunto $X = \pi(Y)$) y de las relaciones entre estos generadores ($s(x) = 1$, $s \in S$, $x \in X$). De este modo, describiremos el grupo G de manera equivalente como:

$$G = \langle X | s(x) = 1, s \in S \rangle.$$

Si $|X| < \infty$, diremos que el grupo es finitamente generado y si además $|S| < \infty$, diremos que el grupo es finitamente presentado. Dados dos grupos G y H , se puede definir un nuevo grupo llamado producto libre de G y H . Este grupo está formado por los elementos de la forma $x = g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_n h_n$, con $g_i \in G$ y $h_i \in H$; con la operación determinada por la yuxtaposición junto con la operación de cada uno de los grupos G y H . El producto libre se denota $G * H$.

1.2.1. Ejemplos de presentaciones de grupos

Ejemplo 1.1. Si F es un grupo libre, sus elementos no tienen ninguna relación, luego su presentación es $F = \langle X \rangle$, siendo X un conjunto generador de F .

Ejemplo 1.2. Para el grupo \mathbb{Z}^n tenemos la presentación:

$$\mathbb{Z}^n = \langle a_1, \dots, a_n \mid a_i a_j = a_j a_i \forall i, j \rangle$$

Ejemplo 1.3. Si C_n es el grupo cíclico de n elementos, una presentación es:

$$C_n = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$$

Ejemplo 1.4. Una presentación del grupo diédrico es:

$$D_{2m} = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^m = 1, (ab)^2 = 1 \rangle$$

Si definimos $c = ab$, tenemos que este grupo también se puede presentar como:

$$D_{2m} = \langle a, c \mid a^2 = 1, c^2 = 1, (ac)^m = 1 \rangle$$

1.3. Grupo fundamental

Para describir geoméricamente los grupos de Artin es necesario recurrir al concepto de grupo fundamental. Para definirlo, debemos definir primero los lazos:

Definición 1.3 (Lazo). Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Se dice que α es un lazo con base en x_0 si $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ es una función continua con $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.

Existe una relación entre lazos denominada homotopía, que se define de la siguiente manera:

Definición 1.4 (Homotopía). Sea X un espacio topológico y α y β dos lazos con el mismo punto base. Se dice que $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ es una homotopía y que α es homótopo a β si H es continua y

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \alpha(t), & H(t, 1) &= \beta(t) & \forall t \in [0, 1] \\ H(0, s) &= \alpha(0), & H(1, s) &= \beta(1) & \forall s \in [0, 1] \end{aligned}$$

Es sencillo demostrar que la homotopía define una relación de equivalencia:

Lema 1.1. Sean α y β dos lazos con el mismo punto base. La relación $\alpha \sim \beta$ si α y β son homótopos es de equivalencia.

Demostración. Veamos que se cumplen las tres propiedades características de las relaciones de equivalencia:

- Reflexividad:

Para ver que α es homótopo a sí mismo basta con tomar la homotopía $H(t, s) = \alpha(t)$.

- Simetría:

Si $H(t, s)$ es una homotopía entre α y β , entonces $H(t, 1 - s)$ es una homotopía entre β y α .

- Transitividad:

Si $F(t, s)$ es una homotopía entre α y β y $G(t, s)$ es otra homotopía entre β y γ , entonces:

$$H(t, s) = \begin{cases} F(t, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(t, 2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía entre α y γ .

□

A partir de la relación de homotopía, se define el grupo fundamental:

Definición 1.5 (Grupo fundamental). Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Se llama grupo fundamental de X relativo al punto base x_0 al conjunto de clases de equivalencia de lazos con base en x_0 bajo la relación de homotopía, dotado con la operación composición. El grupo fundamental se denota con $\pi_1(X, x_0)$.

Es sencillo demostrar que el grupo fundamental es efectivamente un grupo [2, pág. 86–87]. Cuando X es conexo por caminos (como será en nuestro caso), el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ no depende del punto base x_0 [3, pág. 28] y escribiremos $\pi_1(X)$. En general, si x_0 y x_1 son dos puntos de X que están en la misma componente conexa, entonces $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X, x_1)$.

Aunque en principio hemos definido la homotopía entre lazos, podemos extender esta definición para aplicaciones continuas en general. Así, de manera general diremos que dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son homótopas si existe una aplicación $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que para todo $x \in X$, $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$. En tal caso escribiremos $f \simeq g$. También nos será útil la siguiente definición:

Definición 1.6 (Equivalencia homotópica). Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si existe una aplicación continua $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq id_X$ y $f \circ g \simeq id_Y$.

Si existe una equivalencia homotópica entre dos espacios X, Y , se dice que los espacios tienen mismo tipo homotópico. En ese caso se pone $X \simeq Y$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.7 (Espacio contráctil). Un espacio X es contráctil si tiene el mismo tipo homotópico que el espacio formado por un solo punto. Es decir, si $X \simeq \bullet$.

1.3.1. Ejemplos de grupos fundamentales

Ejemplo 1.5. Como en \mathbb{R}^n todos los lazos son homótopos entre sí, el grupo fundamental es el grupo trivial $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{e\}$.

Ejemplo 1.6. El grupo fundamental de la circunferencia \mathbb{S}^1 es $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ [2, pág. 94–95].

Ejemplo 1.7. Queremos hallar ahora el grupo fundamental del toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Los cálculos se simplifican notablemente si tenemos en cuenta que el grupo fundamental del producto directo de dos espacios coincide con el producto directo de los grupos fundamentales de dichos espacios [4, pág. 5]. Así, grupo fundamental del toro \mathbb{T} es $\pi_1(\mathbb{T}) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}^2$.

Ejemplo 1.8. Por el mismo argumento que en el ejemplo anterior, el grupo fundamental del cilindro es $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) = \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{R}) = \mathbb{Z} \times \{e\} = \mathbb{Z}$.

1.4. Homotopía de orden superior

Para algunas definiciones posteriores es necesario conocer algunos conceptos básicos de teoría de la homotopía. La idea es extender la definición de grupo fundamental para poder estudiar espacios topológicos de mayor dimensión. De esta forma, podemos definir los grupos de homotopía de la siguiente manera:

Definición 1.8 (Grupos de homotopía). Sea (X, x_0) un espacio topológico con punto base x_0 . Para cada $n \geq 0$ entero, definimos el n -ésimo grupo de homotopía de (X, x_0) como el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas $(S^n, v_0) \rightarrow (X, x_0)$, donde v_0 es un punto base para S^n . Denotaremos el n -ésimo grupo de homotopía de (X, x_0) como $\pi_n(X, x_0)$.

La esfera \mathbb{S}^n es homeomorfa al cociente $I^n/\partial I^n$, donde $I^n = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$ es el cubo unidad de dimensión n . Por ello, podemos definir $\pi_n(X, x_0)$ de manera análoga como el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$. Para $n \geq 2$, podemos definir sobre los elementos de $\pi_n(X, x_0)$ la siguiente operación:

$$(f + g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } x_1 \in [0, 1/2] \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } x_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Se puede demostrar que el conjunto de clases de homotopía de las aplicaciones mostradas dotadas de esta operación es un grupo abeliano [3, pág. 340]. Por lo tanto, $\pi_n(X, x_0)$ es efectivamente un grupo.

Para $n = 1$, se tiene que $I^1 = [0, 1]$, luego del primer grupo de homotopía $\pi_1(X, x_0)$ coincide con la definición dada previamente para el grupo fundamental. Al igual que sucedía para el grupo fundamental, cuando X es conexo por caminos los grupos de homotopía $\pi_n(X, x_0)$ no dependen del punto base y podemos escribir $\pi_n(X)$. En relación con los grupos de homotopía tenemos la siguiente definición:

Definición 1.9 (Espacios de Eilenberg-MacLane). Sea G un grupo y sea n un entero positivo. Un espacio topológico X conexo por caminos es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(G, n)$ si su n -ésimo grupo de homotopía es isomorfo a G y el resto de grupos de homotopía son triviales.

Para $n > 1$, los grupos de homotopía son siempre abelianos, luego solamente existen espacios de tipo $K(G, n)$ con $n > 1$ si G es abeliano. En cambio, el espacio $K(G, 1)$ existe para todo grupo G y se denomina espacio clasificador de G .

1.4.1. Ejemplos de espacios clasificadores

Ejemplo 1.9. Como mostramos en el ejemplo 1.6, el grupo fundamental de \mathbb{S}^1 es \mathbb{Z} . Además el resto de grupos de homotopía son triviales, luego $\mathbb{S}^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$.

Ejemplo 1.10. Los espacios clasificadores verifican la relación $K(G, 1) \times K(H, 1) = K(G \times H, 1)$ [3, pág. 88]. Por lo tanto, como el toro es $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, por el ejemplo anterior se tiene que $\mathbb{T} = K(\mathbb{Z}^2, 1)$.

Ejemplo 1.11. El espacio de Eilenberg-MacLane $K(F_n, 1)$ es la unión de circunferencias con un punto identificado $\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1$.

Capítulo 2

Grupos de Artin y grupos de Coxeter

2.1. Grupos de Artin: definición y ejemplos

Tras haber introducido los conceptos de grupo libre y presentación de un grupo, ya estamos en disposición de definir los grupos de Artin:

Definición 2.1 (Grupo de Artin). Un grupo de Artin A es un grupo que admite una presentación de la forma:

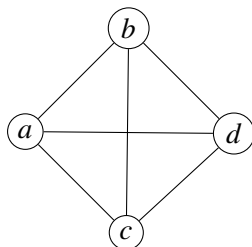
$$A = \langle s_1, \dots, s_n \mid \underbrace{s_i s_j s_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \dots}_{m_{ji}} \quad \forall i \neq j \rangle$$

donde $m_{ij} \in \{2, 3, \dots, \infty\}$. En el caso $m_{ij} = \infty$ simplemente omitimos la relación entre s_i y s_j .

La manera más sencilla y visual de mostrar la presentación de un grupo de Artin es mediante el uso de grafos simples no dirigidos. La idea es construir un grafo cuyos vértices sean los generadores del grupo de Artin y cuyos ejes indiquen las relaciones entre los generadores. Para indicar las relaciones se etiquetan los ejes con los valores de m_{ij} correspondientes. Cuando $m_{ij} = 2$, se suele omitir la etiqueta. Si dos vértices del grafo no están conectados, significa que no hay relación entre ellos ($m_{ij} = \infty$).

2.1.1. Ejemplos de grupos de Artin

Ejemplo 2.1. Consideremos el grafo Γ_1 :



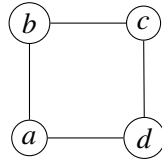
El grupo de Artin asociado a este grafo es:

$$A(\Gamma_1) = \langle a, b, c, d, \mid ab = ba, ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, cd = dc \rangle.$$

Si nos fijamos en el ejemplo 1.2, vemos que esta es la presentación correspondiente al grupo \mathbb{Z}^4 . Análogamente, deducimos que el grupo de Artin asociado al grafo completo de n vértices es precisamente \mathbb{Z}^n .

Ejemplo 2.2. En el ejemplo 1.1 hemos comentado también que la presentación de un grupo libre no tiene relaciones. Por eso, el grafo asociado a un grupo libre con n generadores es el grafo desconectado de n vértices.

Ejemplo 2.3. Sea ahora el grafo Γ_2 :



La presentación del grupo de Artin asociado a este grafo es:

$$A(\Gamma_2) = \langle a, b, c, d \mid ab = ba, ad = da, bc = cb, cd = dc \rangle.$$

Observamos que a y c conmutan con b y d , luego podemos expresar el grupo de Artin como el producto directo de los grupos generados por (a, c) y (b, d) . Además, como a y c no están conectados (no tienen relación), el grupo que generan es el grupo libre con dos generadores F_2 . Lo mismo sucede para el grupo generado por b y d . De esta forma:

$$A(\Gamma_2) = \langle a, c \rangle \times \langle b, d \rangle = F_2 \times F_2.$$

En general, si Γ es el grafo bipartito de m y n vértices, su grupo de Artin asociado es $A(\Gamma) = F_m \times F_n$.

Ejemplo 2.4. Una trenza de n hebras es un diagrama formado por n hebras que se entrecruzan, como por ejemplo:

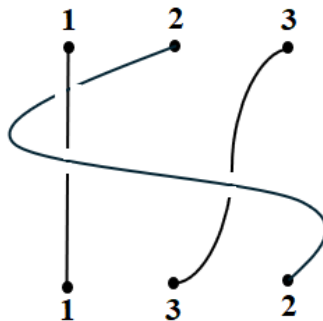
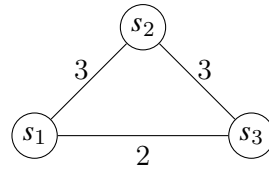


Figura 2.1: Trenza de tres hebras.

En el conjunto formado por todas las posibles trenzas distintas que se pueden formar con n hebras, podemos definir una operación mediante la concatenación de trenzas. Así obtenemos lo que se conoce como un *grupo de trenzas sobre n hebras*. Cada trenza induce una permutación y utilizando las propiedades de las permutaciones, se puede probar que este grupo se puede presentar de la siguiente manera [5, pág. 1]:

$$B_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \mid \tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}, \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \text{ para } i+1 < j \rangle$$

donde el generador τ_i consiste en cruzar la i -ésima hebra por encima de la $(i+1)$ -ésima hebra. A la vista de esta presentación, vemos que los grupos de trenzas son grupos de Artin. En particular, si consideramos el grafo Γ_3 :



la presentación de su grupo de Artin asociado es:

$$A(\Gamma_3) = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1s_3 = s_3s_1, s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2, s_2s_3s_2 = s_3s_2s_3 \rangle = B_4.$$

Es decir, el grupo de Artin asociado al grafo Γ_3 es el grupo de trenzas sobre 4 hebras.

2.2. Grupos de Coxeter: definición y ejemplos

Los grupos de Artin están íntimamente relacionados con los grupos de Coxeter, que podemos definir de la siguiente manera:

Definición 2.2 (Grupo de Coxeter). Un grupo de Coxeter W es un grupo que admite una presentación de la forma:

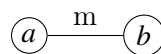
$$\begin{aligned} W &= \langle s_1, \dots, s_n \mid s_i = s_i^{-1} \ \forall i, \overbrace{s_i s_j s_i \dots}^{m_{ij}} = \overbrace{s_j s_i s_j \dots}^{m_{ji}} \ \forall i \neq j \rangle \\ &= \langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i)^2 = 1 \ \forall i, (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \ \forall i \neq j \rangle \end{aligned}$$

donde m_{ij} se define de la misma manera que para los grupos de Artin.

A la vista de estas definiciones, se puede apreciar que los grupos de Coxeter se obtienen a partir de los grupos de Artin añadiendo simplemente la relación $s_i = s_i^{-1}$. Es por eso que todo grupo de Artin tiene un grupo de Coxeter asociado (y viceversa). De hecho, todo grupo de Coxeter es el cociente de un grupo de Artin por el subgrupo normal generado por $\langle s_i^2 \mid i = 1, \dots, n \rangle$. Al igual que los grupos de Artin, los grupos de Coxeter también se pueden representar mediante grafos simples no dirigidos. La única diferencia es que, además de considerar las relaciones indicadas por los ejes, debemos tener en cuenta también que para cada vértice $s_i^2 = 1$.

2.2.1. Ejemplos de grupos de Coxeter

Ejemplo 2.5. Sea el grafo Γ_4 :



Su grupo de Coxeter asociado es:

$$W(\Gamma_4) = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^m = 1 \rangle.$$

Si nos fijamos en el ejemplo 1.4, esta presentación coincide con la del grupo diédrico de $2m$ elementos. Por lo tanto, $W(\Gamma_4) = D_{2m}$, es decir, el grupo diédrico es un grupo de Coxeter. En particular, si $m = \infty$, el grafo anterior es desconectado y su grupo de Coxeter asociado es:

$$W(\Gamma_4) = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2.$$

Esta presentación coincide con la del grupo diédrico infinito D_∞ .

Ejemplo 2.6. Consideremos el grafo Γ_2 mostrado el ejemplo 2.3. El grupo de Coxeter se obtiene añadiendo al grupo de Artin las relaciones $a^2 = 1$, $b^2 = 1$, $c^2 = 1$ y $d^2 = 1$. Por lo tanto la presentación del grupo de Coxeter es:

$$W(\Gamma_2) = \left\langle a, b, c, d, \begin{array}{l} ab = ba, ad = da, bc = cb, cd = dc \\ a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1 \end{array} \right\rangle.$$

Al igual que antes, como a y c conmutan con b y d , podemos expresar el grupo de Coxeter como el producto directo de los grupos generados por (a, c) y (b, d) . Sin embargo, estos grupos no serán grupos libres debido a las relaciones que hemos añadido. Como a y c no están relacionados, podemos expresar el grupo que generan como el producto libre de los grupos generados por a y c respectivamente. Lo mismo sucede con b y d . Así, podemos escribir:

$$\begin{aligned} W(\Gamma_2) &= \langle a, c \mid a^2 = 1, c^2 = 1 \rangle \times \langle b, d \mid b^2 = 1, d^2 = 1 \rangle = \\ &= (\langle a \mid a^2 = 1 \rangle * \langle c \mid c^2 = 1 \rangle) \times (\langle b \mid b^2 = 1 \rangle * \langle d \mid d^2 = 1 \rangle). \end{aligned}$$

La presentación $\langle a \mid a^2 = 1 \rangle$ corresponde al grupo cíclico de orden 2 generado por a . Por lo tanto $\langle a \mid a^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$. Por lo tanto, el grupo de Coxeter asociado al grafo Γ_2 es:

$$W(\Gamma_2) = (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) = D_\infty \times D_\infty.$$

2.3. Interpretación geométrica de los grupos de Coxeter

Lo interesante acerca de los grupos de Coxeter es que, más allá de la definición algebraica que hemos mostrado, también podemos darles una interpretación geométrica. Veamos cómo podemos entender cualquier grupo de Coxeter como un grupo discreto generado por reflexiones. Por fijar ideas, consideremos el plano \mathbb{R}^2 y un conjunto $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ de reflexiones en \mathbb{R}^2 . Tomemos dos reflexiones cualesquiera s_i, s_j del conjunto S y supongamos que los ejes de estas reflexiones forman un determinado ángulo θ . Podemos representar esta situación gráficamente de la siguiente manera:

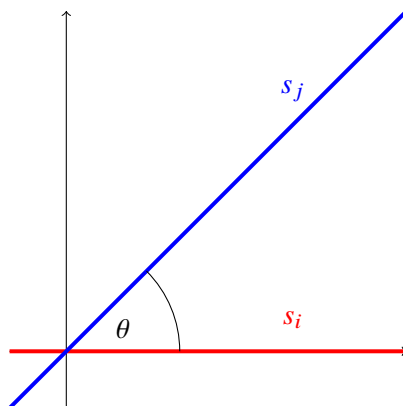


Figura 2.2: Interpretación geométrica de los grupos de Coxeter.

Por un lado, dado que las reflexiones son involuciones, es evidente que cualquier reflexión del conjunto S verifica $(s_i)^2 = 1$. Por otro lado, el producto de dos reflexiones es geoméricamente equivalente a una rotación respecto del origen de dos veces el ángulo que forman los ejes de las reflexiones. Es decir:

$$s_i s_j = R_{2\theta}$$

donde $R_{2\theta}$ es la rotación respecto del origen de ángulo 2θ . Si ahora expresamos el ángulo entre los ejes de las reflexiones como¹ $\theta = \frac{\pi}{m_{ij}}$, con m_{ij} entero, tenemos que:

$$s_i s_j = R_{\frac{2\pi}{m_{ij}}}.$$

De esta manera, se verifica la relación:

$$(s_i s_j)^{m_{ij}} = R_{2\pi} = 1.$$

Esto se puede generalizar al caso en el que las rectas sean paralelas poniendo $m_{ij} = \infty$. En ese caso, $s_i s_j$ es una traslación.

Por lo tanto, se cumplen relaciones como las mostradas en (2.1), luego podemos deducir que el grupo de Coxeter asociado a estas relaciones actúa por reflexiones en \mathbb{R}^2 . La demostración formal de este resultado requiere el lema 2.1 que veremos en el siguiente capítulo. De hecho, se puede probar que todo grupo de Coxeter es isomorfo a un grupo de reflexiones respecto a hiperplanos (subespacios de dimensión $n-1$) en \mathbb{R}^n para cierto n . Para ello, en lugar de tener ejes de reflexión, tendremos hiperplanos de reflexión y las relaciones entre dos reflexiones vendrán dadas por el ángulo formado por los hiperplanos correspondientes. Mediante este isomorfismo, asociamos a cada generador $s \in W$ una reflexión r de \mathbb{R}^n respecto de un hiperplano H_r . Además, si $g \in W$ es otro elemento, entonces $g^{-1}sg$ corresponde precisamente a la reflexión respecto al hiperplano $g^{-1}(H_r)$, ya que si $x \in g^{-1}(H_r)$, $gx \in H_r$, luego:

$$g^{-1}sgx = g^{-1}gx = x.$$

Llamaremos reflexiones de W a los elementos de la forma $g^{-1}sg$ con $s \in S$ y $g \in W$.

2.4. Descripción geométrica de los grupos de Artin

A partir de esta interpretación de los grupos de Coxeter, somos capaces de describir también geoméricamente los grupos de Artin. Consideremos un grupo de Coxeter W actuando sobre \mathbb{R}^n como un grupo de reflexiones. Ahora, tomando la complexificación de \mathbb{R}^n de manera natural, podemos considerar la acción del grupo de reflexiones W sobre \mathbb{C}^n . De esta forma, las reflexiones del grupo ahora son respecto de hiperplanos complejos. Cada una de las reflexiones de W deja fijo precisamente su hiperplano complejo correspondiente. Dada una reflexión $r \in W$ denotamos su hiperplano correspondiente como H_r . Es decir:

$$H_r = \{x \in \mathbb{C}^n \mid r \cdot x = x\} \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Podemos definir ahora el espacio complementario a estos hiperplanos complejos de la siguiente manera:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{r \in R(W)} H_r.$$

Al haber eliminado todos los puntos fijos, tenemos que W actúa libremente sobre \mathcal{H} . La descripción geométrica de los grupos de Artin y su relación con los grupos de Coxeter se muestra en el siguiente teorema [6, pág. 273–302]:

Teorema 2.1. *Sea W un grupo de Coxeter finito y sea A su grupo de Artin asociado. Entonces se cumple que A es el grupo fundamental de \mathcal{H}/W .*

¹Si $m_{ij} \in \{2, \infty\}$, todos los ángulos entre ejes de reflexión son 0 o $\pi/2$. Los grupos de Coxeter que cumplen esta propiedad se denominan grupos de Coxeter de ángulo recto y dan nombre a los grupos de Artin de ángulo recto que estudiaremos más adelante.

Para comprender mejor este resultado veamos un ejemplo sencillo. Consideremos el grupo simétrico sobre n letras. Este grupo, que denotaremos como S_n , está formado por todas las posibles permutaciones de las n letras. Dado que toda permutación se puede descomponer como producto de trasposiciones, el conjunto de las trasposiciones forma un sistema generador de S_n . Además, toda trasposición se puede descomponer como producto de trasposiciones de la forma $s_i = (i, i + 1)$ con $1 \leq i < n$, de manera que podemos generar S_n con $n - 1$ trasposiciones. Debido a las relaciones que cumplen las trasposiciones, se tiene la siguiente presentación para el grupo S_n [5, pág. 152]:

$$S_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \left| \begin{array}{ll} s_i^2 = 1 & \text{para } 1 \leq i \leq n-1, \\ (s_i s_{i+1})^3 = 1 & \text{para } 1 \leq i \leq n-2 \end{array} \right. \right\rangle.$$

A la vista de esta presentación, es evidente que S_n es un grupo de Coxeter. Denotaremos por tanto $W_\Gamma \equiv S_n$. Consideremos la acción del grupo W_Γ sobre \mathbb{C}^n , que consiste simplemente en permutar las coordenadas de los elementos de \mathbb{C}^n . En particular, la acción de una trasposición en \mathbb{C}^n consiste en intercambiar dos de sus coordenadas. Denotemos como r_{ij} a la trasposición que intercambia las coordenadas i -ésima y j -ésima. Los puntos que quedan fijos son aquellos cuyas coordenadas i -ésima y j -ésima coinciden. Por lo tanto, r_{ij} deja fijo el hiperplano:

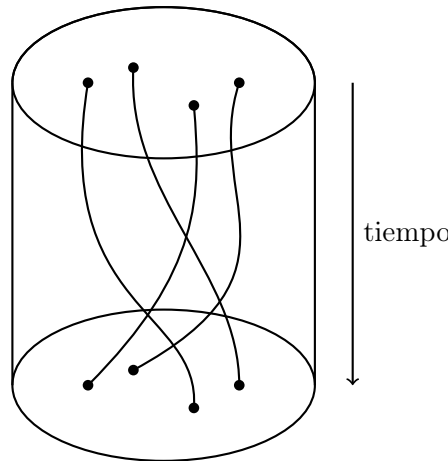
$$H_{r_{ij}} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j\}$$

y se deduce que r_{ij} es precisamente la reflexión respecto a $H_{r_{ij}}$. De hecho, el conjunto de las trasposiciones de W es precisamente el conjunto de reflexiones. El espacio complementario a estos hiperplanos complejos será:

$$\mathcal{H} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \ \forall i \neq j\}.$$

Ahora, en vez de pensar en (z_1, \dots, z_n) como un punto de \mathbb{C}^n , veámoslo como n puntos distintos en \mathbb{C} . De este modo, podemos entender el conjunto \mathcal{H} como el espacio de configuración de n puntos en \mathbb{C} .

Nuestro objetivo es averiguar cuál es el grupo de Artin asociado a W_Γ . El Teorema 2.1 establece que este grupo será $A_\Gamma = \pi_1(\mathcal{H}/W_\Gamma)$. Como W_Γ actúa permutando coordenadas de los puntos de \mathbb{C}^n , al tomar el cociente \mathcal{H}/W_Γ lo que estamos haciendo es ignorar el orden de las coordenadas de los puntos de \mathcal{H} (si dos puntos tienen las mismas coordenadas pero en distinto orden, entonces determinan el mismo punto del cociente). Ahora ya solo falta encontrar el grupo fundamental de este espacio. Para ello, retomemos el enfoque anterior y supongamos que tenemos n puntos distintos en el plano complejo. Para hallar el grupo fundamental, permitamos que los n puntos se muevan libremente por el plano complejo, con la única condición de que ningún par de puntos coincida en ningún momento y de manera que al terminar el movimiento, los puntos terminen en las mismas posiciones que empezaron (salvo permutación). En cada instante, los n puntos tendrán una determinada posición del espacio de configuración \mathcal{H} . Podemos visualizar el movimiento de los puntos como un cilindro cuyas secciones sean precisamente las posiciones del sistema en cada instante:

Figura 2.3: Grupo fundamental de \mathcal{H}/W_Γ .

La condición de que los puntos no coincidan en ningún instante se traduce en que las trayectorias que realizan los puntos en el cilindro no se corten. El grupo fundamental estará formado por todas las trayectorias que respeten las condiciones anteriores. Equivalentemente, el grupo fundamental estará formado por todas las posibles trenzas distintas que se pueden formar con n hebras. Este grupo es precisamente el grupo de trenzas sobre n hebras B_n , cuya presentación hemos mostrado en el ejemplo 2.4. Vemos que esta presentación es equivalente a la obtenida para el grupo simétrico S_n si eliminamos la relación $s_i^2 = 1$, luego se verifica el Teorema 2.1.

Aunque a priori resulte sorprendente, los grupos de Artin de este tipo aparecen al estudiar algunos problemas de robótica. Por ejemplo, si consideramos un sistema formado por n robots, el conjunto formado por todos los posibles movimientos de los robots que terminan en el punto de partida es precisamente B_n .

2.5. Grupos de Artin de tipo finito e infinito

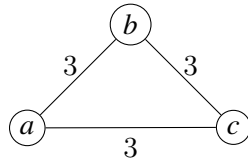
Analizando la definición 2.1 resulta evidente que, dado que no se impone ninguna restricción sobre el orden de sus elementos, los grupos de Artin son siempre infinitos. Por el contrario, los grupos de Coxeter pueden ser finitos² o infinitos. Esto nos permite establecer un criterio de clasificación para los grupos de Artin en función del orden de su grupo de Coxeter asociado. Así, se dice que un grupo de Artin es esférico o de tipo finito si su grupo de Coxeter asociado es finito. En caso contrario se dice que el grupo de Artin es no-esférico o de tipo infinito. En relación con esta clasificación, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1. *Si un grupo de Artin es de tipo finito, entonces su grafo asociado es completo.*

Demostración. Sea A_Γ el grupo de Artin de tipo finito asociado a un grafo Γ . Esto quiere decir que su grupo de Coxeter asociado W_Γ es finito. Supongamos que Γ no es completo. Entonces existen al menos dos vértices que no están conectados, es decir, existen dos generadores de W_Γ que no cumplen ninguna relación. Sean a y b estos generadores. Por ser W_Γ un grupo, podemos multiplicar indefinidamente a y b y el elemento resultante estará en el grupo. Así, todo elemento de la forma $x = abababab \dots$ está en W_Γ . Considerando W_Γ como grupo de reflexiones; a y b corresponden a reflexiones respecto de hiperplanos paralelos, luego ab es una traslación. Como las traslaciones tienen orden infinito, el grupo W_Γ tiene infinitos elementos $(ab, abab, ababab \dots)$ \square

²Para los grupos de Coxeter finitos existe una clasificación que se puede encontrar en [7].

Cabe recalcar que el recíproco de este resultado no es cierto en general. Por ejemplo, consideremos el siguiente grafo:



Recurriendo a la interpretación geométrica de los grupos de Coxeter, podemos entender el grupo de Coxeter W asociado a este grafo como un grupo generado por tres reflexiones cuyos ejes se cortan formando ángulos de $2\pi/3$. De esta forma, los ejes forman un triángulo equilátero. Reflejando los vértices de este triángulo respecto del lado opuesto de forma sucesiva, podemos cubrir el plano con triángulos equiláteros. Podemos representar esta situación mediante el diagrama que se muestra a continuación, en el cual hemos especificado a qué elemento del grupo corresponden algunos ejes de reflexión. El interior de los triángulos está etiquetado con la órbita del triángulo 1 al hacer actuar W .

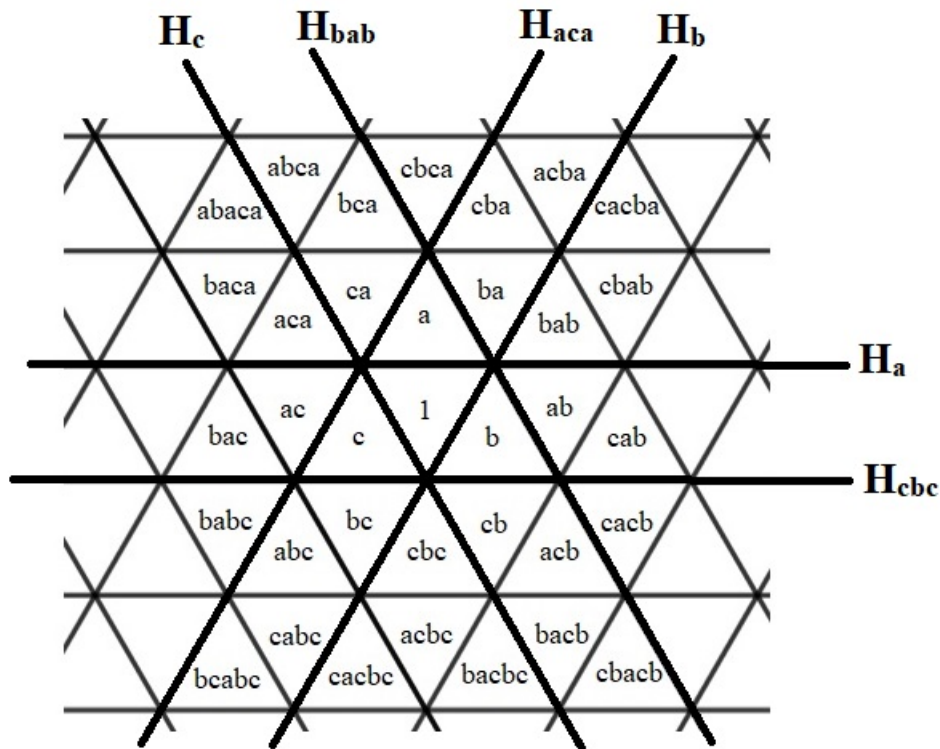


Figura 2.4: Representación de un grupo de Coxeter infinito asociado a un grafo completo.

Dado que el grupo de Coxeter se corresponde con esta triangulación infinita del plano, es un grupo infinito. En consecuencia, el grupo de Artin asociado al grafo completo anterior es de tipo infinito.

En el diagrama de la figura 2.4, si dos rectas H_{r_1} y H_{r_2} se cortan, significa que los elementos $r_1, r_2 \in W$ verifican una relación $r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_2$. Si no es así, las rectas son paralelas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} b \cdot bab \cdot b &= a \\ bab \cdot b \cdot bab &= babab = abaab = a \end{aligned}$$

luego las rectas H_b y H_{bab} se cortan.

2.6. Grupos de Artin de ángulo recto

En el resto del trabajo nos centraremos en el estudio de una clase particular de grupos de Artin denominados grupos de Artin de ángulo recto (en inglés RAAGs: *Right Angled Artin Groups*). Un grupo de Artin es de ángulo recto si $m_{ij} \in \{2, \infty\} \forall i, j$. Es decir, en la presentación de un RAAG todas las relaciones son de conmutación. Por ello, para representar un RAAG mediante un grafo, simplemente debemos conectar con ejes los vértices que conmutan. Los grupos de Artin $A(\Gamma_1)$ y $A(\Gamma_2)$ del anterior capítulo son ejemplos de RAAGs. Por otro lado, un grupo de Coxeter es de ángulo recto si su grupo de Artin asociado lo es.

Dado un RAAG A_Γ generado por un cierto conjunto generador S , podemos obtener un subgrupo de A_Γ tomando como conjunto generador un subconjunto $T \subset S$. Un subgrupo de esta forma recibe el nombre de *subgrupo especial* y se denota A_T . Además, se tiene el siguiente resultado para los subgrupos especiales:

Teorema 2.2. *Sea A_Γ un grupo de Artin de ángulo recto asociado a un grafo Γ y generado por un conjunto S . Sea $T \subset S$ y sea Λ el subgrafo de Γ generado por T . Entonces el subgrupo especial A_T es isomorfo al grupo de Artin asociado a Λ .*

Demostración. Para demostrar este resultado haremos uso del siguiente lema:

Lema 2.1 (Von Dyck). *Sean G, H grupos. Sea X un conjunto generador de G y R su conjunto de relaciones asociado, de manera que G admite una presentación de la forma $G = \langle X \mid R \rangle$. Sea $\tilde{f} : X \cup X^{-1} \rightarrow H$ una aplicación tal que para cada $r \in R$, con $r = x_1 \dots x_k$ ($x_i \in X \cup X^{-1}$), se cumple que $\tilde{f}(x_1) \dots \tilde{f}(x_k) = 1$. Entonces, existe $f : G \rightarrow H$ homomorfismo de grupos que extiende a \tilde{f} .*

Sea A_Λ el grupo de Artin asociado al subgrafo Λ . Definamos la aplicación:

$$\tilde{f}: S \cup S^{-1} \longrightarrow A_\Lambda$$

$$v \longmapsto \begin{cases} v & \text{si } v \in T \cup T^{-1} \\ 1 & \text{si } v \notin T \cup T^{-1} \end{cases}$$

Nuestro objetivo es demostrar que esta aplicación verifica la hipótesis del lema anterior y por tanto, puede extenderse a un homomorfismo entre A_Γ y A_Λ . Sea R el conjunto de relaciones asociado al conjunto generador S de A_Γ . Por ser A_Γ un grupo de Artin de ángulo recto, todas los elementos de R son de la forma $aba^{-1}b^{-1}$, con $a, b \in S$. Sea entonces $r = aba^{-1}b^{-1} \in R$ una relación cualquiera. Analicemos los distintos casos posibles:

- Si $a, b \in T \subset S$, se tiene $\tilde{f}(a)\tilde{f}(b)\tilde{f}(a^{-1})\tilde{f}(b^{-1}) = aba^{-1}b^{-1} = 1$.
- Si $a, b \in S \setminus T$, se tiene $\tilde{f}(a)\tilde{f}(b)\tilde{f}(a^{-1})\tilde{f}(b^{-1}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.
- Si $a \in T \subset S$ y $b \in S \setminus T$, se tiene $\tilde{f}(a)\tilde{f}(b)\tilde{f}(a^{-1})\tilde{f}(b^{-1}) = a \cdot 1 \cdot a^{-1} \cdot 1 = aa^{-1} = 1$.

Por lo tanto, \tilde{f} verifica la hipótesis del lema anterior y podemos extender esta aplicación a un homomorfismo f entre A_Γ y A_Λ . Definimos la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{i}: & T \cup T^{-1} & \longrightarrow & A_\Gamma \\ & v & \longmapsto & v \end{array}$$

Sea R' el conjunto de relaciones asociado al conjunto generador T de A_Λ . Sea $r' = uvu^{-1}v^{-1} \in R'$ una relación cualquiera. Como Λ es un subgrafo inducido de Γ , se deduce que $R' \subset R$. De esta forma:

$$\tilde{i}(u)\tilde{i}(v)\tilde{i}(u^{-1})\tilde{i}(v^{-1}) = uvu^{-1}v^{-1} = 1.$$

Por lo tanto, \tilde{i} también verifica la hipótesis del lema 2.1 y se puede extender a un homomorfismo de grupos i . Así, tenemos el siguiente diagrama:

$$A_\Lambda \xrightarrow{i} A_\Gamma \xrightarrow{f} A_\Lambda$$

Por construcción, $f \circ i = \mathbb{1}_{A_\Lambda}$, luego necesariamente i es inyectiva. Además, la imagen $i(A_\Lambda) \subset A_\Gamma$ es precisamente A_T . Por lo tanto, como i es inyectiva, si es también un homomorfismo será un isomorfismo sobre la imagen y el resultado queda probado. \square

Este resultado es cierto para grupos de Artin en general, pero la demostración es más complicada que en el caso de los grupos de Artin de ángulo recto. La demostración del caso general se puede encontrar en [8].

Los grupos de Artin de ángulo recto presentan la siguiente propiedad interesante [9]:

Teorema 2.3. *Sean Γ_1 y Γ_2 dos grafos y sean $A(\Gamma_1)$ y $A(\Gamma_2)$ sus respectivos grupos de Artin de ángulo recto asociados. Entonces, $A(\Gamma_1)$ es isomorfo a $A(\Gamma_2)$ si y solo si $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$.*

Cabe destacar que este resultado no es cierto para grupos de Artin arbitrarios ni para grupos de Coxeter.

Capítulo 3

Homología y el complejo de Salvetti

En este capítulo nos centraremos en el estudio del complejo de Salvetti, que es una construcción geométrica asociada a los grupos de Artin de ángulo recto que permite estudiar de manera sencilla sus propiedades topológicas. Para construir el complejo de Salvetti, necesitamos definir previamente algunos conceptos de Topología Algebraica.

3.1. Δ -complejos

Comenzaremos definiendo una clase de espacios denominados Δ -complejos, que nos serán útiles en las secciones posteriores para estudiar un cierto tipo de homología. Para comprender cómo se construyen estos espacios, pensemos en un toro. Esta superficie se puede construir identificando los lados opuestos de un cuadrado. No obstante, esta no es la única forma de hacerlo. Podemos dividir el cuadrado en dos triángulos idénticos y construir el toro identificando sus lados de manera adecuada.

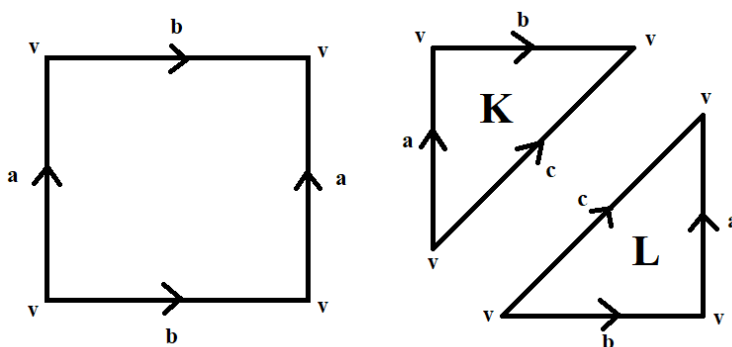


Figura 3.1: Distintas formas de construir un toro.

Del mismo modo, por el Teorema de Radó (1925), podemos dividir en triángulos cualquier polígono, luego cualquier superficie cerrada se puede obtener a partir de triángulos identificando correctamente sus lados. Los Δ -complejos permiten generalizar estas construcciones para dimensiones arbitrarias. El análogo n -dimensional del triángulo se denomina n -símplice y se denota Δ^n . Un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo, un 3-símplice es un tetraedro, etc. A la unión de las caras de Δ^n se le denomina frontera de Δ^n y se denota $\partial\Delta^n$. Al interior de Δ^n se le denomina símplice abierto y se denota $\overset{\circ}{\Delta}^n$.

Dado un espacio X , una estructura de Δ -complejo sobre X es una colección de aplicaciones continuas $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ que verifica las siguientes propiedades:

- La restricción $\sigma_\alpha|_{\Delta^n}$ es inyectiva y cada punto de X es la imagen de exactamente una de estas restricciones.
- La restricción de σ_α a una cara de Δ^n es una de las aplicaciones $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$.
- Un conjunto $A \subset X$ es abierto si y solo si $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ es abierto para cada σ_α .

Volviendo al ejemplo del toro, vemos que tenemos un vértice (Δ^0), tres ejes (Δ^1) y dos triángulos (Δ^2), de manera que podemos definir una estructura de Δ -complejo sobre el toro formada por seis aplicaciones σ_α . Cuando un espacio admite una estructura de Δ -complejo, decimos que el espacio es un Δ -complejo. Este tipo de espacios pueden ser construidos de manera inductiva, “pegando” sucesivamente las fronteras de los n -símplices a los $(n-1)$ -símplices.

3.2. CW-complejos

Existe una clase de espacios denominados CW-complejos, que se construyen de manera similar a los Δ -complejos. La idea intuitiva inicial es construir un espacio Y a partir de un espacio dado A “pegándole” n -bolas a lo largo de sus fronteras. Sea \mathcal{A} un conjunto de índices y sea $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos las n -bolas como B^n y las $(n-1)$ -esferas como S^{n-1} . Definamos $B^n(\mathcal{A}) = \coprod_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha^n$, donde para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ se tiene $B_\alpha^n \cong B^n$. De esta forma, $B^n(\mathcal{A})$ es la suma topológica de copias de B^n indexadas por \mathcal{A} . Definamos del mismo modo $S^{n-1}(\mathcal{A}) = \coprod_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha^{n-1}$, donde de nuevo para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ se tiene $S_\alpha^{n-1} \cong S^{n-1}$. Ahora, sea $f : S^{n-1}(\mathcal{A}) \rightarrow A$ una función. Consideremos una relación de equivalencia \sim en $A \coprod B^n(\mathcal{A})$ tal que $x \sim f(x)$ si $x \in S^{n-1}(\mathcal{A})$. Definamos Y como el espacio cociente $A \coprod B^n(\mathcal{A})/\sim$. Entonces Y es el espacio obtenido “pegando” las n -bolas de $B^n(\mathcal{A})$ al espacio A a través de f .

Ahora, sea (Y, A) una pareja de espacios y sea $n \in \mathbb{N}$. Con la notación anterior, se dice que Y se obtiene a partir de A “pegando” n -celdas si existe un aplicación $p : A \coprod B^n(\mathcal{A}) \rightarrow Y$ tal que $p(S^{n-1}(\mathcal{A})) \subset A$, $p|_A : A \hookrightarrow Y$ y $p|(B^n(\mathcal{A}) - S^{n-1}(\mathcal{A})) \rightarrow (Y - A)$ es un homeomorfismo. Denotemos $p(B_\alpha^n) := e_\alpha^n$. A los conjuntos e_α^n se les denomina n -celdas de (Y, A) . La aplicación $f_\alpha := p|_{S_\alpha^{n-1}} : S_\alpha^{n-1} \rightarrow A$ es una *aplicación de adhesión* para la n -celda e_α^n .

Tras haber mostrado la construcción de espacios mediante la adhesión de n -celdas, ya podemos definir los CW-complejos:

Definición 3.1 (Complejo CW). Un CW-complejo es una pareja $(X, \{X^n\}_{n \in \mathbb{N}})$, donde X es un espacio y $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de subespacios que verifican las siguientes propiedades:

1. X^0 es discreto.
2. $\forall n \geq 1$, X^n se obtiene a partir de X^{n-1} pegando n -celdas.
3. $X = \bigcup_n X^n$.
4. X está dotado de la topología débil con respecto a $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Habitualmente, se realiza un abuso de notación y se llama CW-complejo al conjunto X . No obstante, debemos tener en cuenta que dos CW-complejos distintos pueden tener el mismo conjunto X subyacente. Al subespacio X^n se le denomina n -esqueleto del CW-complejo. La dimensión del CW-complejo es $\min\{n \mid X = X^n\}$. Si no existe tal n , diremos que la dimensión es ∞ .

La C de CW viene de “closure finite”, mientras que la W viene de “weak topology”, haciendo referencia a la cuarta propiedad mostrada en la definición 3.1.

3.2.1. Ejemplos de CW-complejos

Ejemplo 3.1. Los grafos son un ejemplo de CW-complejos unidimensionales. Los vértices son las 0-celdas y los ejes son las 1-celdas. De hecho un CW-complejo tiene dimensión 1 si y solo si es un grafo.

Ejemplo 3.2. Podemos dotar a la circunferencia \mathbb{S}^1 de una estructura de CW-complejo con una 0-celda (un punto) y una 1-celda (un lazo con base en el punto). No obstante, esta no es la única estructura posible, por ejemplo podemos tomar también dos 0-celdas unidas por dos 1-celdas.

Ejemplo 3.3. Como se muestra en la siguiente imagen, el toro también presenta una estructura de CW-complejo, con una 0-celda (v), dos 1-celdas (a y b) y una 2-celda (la superficie del toro).

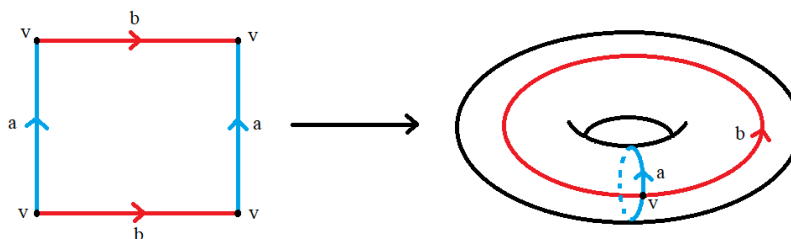


Figura 3.2: Estructura de CW-complejo para el toro

3.3. Homología

Como mostramos en los ejemplos de la sección 1.3, el grupo fundamental $\pi_1(X)$ resulta de gran utilidad para estudiar espacios topológicos de dimensión baja. No obstante, el grupo fundamental no nos permite caracterizar algebraicamente las propiedades topológicas de espacios de dimensión elevada. Una prueba de ello es que el grupo fundamental es el mismo para las esferas S^n con $n \geq 2$. Es por ello que para estudiar este tipo de espacios necesitamos recurrir a otro tipo de estructuras algo más sofisticadas. Una posibilidad es emplear los grupos de homotopía $\pi_n(X)$. Volviendo al ejemplo anterior, los grupos $\pi_n(X)$ sí que permiten distinguir entre esferas de distinta dimensión, ya que $\pi_i(S^n) = 0$ para todo $i < n$ y $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. No obstante, esta posibilidad es a menudo desaconsejable debido a la dificultad que supone calcular los grupos de homotopía en general. Es por ello que resulta conveniente emplear una herramienta alternativa: los grupos de homología. A lo largo de esta sección estudiaremos los pilares de la Teoría de la Homología, partiendo de la Homología Simplicial y llegando hasta la Homología Singular. Tomaremos como referencia principal [3, cap. 2].

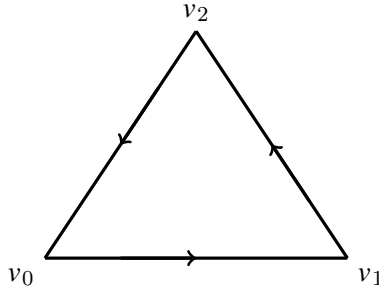
3.3.1. Homología Simplicial

Aunque el objetivo final de esta sección es el estudio de la Homología Singular, debido a su complejidad introduciremos primero algunas nociones sobre una teoría homológica algo más sencilla: la Homología Simplicial. Esta teoría permite estudiar las propiedades topológicas de los Δ -complejos. El objetivo de esta sección será definir los grupos de homología simplicial para este tipo de espacios.

Sea X un Δ -complejo, denotaremos como e_α^n a la imagen por σ_α del símplice abierto $\mathring{\Delta}^n$. Sea $\Delta_n(X)$ el grupo abeliano libre que tiene como base a los elementos e_α^n de X . Los elementos de $\Delta_n(X)$ se denominan n -cadenas y se pueden expresar como sumas finitas $\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha^n$, con $n_\alpha \in \mathbb{Z}$. De manera análoga, podemos ver los elementos de $\Delta_n(X)$ como sumas de la forma $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$, donde

$\sigma_\alpha : \Delta^n \longrightarrow X$ cumple que $\sigma_\alpha(\hat{\Delta}^n) = e_\alpha^n$.

Como hemos observado antes, la frontera de un n -símplice está formada por varios $(n-1)$ -símplices. En particular, si denotamos el n -símplice por el conjunto de vértices que lo forman $[v_0, \dots, v_n]$, su frontera estará formada por $(n-1)$ -símplices de la forma $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$, donde la notación \hat{v}_i indica que el vértice v_i no aparece en la secuencia. Equivalentemente, podemos ver la frontera como la $(n-1)$ -cadena formada por la suma de las caras $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ con coeficientes 1 ó -1 según las orientaciones respectivas del símplex y sus caras, de manera que la frontera de $[v_0, \dots, v_n]$ se escribe como $\sum_i (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$. Es decir, fijamos un orden de los vértices y orientamos basándonos en ese orden. Para ejemplificar esta definición, consideremos el 2-símplice (triángulo) formado por los vértices v_0, v_1, v_2 .



Su frontera será la siguiente 1-cadena:

$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1].$$

Siguiendo este procedimiento, para un Δ -complejo cualquiera X , podemos definir el homomorfismo de borde $\partial_n : \Delta_n(X) \longrightarrow \Delta_{n-1}(X)$ especificando sus valores en los elementos de la base de $\Delta_n(X)$:

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_i (-1)^i \sigma_\alpha|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

De esta manera, obtenemos una secuencia de homomorfismos entre grupos abelianos:

$$\cdots \longrightarrow \Delta_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Además es sencillo comprobar que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para cada n . Una secuencia de este tipo se denomina complejo de cadenas. La propiedad anterior implica que $Im(\partial_{n+1}) \subset Ker(\partial_n)$. Por ello, podemos definir el n -ésimo grupo de homología simplicial del complejo de cadenas como el grupo cociente $H_n^\Delta = Ker(\partial_n)/Im(\partial_{n+1})$. Los elementos de $Ker(\partial_n)$ se denominan ciclos, los elementos de $Im(\partial_{n+1})$ se denominan fronteras y los elementos de H_n^Δ se denominan clases de homología.

Retomemos el ejemplo del toro y veamos cómo son sus grupos de homología simplicial. Utilizaremos la notación mostrada en la imagen 3.1. Denotaremos como K y L los dos 2-símplices del Δ -complejo. Nuestro complejo de cadenas es ahora:

$$\Delta_2(\mathbb{T}) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(\mathbb{T}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

donde $\Delta_n(\mathbb{T})$ es el grupo abeliano generado por los n -símplices. Es decir:

$$\begin{aligned} \Delta_0(\mathbb{T}) &= \mathbb{Z}_v \\ \Delta_1(\mathbb{T}) &= \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_c \\ \Delta_2(\mathbb{T}) &= \mathbb{Z}_K \oplus \mathbb{Z}_L \end{aligned}$$

Comencemos calculando $H_0^\Delta(\mathbb{T}) = Ker(\partial_0)/Im(\partial_1)$. Como ∂_0 es la aplicación nula, $Ker(\partial_0) = \Delta_0(\mathbb{T})$. Veamos cómo actúa ∂_1 sobre los elementos de la base de $\Delta_1(\mathbb{T})$:

$$\partial_1(a) = v - v = 0$$

$$\partial_1(b) = v - v = 0$$

$$\partial_1(c) = v - v = 0$$

luego ∂_1 es también la aplicación nula y su imagen es trivial. De esta forma:

$$H_0^\Delta(\mathbb{T}) = Ker(\partial_0)/Im(\partial_1) = Ker(\partial_0) = \Delta_0(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}.$$

Calculemos ahora $H_1^\Delta(\mathbb{T}) = Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$. Como ∂_1 es la aplicación nula, $Ker(\partial_1) = \Delta_1(\mathbb{T})$. Veamos cómo actúa ∂_2 sobre los elementos de la base de $\Delta_2(\mathbb{T})$:

$$\partial_2(K) = a + b - c$$

$$\partial_2(L) = a + b - c$$

Como $\{a, b, c\}$ es base de $\Delta_1(\mathbb{T})$, también lo es $\{a, b, a + b - c\}$. Por lo tanto tenemos:

$$H_1^\Delta(\mathbb{T}) = Ker(\partial_1)/Im(\partial_2) = \Delta_1(\mathbb{T})/Im(\partial_2) = (\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_{(a+b-c)}) / \mathbb{Z}_{(a+b-c)} = \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Por último, calculemos $H_2^\Delta(\mathbb{T})$. Como no hay ningún 3-símplice, se tiene que $H_2^\Delta(\mathbb{T}) = Ker(\partial_2)$. Veamos como es el conjunto $Ker(\partial_2)$:

$$\partial_2(pK + qL) = p(a + b - c) + q(a + b - c) = (p + q)(a + b - c) = 0 \iff p = -q$$

por lo tanto:

$$H_2^\Delta(\mathbb{T}) = Ker(\partial_2) = \mathbb{Z}_{(K-L)} \cong \mathbb{Z}.$$

En conclusión, los grupos de homología simplicial para el toro son los siguientes:

$$H_n^\Delta(\mathbb{T}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

3.3.2. Homología Singular

La principal limitación que presenta la Homología Simplicial es que solamente nos permite calcular los grupos de homología para los espacios dotados de una estructura de Δ -complejo. La Homología Singular, generaliza a la anterior y permite estudiar espacios topológicos arbitrarios.

Dado un espacio X , un n -símplice singular en X se define como una aplicación continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Sea $C_n(X)$ el grupo abeliano libre que tiene como base el conjunto de n -símplices singulares en X . Los elementos de $C_n(X)$ se denominan n -cadenas singulares y se pueden expresar como sumas finitas $\sum_i n_i \sigma_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}$. Podemos definir también de la misma manera que en homología simplicial el operador borde $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma_\alpha [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

Al igual que sucedía en la homología simplicial, se cumple que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para cada n , luego tiene sentido definir el n -ésimo grupo de homología singular como $H_n = Ker(\partial_n)/Im(\partial_{n+1})$. Dos

espacios topológicos homeomorfos tienen grupos de homología singulares isomorfos. Esta propiedad también es cierta para espacios topológicos homotópicamente equivalentes [10, pág. 38]. Además, se puede demostrar que si un espacio tiene estructura de Δ -complejo, entonces los grupos de homología simpliciales son isomorfos a los grupos de homología singulares [3, pág. 128]. Por ello, es correcto afirmar que la Homología Singular generaliza a la Homología Simplicial.

En ocasiones resulta conveniente aumentar el complejo de cadenas añadiendo el grupo \mathbb{Z} junto con una aplicación ϵ de la siguiente manera:

$$\cdots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde $\epsilon \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i$. Los grupos de homología de este complejo de cadenas aumentado se denominan grupos de homología singular reducida y se denotan como $\tilde{H}_n(X)$.

En ocasiones, para estudiar la homología de un espacio resulta útil ignorar las cadenas singulares de un determinado subespacio del mismo. Para ello se define la homotopía relativa. Sea X un espacio y sea $A \subset X$ un subespacio. Denotemos como $C_n(X, A)$ al grupo cociente $C_n(X)/C_n(A)$. De esta forma, las n -cadenas singulares de A pasan a ser triviales en $C_n(X/A)$. El operador borde $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ induce el operador borde $\partial_n : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A)$, de manera que tenemos un complejo de cadenas:

$$\cdots \longrightarrow C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

Los grupos de homología de este complejo de cadenas se denominan grupos de homología relativos y se denotan como $H_n(X, A)$.

Hasta el momento hemos estudiado la homología de espacios topológicos. No obstante, gracias a la definición de espacio clasificador, podemos también definir la homología de grupos. Así, la homología de un grupo G se define como la homología de su espacio clasificador $K(G, 1)$. Del ejemplo 1.10 se deduce que $H_n(\mathbb{Z}^2) = H_n(\mathbb{T}) \forall n \geq 0$.

En la sección 3.3.2, calculamos los grupos de homología del toro utilizando su estructura de Δ -complejo. Sin embargo, también podemos calcular su homología empleando su estructura de CW-complejo mostrada en el ejemplo 3.3. La teoría homológica que permite estudiar estos espacios se conoce como Homología Celular. Dado un CW-complejo X , podemos construir un complejo de cadenas, de forma que el grupo $C_i(X)$ sea el grupo abeliano libre con base las i -celdas. Los grupos de homología de este complejo de cadenas son isomorfos a los que se obtienen con la Homología Singular y con la Homología Simplicial [3, pág. 139–140]. En el caso del toro, tenemos una 2-celda, dos 1-celdas y una 0-celda, de manera que tenemos el siguiente complejo de cadenas:

$$C_2(\mathbb{T}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{T}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

con

$$\begin{aligned} C_0(\mathbb{T}) &= \{ke^0 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \\ C_1(\mathbb{T}) &= \{k_1e_a^1 + k_2e_b^1 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ C_2(\mathbb{T}) &= \{ke^2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Se puede demostrar que los operadores borde ∂_i son todos nulos [3, pág. 141], de manera que los grupos de homología coinciden con los grupos C_i . Por lo tanto, los grupos de homología coinciden con los obtenidos previamente utilizando la Homología Simplicial. Aunque la Homología

Celular resulta muy útil para estudiar los grupos de homología de los CW-complejos, presenta el inconveniente de que los operadores borde son en ocasiones difíciles de computar. No obstante, para los espacios producto se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\partial(\sigma_1 \times \sigma_2) = \partial(\sigma_1) \times \sigma_2 + (-1)^m \sigma_1 \times \partial(\sigma_2) \tag{3.1}$$

donde σ_1 y σ_2 son simplices singulares y m es la dimensión de σ_1 . Con este ejemplo hemos mostrado que los complejos de cadenas y los operadores borde dependen de la triangulación del espacio, pero la homología es invariante.

3.4. El complejo de Salvetti

Tras haber definido los CW-complejos y estudiado los distintos tipos de homología, ya podemos construir el complejo de Salvetti y calcular su homología. El complejo de Salvetti es un CW-complejo asociado a los RAAGs que se construye de la siguiente manera. Sea Γ un grafo y sea A_Γ su RAAG asociado. Sea $\{s_1, \dots, s_n\}$ el conjunto generador de A_Γ (es decir, el conjunto de vértices de Γ). Comenzamos con n círculos etiquetados por los generadores, todos ellos unidos por un punto x_0 . A continuación, por cada eje de Γ que conecte los vértices s_i y s_j (es decir, por cada relación de conmutación entre dos generadores), añadimos al complejo un 2-toro cuya frontera esté etiquetada por la relación $s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1}$, es decir:

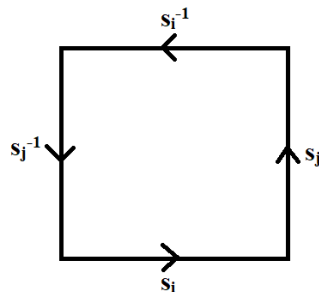
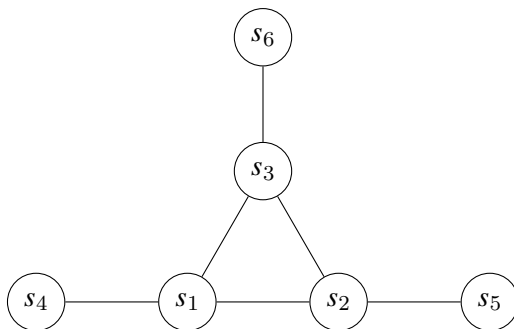


Figura 3.3: 2-toro del complejo de Salvetti.

Por cada triángulo de Γ que conecte tres vértices s_i, s_j, s_k , añadimos al complejo un 3-toro cuyas caras sean los 2-toros asociados a los tres ejes que forman el triángulo. De igual manera, vamos añadiendo sucesivamente al complejo un k -toro por cada conjunto de k generadores que conmuten mutuamente (es decir, por cada subgrafo completo de Γ de k vértices). El espacio resultante de esta construcción es el complejo de Salvetti asociado al grafo Γ y se denota \mathcal{S}_Γ .

Por construcción, el grupo fundamental de \mathcal{S}_Γ es precisamente A_Γ . Además, se puede demostrar que el resto de grupos de homotopía son triviales, luego $\mathcal{S}_\Gamma = K(A_\Gamma, 1)$. En consecuencia, la homología del complejo de Salvetti determina completamente la homología de su RAAG asociado. Por ilustrar la construcción del complejo de Salvetti, veamos un ejemplo. Sea el grafo Γ :



El complejo de Salvetti \mathcal{S}_Γ estará formado por un 3-toro correspondiente al triángulo formado por los vértices s_1 , s_2 y s_3 junto a tres 2-toros correspondientes a las parejas de vértices (s_1, s_4) , (s_2, s_5) y (s_3, s_6) .

3.4.1. Homología del complejo de Salvetti

Finalmente, presentamos un resultado acerca de la homología del complejo de Salvetti [11].

Proposición 3.1. *El k -ésimo grupo de homología del complejo de Salvetti asociado a un grafo Γ es $H_k(\mathcal{S}_\Gamma) \cong \mathbb{Z}^{N_k}$, donde N_k es el número de subgrafos completos de Γ de k vértices.*

Demostración. Veamos en primer lugar que el operador borde del complejo de Salvetti es cero en cualquier dimensión. Por construcción, el complejo de Salvetti está formado por n -toros, luego bastará demostrar que el operador borde se anula para los n -toros. Demostremos este resultado por inducción sobre n . Para $n = 1$, tenemos un 1-toro, que es la circunferencia \mathbb{S}^1 . Por ser un ciclo cerrado, el operador borde es nulo sobre \mathbb{S}^1 , luego el resultado es cierto para $n = 1$. Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$, es decir, que el operador borde es nulo sobre los $(n - 1)$ -toros. Veamos que esto implica que el operador borde es también cero sobre los n -toros. El n -toro se define como el producto de circunferencias $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$. Por lo tanto, podemos expresar el n -toro en función del $(n - 1)$ -toro como $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Para calcular el operador borde del n -toro, podemos emplear la fórmula 3.1. En nuestro caso, σ_1 es el $n - 1$ -símplice singular asociado al $(n - 1)$ -toro y σ_2 es el 1-símplice singular asociado a la circunferencia \mathbb{S}^1 . Por hipótesis inductiva, $\partial(\sigma_1) = 0$ y por el razonamiento anterior para la circunferencia, $\partial(\sigma_2) = 0$. Por lo tanto, $\partial(\sigma_1 \times \sigma_2) = 0$ y el operador borde se anula para los n -toros.

Veamos ahora cómo son los grupos de homología. Tenemos el siguiente complejo de cadenas:

$$\dots \longrightarrow C_k(\mathbb{S}_\Gamma) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(\mathbb{S}_\Gamma) \longrightarrow \dots$$

donde ∂ es el operador nulo y $C_k(\mathbb{S}_\Gamma)$ es por definición el grupo abeliano libre que tiene como base el conjunto de k -símplices singulares en \mathbb{S}_Γ . Por la construcción del complejo de Salvetti, el conjunto de k -símplices singulares en \mathbb{S}_Γ es precisamente el conjunto de subgrafos completos de Γ de k vértices. Los grupos de homología son $H_k = \text{Ker}(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1})$. Como ∂ es el operador nulo, el conjunto $\text{Im}(\partial_{k+1})$ es trivial y $\text{Ker}(\partial_k) = C_k(\mathbb{S}_\Gamma)$. Por lo tanto, $H_k(\mathbb{S}_\Gamma) = C_k(\mathbb{S}_\Gamma) \cong \mathbb{Z}^{N_k}$, siendo N_k el número de subgrafos completos de Γ de k vértices. \square

Por último veamos una consecuencia de este resultado. Dado un grupo G cuyos grupos de homología sean finitamente generados y se anulen a partir de cierto grado, su característica de Euler es:

$$\chi(G) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}}(H_i(G) \otimes \mathbb{Q}).$$

El resultado anterior implica que si A_Γ es RAAG, entonces:

$$\chi(A_\Gamma) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i$$

siendo c_i el número de i -cliques¹ de Γ . El polinomio de cliques de un grafo finito es un invariante combinatorio, que se define como:

$$p(x) = \sum_{i \geq 0} c_i \cdot x^i.$$

Por lo tanto:

$$p(-1) = \chi(A_\Gamma).$$

¹Un i -clique es un subgrafo completo de i -vértices

Bibliografía

- [1] Robinson, D. A Course in the Theory of Groups. (Springer,1995). p 49
- [2] Chamizo, F. El Grupo Fundamental. Universidad Autónoma de Madrid. (2009)
- [3] Hatcher, A. Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [4] Urbano, F. El Grupo Fundamental. Universidad de Granada. (2016)
- [5] Kassel, C. & Turaev, V. Braid groups. (Springer, 2008)
- [6] Deligne, P. Les immeubles des groupes de tresses généralisés. Invent Math. (1972)
- [7] Mukherjee, S. Classification of finite Coxeter groups. University of Chicago. (2019)
- [8] Koberda, T. Right-angled Artin groups and their subgroups. (2013)
- [9] Droms, C. Isomorphisms of graph groups. (1987), <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:33354013>
- [10] Geoghegan, R. Topological Methods in Group Theory. (Springer, 2008)
- [11] Koberda, T. Geometry and combinatorics via right-angled Artin groups. (2021)