

# Teoría de trenzas: una revisión del trabajo de Artin



**Alejandro Simal Ullate**

Trabajo de fin de grado de Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo:

Enrique Artal Bartolo y José Ignacio Cogolludo Agustín

25 de junio de 2024



# Prólogo

La teoría de trenzas es una rama de las matemáticas situada entre la topología y el álgebra, que estudia el concepto intuitivo de una trenza como hilos entrelazados. Uno de los primeros matemáticos en estudiar este campo fue Emil Artin (1898-1962), en sus trabajos *Theorie der Zöpfe* (1925) [1], basado en estudiar las proyecciones de las trenzas en el plano, y *Theory of Braids* (1947) [2]. El objetivo de este trabajo es hacer una revisión del segundo artículo de Artin y explicarlo con un lenguaje más moderno.

En este artículo se define el concepto de trenza como un conjunto de hilos en  $\mathbb{R}^3$  que solo cortan una vez a cada plano  $z = z_0$  y que se mantienen constantes para ciertos valores  $z \leq a$ ,  $z \geq b$ . También se introduce la noción de  $s$ -isotopía, que es una relación de equivalencia entre las trenzas de  $n$  hilos, que geoméricamente consiste en deformar los hilos de una trenza sin que se corten entre sí. Adaptaremos estos conceptos en la Sección 2.1 con algunos cambios respecto a Artin: llamaremos  $n$ -movimiento a lo que Artin define como trenza (Definición 2.1.1) y definiremos los  $n$ -movimientos solamente en  $[0, 1]$ , al contrario que Artin, quien define las trenzas en todo  $\mathbb{R}$ . Para nosotros, las  $n$ -trenzas serán la clase de equivalencia de los  $n$ -movimientos dada por la  $s$ -isotopía (ver la Definición 2.1.4 y en general §2.2).

Posteriormente, Artin muestra que las trenzas forman un grupoide con la operación dada por la concatenación de trenzas con los mismos extremos. Para ello, nosotros introduciremos la noción de *espacio de configuración* en la Sección 2.2, que permite entender los  $n$ -movimientos como caminos en cierto espacio topológico. Aquí definiremos el *grupo de  $n$ -trenzas*  $\mathbb{B}_n$  como el grupo fundamental de uno de estos espacios.

Por otra parte, los  $n$ -movimientos están estrechamente relacionados con los homeomorfismos del disco que son la identidad en la frontera, que nosotros llamaremos  $\delta$ -homeomorfismos (ver §1.2.2). Esta relación se verá en profundidad en la Sección 3.1, concretamente en el Teorema 3.1.1 y en el Corolario 3.1.2. Este último corolario introduce un homeomorfismo que sustituye el concepto de *coordenadas de trenza* utilizado por Artin.

Uno de los resultados más importantes del artículo es establecer un homomorfismo entre el grupo de trenzas y el grupo de automorfismos del grupo libre (ver Proposiciones 3.2.9 y 3.2.13), combinando topología y álgebra. Artin demostró que este homomorfismo es inyectivo y caracterizó su imagen como los automorfismos del grupo libre que envían los generadores de una base ordenada a conjugados de ellos y fija el producto. Trataremos esto en la Sección 3.2.

Para terminar, en el artículo *Theory of Braids* [2] Artin no da una presentación del grupo de trenzas, ya que la dio en *Theorie der Zöpfe* [1] de una manera geométrica. Aun así, al comienzo de *Theory of Braids* se hace referencia a esa demostración, diciendo textualmente: “En mi artículo *Theorie der Zöpfe* (...) presenté una teoría que condujo a una clasificación de las trenzas (...). La mayoría de las pruebas son totalmente intuitivas. La demostración del teorema principal ni siquiera es convincente. Es posible corregir las pruebas.” [2, p. 101].

Y más adelante en *Theory of Braids* se dice: “En *Theorie der Zöpfe* he demostrado que las relaciones (2.1) y (2.2) forman un conjunto completo de relaciones definitorias para el grupo de trenzas. El método es geométrico y se puede hacer rigurosamente mediante las herramientas desarrolladas en este artículo. Sin embargo, una prueba más interesante se da en el artículo de F. Bohnenblust *The Algebraical Braid Group* (1947) [3] que es esencialmente algebraica y profundiza en la teoría del grupo.” [2, p. 115]

Nuestro objetivo en el Capítulo 4 será dar vida a la frase de Artin donde sugiere que se puede llevar a cabo una demostración alternativa a partir de las herramientas desarrolladas en el artículo, y redemostrar que la presentación con las relaciones (2.1) y (2.2) permite ver el grupo de trenzas como un grupo finitamente presentado.

## Resumen por Capítulos

### Capítulo 1

En la Sección 1.1 definimos los conceptos de grupo libre y grupo finitamente presentado. Además, daremos una condición para establecer homomorfismos entre grupos finitamente presentados. En la Sección 1.2 introducimos los  $\delta$ -homeomorfismos y exploramos resultados relacionados con las clases de  $\delta$ -isotopía del disco. Muchos de estos resultados se demostrarán en el apéndice.

### Capítulo 2

En la Sección 2.1 formalizamos el concepto de “hilos que se entrelazan”, denominado  $n$ -movimiento, y definimos la  $s$ -isotopía entre movimientos, una relación de equivalencia que geoméricamente consiste en deformar los hilos sin cortarse y manteniendo fijos los extremos. En la Sección 2.2 presentamos los espacios de configuración, que nos permiten interpretar las trenzas como caminos. Utilizando la teoría de homotopía, definimos los grupos de trenzas  $\mathbb{B}_n$  y  $\mathbb{P}_n$  como grupos fundamentales de estos espacios.

### Capítulo 3

En la Sección 3.1 tratamos la relación entre las trenzas y los homeomorfismos. Extendemos la  $s$ -isotopía a un homeomorfismo en  $\mathbb{C}$  e introducimos un homeomorfismo  $C_\beta$  que “rehace” una trenza dada. En la siguiente sección veremos cómo cada trenza induce naturalmente un automorfismo del grupo libre. También demostraremos la existencia de un antimonomorfismo de grupos entre  $\mathbb{B}_n$  y  $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ , caracterizando su imagen.

### Capítulo 4

En este capítulo, demostramos que las relaciones (2.1) y (2.2) son las únicas relaciones del grupo de trenzas y daremos una presentación del grupo de trenzas utilizando los generadores de Artin, como se muestra a continuación:

$$\mathbb{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, j - i > 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle.$$

# Prologue

Braid theory is a branch of mathematics located between topology and algebra, which studies the intuitive concept of braids as intertwined threads. One of the first mathematicians to study this field was Emil Artin (1898-1962), in his works *Theorie der Zöpfe* (1925) [1], based on the study of their projections on the two-dimensional plane, and *Theory of Braids* (1947) [2]. The aim of this work is to review Artin's second article and explain it in more modern language.

In this article, the concept of a braid is defined as a set of threads in  $\mathbb{R}^3$  that intersect each plane  $z = z_0$  only once and remain constant for certain values  $z \leq a$  and  $z \geq b$ . The notion of  $s$ -isotopy is also introduced, which is an equivalence relation between braids with  $n$  threads that geometrically consists of deforming the threads of a braid without them intersecting. We will adapt these concepts in Section 2.1 with some changes from Artin's definitions: we will call  $n$ -movement what Artin defines as braid (Definition 2.1.1) and we will define  $n$ -movements only in  $[0, 1]$ , unlike Artin, who defines braids in all of  $\mathbb{R}$ . For us,  $n$ -braids will be the equivalence class of  $n$ -movements given by  $s$ -isotopy (see Definition 2.1.4 and in general §2.2).

Later, Artin shows that braids form a groupoid with the operation given by concatenation of braids with the same ends. To do this, we will introduce the notion of *configuration space* in Section §2.2, which allows us to understand  $n$ -movements as paths in a certain topological space. Here we will define the *group of  $n$ -braids*  $\mathbb{B}_n$  as the fundamental group of one of these spaces.

On the other hand,  $n$ -movements are closely related to homeomorphisms of the disk that are the identity on the boundary, which we will call  $\delta$ -homeomorphisms (see §1.2.2). This relationship will be explored in depth in Section 3.1, specifically in Theorem 3.1.1 and Corollary 3.1.2. This last corollary introduces a homeomorphism that replaces the concept of *braid coordinates* used by Artin.

One of the most important results of the article is to establish a homomorphism between the braid group and the group of automorphisms of the free group (see Proposition 3.3 and 3.2.13), combining topology and algebra. Artin proved that this homomorphism is injective and characterized its image as the automorphisms of the free group that send the generators of an ordered base to conjugates of them and fixes the product. We will deal with this in Section §3.2.

Finally, in Artin's article *Theory of Braids* [2], a presentation of the braid group is not provided since he gave it in *Theorie der Zöpfe* [1] in a geometric way. Nevertheless, at the beginning of *Theory of Braids*, Artin mentions this proof, stating textually: "A theory of braids leading to a classification was given in my paper *Theorie der Zöpfe* (...). Most of the proofs are entirely intuitive. That of the main theorem is not even convincing. It is possible to correct the proofs." [2, p. 101]

And later in *Theory of Braids*, it is said: "In *Theorie der Zöpfe* I have shown that that these relations 2.2 form a full set of defining relations for the group. The method is geometric and can easily be made rigorous by means of the tools developed in this paper. However a more interesting proof shall be given in a paper by F. Bohnenblust *The Algebraical Braid Group* (1947) [3] which is essentially algebraic and leads deeper into the theory of the group." [2, p. 115]

Our goal in Chapter 4 is to explore Artin's idea, suggesting that an alternative proof can be carried out using the tools of the article, and to prove in another way that the presentation with relations (2.1) and (2.2) allows us to view the group of braids as a finitely presented group.

## Summary by Chapters

### Chapter 1

In Section 1.1 we define the concepts of free group and finitely presented group. In addition, we will give a condition to establish homomorphisms between the finitely presented groups. In Section 1.2 we introduce  $\delta$ -homeomorphisms and we will explore results related to  $\delta$ -isotopy classes of the disk. Many of these results will be proved in the appendix.

### Chapter 2

In Section 2.1, we formalize the concept of “intertwined threads”, called  $n$ -movement, and define  $s$ -isotopy between movements, an equivalence relation that geometrically consists of deforming the threads without cutting them and keeping the ends fixed. In Section 2.2, we present configuration spaces, which allow us to interpret braids as paths. Using homotopy theory, we define the braid groups  $\mathbb{B}_n$  and  $\mathbb{P}_n$  as the fundamental groups of these spaces.

### Chapter 3

In Section 3.1, we show the relationship between braids and homeomorphisms. We will extend  $s$ -isotopy to a homeomorphism in  $\mathbb{C}$ , and we will introduce a homeomorphism  $C_\beta$  that “builds” a given braid. In the next section, we will see how each braid naturally induces an automorphism of the free group. We will also prove the existence of an antimorphism of groups between  $\mathbb{B}_n$  and  $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ , and we will characterize its image.

### Chapter 4

In this chapter, we prove that the relations 2.1 and 2.2 are the only relations of the braid group and we will give a presentation of the braid group using Artin’s generators, as shown below:

$$\mathbb{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, j - i > 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle.$$

# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>ii</b>
<b>Prologue</b>	<b>iv</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Grupos finitamente presentados . . . . .	1
1.2. Homeomorfismos del disco . . . . .	2
1.2.1. Homeomorfismos de la circunferencia . . . . .	2
1.2.2. Homeomorfismos del disco . . . . .	3
<b>2. Movimientos y espacios de configuración</b>	<b>7</b>
2.1. Primeras definiciones . . . . .	7
2.2. Espacios de configuración . . . . .	8
<b>3. Trenzas, homeomorfismos y grupos libres</b>	<b>11</b>
3.1. Trenzas <i>versus</i> homeomorfismos . . . . .	11
3.2. Trenzas como automorfismos de $\mathbb{F}_n$ . . . . .	14
<b>4. Presentación del grupo de trenzas</b>	<b>23</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>29</b>
<b>A. Algunas demostraciones</b>	<b>31</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Grupos finitamente presentados

Vamos a establecer algunos resultados sobre grupos finitamente presentados que serán útiles después.

**Definición 1.1.1.** Un subconjunto  $X$  de un grupo  $G$  es un *conjunto de generadores* si cada elemento  $g \in G$  se puede expresar como un producto finito

$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k} \quad (1.1)$$

en donde  $x_i \in X$  y  $n_i \in \mathbb{Z}$ . Diremos entonces que los elementos de  $X$  *generan* o *engendran*  $G$ .

Si además, la manera de expresar  $g \in G \setminus \{e\}$  como en (1.1) es única siempre y cuando  $x_i \neq x_{i+1}$  y  $n_i \neq 0$ , entonces decimos que  $X$  es un conjunto libre de generadores y la expresión anterior es una *palabra reducida*. Si un grupo  $G$  tiene un *conjunto libre de generadores* se dice que es un *grupo libre*.

**Definición 1.1.2.** Dado un conjunto no vacío  $X$  el *grupo libre*  $\mathbb{F}(X)$  *generado* por  $X$  es el conjunto de palabras reducidas finitas de elementos de  $X$ , donde la multiplicación de dos palabras es la reducción natural de la yuxtaposición de ambas en el orden indicado.

**Proposición 1.1.3.** *Todo grupo es cociente de un grupo libre por un subgrupo normal.*

*Demostración.* Basta considerar el epimorfismo

$$\mathbb{F}(X) \xrightarrow{\varphi} G$$

El teorema de isomorfía de grupos asegura que  $G \cong \mathbb{F}(X)/N$ , donde  $N = \ker \varphi$ . □

**Definición 1.1.4.** Sea  $R$  una colección de palabras de  $\mathbb{F}(X)$  y denotemos  $N(R)$  es el menor subgrupo normal que las contiene. Entonces el par  $\langle X : R \rangle$  es una *presentación* del grupo  $\mathbb{F}(X)/N(R)$ .

**Definición 1.1.5.** Se dice que  $G$  es un grupo finitamente presentado si existen subconjuntos  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  y  $R = \{r_1, \dots, r_s\}$  tal que

$$G \cong \langle X : R \rangle.$$

**Proposición 1.1.6.** *Sean  $G \cong \langle X : R \rangle$  un grupo finitamente presentado,  $H$  un grupo y  $\{h_x \mid x \in X\}$  una familia de elementos de  $H$ . Entonces, existe un homomorfismo*

$$\begin{array}{ccc} \langle X : R \rangle & \xrightarrow{\varphi} & H \\ x & \longmapsto & h_x \end{array}$$

*si y solo si  $w(h_x) = 1 \in H, \forall w \in R$ . En tal caso,  $\varphi$  es único.*

## 1.2. Homeomorfismos del disco

Esta sección establece algunos resultados teóricos que necesitaremos más adelante para estudiar las trenzas, que están estrechamente relacionadas con las isotopías y los homeomorfismos del disco. Las demostraciones de algunos de los resultados se pueden encontrar en el apéndice.

**Notación 1.2.1.** En esta sección y también a lo largo del trabajo utilizaremos la siguiente notación.

- (a) Denotamos por  $\mathbb{S}_r^1$  el círculo de radio  $r$  en el plano complejo, es decir,  $\mathbb{S}_r^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ . Asimismo, denotamos por  $\mathbb{D}_r$  el disco cerrado de radio  $r$  en el plano complejo, es decir,  $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ . Denotamos por  $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{D}$  la circunferencia y el disco unidad y cuando el centro  $z_0$  sea distinto del origen lo indicaremos como  $\mathbb{S}_r^1(z_0)$  y  $\mathbb{D}_r(z_0)$ .
- (b) Dada una homotopía  $H : X \times I \rightarrow Y$  y dado  $t \in I$  llamaremos  $H_t : X \rightarrow Y$  a la aplicación  $H_t := H(z, t)$ .
- (c) Dados dos caminos  $f, g : [0, 1] \rightarrow X$  tales que  $f(1) = g(0)$  denotaremos por  $f \cdot g$  o simplemente por  $fg$  al producto de los caminos  $f$  y  $g$  y por  $f^{-1}$  el camino recorrido al revés.

Para los siguientes enunciados necesitamos el siguiente teorema clásico.

**Teorema** (Teorema de la curva de Jordan). *Toda curva cerrada simple  $C : I \rightarrow \mathbb{C}$  divide el plano en dos componentes conexas disjuntas, teniendo la curva como frontera común. Una de estas componentes es acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada (el exterior).*

*Observación 1.1.* A lo largo de este trabajo consideraremos subconjuntos  $A \subset \mathbb{C}$  homeomorfos a la circunferencia, lo que implica que  $\pi_1(A; a_0) \cong \mathbb{Z}$ ,  $\forall a_0 \in A$ . Este grupo solo tiene dos generadores y elegir uno de ellos supone identificar el grupo con  $\mathbb{Z}$ . Vamos a ver cómo elegir el generador e identificar el grupo con  $\mathbb{Z}$ . Según el Teorema de Jordan, esta curva divide  $\mathbb{C}$  en una región interior y una exterior. Tomamos un punto  $a$  en la región interior y consideramos un lazo  $\alpha : I \rightarrow A \subset \mathbb{C}$  tal que  $\text{Índ}(\alpha, a) = 1$ . Este lazo determina un generador de  $\pi_1(A; a_0)$  y por tanto una identificación de este grupo con  $\mathbb{Z}$ ; la identificación no depende de  $a$ . Si  $B \subset \mathbb{C}$  es otro subconjunto homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ , podemos identificar sus grupos fundamentales con  $\mathbb{Z}$  de la misma manera.

Si  $\varphi : A \rightarrow B$  es un homeomorfismo, el isomorfismo en grupos fundamentales lo podemos ver como un automorfismo de grupos  $\varphi_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  con la identificación anterior. Entonces,  $\varphi_* = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$  si y solo si  $a$  está en la región interior determinada por  $A$  y  $b$  en la región interior determinada por  $B$  y  $\alpha : I \rightarrow A \subset \mathbb{C}$  es un lazo tal que  $\text{Índ}(\alpha, a) = 1$ , entonces  $\text{Índ}(\varphi \circ \alpha, b) = 1$ .

### 1.2.1. Homeomorfismos de la circunferencia

**Proposición 1.2.2.** *Sea  $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  un homeomorfismo. Entonces,  $\varphi$  es isótopo a un homeomorfismo que fija el punto 1.*

**Proposición 1.2.3.** *Sea  $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  un homeomorfismo. Entonces  $\varphi$  es isótopo a la identidad o a la conjugación compleja.*

Estos resultados se demuestran en el Apéndice A.

**Proposición 1.2.4.** *Sea  $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  un homeomorfismo. Entonces,  $\varphi$  es isótopo a la identidad si y solo si  $\varphi_* = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ .*

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Es trivial, ya que un homeomorfismo isótopo a la identidad induce el isomorfismo  $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ .

( $\Leftarrow$ ) La Proposición 1.2.3 establece que solo hay dos clases de isotopía de  $\mathbb{S}^1$ . La clase de isotopía de la identidad induce el isomorfismo trivial  $\varphi_* = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ , mientras que la clase de la conjugación compleja induce el isomorfismo  $1 \mapsto -1$ . Si  $\varphi_* = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ , entonces  $\varphi$  pertenece a la clase de isotopía de la identidad, es decir, es isótopo a la identidad.  $\square$

### 1.2.2. Homeomorfismos del disco

Por las propiedades del grupo fundamental, cualquier homeomorfismo del disco en sí mismo envía la circunferencia a la circunferencia.

Con un razonamiento similar al de la sección anterior, obtenemos un resultado análogo a la Proposición 1.2.2 para el disco. Con un poco más de trabajo, también se pueden establecer los resultados equivalentes a las Proposiciones 1.2.3 y 1.2.4.

A partir de ahora, nos enfocaremos en el estudio de los homeomorfismos del disco que son la identidad en la circunferencia (denominados  $\partial$ -homeomorfismos) y de las isotopías que también son la identidad en la circunferencia (denominadas  $\partial$ -isotopías). Los siguientes resultados serán útiles después.

**Teorema 1.2.5.** *Sea  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  un  $\partial$ -homeomorfismo tal que  $\varphi(0) = 0$ . Entonces existe una  $\partial$ -isotopía  $H : \mathbb{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$  con  $H_0 = \mathbf{1}_{\mathbb{D}}$ ,  $H_1 = \varphi$  tal que  $H_s(0) = 0 \forall s \in [0, 1]$*

*Demostración.* Sea  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  un  $\partial$ -homeomorfismo tal que  $\varphi(0) = 0$ . Definimos una  $\partial$ -isotopía  $H : \mathbb{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$  de la siguiente manera:

$$H(z, t) = \begin{cases} z & \text{si } z \notin \mathbb{D}_t \\ t\varphi\left(\frac{z}{t}\right) & \text{si } z \in \mathbb{D}_t \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } (z, t) = (0, 0) \end{cases}$$

Claramente  $H_0 = \mathbf{1}_{\mathbb{D}}$  y  $H_1 = \varphi$ . Falta comprobar que  $H$  es continua y que  $H_t$  es un  $\partial$ -homeomorfismo.

- La función  $H$  es continua. Los únicos puntos donde la continuidad no está clara son en  $|z| = t$  y en  $(z, t) = (0, 0)$ . Si  $|z| = t \neq 0$  tenemos que  $|\frac{z}{t}| = 1 \Rightarrow t\varphi\left(\frac{z}{t}\right) = t\frac{z}{t} = z$ . Por otra parte la función  $\varphi$  es acotada por el Teorema de Weierstrass, así que

$$\lim_{z, t \rightarrow 0} |\phi(z, t)| \leq \lim_{z, t \rightarrow 0} \max \left\{ \left| t\varphi\left(\frac{z}{t}\right) \right|, |z| \right\} \leq \lim_{z, t \rightarrow 0} \max \{tK, |z|\} = 0.$$

Por tanto es continua en  $(0, 0)$

- $H_s$  es un  $\partial$ -homeomorfismo para cada  $t \in [0, 1]$  porque  $z \mapsto t\varphi\left(\frac{z}{t}\right)$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{D}_t$  en sí mismo y claramente es la identidad en  $\partial\mathbb{D}$ .  $\square$

*Observación 1.2.6.* Aplicando una homotecia, el teorema anterior es cierto para un disco cualquiera de radio  $r > 0$ . También se puede extender fácilmente para un punto fijo  $z_0$  cualquiera. Posteriormente utilizaremos que el lema es válido para un disco  $\mathbb{D}_r(z_0)$  donde el punto fijo es el centro  $z_0$ .

**Lema 1.2.7.** *Sea  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  un  $\partial$ -homeomorfismo, sea  $r \leq 1$  y  $\varphi_r := \varphi|_{\mathbb{S}_r^1}$ . Entonces el isomorfismo  $\varphi_{r,*}$  es la identidad.*

*Demostración.* Consideremos dos caminos cerrados simples  $\alpha_r$  en  $\mathbb{S}_r^1$  y  $\alpha$  en  $\mathbb{S}^1$  con puntos base en la parte superior de las respectivas circunferencias y con índice 1 alrededor de un punto arbitrario  $z_0$  en  $\mathring{\mathbb{D}}_r$ . Tomamos también un camino recto  $w$  en  $\mathbb{D} \setminus \mathring{\mathbb{D}}_r$ , desde  $\alpha_r(0)$  hasta  $\alpha(0)$ . Es evidente que los caminos  $\alpha$  y  $w^{-1} \cdot \alpha_r \cdot w$  son equivalentes en  $\mathbb{D} \setminus \mathring{\mathbb{D}}_r$ . Utilizando el hecho de que  $\varphi$  es la identidad en  $\mathbb{S}^1$ , obtenemos la siguiente equivalencia de caminos en  $\mathbb{D} \setminus \mathring{\mathbb{D}}_r$ :

$$\varphi_r(\alpha_r) \sim \varphi(w \cdot \alpha \cdot w^{-1}) \sim \varphi(w) \cdot \alpha \cdot \varphi(w)^{-1}$$

El índice con respecto a  $z_0$  de los caminos  $\alpha_r$  y  $\alpha$  es 1. También lo es el índice del camino  $\varphi(w) \cdot \alpha \cdot \varphi(w)^{-1}$ , por lo tanto, también lo es el de  $\varphi_r(\alpha_r)$  ya que la equivalencia de caminos respeta el índice. Por la Observación 1.1, se tiene que  $\varphi_{r,*} = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ .  $\square$

Estos lemas también se demuestran en el Apéndice A.

**Lema 1.2.8.** Sean  $\varphi_{\pm} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dos homeomorfismos isotópos a la identidad. Entonces, existe un homeomorfismo  $\Phi : \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$  tal que  $\Phi(x, t) = (\Phi_t(x), t)$  con  $\Phi_1 = \varphi_+$  y  $\Phi_{-1} = \varphi_-$ .

**Lema 1.2.9.** Sea  $C = \overline{\mathbb{D}}_2 \setminus \overset{\circ}{\mathbb{D}}_1$  una corona circular y sean  $\varphi_j : \partial\mathbb{D}_j \rightarrow \partial\mathbb{D}_j$ ,  $j = 1, 2$  homeomorfismos isotópos a la identidad. Entonces existe un homeomorfismo  $\psi : C \rightarrow C$  tal que  $\psi|_{\partial\mathbb{D}_j} = \varphi_j$ .

*Observación 1.2.10.* Este lema es válido para una corona circular  $C$  cualquiera, ya que todas son homeomorfas entre sí.

**Lema 1.2.11.** Sean  $A_1, A_2 \subset \mathbb{C}$  conjuntos homeomorfos a una corona circular  $C$  centrada en 0. Denotamos por  $A_{i\pm}$  a las fronteras interiores y exteriores de  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ . Sean  $\varphi_{\pm} : A_{1\pm} \rightarrow A_{2\pm}$  homeomorfismos de manera que el isomorfismo de grupos inducido es la identidad, i.e.  $\varphi_{\pm*} = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ . Entonces existe un homeomorfismo  $\Phi : A_1 \rightarrow A_2$  tal que  $\Phi|_{A_{i\pm}} = \varphi_{\pm}$ .

**Teorema 1.2.12.** Sea  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  un  $\partial$ -homeomorfismo y sean  $z_1, \dots, z_n$  puntos distintos en el interior de  $\mathbb{D}$ . Escribimos  $\varphi(z_i) = z'_i \forall i = 1, \dots, n$ . Entonces existen  $0 < r_0 < r_1 < 1$  y una  $\partial$ -isotopía  $H$  tal que:

- (1)  $H_0 = \varphi$ ,
- (2)  $H_1$  coincide con la función  $z \mapsto z + z'_i - z_i$  en  $\mathbb{D}_{r_0}(z_i)$ ,
- (3)  $H_t(z_i) = z'_i \forall t \in [0, 1]$ ,
- (4)  $H_t$  coincide con  $\varphi$  en  $\mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{\mathbb{D}}_{r_1}(z_i) \forall t \in [0, 1]$ .

*Demostración.* Tomamos  $0 < r_0 < r_1 < 1 - \max_i\{|z_i|, |z'_i|\}$  tales que  $\mathbb{D}_{r_0}(z'_i) \subseteq \varphi(\mathbb{D}_{r_1}(z_i))$  para todo  $i = 1, \dots, n$  y además  $\bigcap_i \mathbb{D}_{r_1}(z_i) = \emptyset$  y  $\bigcap_i \varphi(\mathbb{D}_{r_1}(z_i)) = \emptyset$ . La existencia de tales  $r_0$  y  $r_1$  se deriva de que los puntos  $z'_i = \varphi(z_i)$  son todos distintos ya que  $\varphi$  es inyectiva. Fijamos uno de los puntos  $z_i$  y suponemos a partir de ahora que todos los discos y circunferencias en los que no aparezca el centro están centrados en  $z_i$ .

Los conjuntos  $\varphi(\mathbb{D}_{r_1}) \setminus \mathbb{D}_{r_0}(z'_i)$  y  $\mathbb{D}_{r_1} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{D}}_{r_0}$  son homeomorfos a una corona circular y  $\varphi$  es un  $\partial$ -homeomorfismo, así que por el Lema 1.2.7 se tiene que  $\varphi|_{\mathbb{S}_{r_1,*}^1} = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ . Aplicamos el Lema 1.2.11 a  $\varphi|_{\mathbb{S}_{r_1}^1}$  y a la traslación  $f_i : \mathbb{S}_{r_0}^1 \rightarrow \mathbb{S}_{r_0}^1(z'_i)$ ,  $f_i(z) = z + z'_i - z_i$  y obtenemos que existe un homeomorfismo:

$$\Phi : \mathbb{D}_{r_1} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{D}}_{r_0} \rightarrow \varphi(\mathbb{D}_{r_1}) \setminus \mathbb{D}_{r_0}(z'_i), \text{ con } \Phi|_{\mathbb{S}_{r_1}^1} = \varphi|_{\mathbb{S}_{r_1}^1}, \Phi|_{\mathbb{S}_{r_0}^1} = f_i.$$

Lo extendemos a todo  $\mathbb{D}_{r_1}$  por  $\psi$ :

$$\psi(z) = \begin{cases} \Phi(z) & \text{si } z \in \mathbb{D}_{r_1} \setminus \mathbb{D}_{r_0} \\ z + z'_i - z_i & \text{si } z \in \mathbb{D}_{r_0} \end{cases}$$

que es un homeomorfismo, coincide con  $\varphi$  en la frontera de  $\mathbb{D}_{r_1}$  y con una traslación en  $\mathbb{D}_{r_0}$ . Por composición  $\psi^{-1} \circ \varphi : \mathbb{D}_{r_1} \rightarrow \mathbb{D}_{r_1}$  es un  $\partial$ -homeomorfismo y además fija  $z_i$ . Por el Teorema 1.2.5, existe una  $\partial$ -isotopía

$$H : \mathbb{D}_{r_1} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}_{r_1} \text{ con } H_0 = \psi^{-1} \circ \varphi, H_1 = \mathbf{1}|_{\mathbb{D}_{r_1}} \text{ y } H_t(z_i) = z_i \forall t \in [0, 1].$$

Componiendo con  $\psi$  obtenemos la isotopía

$$\hat{H} := \psi \circ H : \mathbb{D}_{r_1} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}_{r_1} \text{ con } \psi \circ H_0 = \varphi, \psi \circ H_1 = \psi \text{ y } \hat{H}_t(z_i) = z'_i \forall t \in [0, 1].$$

Dado que  $H$  una  $\partial$ -isotopía, es decir, es la identidad en el borde de  $\mathbb{D}_{r_1}$ , tenemos que  $\hat{H}|_{\mathbb{S}_{r_1}^1} = \psi|_{\mathbb{S}_{r_1}^1} = \varphi|_{\mathbb{S}_{r_1}^1}$ .

Hasta aquí hemos obtenido  $n$  isotopías  $\hat{H}_i : \mathbb{D}_{r_1}(z_i) \times [0, 1] \rightarrow \varphi(\mathbb{D}_{r_1}(z_i))$ , definidas en conjuntos disjuntos, con imágenes disjuntas, que coinciden con  $\varphi$  en el borde de  $\mathbb{D}_{r_1}(z_i)$ , donde  $\hat{H}_{i,1}$  coincide con la traslación  $z \mapsto z + \varphi(z_i) - z_i$  en  $\mathbb{D}_{r_0}(z_i)$  y verificando que  $\hat{H}_i(z_i, t) = z'_i \forall t \in [0, 1]$ . Extendemos estas isotopías a todo el disco y tenemos el resultado. La función

$$\tilde{H}(z, t) = \begin{cases} \hat{H}_i(z, t) & \text{si } z \in \mathbb{D}_{r_1}(z_i) \\ \varphi(z) & \text{si } z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathring{\mathbb{D}}_{r_1}(z_i) \end{cases}$$

cumple todas las condiciones del enunciado.  $\square$

**Lema 1.2.13.** *Dados  $p, q \in \mathring{\mathbb{D}}$  existe un  $\partial$ -homeomorfismo  $h_{q,p} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  tal que  $h(q) = p$*

*Demostración.* Lo vemos para  $q = 0$ . Para un  $q$  cualquiera consideramos dos homeomorfismos  $h_{0,p}, h_{0,q}$  tales que  $h_{0,p}(0) = p$ ,  $h_{0,q}(0) = q$  y tomamos  $h_{q,p} = h_{0,p} \circ h_{0,q}^{-1}$ . Dado  $p \in \mathring{\mathbb{D}}$  definimos:

$$\begin{aligned} h_{0,p} : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto z + (1 - |z|)p \end{aligned}$$

Es un  $\partial$ -homeomorfismo,  $h_{0,p}(0) = p$  y  $h_{p,p} = \mathbf{1}|_{\mathbb{C}} \forall p \in \mathring{\mathbb{D}}$ . Además la función:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (z, q, p) &\longmapsto h_{q,p}(z) \end{aligned}$$

es continua.

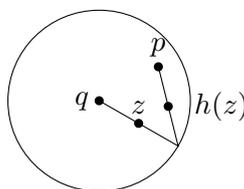


Figura 1.1: Homeomorfismo  $h_{q,p}$ .

$\square$

*Observación 1.2.14.* El lema se puede aplicar para un disco de cualquier radio  $r$ .

**Definición 1.2.15.** Se define el *espacio de configuración de  $n$  puntos ordenados en  $\mathbb{C}$*  como el conjunto  $X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_i \neq x_j \forall i \neq j\}$ .

**Lema 1.2.16.** *Dados  $0 < r_1 < 2r_2$  se define  $\mathbb{A}_{r_1, r_2} := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X_n^2 \mid |x_i - x_j| > r_2, |x_i - y_i| < r_1\}$ . Sean  $h_{x_i, y_i}$   $i = 1, \dots, n$  los  $\partial$ -homeomorfismos definidos en el Lema 1.2.13. Definimos la siguiente función:*

$$\begin{aligned} G : \mathbb{C} \times \mathbb{A}_{r_1, r_2} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto G_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(z) \end{aligned}$$

$$\text{con } G_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(z) := \begin{cases} z, & \text{si } z \notin \bigcup_{i=1}^n D(x_i, r_1) \\ h_{x_i, y_i}(z), & \text{si } z \in D(x_i, r_1) \end{cases}$$

Entonces  $G$  es continua,  $G_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  es un homeomorfismo para cada  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{A}_{r_1, r_2}$  y  $G_{\mathbf{x}, \mathbf{x}} = \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$



## Capítulo 2

# Movimientos y espacios de configuración

### 2.1. Primeras definiciones

**Definición 2.1.1.** Llamaremos *cuerda* o *hilo* a una aplicación continua  $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Un  $n$ -movimiento  $\beta$  es un conjunto de  $n$  cuerdas  $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  tales que  $\beta_i(t) \neq \beta_j(t) \forall t \in [0, 1]$  si  $j \neq i$ . Llamaremos *extremos superior e inferior* del  $n$ -movimiento a los puntos  $\beta_i^+ := \beta_i(1)$  y  $\beta_i^- := \beta_i(0)$ . Por último se dice que un  $n$ -movimiento es *cerrado* si  $\{\beta_i^-\}_{i=1}^n = \{\beta_i^+\}_{i=1}^n$ , en contraposición a un  $n$ -movimiento *abierto*. Si  $\beta_i^- = \beta_i^+ \forall i \in \{1, \dots, n\}$  diremos que el  $n$ -movimiento es *puro*.

*Observación 2.1.2.* En la definición de  $n$ -movimiento estamos ordenando implícitamente los caminos  $\beta_i$ . Se deducirá del contexto si esta ordenación es relevante.

Representaremos los  $n$ -movimientos en  $\mathbb{C} \times [0, 1]$  por las curvas parametrizadas  $t \mapsto (\beta_i(t), t)$ .

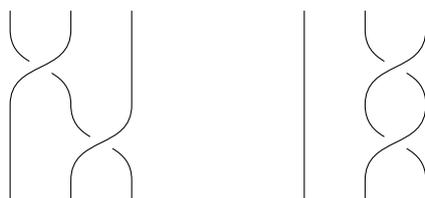


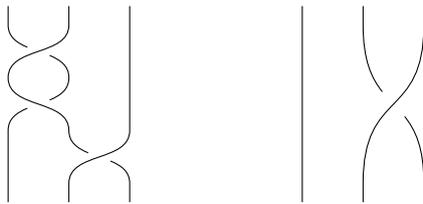
Figura 2.1: 3-movimiento no puro (izquierda) y 3-movimiento puro (derecha)

*Observación 2.1.3.* Los  $n$ -movimientos cerrados inducen una permutación de sus extremos. Si denotamos por  $\Sigma_n$  el grupo simétrico de orden  $n$ , la acción de  $\sigma \in \Sigma_n$  sobre la cifra  $i$  como  $i^\sigma$  y  $C_n$  el conjunto de  $n$ -movimientos cerrados entonces existe una aplicación sobreyectiva  $S : C_n \rightarrow \Sigma_n$  tal que para cualquier  $\beta \in C_n$  existe  $\sigma \in \Sigma_n$  tal que  $\beta_i^- = \beta_{i^\sigma}^+$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Geoméricamente parece que al deformar ligeramente los hilos de un  $n$ -movimiento manteniendo los extremos fijos se obtiene otro movimiento que es *esencialmente el mismo*. La noción de  $s$ -isotopía formaliza esta idea.

**Definición 2.1.4.** Dos  $n$ -movimientos  $\beta, \beta'$  son  $s$ -isótopos si existen  $n$  aplicaciones continuas  $H_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  (homotopías),  $i = 1, \dots, n$  tales que:

1.  $H_i(t, 0) = \beta_i(t)$  y  $H_i(t, 1) = \beta'_i(t) \forall t \in [0, 1]$
2.  $H_i(0, s) = \beta_i(0) = \beta'_i(0)$  y  $H_i(1, s) = \beta_i(1) = \beta'_i(1) \forall s \in [0, 1]$
3.  $H_i(t, s) \neq H_j(t, s) \forall t, s \in [0, 1]$  si  $i \neq j$ .

Figura 2.2: 3-movimientos  $s$ -isótopos

## 2.2. Espacios de configuración

En esta sección introduciremos la noción de espacio de configuración, que nos permitirá interpretar los  $n$ -movimientos como caminos y la  $s$ -isotopía como una homotopía de caminos relativa a los extremos.

**Definición 2.2.1.** Dado un espacio topológico  $T$ , se define el *espacio de configuración de  $n$  puntos ordenados en  $T$*  como el conjunto

$$X_n(T) = \{(x_1, \dots, x_n) \in T^n \mid x_i \neq x_j \forall i \neq j\},$$

dotado de la topología de subespacio de  $T^n$ .

Hay una acción natural del grupo simétrico  $\Sigma_n$  en los puntos de  $X_n(T)$  dada por

$$\begin{aligned} X_n(T) \times \Sigma_n &\longrightarrow X_n(T) \\ ((x_1, \dots, x_n), \sigma) &\longmapsto (x_{1\sigma}, \dots, x_{n\sigma}) \end{aligned}$$

Esto sugiere la siguiente definición

**Definición 2.2.2.** Dado un espacio topológico  $T$ , se define el *espacio de configuración de  $n$  puntos en  $T$*  como el conjunto

$$Y_n(T) = X_n(T)/\Sigma_n,$$

es decir, el espacio de órbitas de la acción, con la topología cociente.

También identificaremos los elementos de  $Y_n$  con los subconjuntos de  $\mathbb{C}$  de cardinal  $n$  que tienen todos sus elementos distintos, así que usaremos la notación  $\{x_1, \dots, x_n\}$  para los elementos de  $Y_n$ . Por último escribiremos simplemente  $X_n$  e  $Y_n$  cuando el espacio topológico sea  $\mathbb{C}$ .

- En estos espacios la relación entre caminos y  $n$ -movimientos es clara. Un camino en  $Y_n$  es una aplicación  $t \mapsto \{c_1(t), \dots, c_n(t)\}$  tal que  $c_i(t) \neq c_j(t)$  si  $i \neq j$  que es justo la definición de  $n$ -movimiento. Por lo tanto los  $n$ -movimientos son caminos en  $Y_n$ . Por otra parte un camino en  $Y_n$  o un  $n$ -movimiento dan lugar a  $n!$  caminos en  $X_n$  al ordenar sus componentes.
- Inicialmente habíamos definido la  $s$ -isotopía entre  $n$ -movimientos con  $n$  funciones  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . En el espacio  $Y_n$  esto es una homotopía de caminos relativa a los extremos así que escribiremos  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y_n$  con  $H(t, s) = \{H_1(t, s), \dots, H_n(t, s)\}$  para denotar la  $s$ -isotopía. Como es usual utilizaremos la notación  $\beta^{-1} := \{\beta_1^{-1}, \dots, \beta_n^{-1}\}$  para el camino recorrido en sentido inverso,  $\mathbf{1}_x$  para el camino constante  $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$  y escribiremos  $[\beta]$  para designar la clase de equivalencia del  $n$ -movimiento  $\beta$ , que es el conjunto de  $n$ -movimientos  $s$ -isótopos a  $\beta$  y que llamaremos  $n$ -trenza.
- Por último la composición de caminos en  $Y_n$  se traslada también a la composición de  $n$ -movimientos. Dados dos  $n$ -movimientos  $\beta, \beta' \in Y_n$  tales que  $\beta(1) = \beta'(0)$ , se define el  $n$ -movimiento compuesto  $\beta\beta'$  con la composición usual de caminos, donde eventualmente hay que permutar los índices de los hilos. Vistos como trenzas en  $\mathbb{C} \times [0, 1]$  esta operación se corresponde con apilar una trenza encima de otra y reescalar.

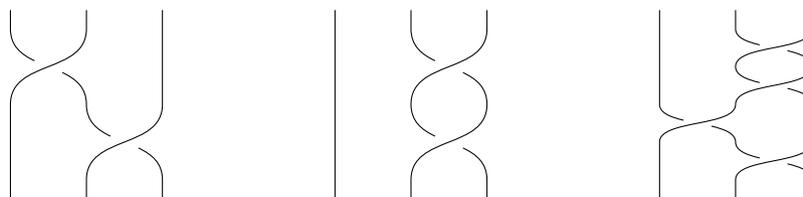


Figura 2.3: Trenzas  $\beta, \beta', \beta\beta'$

**Definición 2.2.3.** El grupo de  $n$ -trenzas puras  $\mathbb{P}_n$ , es el grupo fundamental de  $X_n$ , es decir,

$$\mathbb{P}_n = \pi_1(X_n).$$

**Definición 2.2.4.** El grupo de trenzas de  $n$  cuerdas,  $\mathbb{B}_n$ , es el grupo fundamental de  $Y_n$ , es decir,

$$\mathbb{B}_n = \pi_1(Y_n) = \pi_1(X_n/\Sigma_n).$$

*Observación 2.2.5.* Los elementos de estos grupos son las clases de equivalencia de los  $n$ -movimientos cerrados. Por otra parte los espacios  $X_n$  e  $Y_n$  son conexos por caminos, así que omitiremos el punto base.

**Definición 2.2.6.** Se definen los *generadores estándar* o *generadores de Artin* como los  $n$ -movimientos  $\sigma_i$ , con  $1 \leq i \leq n - 1$ , donde todos los hilos son rectos excepto el hilo  $i$ -ésimo, que pasa solamente sobre el hilo  $i + 1$ -ésimo, y este solamente por detrás del anterior.

Estos movimientos están definidos salvo  $s$ -isotopía y se indican en la Figura 2.4, con extremos superiores e inferiores en el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

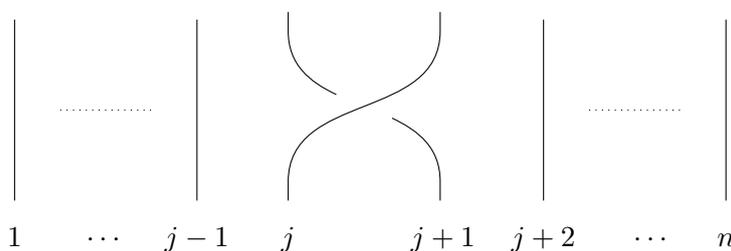


Figura 2.4: Generador de Artin  $\sigma_j$

Como hemos venido haciendo, representamos las trenzas mediante su proyección en  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ . En esta proyección interpretamos que un hilo pasa por encima de otro si, al considerarlos como caminos en el plano complejo  $\mathbb{C}$ , el hilo que está por encima tiene una parte imaginaria menor en el punto de cruce. Aplicando una homotopía si fuera necesario, podemos suponer que esta proyección tiene un número finito de puntos de cruce entre los hilos, en los cuales solo intervienen dos cuerdas a la vez. Además, podemos asumir que estos cruces ocurren a diferentes alturas, es decir, para distintos valores de  $t \in [0, 1]$ . Por lo tanto, cualquier  $n$ -movimiento se puede escribir como composición de generadores de Artin. Esto significa que los grupos  $\mathbb{P}_n$  y  $\mathbb{B}_n$  están generados por los generadores de Artin.

*Observación 2.2.7.* En el espacio  $Y_n$  y fijado el punto base  $\{1, \dots, n\}$  el generador de Artin  $\sigma_j$  se corresponde con la clase de homotopía del siguiente camino:

$$\sigma_j(t) := \left\{ 1, \dots, j - 1, j + \frac{1 - e^{i\pi t}}{2}, j + \frac{1 + e^{i\pi t}}{2}, j + 2, \dots, n \right\}.$$

*Observación 2.2.8.* Los generadores de Artin cumplen ciertas relaciones. Para empezar

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ si } |i - j| > 1, \quad (2.1)$$

ya que estas trenzas involucran hilos distintos. También se cumple la relación (ver Figura 2.5)

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \quad (2.2)$$

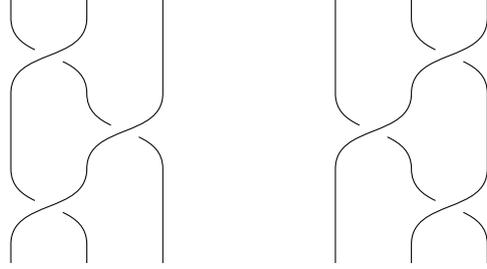


Figura 2.5: Trenzas  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$  y  $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

**Definición 2.2.9.** Se define el *espacio de polinomios mónicos de grado  $n$*  como  $M_n := \{p \in \mathbb{C}[t] \mid p \text{ mónico de grado } n\}$ .

**Proposición 2.2.10.** *Los espacios  $M_n$  e  $Y_n$  son homeomorfos y  $Y_n$  es homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{C}^n$ .*

*Demostración.* El homeomorfismo entre  $M_n$  e  $Y_n$  lo da la aplicación

$$\begin{aligned} Y_n &\xrightarrow{\psi} M_n \\ \{x_1, \dots, x_n\} &\longmapsto \prod_{i=1}^n (t - x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &\xrightarrow{\tilde{\psi}} M_n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \prod_{i=1}^n (t - x_i) \end{aligned}$$

Veamos que  $\tilde{\psi}^{-1}(M_n)$  es un abierto de  $\mathbb{C}^n$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{-1}(M_n) &= \mathbb{C}^n \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \exists i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ con } i \neq j \text{ tales que } x_i = x_j\} \\ &= \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i, j \in \{1, \dots, n\}} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_i = x_j\} \end{aligned}$$

Los conjuntos  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_i = x_j\}$  son cerrados en  $\mathbb{C}^n$  por ser el núcleo de las aplicaciones continuas  $f_{ij}(x_1, \dots, x_n) = x_i - x_j$ . Por tanto la unión finita

$$\bigcup_{i, j \in \{1, \dots, n\}} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_i = x_j\}$$

también es cerrada, así que  $M_n$  es abierto. □

*Observación 2.2.11.* Podemos ver una  $n$ -trenza como un camino  $C : [0, 1] \rightarrow M_n$ , donde los hilos vienen dados por el camino que describen las raíces de los polinomios en  $Y_n$ .

## Capítulo 3

# Trenzas, homeomorfismos y grupos libres

### 3.1. Trenzas *versus* homeomorfismos

En esta sección estudiaremos la relación entre los  $n$ -movimientos y los homeomorfismos del plano. Veremos cómo se extiende la  $s$ -isotopía entre movimientos a una familia de homeomorfismos del plano e introduciremos un homeomorfismo  $C_\beta$  al que Artin se refiere como “coordenadas de trenza” que relaciona el  $n$ -movimiento  $\beta$  con el  $n$ -movimiento trivial.

**Teorema 3.1.1.** Sean  $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  y  $\beta' = \{\beta'_1, \dots, \beta'_n\}$   $n$ -movimientos  $s$ -isótopos y sea

$$H := \{H_1, \dots, H_n\} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y_n$$

una  $s$ -isotopía desde  $\beta$  hasta  $\beta'$ . Existe una aplicación continua

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C} \times [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, t, s) &\longmapsto F_{t,s}(z) \end{aligned}$$

tal que

(T1)  $F_{t,s} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un homeomorfismo.

(T2)  $F_{t,s} = \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$  si  $(t, s) \in [0, 1] \times \{0\} \cup \{0, 1\} \times [0, 1]$ .

(T3)  $\exists K > 0$  tal que  $F_{t,s}|_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_K} = \mathbf{1}|_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_K}$  para todo  $t, s \in [0, 1]$ .

(T4)  $F_{t,s}(\beta_i(t)) = H_i(t, s)$ .

*Demostración.* Por compacidad existe  $r > 0$  tal que

$$|H_i(t, s) - H_j(t, s)| > 3r, \quad \forall i \neq j, \forall t, s \in [0, 1].$$

También por compacidad existe una partición  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$  del intervalo  $[0, 1]$  tal que:

$$|H_i(t, s) - H_i(t, s')| < r, \quad \forall t \in [0, 1], \forall s, s' \in [s_i, s_{i+1}]$$

Definiremos primero la función  $F$  en el intervalo  $[s_0, s_1]$  y después la extenderemos continuamente a todo  $[0, 1]$ .

Consideramos la función  $G$  definida en el Lema 1.2.16 con  $r_1 = r$ ,  $r_2 = 3r$ . Para cada  $s \in [s_0, s_1]$  y cada  $t \in [0, 1]$  se define:

$$\begin{aligned} F_{t,s} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto F_{t,s}(z) := G_{H(t,s_0), H(t,s)}(z) \end{aligned}$$

Podemos definir esta función porque

$$(H(t, s), H(t, s')) \in \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X_n^2 \mid |x_i - x_j| > r_2, |x_i - y_i| < r_1\},$$

que es el requisito necesario para aplicar el Lema 1.2.16.

Dado que  $G_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  es un homeomorfismo para todo  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{A}_{r_1, r_2}$  fijos se deduce que  $F_{t, s}$  también lo es. Además  $G_{x, x} = \mathbf{1}|_{\mathbb{C}}$ , y para  $s = 0$  tenemos que  $H_i(t, s_0) = H_i(t, s)$ . Para  $t = 0$  se tiene que  $H_i(t, s) = H_i(0, s) = \beta_i(0)$  y en  $t = 1$   $H_i(t, s) = H_i(1, s) = \beta_i(1)$ . Por lo tanto se cumplen las dos primeras propiedades.

Para la tercera propiedad tomamos  $K = \max\{|H_i(t, s)| \mid t, s \in [0, 1]\} + r$  y tenemos que

$$|z| > K \Rightarrow |H_i(t, s) - z| > r \quad \forall t, s \in [0, 1] \Rightarrow F_{t, s}(z) = z \quad \forall t, s \in [0, 1]$$

Recalamos que este  $K$  vale no solo para  $s \in [s_0, s_1]$  sino para todo  $s \in [0, 1]$ . Por último:

$$F_{t, s}(H_i(t, 0)) = G_{(H_i(t, 0))_{i=1}^n, (H_i(t, s))_{i=1}^n}(H_i(t, 0)) = H_i(t, s)$$

por definición de  $G$ . Con esto ya tenemos  $F_{t, s}$  definida en  $[s_0, s_1]$  cumpliendo todas las propiedades requeridas. Supongamos que hemos definido  $F_{t, s}$  con las condiciones requeridas para todo  $s \in [s_0, s_m]$ . Para  $s \in [s_m, s_{m+1}]$ , se define:

$$F_{t, s}(z) = G_{(H_i(t, s_m))_{i=1}^n, (H_i(t, s))_{i=1}^n}(F_{t, s_m}(z))$$

En  $s = s_m$  tenemos  $H_i(t, s_m) = H_i(t, s)$ , por lo que  $G$  es la identidad y obtenemos  $F_{t, s}(z) = F_{t, s_m}(z)$ , así que la extensión es continua. De nuevo se verifican todas las propiedades del enunciado.

Finalmente  $F : \mathbb{C} \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  es continua por composición de funciones y porque  $G : \mathbb{C} \times \mathbb{A}_{r_1, r_2} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua.  $\square$

**Corolario 3.1.2.** *Sea  $\beta$  un  $n$ -movimiento. Existe un homeomorfismo*

$$\begin{aligned} C_\beta : \mathbb{C} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \times [0, 1] \\ (z, t) &\longmapsto (C_{\beta, t}(z), t) \end{aligned}$$

*cumpliendo:*

$$(C1) \quad C_{\beta, 0} = \mathbf{1}|_{\mathbb{C}}.$$

$$(C2) \quad \exists K > 0 \text{ tal que } C_{\beta, t}|_{(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_K)} = \mathbf{1}|_{(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_K)} \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

$$(C3) \quad C_{\beta, t}(\beta_i(0)) = \beta_i(t).$$

*Dado  $\beta'$  un  $n$ -movimiento  $s$ -isótopo a  $\beta$  se pueden construir  $C_\beta$  y  $C_{\beta'}$  tales que  $C_{\beta, 1} = C_{\beta', 1}$*

*Demostración.* Dados  $\beta, \beta'$   $n$ -movimientos  $s$ -isotopos, sabemos que el  $n$ -movimiento  $\beta\beta'^{-1}$  es  $s$ -isótopo al  $n$ -movimiento constante dado por  $\mathbf{1}_{\beta(0)} = \{\beta_1(0), \dots, \beta_n(0)\}$ . Sea  $H = \{H_1, \dots, H_n\}$  una  $s$ -isotopía desde  $\mathbf{1}_{\beta(0)}$  hasta  $\beta\beta'^{-1}$ . Por el Teorema 3.1.1 existe una familia de homeomorfismos  $F_{t, 1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cumpliendo las propiedades (T1)-(T4) que extienden esta  $s$ -isotopía. Definimos:

$$C_{\beta, t}(z) = F_{\frac{1}{2}t, 1}(z).$$

Esta función cumple con las propiedades deseadas. Demostramos solo la última, las demás se derivan fácilmente de las propiedades de la función  $F_{t, 1}$ . Recordamos que geoméricamente, en el producto  $\beta\beta'^{-1}$  el movimiento  $\beta$  se encuentra en la parte inferior.

$$C_{\beta, t}(\beta_i(0)) = F_{\frac{1}{2}t, 1}(\mathbf{1}_{\beta(0)_i}(0)) = F_{\frac{1}{2}t, 1}\left(\mathbf{1}_{\beta(0)_i}\left(\frac{1}{2}t\right)\right) = H_i\left(\frac{1}{2}t, 1\right) = (\beta\beta'^{-1})_i\left(\frac{1}{2}t\right) = \beta_i(t)$$

Por otra parte, haciendo una reflexión sobre el plano  $t = \frac{1}{2}$  se define de la misma manera una función  $C_{\beta',t}(z) := F_{1-\frac{t}{2},1}(z)$ , que también cumple con las propiedades (C1)-(C3). En  $t = 1$  obtenemos  $C_{\beta,1}(z) = F_{\frac{1}{2},1}(z) = C_{\beta',1}(z)$ .  $\square$

*Observación 3.1.3.* Geométricamente  $C_\beta$  “rehace” la trenza  $\beta$  partiendo de  $\mathbf{1}_{\beta(0)}$ , dejando fija la base y moviendo los extremos superiores. Se mueve solo en planos horizontales y define un homeomorfismo del par  $(\mathbb{C} \times [0, 1], \mathbf{1}_{\beta(0)})$  en  $(\mathbb{C} \times [0, 1], \beta)$ , considerando  $\mathbf{1}_{\beta(0)}$  y  $\beta$  como las imágenes de las curvas  $t \mapsto (\mathbf{1}_{\beta(0)}(t), t)$  y  $t \mapsto (\beta(t), t)$ . Recalamos que la función  $C_\beta$  no es única. Otra manera de interpretarla es como una isotopía desde  $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$  hasta  $C_{\beta,1}$ .

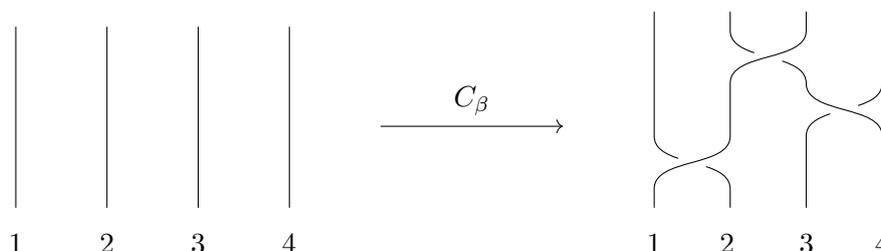


Figura 3.1: Transformación mediante  $C_\beta$

**Notación 3.1.4.** Dada una función  $C_\beta$  cumpliendo las propiedades (C1)-(C3) se denota el homeomorfismo  $C_{\beta,1}$  como  $D_\beta$ .

*Observación 3.1.5.* Con esta notación no está claro de qué función  $C_\beta$  proviene una función  $D_\beta$ , pero quedará claro cuando hagamos uso de ella. Al igual que antes  $D_\beta$  determina un homeomorfismo del par  $(\mathbb{C}, \beta(0))$  en  $(\mathbb{C}, \beta(1))$

**Ejemplo 3.1.6.** Consideremos el generador de Artin  $\sigma_1$  con extremos en  $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$  que tiene como representante el siguiente movimiento:

$$\sigma_1(t) := \left\{ -\frac{e^{i\pi t}}{2}, \frac{e^{i\pi t}}{2} \right\}.$$

El siguiente homeomorfismo  $C_\beta : \mathbb{C} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$  recibe el nombre de *twist de Dehn*.

$$C_{\beta,t}(z) = \begin{cases} e^{\pi it} z & \text{si } z \in \mathbb{D}_1 \\ e^{\pi i t(2-|z|)} z & \text{si } z \in \mathbb{D}_2 \setminus \mathbb{D}_1 \\ z & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_2 \end{cases}$$

Se cumplen todas las propiedades (C1)-(C3). Para  $t = 1$  se obtiene el siguiente homeomorfismo:

$$D_\beta(z) = \begin{cases} -z & \text{si } z \in \mathbb{D}_1 \\ e^{\pi i(2-|z|)} z & \text{si } z \in \mathbb{D}_2 \setminus \mathbb{D}_1 \\ z & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_2 \end{cases}$$

Observamos que  $D_\beta$  permuta los extremos de la trenza de la manera deseada y es la identidad fuera de  $\mathbb{D}_2$ .

La teoría que hemos desarrollado previamente está definida en  $\mathbb{C}$ . Los homeomorfismos e isotopías con los que hemos trabajado son en realidad  $\partial$ -homeomorfismos y  $\partial$ -isotopías en un disco  $\mathbb{D}_r$  suficientemente grande. Por tanto estas funciones se pueden restringir a  $\mathbb{D}_r \times [0, 1]$  o a  $\mathbb{D}_r$ . Recíprocamente, si definimos estas funciones en  $\mathbb{D}_r$ , se pueden extender fácilmente a  $\mathbb{C}$  por la identidad, ya que coinciden con la identidad en el borde del disco. Por lo tanto la elección entre  $\mathbb{D}_r$  y  $\mathbb{C}$  es arbitraria. Por comodidad a partir de ahora trabajaremos en el disco

### 3.2. Trenzas como automorfismos de $\mathbb{F}_n$

En este capítulo daremos otra interpretación del grupo de  $n$ -trenzas. Aunque inicialmente las hemos definido como una colección de cuerdas, existe una representación natural de las  $n$ -trenzas como automorfismos del grupo libre  $\mathbb{F}_n$  con  $n$  generadores.

**Notación 3.2.1.** Introducimos algunas funciones que utilizaremos después.

- (1) Sea  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \in Y_n$ . Llamamos  $\mathbb{D}_{r,\mathbf{x}}$  al disco  $\mathbb{D}_r$  agujereado en los puntos  $x_i$ , esto es

$$\mathbb{D}_{r,\mathbf{x}} := \mathbb{D}_r \setminus \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$$

- (2) Dado un  $n$ -movimiento  $\beta$  contenido en  $\mathbb{D}_r$  llamamos  $X_{r,\beta}$  a  $\mathbb{D}_r \times [0, 1] \setminus \beta$ .

Observamos que el grupo fundamental de  $\mathbb{D}_{r,\mathbf{x}}$  es isomorfo a  $\mathbb{F}_n$ . Vamos a describir una base canónica de  $\pi_1(\mathbb{D}_{r,\mathbf{x}}; P)$ . Todos los caminos que describiremos a continuación vivirán en  $\mathbb{D}_{r,\mathbf{x}}$ .

- Tomamos  $n$  circunferencias  $c_i$  del mismo radio, recorridas en sentido antihorario, alrededor de los puntos  $x_i$ . Las tomamos suficientemente pequeñas para que no haya intersecciones entre ellas. Recalamos que el radio no afecta a los generadores del grupo siempre que sea lo suficientemente pequeño para que no haya intersecciones entre ellos, así que podemos reducirlo si en algún momento es necesario.
- Fijamos un punto base punto  $P$  en la parte superior de  $\mathbb{D}_r$ , es decir, el punto con mayor parte imaginaria, y tomamos  $n$  caminos simples  $l_i$  conectando  $c_i$  y  $P$ , en ese sentido, de la siguiente manera:
  - Si la parte real de todos los  $x_i$  es distinta, nos desplazamos desde  $P$ , por el borde superior del disco, hasta que la parte real coincida con la de  $x_i$ . En ese momento trazamos un segmento vertical hasta la parte superior del camino  $c_i$ . Los caminos  $l_i$  serán los caminos descritos pero recorridos en sentido inverso.
  - Si la parte real de dos o más puntos  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  coincide, nos desplazamos de la misma manera que antes por el borde del disco hasta que las partes reales coincidan. Entonces trazamos  $k$  caminos hasta el extremo superior de los  $c_{i_j}$  correspondientes, dejando a la derecha los demás  $x_{i_j}$ .
- Ordenaremos los puntos  $x_i$  con el orden lexicográfico en  $\mathbb{C}$ , esto es

$$a + bi \leq_{\mathbb{C}} a' + b'i \Leftrightarrow a <_{\mathbb{R}} a' \text{ ó } (a = a' \text{ y } b \leq_{\mathbb{R}} b')$$

y reordenamos también los subíndices de los hilos  $\beta_i$  y de los caminos  $l_i, c_i$  de manera acorde al punto que rodean.

Definimos los lazos  $t_i := l_i^{-1} \cdot c_i \cdot l_i$ , basados en  $P$ . Estos serán los generadores del grupo. Haciendo un pequeño abuso de notación denotaremos por  $t_i$  los generadores de todos los discos  $\mathbb{D}_{r,\mathbf{x}}$  sin hacer mención al radio del disco. Además denotaremos por  $t_i$  los generadores de  $\pi_1(\mathbb{D}_{\mathbf{x}}; P)$  sin escribir los corchetes y se distinguirán de los caminos por el contexto.

**Proposición 3.2.2.** *Las clases de equivalencia de los lazos  $t_i := l_i^{-1} \cdot c_i \cdot l_i$  son un conjunto generador de  $\pi_1(\mathbb{D}_{r,\mathbf{x}}, P)$ , es decir  $\pi_1(\mathbb{D}_{r,\mathbf{x}}, P) = \langle t_1, \dots, t_n \mid t_i = l_i^{-1} \cdot c_i \cdot l_i, i = 1, \dots, n \rangle$ . Además, el lazo  $t_1 \cdot \dots \cdot t_n$  es equivalente al lazo  $\partial\mathbb{D}_r$ , basado en  $P$  y recorrido en sentido antihorario.*

*Demostración.* La demostración es inmediata por la construcción de los lazos  $t_i$ . □

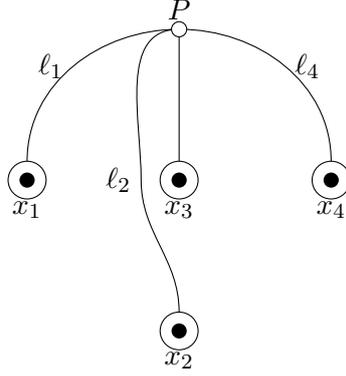


Figura 3.2: Generadores de  $\pi_1(\mathbb{D}_{r,\mathbf{x}}; P)$ ,  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_4\}$ .

**Notación 3.2.3.** Introducimos algunas funciones que utilizaremos después.

- (1) Sea  $f$  un camino en un espacio topológico  $X$  con punto inicial  $f(0) = x_0$  y punto final  $f(1) = x_1$ . Denotamos por  $u_f : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$  el isomorfismo de grupos dado por  $\alpha \mapsto f^{-1} \cdot \alpha \cdot f$ .
- (2) Denotaremos por  $g$  el camino  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D} \times [0, 1]$  definido por  $t \mapsto (P, t)$ .
- (3) Por último, dado  $x \in [0, 1]$  definimos la *inlcusión*  $i_x : \mathbb{D} \hookrightarrow \mathbb{D} \times \{x\} \subset \mathbb{D} \times [0, 1]$ .

*Observación 3.2.4.* Sean  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\} \in Y_n$  y sean  $\mathbb{D}_{r_1}$  y  $\mathbb{D}_{r_2}$  dos discos que contienen en su interior a los puntos  $x_i$ . Existe un isomorfismo natural  $\varphi$  entre sus grupos fundamentales:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\mathbb{D}_{r_1, \mathbf{x}}; P_1) & \xrightarrow{\varphi} & \pi_1(\mathbb{D}_{r_2, \mathbf{x}}; P_2) \\
 i_* \downarrow & & i_* \downarrow \\
 \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{x}; P_1) & \xrightarrow{u_f} & \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{x}; P_2)
 \end{array} \tag{3.1}$$

donde  $f$  es el segmento que une los puntos base y el generador  $t_i \in \pi_1(\mathbb{D}_{r_1, \mathbf{x}}; P_1)$  se envía al generador  $t_i \in \pi_1(\mathbb{D}_{r_2, \mathbf{x}}; P_2)$ . Por lo tanto el radio del disco es irrelevante y a partir de ahora lo omitiremos.

**Proposición 3.2.5.** *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\mathbb{D}_{\beta(0)}; P) & \xrightarrow{D_{\beta,*}} & \pi_1(\mathbb{D}_{\beta(1)}; P) \\
 \downarrow i_{1,*} & & \downarrow i_{1,*} \\
 \pi_1(X_{\mathbf{1}_{\beta(0)}}; (P, 1)) & \xrightarrow{C_{\beta,*}} & \pi_1(X_{\beta}; (P, 1)) \\
 \downarrow u_g & & \downarrow u_g = u_{C_{\beta}(g)} \\
 \pi_1(X_{\mathbf{1}_{\beta(0)}}; (P, 0)) & \xrightarrow{C_{\beta,*}} & \pi_1(X_{\beta}; (P, 0)) \\
 i_{0,*} \uparrow & & i_{0,*} \uparrow \\
 \pi_1(\mathbb{D}_{\beta(0)}; P) & \xrightarrow{\mathbf{1}_*} & \pi_1(\mathbb{D}_{\beta(0)}; P)
 \end{array} \tag{3.2}$$

En particular  $D_{\beta,*} = i_{1,*}^{-1} \circ u_{g^{-1}} \circ i_{0,*}$ .

*Demostración.* Tomamos un homeomorfismo  $C_{\beta}$  cualquiera cumpliendo las propiedades (C1)-(C3). Es necesario verificar la conmutatividad de los 4 cuadrados del diagrama. En el cuadrado de la izquierda, la igualdad  $\mathbf{1}_* = i_{1,*}^{-1} \circ u_g \circ i_{0,*}$  es evidente ya que las inclusiones son isomorfismos

porque  $\mathbb{D}_{\beta(0)} \times \{j\}$ ,  $j = 0, 1$ , son retracts por deformación de  $X_{1_{\beta(0)}}$ . El cuadrado de arriba también es claro por la definición de  $D_\beta$ . En el del medio utilizamos que dado un elemento  $[\alpha] \in \pi_1(X_{1_{\beta(0)}}; (P, 1))$ , la clase  $C_{\beta,*} \circ u_g[\alpha]$  está representada por el lazo  $C_\beta \circ (g^{-1} \cdot \alpha \cdot g) = g^{-1} \cdot (C_\beta \circ \alpha) \cdot g$ , porque  $C_\beta$  fija  $\partial\mathbb{D} \times [0, 1]$ . Por otro lado, la clase  $u_g \circ C_{\beta,*}[\alpha]$  está representada por el mismo lazo, y por lo tanto, el cuadrado central conmuta. En el cuadrado de abajo utilizamos de nuevo que  $\mathbb{D}_{\beta(0)} \times \{0\}$  es un retracto por deformación de  $X_{1_{\beta(0)}}$  y que  $C_\beta$  es la identidad en la base.  $\square$

*Observación 3.2.6.* La proposición anterior prueba que el isomorfismo  $D_{\beta,*}$  es equivalente a tomar un generador  $t_i \in \mathbb{D}_{\beta(0)}$ , incluirlo en  $\mathbb{D}_{\beta(0)} \times \{0\}$ , subirlo hasta  $\mathbb{D}_{\beta(1)} \times \{1\}$  conjugando por  $g$  e incluirlo en  $\mathbb{D}_{\beta(1)}$ . La siguiente imagen ilustra este proceso:

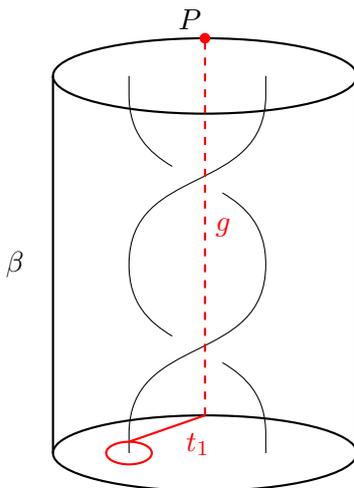


Figura 3.3: Automorfismo inducido por  $\beta$

**Corolario 3.2.7.** *El isomorfismo  $\mathbb{D}_{\beta,*}$  solo depende de la  $n$ -trenza  $[\beta]$ .*

*Demostración.* Es inmediato a partir de la Proposición 3.2.5 y del Corolario 3.1.2, que demuestra que si  $\beta$  y  $\beta'$  son  $s$ -isótopas se pueden construir homeomorfismos tales que  $D_\beta = D_{\beta'}$ .  $\square$

**Proposición 3.2.8.** *Sean  $\beta, \beta'$  dos  $n$ -movimientos tales que  $\beta(1) = \beta'(0)$ . Entonces  $D_{\beta\beta',*} = D_{\beta',*} \circ D_{\beta,*}$ .*

*Demostración.* Utilizamos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D_{\beta\beta',*} & & \\
 & \swarrow & \text{---} & \searrow & \\
 \pi_1(\mathbb{D}_{\beta(0)}; P) & \xrightarrow{D_{\beta,*}} & \pi_1(\mathbb{D}_{\beta(1)}; P) & \xrightarrow{D_{\beta',*}} & \pi_1(\mathbb{D}_{\beta'(1)}; P) \\
 \downarrow i_{0,*} & & \downarrow i_{\frac{1}{2},*} & & \downarrow i_{1,*} \\
 \pi_1(X_{\beta\beta'}; (P, 0)) & \xrightarrow{u_{\bar{g}_1}} & \pi_1(X_{\beta\beta'}; (P, \frac{1}{2})) & \xrightarrow{u_{\bar{g}_2}^{-1}} & \pi_1(X_{\beta\beta'}; (P, 1)) \\
 & \searrow & u_{\bar{g}} & \swarrow & 
 \end{array}$$

donde  $g_1$  es el camino dado por  $t \mapsto (P, \frac{t}{2})$  y  $g_2$  el camino  $t \mapsto (P, \frac{t}{2} + \frac{1}{2})$ . A partir de las proposiciones anteriores y aplicando homotecias  $\mathbb{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D} \times [0, \frac{1}{2}]$ ,  $\mathbb{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D} \times [\frac{1}{2}, 1]$  es inmediato que el diagrama es conmutativo, por lo tanto  $D_{\beta\beta',*} = D_{\beta',*} \circ D_{\beta,*}$ .  $\square$

**Notación.** A partir de aquí denotaremos a las trenzas por  $\beta$ , sin escribir los corchetes. Se distinguirán de los movimientos por el contexto. Denotaremos los generadores del grupo  $\pi_1(\mathbb{D}_{\beta(0)}; P)$  por  $t_i^-$  y los generadores de  $\pi_1(\mathbb{D}_{\beta(1)}; P)$  por  $t_i^+$ . Estos generadores son la clase de homotopía de los lazos descritos al comienzo del capítulo.

**Proposición 3.2.9.** *La aplicación*

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_n &\xrightarrow{\mu} \text{Aut}(\mathbb{F}_n) \\ \beta &\longmapsto \mathbb{D}_{\beta,*} \end{aligned} \quad (3.3)$$

*está bien definida y es un antihomomorfismo de grupos.*

*Demostración.* Es inmediato a partir del Corolario 3.2.7 y la Proposición 3.2.8  $\square$

**Proposición 3.2.10.** *Dada una  $n$ -trenza  $\beta$ , el isomorfismo  $D_{\beta,*}$  es de la forma*

$$\begin{aligned} D_{\beta,*} : \pi_1(\mathbb{D}_{\beta(0)}; P) &\longrightarrow \pi_1(\mathbb{D}_{\beta(1)}; P) \\ t_i^- &\longmapsto S_i^{-1} \cdot t_i^+ \cdot S_i \end{aligned}$$

*Además,  $D_{\beta,*}(t_1^- \cdots t_n^-) = t_1^+ \cdots t_n^+$ .*

*Demostración.* El Teorema 1.2.12 garantiza que podemos escoger un  $\partial$ -homeomorfismo  $D_\beta : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  y un radio  $r_0$  lo suficientemente pequeño tales que  $D_\beta$  coincida en  $\mathbb{D}_{r_0}(\beta_i(0))$  con una traslación a lo largo de  $\beta_i(1) - \beta_i(0)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Por otra parte, los caminos  $c_i^\pm$  son circunferencias alrededor de  $\beta_i^\pm$ , que podemos tomar del mismo radio  $r < r_0$ . Por tanto, tenemos que  $D_\beta(c_i^-) = c_i^+$ . Consideramos las siguientes equivalencias de caminos en  $\mathbb{D}_{\beta(1)}$ :

$$\begin{aligned} D_\beta(t_i^-) &\sim D_\beta\left((l_i^-)^{-1} \cdot c_i^- \cdot l_i^-\right) \\ &\sim D_\beta(l_i^-)^{-1} \cdot D_\beta(c_i^-) \cdot D_\beta(l_i^-) \\ &\sim D_\beta(l_i^-)^{-1} \cdot c_i^+ \cdot D_\beta(l_i^-) \\ &\sim D_\beta(l_i^-)^{-1} \cdot l_i^+ \cdot (l_i^+)^{-1} \cdot c_i^+ \cdot l_i^+ \cdot (l_i^+)^{-1} \cdot D_\beta(l_i^-) \\ &\sim S_i^{-1} \cdot t_i^+ \cdot S_i, \end{aligned}$$

donde  $S_i = (l_i^+)^{-1} \cdot D_\beta(l_i^-)$ .

Finalmente, debido a la forma en que hemos descrito los generadores, el producto  $t_1^- \cdots t_n^-$  es homótopo al borde de  $\mathbb{D}$ . Como  $D_\beta$  es la identidad en el borde, se cumple que  $D_{\beta,*}(t_1^- t_2^- \cdots t_n^-) = t_1^+ t_2^+ \cdots t_n^+$ .  $\square$

**Definición 3.2.11.** Dado un punto  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  donde los puntos  $x_i$  están ordenados con el orden lexicográfico en  $\mathbb{C}$  se define el  $n$ -movimiento lexicográfico en  $\mathbf{x}$  como:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(t) := (1-t)\{1, \dots, n\} + t\{x_1, \dots, x_n\}$$

**Lema 3.2.12.** *El isomorfismo inducido por un  $n$ -movimiento lexicográfico es la identidad.*

*Demostración.* Se deriva de la forma en la que está construida la trenza. Se comprueba fácilmente que los hilos de la trenza también están ordenados lexicográficamente, es decir,

$$(1-t)j + tx_j <_{\mathbb{C}} (1-t)(j+1) + tx_{j+1} \quad \forall t \in [0, 1], \forall j = 1, \dots, n-1$$

Por lo tanto nunca se produce un cruce entre los hilos. Representando geoméricamente el movimiento es inmediato ver que cada lazo  $g^{-1}t_i^-g$  en la base es homótopo al lazo  $t_i^+$  en la tapa de arriba.  $\square$

**Proposición 3.2.13.** *Los generadores de Artin  $\sigma_j$  inducen el siguiente automorfismo del grupo libre:*

$$D_{\sigma_j, *}(t_i) = \begin{cases} t_j t_{j+1} t_j^{-1} & \text{si } i = j, \\ t_j & \text{si } i = j + 1, \\ t_i & \text{si } i \neq j, j + 1. \end{cases}$$

*Demostración.* Si consideramos trenzas con extremos en  $\{1, \dots, n\}$  entonces el generador de Artin  $\sigma_j$  tiene como representante el siguiente movimiento:

$$t \mapsto \left\{ 1, \dots, j + \frac{1 - e^{i\pi t}}{2}, j + \frac{1 + e^{i\pi t}}{2}, \dots, n \right\}.$$

La representación gráfica de este movimiento se muestra en la Figura 3.4.

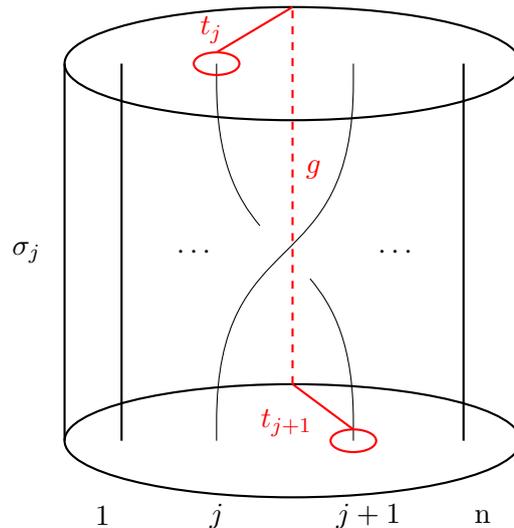


Figura 3.4: Automorfismo inducido por  $\sigma_j$

Es claro que los caminos  $g^{-1}t_{j+1}g$  y  $t_j$ , así como los caminos  $g^{-1}t_jg$  y  $t_{j+1}$ , son homótopos. También podemos definir una homotopía explícita utilizando la función  $C_\beta$  del Ejemplo 3.1.6 desplazada adecuadamente sumando  $j + \frac{1}{2}$ . Esta homotopía viene dada por la conjugación del camino  $t \mapsto C_\beta(t_i(t), t)$  por el camino  $g_t$  definido como el segmento recto desde  $(P, t)$  hasta  $(P, 1)$ .

Para el lazo  $t_j$ , sabemos que el producto de los generadores debe quedar fijo, es decir,  $D_{\sigma_j, *}(t_1 t_2 \cdots t_n) = t_1 t_2 \cdots t_n$ . Operando con lo que ya hemos demostrado, obtenemos que

$$D_{\sigma_j, *}(t_j) \cdot t_j = t_j t_{j+1} \Rightarrow D_{\sigma_j, *}(t_j) = t_j t_{j+1} t_j^{-1}.$$

Si consideramos un generador  $\sigma_j$  con extremos cualesquiera en  $\mathbf{x} \in Y_n$  basta conjugar con la trenza lexicográfica  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$  y considerar  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \sigma_j \mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{-1}$ . Por la forma en la que hemos descrito la trenza lexicográfica es fácil ver que  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \sigma_j \mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{-1}$  tiene extremos en  $\{1, \dots, n\}$  y cumple con la definición de generador de Artin, es decir, solo se produce un cruce entre los hilos  $j$  y  $j + 1$  y admite un representante en el que el resto de hilos son rectos, así que el automorfismo que induce es el indicado en el enunciado. El Lema 3.2.12 garantiza que  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$  da lugar al isomorfismo trivial así que por composición  $\sigma_j$  induce el automorfismo del enunciado.  $\square$

**Corolario 3.2.14.** *El automorfismo que induce  $\sigma_j^{-1}$  es:*

$$D_{\sigma_j^{-1}, *}(t_i) = \begin{cases} t_j & \text{si } i = j, \\ t_{j+1}^{-1} t_j t_{j+1} & \text{si } i = j + 1, \\ t_i & \text{si } i \neq j, j + 1. \end{cases}$$

*Demostración.* Se deduce inmediatamente a partir de la Proposición 3.2.13 teniendo en cuenta que  $\sigma_j^{-1}$  induce el automorfismo inverso a  $D_{\sigma_j, *}$ .  $\square$

Más adelante utilizaremos el Corolario 3.2.14 y la Proposición 3.2.13 para demostrar que  $\mathbb{B}_n$  es isomorfo a cierto subgrupo de  $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ .

**Notación 3.2.15.** Como mencionamos en el primer capítulo, existe un epimorfismo

$$\begin{array}{ccc} S : \mathbb{B}_n & \longrightarrow & \Sigma_n \\ \beta & \longmapsto & \sigma \end{array}$$

dado por la permutación de los extremos de los hilos. Sea  $\mathfrak{G}_n \subset \Sigma_n$  el estabilizador de la cifra  $n$  en  $\Sigma_n$ . Se trata de un subgrupo de índice  $n$ . Denotaremos  $\mathbb{S}_n := S^{-1}(\mathfrak{G}_n)$ , subgrupo de índice  $n$  de  $\mathbb{B}_n$  que consiste en las trenzas cuyo último hilo termina y empieza en el mismo punto. Consideremos también el homomorfismo de grupos  $\Upsilon_n : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{B}_{n-1}$ , que consiste en *olvidar* el último hilo. Por último denotamos  $\mathbb{T}_n := \ker \Upsilon_n$ , que es el grupo de las trenzas que admiten un representante con los  $n - 1$  primeros hilos rectos.

**Lema 3.2.16.** *Sea  $\beta \in \mathbb{T}_n$ , es decir, admite como representante un  $n$ -movimiento con los  $n - 1$  primeros hilos rectos. Entonces, si  $\beta \in \ker \mu$ , se tiene que  $\beta = \mathbf{1}$ .*

*Demostración.* Primero consideramos la aplicación

$$\Psi : \mathbb{T}_n \rightarrow \pi_1(\mathbb{D} \setminus \mathbf{x}_{n-1}; x_n)$$

donde  $\mathbf{x}_{n-1} := \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  y que se define geoméricamente como sigue. Sea  $\tau \in \mathbb{T}_n$  y considerémoslo representado por un  $n$ -movimiento  $\{x_1, \dots, x_{n-1}, \tau_n\}$  donde los  $n - 1$  primeros hilos son rectos. Entonces se define  $\Psi(\tau) = \tau_n$ . Recíprocamente, dado  $\gamma \in \pi_1(\mathbb{D} \setminus \mathbf{x}_{n-1}; x_n)$ , es fácil ver que  $\Psi^{-1}(\gamma)$  es la trenza definida por el movimiento  $\{x_1, \dots, x_{n-1}, \gamma\}$ . Es decir,  $\Psi$  es un isomorfismo, y se corresponde con proyectar el hilo  $n$ -ésimo en  $\mathbb{D}_{\mathbf{x}_{n-1}}$ .

Por los resultados anteriores sabemos que la imagen por  $i_1$  del camino  $\mu(\beta)(t_n)$  es homótopo en  $\mathbb{D}_{\mathbf{x}_{n-1}} \times [0, 1]$  al lazo

$$g^{-1} \cdot i_0(t_n) \cdot g \sim g^{-1} \cdot i_0(l_n^{-1}) \cdot i_0(c_n) \cdot i_0(l_n) \cdot g$$

que a su vez es homótopo a

$$(g^{-1} \cdot i_0(l_n^{-1}) \cdot \tilde{\beta}_n \cdot i_1(l_n)) \cdot (i_1(l_n^{-1}) \cdot i_1(c_n) \cdot i_1(l_n)) \cdot (g^{-1} \cdot i_0(l_n^{-1}) \cdot \tilde{\beta}_n \cdot i_1(l_n))^{-1}$$

donde  $\tilde{\beta}_n$  es paralelo a  $\beta_n$  en el cilindro de radio horizontal  $r$  de ánima  $\beta_n$ . Obtenemos que el lazo

$$g^{-1} \cdot i_0(l_n^{-1}) \cdot \tilde{\beta}_n \cdot i_1(l_n)$$

es homótopo al lazo imagen por  $i_1$  de

$$l_n^{-1} \cdot \tilde{\gamma} \cdot l_n =: \hat{\gamma},$$

donde  $\tilde{\gamma}$  es un lazo en  $\mathbb{D} \setminus \mathbf{x}$  basado en  $x_n$  y ligeramente trasladado de  $\Psi(\beta)$ . Con esta construcción hemos obtenido que  $t_n = \mu(\beta)(t_n) = \hat{\gamma} \cdot t_n \cdot \hat{\gamma}^{-1}$ , es decir,  $\hat{\gamma}$  conmuta con  $t_n$ .

Por último, tenemos una aplicación

$$\psi : \pi_1(\mathbb{D} \setminus \mathbf{x}; P) \rightarrow \pi_1(\mathbb{D} \setminus \mathbf{x}_{n-1}; x_n)$$

que consiste en la inclusión y conjugar con  $l_n$ . Entonces  $\Psi(\beta) = \psi(\hat{\gamma})$  por construcción y  $\hat{\gamma}$  es una potencia de  $t_n$ , por lo que  $\hat{\gamma} \in \ker \psi$ . Por lo tanto,  $\Psi(\beta) = \mathbf{1}$  y como  $\Psi$  es un isomorfismo, se deduce que  $\beta = \mathbf{1}$ .  $\square$

**Teorema 3.2.17.** *El antihomomorfismo de grupos  $\mu$  de la Proposición 3.2.9 es inyectivo.*

*Demostración.* Haremos la demostración por inducción sobre el número de hilos  $n$ . Para  $n = 1$  tenemos que  $\mathbb{B}_1 = \{\mathbf{1}\}$  por lo que  $\mu$  es trivialmente la identidad. Suponemos cierto el resultado para  $n - 1$ .

Sea  $\beta \in \ker \mu$ , es claro que  $\beta \in \mathbb{S}_n \subset \mathbb{P}_n$ . Consideremos la trenza obtenida al eliminar el hilo  $n$  de  $\beta$ , es decir  $\tau := \Upsilon_n(\beta) \in \mathbb{B}_{n-1}$ . Claramente  $\tau \in \ker \mu$  y  $\tau \in \mathbb{B}_{n-1}$ , así que por inducción  $\tau = \mathbf{1}$ .

Ahora es fácil ver que  $\beta \in \mathbb{T}_n$ . Sea  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  un representante con hilos rectos de  $\tau$  y  $\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n\}$  un representante de  $\beta$ . Aquí  $\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$  es otro representante de  $\tau$ , por tanto existe una  $s$ -isotopía desde  $\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$  hasta  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ . Por el Teorema 3.1.1 podemos extender la  $s$ -isotopía a una  $\partial$ -isotopía  $F$ . Aplicada a  $\beta$  obtenemos una  $s$ -isotopía desde  $\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n\}$  hasta  $\{x_1, \dots, x_{n-1}, F_{t,1}(\beta_n(t))\}$ . Por lo tanto,  $\beta$  admite un representante con los  $n - 1$  primeros hilos rectos, así que  $\beta \in \mathbb{T}_n$ . Por el Lema 3.2.16 obtenemos que  $\beta = \mathbf{1}$  y por lo tanto  $\mu$  es inyectiva.  $\square$

**Notación.** Sea  $\mathbb{A}_n := \{\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n) \mid \varphi(t_i) = Q_i^{-1}t_i^\sigma Q_i, \varphi(t_1 \dots t_n) = t_1 \dots t_n\}$ . Por la Proposición 3.2.10, sabemos que  $\mu(\mathbb{B}_n) \subset \mathbb{A}_n$ . Por tanto, a partir de ahora consideraremos  $\mu$  como un antihomomorfismo  $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{A}_n$ .

**Teorema 3.2.18.** *La aplicación  $\mu$  es un anti-isomorfismo.*

*Demostración.* La inyectividad ya se ha visto. Falta la sobreyectividad. Para empezar dado  $\varphi \in \mathbb{A}_n$  escribiremos  $\varphi(t_i) = Q_i^{-1}t_i^\sigma Q_i$ , donde cada  $Q_i$  es una palabra reducida y se cumple

$$\varphi(t_1) \dots \varphi(t_n) = \varphi(t_1 \dots t_n) = t_1 \dots t_n. \quad (3.4)$$

Fijada una base de  $\mathbb{F}_n$  tenemos el concepto de longitud de un elemento. La longitud de  $\varphi$  es la suma de las longitudes de los  $Q_i$ . El resultado se demuestra por inducción sobre la longitud de  $\varphi$ .

Si la longitud de  $\varphi$  es 0, entonces  $\varphi(t_i) = t_i$  para todo  $i$  y el automorfismo  $\varphi$  es la imagen de la trenza trivial.

Suponemos entonces que para todo  $\varphi \in \mathbb{A}_n$  con longitud  $m < k$  existe una trenza  $\beta \in \mathbb{B}_n$  tal que  $\varphi = \mu(\beta)$ . Supongamos entonces que  $\varphi$  es de longitud  $k > 0$ . En este supuesto, para que se cumpla (3.4) deben tener lugar si algunas cancelaciones en el producto de los  $\varphi(t_i)$ . Como son reducidos, estas cancelaciones deben tener lugar entre factores adyacentes.  $\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1})$ . Se pueden dar dos casos:

- 1) Los términos intermedios  $t_{i^\sigma}$  no se ven afectados en ninguna cancelación entre factores adyacentes. Sea  $R_i$  la palabra que sobrevive de cada  $\varphi(t_i)$ ; necesariamente  $R_i$  no es el elemento neutro. Por construcción  $R_1 \dots R_n$  es reducida e igual a  $t_1 \dots t_n$ . La única opción es  $R_i = t_i$  por lo que este caso no es posible al ser  $k > 0$ .
- 2) Existen dos términos adyacentes  $\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1})$  tales que en una cancelación entre sus términos se cancela  $t_{i^\sigma}$  ó  $t_{(i+1)^\sigma}$ .

- a) Supongamos primero que se cancela  $t_{i^\sigma}$  con términos de  $Q_{i+1}^{-1}$ . Es decir existe una palabra reducida  $R$  tal que  $Q_{i+1} = Rt_{i^\sigma}Q_i$ . Operamos:

$$\varphi(t_i) \cdot \varphi(t_{i+1}) = Q_i^{-1} \cancel{t_{i^\sigma}} \cancel{Q_i} \cancel{Q_i^{-1}} \cancel{t_{i^\sigma}^{-1}} R^{-1} t_{(i+1)^\sigma} R t_{i^\sigma} Q_i = \underbrace{((RQ_i)^{-1} t_{(i+1)^\sigma} (RQ_i))}_{T_i} \underbrace{(Q_i^{-1} t_{i^\sigma} Q_i)}_{T_{i+1}}.$$

Como  $T_{i+1} = \varphi(t_i)$ , tenemos que  $\varphi(t_{i+1}) = T_{i+1} \cdot T_i \cdot T_{i+1}^{-1}$ . Si denotamos  $T_j = \varphi(t_j)$ , si  $j \neq i, i + 1$ , entonces  $T_1, \dots, T_n$  es una base del grupo libre y

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{F}_n \\ t_i & \longmapsto & T_i \end{array}$$

es un elemento de  $\mathbb{A}_n$ ; como la longitud de  $RQ_i$  es menor que la de  $Q_{i+1}$ , la longitud de  $\Psi$  es menor que  $k$  y existe  $\tau \in \mathbb{B}_n$  tal que  $\mu(\tau) = \psi$ . Sea  $j \neq i, i+1$ :

$$\mu(\sigma_i^{-1} \cdot \tau)(t_j) = (\mu(\tau) \circ \mu(\sigma_i)^{-1})(t_j) = \psi(t_j) = T_j = \varphi(t_j).$$

Además

$$\mu(\sigma_i^{-1} \cdot \tau)(t_i) = (\mu(\tau) \circ \mu(\sigma_i)^{-1})(t_i) = \psi(t_{i+1}) = T_{i+1} = \varphi(t_i).$$

$$\mu(\sigma_i^{-1} \cdot \tau)(t_{i+1}) = (\mu(\tau) \circ \mu(\sigma_i)^{-1})(t_{i+1}) = \psi(t_{i+1}^{-1} \cdot t_i \cdot t_{i+1}) = T_{i+1} \cdot T_i \cdot T_{i+1}^{-1} = \varphi(t_{i+1}).$$

Es decir,  $\mu(\sigma_i^{-1} \cdot \tau) = \varphi$  y  $\varphi$  está en la imagen de  $\mu$ .

- b) Se cancela  $t_{(i+1)\sigma}$  con términos de  $Q_i$ . Es decir existe una palabra reducida  $R$  tal que  $Q_i = Rt_{(i+1)\sigma}^{-1} Q_{i+1}$ . Operamos:

$$\begin{aligned} \varphi(t_i) \cdot \varphi(t_{i+1}) &= Q_{i+1}^{-1} t_{i+1} \sigma R^{-1} t_i \sigma R \cancel{(t_{i+1} \sigma)^{-1} Q_{i+1} Q_{i+1}^{-1} t_{i+1} \sigma} Q_{i+1} \\ &= \underbrace{(Q_{i+1}^{-1} t_{i+1} \sigma Q_{i+1})}_{T_i} \underbrace{((RQ_{i+1})^{-1} t_i \sigma (RQ_{i+1}))}_{T_{i+1}}. \end{aligned}$$

Como  $T_i = \varphi(t_{i+1})$ , tenemos que  $\varphi(t_i) = T_i \cdot T_{i+1} \cdot T_i^{-1}$ . Si denotamos  $T_j = \varphi(t_j)$ , si  $j \neq i, i+1$ , entonces  $T_1, \dots, T_n$  es una base del grupo libre y

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{F}_n \\ t_i & \longmapsto & T_i \end{array}$$

es un elemento de  $\mathbb{A}_n$ ; como la longitud de  $RQ_{i+1}$  es menor que la de  $Q_i$ , la longitud de  $\Psi$  es menor que  $k$  y existe  $\tau \in \mathbb{B}_n$  tal que  $\mu(\tau) = \psi$ . Sea  $j \neq i, i+1$ :

$$\mu(\sigma_i \cdot \tau)(t_j) = (\mu(\tau) \circ \mu(\sigma_i))(t_j) = \psi(t_j) = T_j = \varphi(t_j).$$

Además

$$\mu(\sigma_i \cdot \tau)(t_i) = (\mu(\tau) \circ \mu(\sigma_i))(t_i) = \psi(t_i t_{i+1} t_i^{-1}) = T_i T_{i+1} T_i^{-1} = \varphi(t_i).$$

$$\mu(\sigma_i \cdot \tau)(t_{i+1}) = (\mu(\tau) \circ \mu(\sigma_i))(t_{i+1}) = \psi(t_i) = T_i = \varphi(t_{i+1}).$$

Es decir,  $\mu(\sigma_i \cdot \tau) = \varphi$  y  $\varphi$  está en la imagen de  $\mu$ . □

*Observación 3.2.19.* El Teorema 3.2.18 proporciona una demostración alternativa de las relaciones  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  si  $|i - j| > 1$  y  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ . Basta verificar que los automorfismos inducidos por los generadores de Artin cumplen estas relaciones. También permite, por inducción, encontrar la escritura de una trenza en función de los generadores.



## Capítulo 4

# Presentación del grupo de trenzas

Como comentamos en el resumen, Artin dio una presentación del grupo de trenzas en *Theorie der Zöpfe* [1] con una demostración geométrica. Sin embargo en *Theory of Braids* [2] se menciona que es posible dar una demostración alternativa utilizando las herramientas desarrolladas en ese artículo, que son las que hemos adaptado en este trabajo. Eso es lo que haremos en esta sección: describiremos el grupo de trenzas como un grupo finitamente presentado y lo demostraremos desde una perspectiva algebraica.

**Definición 4.0.1.** El *grupo de trenzas algebraico* es el grupo finitamente presentado

$$\tilde{\mathbb{B}}_n := \langle \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1} \mid [\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j] = 1 \text{ si } j - i > 1, \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \rangle.$$

**Proposición 4.0.2.** Existe un epimorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{B}}_n & \xrightarrow{F_n} & \mathbb{B}_n \\ \tilde{\sigma}_i & \longmapsto & \sigma_i \end{array}$$

Además existe un epimorfismo  $\tilde{S} : \tilde{\mathbb{B}}_n \rightarrow \Sigma_n$  tal que  $\tilde{S} = S \circ F_n$ , donde  $S : \mathbb{B}_n \rightarrow \Sigma_n$  es el epimorfismo dado por la permutación de los hilos.

*Demostración.* La primera parte es inmediata por la Proposición 1.1.6. El homomorfismo  $\tilde{S}$  está bien definido y es un epimorfismo por composición.  $\square$

**Notación.** Al igual que en  $\mathbb{B}_n$ , escribiremos  $\tilde{\mathbb{P}}_n := \ker \tilde{S}$  y  $\tilde{\mathbb{S}}_n := \tilde{S}^{-1}(\mathfrak{G}_n) = F_n^{-1}(\mathbb{S}_n)$ , que es un subgrupo de índice  $n$ , donde  $\mathfrak{G}_n$  es el estabilizador de la cifra  $n$  en el grupo simétrico.

**Lema 4.1.** Las trenzas  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}^2$  engendran el subgrupo  $\mathbb{S}_n$ .

*Demostración.* Para empezar, tenemos que  $n^{S(\tau)} = n$  para todo  $\tau \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}^2\}$ , así que estas trenzas viven en  $\mathbb{S}_n$ . A partir de aquí hacemos la demostración por inducción sobre  $n$ .

- 1) Para  $n = 1$ , el grupo  $\mathbb{S}_n$  es trivial.
- 2) Para  $n = 2$ , tenemos que  $\mathbb{B}_2 = \langle \sigma_1 \rangle$  y por otra parte  $\sigma_1^2 \in \mathbb{S}_2$  pero  $\sigma_1 \notin \mathbb{S}_2$ , así que  $\mathbb{S}_2 = \langle \sigma_1^2 \rangle$ .

Supongamos que el resultado es cierto para todo  $m < n$ . Hacemos ahora otra inducción sobre la longitud de  $\tau \in \mathbb{S}_n$ .

- 1) Si  $l(\tau) = 0$ , el caso es trivial.
- 2) Si  $l(\tau) = 1$ , entonces necesariamente  $\tau = \sigma_i$  con  $i \neq n - 1$  ya que  $\sigma_{n-1} \notin \mathbb{S}_n$ , así que el resultado es cierto.

Supongamos que toda trenza  $\tau \in \mathbb{S}_n$  con longitud menor que  $k_1$  se expresa como producto de las trenzas  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}^2$ .

Hacemos una tercera inducción sobre  $\#\sigma_{n-1}^{\pm 1}(\tau)$ , que definimos como el número de elementos  $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$  en la palabra reducida  $\tau \in \mathbb{S}_n$ .

- 1) Si  $\#\sigma_{n-1}^{\pm 1}(\tau) = 0$ , entonces  $\tau$  es producto de  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$ .
- 2) Si  $\#\sigma_{n-1}^{\pm 1}(\tau) = 1$ , entonces por inducción sobre la longitud de  $\tau$  podemos suponer que  $\tau = \sigma_{n-1}^{\pm 1}$ , quitando otros elementos  $\sigma_i$  si la palabra  $\tau$  empieza por ellos, pero  $\sigma_{n-1}^{\pm 1} \notin \mathbb{S}_n$  y este caso es una contradicción.
- 3) Si  $\#\sigma_i^{\pm 1}(\tau) = 2$ , con el mismo razonamiento del caso anterior podemos suponer que  $\tau = \sigma_{n-1}^{\pm 1} \alpha \sigma_{n-1}^{\pm 1}$  donde  $\alpha$  es una palabra en la que no aparece el elemento  $\sigma_{n-1}$ , así que  $\alpha \in \mathbb{B}_{n-1}$ . Es inmediato comprobar que  $\alpha \in \mathbb{S}_{n-1}$ . Por inducción,  $\alpha$  es producto de  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-3}, \sigma_{n-2}^2$ . Dado que la conjugación por un elemento es un isomorfismo de grupos, tenemos que  $\sigma_{n-1}^1 \alpha \sigma_{n-1}^{-1}$  es producto de:

$$\sigma_{n-1} \sigma_1 \sigma_{n-1}^{-1}, \dots, \sigma_{n-1} \sigma_{n-3} \sigma_{n-1}^{-1}, \sigma_{n-1} \sigma_{n-2}^2 \sigma_{n-1}^{-1}$$

Y por las relaciones es producto de  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-3}, \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2}$ . El caso  $\sigma_{n-1}^1 \alpha \sigma_{n-1}^{-1}$  se deriva del anterior multiplicando a derecha por  $\sigma_{n-1}^{-2}$  y los demás se obtienen considerando  $\tau^{-1}$ . Así que se cumple el enunciado.

Con esto, suponemos que el enunciado es cierto para toda trenza  $\tau \in \mathbb{S}_n$  con longitud menor que  $k_1$  o tal que  $\#\sigma_i^{\pm 1}(\tau) < k_2$ .

Sea  $\tau \in \mathbb{S}_n$  con longitud  $k_1$  y  $\#\sigma_i^{\pm 1}(\tau) = k_2$ . Como  $n > 2$  y por inducción sobre la longitud de  $\tau$  podemos suponer que  $\tau$  es de la forma  $\sigma_{n-1}^{\pm 1} \alpha \sigma_{n-1}^{\pm 1} \beta \sigma_{n-1}^{\pm 1}$ , donde  $\alpha$  es una palabra en la que no aparecen  $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$ . También asumimos que  $\alpha$  y  $\beta$  son no triviales, en caso contrario el resultado es inmediato.

Sea  $j := n^{S(\sigma_{n-1}^{\pm 1} \alpha \sigma_{n-1}^{\pm 1})}$ .

- 1) Si  $j = n$  entonces  $\sigma_{n-1}^{\pm 1} \alpha \sigma_{n-1}^{\pm 1} \in \mathbb{S}_n$  y  $\beta \sigma_{n-1}^{\pm 1} \in \mathbb{S}_n$  y sus longitudes son menores que  $k_1$ , por lo tanto se expresan como producto de las trenzas del enunciado.
- 2) Si  $j < n$  consideramos las siguientes trenzas:

$$\tau_1 := \sigma_{n-1}^{\pm 1} \alpha \sigma_{n-1}^{\pm 1} \sigma_j^{\pm 1} \dots \sigma_{n-1}^{\pm 1}, \quad \tau_2 := \sigma_{n-1}^{\mp 1} \sigma_j^{\mp 1} \dots \sigma_{n-1}^{\mp 1} \beta \sigma_{n-1}^{\pm 1}.$$

Es claro que  $\tau = \tau_1 \tau_2$  y que ambas están en  $\mathbb{S}_n$ . Operando en  $\tau_1$  tenemos que:

$$\tau_1 = \sigma_{n-1}^{\pm 1} \alpha \sigma_j^{\pm 1} \dots \sigma_{n-1}^{\pm 1} \sigma_{n-2}^{\pm 1} \sigma_{n-2}^{\pm 1},$$

En esta nueva escritura  $\#\sigma_{n-1}^{\pm 1}(\tau_1) = 2$  y ya hemos probado este caso. Por otra parte,  $\#\sigma_{n-1}^{\pm 1}(\tau_2) = k_2 - 1$  y el resultado se sigue por inducción.  $\square$

*Observación 4.2.* En la demostración anterior solo hemos utilizado las relaciones  $[\sigma_i, \sigma_j] = 1$  si  $j - i > 1$  y  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ . Estas relaciones también se cumplen en  $\mathbb{B}_n$  por lo que el resultado similar se cumple también para  $\mathbb{S}_n$ .

**Proposición 4.3.** Sea  $\Upsilon_n : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{B}_{n-1}$  el epimorfismo definido por olvidar el último hilo y  $\mathbb{T}_n = \ker \Upsilon_n$  el subgrupo formado por las trenzas que admiten un representante con los  $n - 1$  primeros hilos rectos. Entonces  $\mathbb{T}_n$  es un grupo libre con  $n - 1$  generadores  $y_i$  de la forma

$$y_i = (\sigma_{n-2} \dots \sigma_i)^{-1} \cdot \sigma_{n-1}^2 \cdot (\sigma_{n-2} \dots \sigma_i)$$

*Demostración.* Recordemos de la demostración del Lema 3.2.16 que existe un isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{T}_n &\longrightarrow \pi_1(\mathbb{D}_{\mathbf{x}_{n-1}}; x_n) \\ \tau &\longmapsto \tau_n \end{aligned}$$

definido por proyectar el hilo  $n$ -ésimo. Tomamos una base  $y_1, \dots, y_{n-1}$  de  $\pi_1(\mathbb{D}_{\mathbf{x}_{n-1}}; x_n)$  de manera que  $y_i$  sean lazos basados en  $x_n$  y rodeando solamente el punto  $x_i$ . Las antiimágenes de estos lazos serán un conjunto generador de  $\mathbb{T}_n$ .

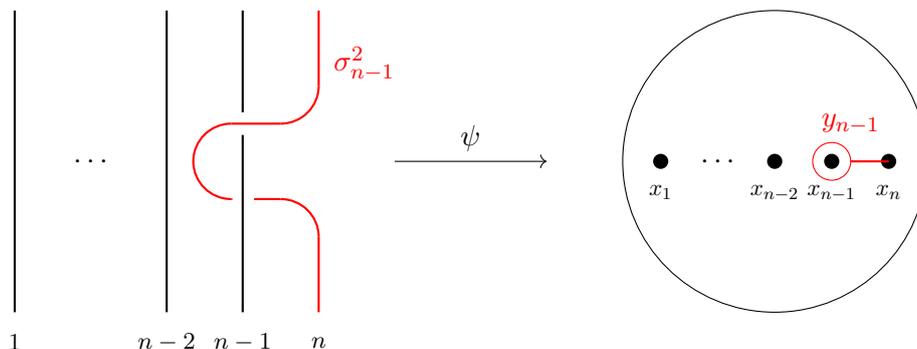


Figura 4.1: Proyección por  $\psi$

Es claro que la preimagen del generador  $y_{n-1}$  es la trenza  $\sigma_{n-1}^2$ . También es fácil ver que la preimagen de los generadores  $y_i$  son las siguientes trenzas:

$$\eta_i := (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{i+1}) \cdot \sigma_i^2 \cdot (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{i+1})^{-1}.$$

Veamos que  $\eta_i = (\sigma_{n-2} \cdots \sigma_i)^{-1} \cdot \sigma_{n-1}^2 \cdot (\sigma_{n-2} \cdots \sigma_i)$ . Lo hacemos por inducción descendente sobre  $i$ . Si  $i = n - 1$  entonces sabemos que

$$\sigma_{n-1} \sigma_{n-2}^2 \sigma_{n-1}^{-1} = \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2}$$

y el resultado se cumple. Suponemos cierto el resultado para  $i \geq m + 1$ . Entonces por hipótesis de inducción

$$\sigma_m^{-1} (\sigma_{n-2} \cdots \sigma_{m+1})^{-1} \sigma_{n-1}^2 (\sigma_{n-2} \cdots \sigma_{m+1}) \sigma_m = \sigma_m^{-1} (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{m+2}) \sigma_{m+1}^2 (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{m+2})^{-1} \sigma_m$$

Utilizando que  $\sigma_m$  conmuta con  $\sigma_j$  si  $j > m + 1$  obtenemos:

$$\sigma_m^{-1} (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{m+2}) \sigma_{m+1}^2 (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{m+2})^{-1} \sigma_m = (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{m+2}) \sigma_m^{-1} \sigma_{m+1}^2 \sigma_m (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{m+2})^{-1}$$

Y usando que  $\sigma_m^{-1} \sigma_{m+1}^2 \sigma_m = \sigma_{m+1} \sigma_m^2 \sigma_{m+1}^{-1}$  tenemos:

$$\sigma_m^{-1} (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{m+2}) \sigma_{m+1}^2 (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{m+2})^{-1} \sigma_m = (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{m+2}) \sigma_{m+1} \sigma_m^2 \sigma_{m+1}^{-1} (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_{m+2})^{-1}$$

lo que finaliza la demostración.  $\square$

**Lema 4.4.** Sean  $\tilde{\eta}_i = (\tilde{\sigma}_{n-1} \cdots \tilde{\sigma}_{i+1}) \tilde{\sigma}_i^2 (\tilde{\sigma}_{n-1} \cdots \tilde{\sigma}_{i+1})^{-1}$ . Entonces

$$\tilde{\beta} := \tilde{\eta}_1 \cdots \tilde{\eta}_{n-1} = \tilde{\sigma}_{n-1} \cdots \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_1^2 \tilde{\sigma}_2 \cdots \tilde{\sigma}_{n-1}.$$

Además,  $\tilde{\beta}$  conmuta con  $\tilde{\sigma}_i$  si  $i < n - 1$ .

*Demostración.* Primero vamos a probar que  $\tilde{\beta}$  es de la forma deseada, por inducción sobre  $n$ .

- Para  $n = 1$ , el grupo  $\tilde{\mathbb{B}}_1$  es trivial.

- Para  $n = 2$ , tenemos que  $\tilde{\beta} = \tilde{\eta}_1 = \tilde{\sigma}_1^2$  y se cumple el enunciado.
- Para  $n = 3$ , tenemos que  $\tilde{\beta} = \tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 = \tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1^2\tilde{\sigma}_2^{-1}\tilde{\sigma}_2^2 = \tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1^2\tilde{\sigma}_2$  y también se cumple.

Supongamos que  $\tilde{\beta}$  es de la forma del enunciado para todo  $m \leq n-1$ . Denotaremos por  $\tilde{\eta}_i^* \in \mathbb{B}_{n-1}$  las palabras  $(\tilde{\sigma}_{n-2} \dots \tilde{\sigma}_{i+1})\tilde{\sigma}_i^2(\tilde{\sigma}_{n-2} \dots \tilde{\sigma}_{i+1})^{-1}$ . Se tiene que  $\tilde{\eta}_i = \tilde{\sigma}_{n-1}\tilde{\eta}_i^*\tilde{\sigma}_{n-1}^{-1}$ . Obtenemos lo siguiente:

$$\tilde{\beta} = \tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\eta}_{n-1} = \tilde{\sigma}_{n-1}\tilde{\eta}_1^*\tilde{\sigma}_{n-1}^{-1} \dots \tilde{\sigma}_{n-1}\tilde{\eta}_{n-2}^*\tilde{\sigma}_{n-1}^{-1}\tilde{\eta}_{n-1} = \tilde{\sigma}_{n-1}\tilde{\eta}_1^* \dots \tilde{\eta}_{n-2}^*\tilde{\sigma}_{n-1}^{-1}\tilde{\eta}_{n-1}.$$

Por hipótesis de inducción obtenemos que

$$\tilde{\beta} = \tilde{\sigma}_{n-1}\tilde{\sigma}_{n-2} \dots \tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1^2\tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_{n-2}\tilde{\sigma}_{n-1}^{-1}\tilde{\eta}_{n-1}.$$

Y como  $\tilde{\eta}_{n-1} = \tilde{\sigma}_{n-1}$ , tenemos:

$$\tilde{\beta} = \tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1^2\tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_{n-1}.$$

Que es lo que queríamos. Veamos ahora que  $\tilde{\beta}$  conmuta con  $\tilde{\sigma}_i$ . Sea  $i < n-1$ ,

$$\tilde{\sigma}_i\tilde{\beta}\tilde{\sigma}_i^{-1} = (\tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_{i+2})\tilde{\sigma}_i\tilde{\sigma}_{i+1}\tilde{\sigma}_i \dots \tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1^2\tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_i\tilde{\sigma}_{i+1}\tilde{\sigma}_i^{-1}(\tilde{\sigma}_{i+2} \dots \tilde{\sigma}_{n-1})^{-1}.$$

Aplicando las relaciones entre los generadores obtenemos:

$$\tilde{\sigma}_i\tilde{\beta}\tilde{\sigma}_i^{-1} = (\tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_{i+2})\tilde{\sigma}_{i+1}\tilde{\sigma}_i\cancel{\tilde{\sigma}_{i+1}}\tilde{\sigma}_{i-1} \dots \tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_{i-1}\cancel{\tilde{\sigma}_{i+1}}\tilde{\sigma}_i\tilde{\sigma}_{i+1}(\tilde{\sigma}_{i+2} \dots \tilde{\sigma}_{n-1}) = \tilde{\beta},$$

donde los elementos  $\tilde{\sigma}_{i+1}$  y  $\tilde{\sigma}_{i+1}^{-1}$  se cancelan porque conmutan con todos los elementos intermedios.  $\square$

**Teorema 4.5.** *El epimorfismo de grupos  $F_n : \tilde{\mathbb{B}}_n \rightarrow \mathbb{B}_n$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* Haremos la demostración por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$  es trivial ya que ambos grupos son triviales. Suponemos el resultado cierto para todo  $k \leq n-1$ . Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{T}_n & \hookrightarrow & \mathbb{S}_n & \xrightarrow{\Upsilon_n} & \mathbb{B}_{n-1} \\ F_n \uparrow & & F_n \uparrow & & F_{n-1} \uparrow \\ \tilde{\mathbb{T}}_n & \hookrightarrow & \tilde{\mathbb{S}}_n & \xrightarrow{\tilde{\Upsilon}_n} & \tilde{\mathbb{B}}_{n-1} \end{array}$$

Donde se define el epimorfismo  $\tilde{\Upsilon}_n : \tilde{\mathbb{S}}_n \rightarrow \tilde{\mathbb{B}}_{n-1}$  como  $\tilde{\Upsilon}_n := F_{n-1}^{-1} \circ \Upsilon_n \circ F_n$ . Esta función está bien definida ya que por hipótesis de inducción  $F_{n-1}$  es un isomorfismo. Se define también  $\tilde{\mathbb{T}}_n := \ker \tilde{\Upsilon}_n$ . Primero vamos a demostrar que el grupo  $\tilde{\mathbb{T}}_n$  está engendrado por:

$$\tilde{\eta}_i = (\tilde{\sigma}_{n-2} \dots \tilde{\sigma}_i)^{-1} \cdot \tilde{\sigma}_{n-1}^2 \cdot (\tilde{\sigma}_{n-2} \dots \tilde{\sigma}_i).$$

Lo haremos en dos partes. Primero veremos que  $\tilde{\mathbb{T}}_n$  es el menor subgrupo normal de  $\tilde{\mathbb{S}}_n$  engendrado por  $\tilde{\sigma}_{n-1}^2$ . Una vez probado esto, bastará ver que  $\tilde{\tau}^\epsilon \tilde{\eta}_i \tilde{\tau}^{-\epsilon}$  se puede escribir como producto de los elementos  $\tilde{\eta}_i$ , para todo  $\tilde{\tau} \in \{\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-2}, \tilde{\sigma}_{n-1}^2\}$  y para todo  $i = 1, \dots, n-1$ , con  $\epsilon = \pm 1$ .

Vamos con la primera parte. Consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{B}}_{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{B}_n \\ \tilde{\sigma}_i & \longmapsto & \tilde{\sigma}_i \end{array}$$

Está bien definida porque respeta las relaciones; además, es claro que la imagen está en  $\tilde{\mathbb{S}}_n$ . Como la composición con  $\tilde{\Upsilon}_n$  es la identidad, entonces es inyectiva. Sea  $K_n$  el menor subgrupo

normal engendrado por  $\tilde{\sigma}_{n-1}^2$  y sea  $H_n$  el cociente de  $\tilde{\mathbb{S}}_n$  por  $K_n$ . Consideramos por una parte la aplicación inducida  $\tilde{\mathbb{B}}_{n-1} \rightarrow H_n$ . Por otra parte,  $K_n \subset \ker \tilde{\Upsilon}_n$  ya que  $\tilde{\Upsilon}_n(\tilde{\sigma}_{n-1}^2)$  es el elemento neutro, así que tenemos una aplicación inducida por  $\tilde{\Upsilon}_n, H_n \rightarrow \tilde{\mathbb{B}}_{n-1}$ . Como la composición de estas dos aplicaciones es la identidad, esta segunda aplicación es inyectiva, es decir,  $\tilde{\mathbb{T}}_n = K_n$ , que es lo que queríamos ver.

Vamos con la segunda parte. Empezamos con la conjugación por  $\tilde{\sigma}_{n-1}^2$ . Como  $\tilde{\sigma}_{n-1}^2 = \tilde{\eta}_{n-1}$ , es inmediato que cualquier palabra  $\tilde{\sigma}_{n-1}^{\pm 2} \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_{n-1}^{\pm 2}$  se puede escribir como producto de elementos  $\tilde{\eta}_i$ .

Para  $\tilde{\sigma}_j$  con  $j < n - 1$  lo probamos para la conjugación  $\tilde{\sigma}_j^{-1} \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_j$ . El caso  $\tilde{\sigma}_j \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_j^{-1}$  será inmediato una vez probado este.

$$1) \tilde{\sigma}_j^{-1} \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_j = \tilde{\eta}_i \text{ si } j < i - 1.$$

Ya que  $\tilde{\eta}_i$  es una palabra en la que solo aparecen generadores  $\tilde{\sigma}_k$  con  $k > j + 1$ .

$$2) \tilde{\sigma}_{i-1}^{-1} \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_{i-1} = \tilde{\eta}_{i-1} \text{ si } j = i - 1.$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{i-1}^{-1} \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_{i-1} &= (\tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_{i+1}) \tilde{\sigma}_{i-1}^{-1} \tilde{\sigma}_i^2 \tilde{\sigma}_{i-1} (\tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_{i+1})^{-1} \\ &= (\tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_{i+1}) \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i-1}^2 \tilde{\sigma}_i^{-1} (\tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_{i+1})^{-1} = \tilde{\eta}_{i-1} \end{aligned}$$

$$3) \tilde{\sigma}_j^{-1} \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_j = \tilde{\eta}_i \text{ si } j > i.$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_j \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_j &= (\tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_{j+2}) \tilde{\sigma}_j^{-1} \tilde{\sigma}_{j+1} \tilde{\sigma}_j \dots \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i^2 \tilde{\sigma}_{i+1}^{-1} \dots \tilde{\sigma}_{j-1}^{-1} \tilde{\sigma}_{j+1}^{-1} \tilde{\sigma}_j (\tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_{j+2})^{-1} = \\ &= (\tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_{j+2}) \tilde{\sigma}_{j+1} \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_{j+1}^{-1} \tilde{\sigma}_{j-1} \dots \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i^2 \tilde{\sigma}_{i+1}^{-1} \dots \tilde{\sigma}_{j-1}^{-1} \tilde{\sigma}_{j+1}^{-1} \tilde{\sigma}_j (\tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_{j+2})^{-1} = \tilde{\eta}_i, \end{aligned}$$

donde los elementos  $\tilde{\sigma}_{j+1}$  y  $\tilde{\sigma}_{j+1}^{-1}$  se cancelan porque conmutan con todos los elementos intermedios.

4) Para  $\tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_i = \tilde{\eta}_i^{-i+2} \tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\eta}_{n-1} \tilde{\eta}_i^{-n+i+1}$ , utilizamos los casos anteriores y el hecho de que  $\tilde{\beta} = \tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\eta}_n$  conmuta con  $\tilde{\sigma}_i$  si  $i < n - 1$ , demostrado en el Lema 4.4:

$$\tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\eta}_1 \tilde{\sigma}_i \dots \tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_i \dots \tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\eta}_{n-2} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\eta}_{n-1} \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\beta} \tilde{\sigma}_i = \tilde{\beta}.$$

Despejamos con lo que ya hemos demostrado y obtenemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\tilde{\eta}_i \dots \tilde{\eta}_i}_{i-2} \tilde{\eta}_{i-1} \tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_i \underbrace{\tilde{\eta}_i \dots \tilde{\eta}_i}_{n-i-1} &= \tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\eta}_{n-1} \\ \Rightarrow \tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_i &= \tilde{\eta}_i^{-i+2} \tilde{\eta}_1 \dots \tilde{\eta}_{n-1} \tilde{\eta}_i^{-n+i+1}. \end{aligned}$$

Con esto terminamos los casos  $\tilde{\sigma}_j^{-1} \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_j$ . Para la conjugación  $\tilde{\sigma}_j \tilde{\eta}_i \tilde{\sigma}_j^{-1}$  basta despejar  $\tilde{\eta}_i$  a la izquierda de las igualdades ya demostradas en los casos  $j \neq i$  y después utilizar la conmutación con  $\tilde{\beta}$  para obtener el caso  $j = i$ .

Sea ahora  $\tilde{\tau} \in \tilde{\mathbb{T}}_n$  tal que  $F_n(\tilde{\tau}) = \mathbf{1}$ . Acabamos de demostrar que  $\tilde{\tau}$  es producto de  $\tilde{\eta}_i$ , pero las relaciones que cumplen los elementos  $\eta_i \in \mathbb{T}_n$  son triviales porque  $\mathbb{T}_n$  es libre. Así que necesariamente  $\tilde{\tau} = \mathbf{1}$  y el epimorfismo  $\tilde{\mathbb{T}}_n \rightarrow \mathbb{T}_n$  es un isomorfismo.

De la misma manera si tomamos  $\tilde{\tau} \in \tilde{\mathbb{S}}_n$  tal que  $F_n(\tilde{\tau}) = \mathbf{1}$  se tiene que  $\tilde{\tau} \in \tilde{\mathbb{T}}_n$  y como acabamos de ver  $\tilde{\tau} = \mathbf{1}$ . Es decir, la aplicación  $\tilde{\mathbb{S}}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$  es un isomorfismo. Por último vamos a considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_n & \hookrightarrow & \mathbb{B}_n \\ \uparrow & & \uparrow F_n \\ \tilde{\mathbb{S}}_n & \hookrightarrow & \tilde{\mathbb{B}}_n \end{array}$$

Sea  $\tilde{\tau} \in \ker F_n$ , entonces  $F_n(\tilde{\tau}) = \mathbf{1} \in \mathbb{S}_n$  y como la flecha de la izquierda es un isomorfismo  $\tilde{\tau} = \mathbf{1}$ . Por tanto la aplicación  $F_n : \tilde{\mathbb{B}}_n \rightarrow \mathbb{B}_n$  es un isomorfismo. Es decir,

$$\mathbb{B}_n := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid [\sigma_i, \sigma_j] = 1, j - i > 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle. \quad \square$$



# Bibliografía

- [1] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, vol. 4, pp. 47–72, 1925.
- [2] E. Artin, *Theory of Braids*, Annals of Mathematics, vol. 48, no. 1, pp. 101–126, 1947.  
Disponible en: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/artinbraids.pdf>
- [3] F. Bohnenblust, *The Algebraical Braid Group*, Annals of Mathematics, vol. 48, no. 1, pp. 127–136, Jan. 1947. Disponible en: <https://www.jstor.org/stable/1969219>



# Apéndice A

## Algunas demostraciones

*Demostración de la Proposición 1.2.2.* Sea  $\alpha = \arg(\varphi(1))$ . Definimos una isotopía  $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  por

$$H(z, t) := e^{-it\alpha} \varphi(z).$$

Veamos que  $H$  es una isotopía entre  $\varphi$  y un homeomorfismo que fija el punto 1. Para  $t = 0$ , tenemos

$$H(z, 0) = e^0 \varphi(z) = \varphi(z).$$

Por lo tanto,  $H(z, 0) = \varphi(z)$ . Para  $t = 1$ , obtenemos

$$H(z, 1) = e^{-i\alpha} \varphi(z) = \varphi(1)^{-1} \varphi(z).$$

En particular, para  $z = 1$ , se cumple que

$$H(1, 1) = \varphi(1)^{-1} \varphi(1) = 1.$$

Esto muestra que  $H(z, 1)$  es un homeomorfismo que fija el punto 1.

Por último, para cada  $t \in [0, 1]$ , la función  $z \mapsto e^{-it\alpha} \varphi(z)$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{S}^1$ , ya que es la composición de una rotación y un homeomorfismo.  $\square$

*Demostración de la Proposición 1.2.3.* Definimos la función  $e : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  como  $e(z) = e^{2\pi iz}$ . Entonces  $e|_{(0,1)}$  es un homeomorfismo de  $(0, 1)$  en  $\mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ .

Sea  $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  un homeomorfismo, por la Proposición 1.2.2, podemos suponer que  $\varphi(1) = 1$ . Definimos

$$(0, 1) \xrightarrow{e} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{e^{-1}} (0, 1).$$

$H$

Por composición  $H$  es un homeomorfismo. Por lo tanto debe ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Comencemos primero con el caso creciente. En ese caso,  $H$  se extiende a un homeomorfismo  $H' : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $H'(0) = 0, H'(1) = 1$ . Tenemos  $e \circ H' = \varphi \circ e$ .

Definimos

$$\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad \phi(s, t) = (1 - t)H'(s) + ts.$$

Esto es una homotopía relativa a  $\{0, 1\}$  desde  $H'$  hasta la identidad. Veamos que es una isotopía. Claramente, cada  $\phi_t = \phi(s, t)$  es sobreyectiva (por el teorema del valor medio). Dado que  $H'$  es estrictamente creciente, para  $s_1 > s_2$  obtenemos

$$\phi_t(s_1) = (1 - t)H'(s_1) + ts_1 > (1 - t)H'(s_2) + ts_2 = \phi_t(s_2),$$

lo que significa que  $\phi_t$  es estrictamente creciente, por lo tanto, inyectiva.

Así que  $\phi_t$  es una biyección continua entre espacios Hausdorff compactos, por lo tanto, un homeomorfismo. Además  $\phi$  induce una homotopía  $\psi : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $\psi(e(s), t) = e(\phi(s, t))$ . Esta homotopía  $\psi$  viene dada por

$$\psi(s, t) = e \circ \phi_t \circ e|_{(0,1)}^{-1}(s) \text{ si } s \neq 1, \psi(1, t) = 1$$

Como antes  $\psi$  es continua y  $\psi_t$  es biyectiva, por tanto  $\psi_t$  son homeomorfismos. Así que  $\psi$  es una isotopía entre  $\varphi$  y la identidad.

El caso decreciente es similar. En ese caso,  $H$  se extiende a un homeomorfismo  $H' : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $H'(0) = 1, H'(1) = 0$ . Se define

$$\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad \phi(s, t) = (1 - t)H'(s) + t(1 - s)$$

Es una isotopía desde  $H'$  hasta  $\mathbf{1}$  e induce una isotopía  $\psi : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  de  $\varphi$  en  $z \mapsto \bar{z}$ :

$$\psi(z, t) = e \circ \phi_t \circ e|_{(0,1)}^{-1}(z) \text{ si } z \neq 1, \psi(1, t) = 1$$

Lo vemos para  $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$  :

$$\psi(z, 1) = e \circ (z \mapsto 1 - z) \circ e^{-1}(z) = e \circ (1 - e^{-1}(z)) = e^{2\pi i(1 - e^{-1}(z))} = e^{-2\pi i(e^{-1}(z))} = \bar{z}. \quad \square$$

*Demostración del Lema 1.2.8.* Dado que  $\varphi_{\pm}$  son isótopos a la identidad, existen dos isotopías  $H_{\pm} : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  tales que  $H_{\pm}(x, 0) = \varphi_{\pm}(x)$  y  $H_{\pm}(x, 1) = \mathbf{1}_{\mathbb{S}^1}(x)$ . Basta concatenar estas isotopías para obtener el homeomorfismo deseado. Definimos  $\Phi : \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$  por  $\Phi(x, t) = (\Phi_t(x), t)$ , donde:

$$\Phi_t(x) = \begin{cases} H_-(x, 1 + t) & \text{si } t \in [-1, 0] \\ H_+(x, 1 - t) & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

Es fácil ver que las funciones  $\Phi_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  y  $\Phi : \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$  son homeomorfismos y cumplen las propiedades requeridas.  $\square$

*Demostración del Lema 1.2.9.* Definimos el homeomorfismo

$$\begin{aligned} C &\xrightarrow{f} \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \\ z &\longmapsto \left( \frac{z}{|z|}, 2|z| - 3 \right) \end{aligned}$$

Definimos también las funciones  $h_-$  y  $h_+$  como:

$$\begin{aligned} h_- &:= f|_{\partial\mathbb{D}_1} \circ \varphi_1 \circ (f|_{\partial\mathbb{D}_1})^{-1} : \mathbb{S}^1 \times \{-1\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \{-1\}, \\ h_+ &:= f|_{\partial\mathbb{D}_2} \circ \varphi_2 \circ (f|_{\partial\mathbb{D}_2})^{-1} : \mathbb{S}^1 \times \{1\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \{1\}. \end{aligned}$$

Tenemos que  $f|_{\partial\mathbb{D}_1}(z) = (z, -1)$  y  $f|_{\partial\mathbb{D}_2}(z) = (\frac{z}{2}, 1)$ . Es fácil ver que estos homeomorfismos son isótopos a la identidad, así que por composición,  $h_+$  y  $h_-$  también lo son. Por el Lema 1.2.8, existe un homeomorfismo  $\Phi : \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$  tal que  $\Phi(x, t) = (\Phi_t(x), t)$  con  $\Phi_1 = h_+$  y  $\Phi_{-1} = h_-$ . Definimos  $\psi := f^{-1} \circ \Phi \circ f : C \rightarrow C$ . Es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos. Finalmente,

$$\psi|_{\partial\mathbb{D}_2} = f^{-1} \circ \Phi \circ f|_{\partial\mathbb{D}_2} = f|_{\partial\mathbb{D}_2}^{-1} \circ f|_{\partial\mathbb{D}_2} \circ \varphi_2 \circ (f|_{\partial\mathbb{D}_2})^{-1} \circ f|_{\partial\mathbb{D}_2} = \varphi_2.$$

De la misma manera se prueba que  $\psi|_{\partial\mathbb{D}_1} = \varphi_1$ .  $\square$

*Demostración del Lema 1.2.11.* Sean  $A_1, A_2 \subset \mathbb{C}$  conjuntos homeomorfos a una corona  $C$  por los homeomorfismos  $f_i : C \rightarrow A_i$ . Denotamos por  $\mathbb{S}_{\pm}^1$  a las fronteras interior y exterior de  $C$ . Podemos suponer que  $f_i(\mathbb{S}_{\pm}^1) = A_{i\pm}$  y que las funciones  $f_i|_{\mathbb{S}_{\pm}^1}$  son isotopas a la identidad. Si no es así, en el primer caso redefinimos los  $f_i$  componiendo con una reflexión adecuada. En el segundo caso, por el Lema 1.2.3, basta componer con la conjugación compleja. Las funciones:

$$f_2^{-1} \circ \varphi_{\pm} \circ f_1|_{\mathbb{S}_{\pm}^1} : \mathbb{S}_{\pm}^1 \rightarrow \mathbb{S}_{\pm}^1$$

son homeomorfismos por composición, y también por composición inducen el isomorfismo  $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ . Por la Proposición 1.2.4, son isotopas a la identidad.

Aplicando el Lema 1.2.9, existe un homeomorfismo  $\psi : C \rightarrow C$  que cumple

$$\psi|_{\mathbb{S}_{\pm}^1} = f_2^{-1} \circ \varphi_{\pm} \circ f_1|_{\mathbb{S}_{\pm}^1}$$

Definimos:

$$\Phi := f_2 \circ \psi \circ f_1$$

Entonces, se tiene que:

$$\Phi|_{A_{i\pm}} = f_2 \circ \psi \circ f_1|_{A_{i\pm}} = f_2 \circ \psi|_{\mathbb{S}_{\pm}^1} \circ f_1|_{A_{i\pm}} = f_2 \circ f_2^{-1} \circ \varphi_{\pm} \circ f_1|_{\mathbb{S}_{\pm}^1} \circ f_1^{-1}|_{A_{i\pm}} = \varphi_{\pm}$$

Por tanto  $\Phi$  cumple la condición del enunciado.  $\square$