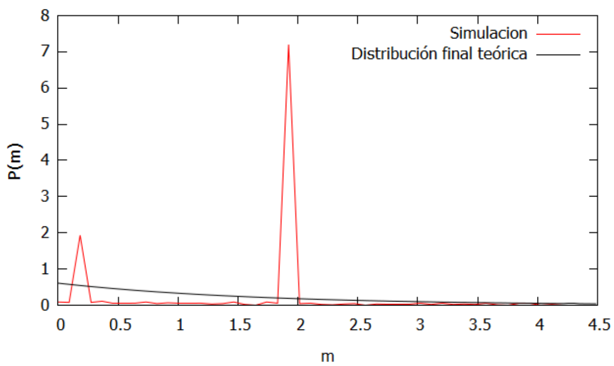
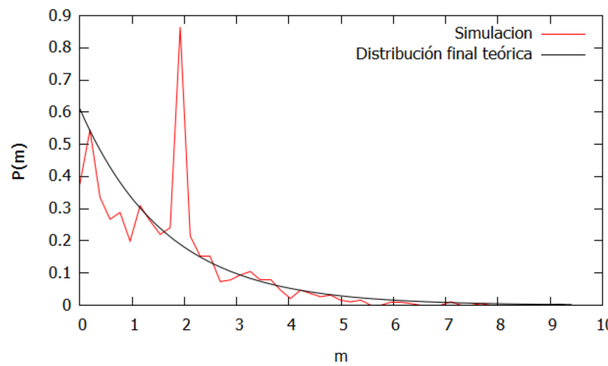
1 Anexo

1.1 Anexo A: Simulación computacional del modelo Dragulescu-Yakovenko para una distribución inicial desigual.

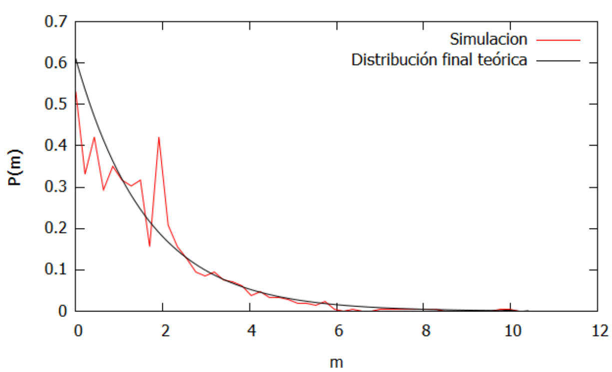
En este caso, se parte de una situación en la que se una quinta parte de los individuos tienen riqueza 0.2 y el resto tienen riqueza 2. Teniendo $N = 1000$, se tiene una riqueza media $< m >= 41/25$.



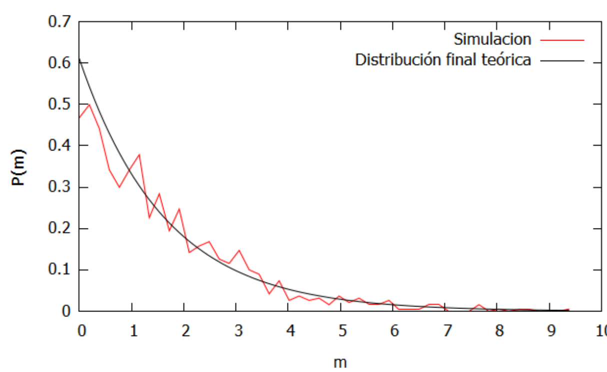
(a) t=100



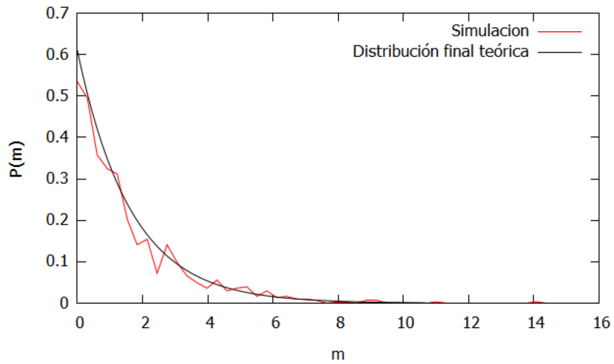
(b) t=1000



(c) t=1500



(d) t=2500



(e) t=5000

Figure 1: Evolución de la distribución de la riqueza para 1000 agentes económicos y una riqueza total de 1640 donde en la situación se tienen muchos individuos ricos.

En la figura 2 se representa la media tras 500 iteraciones con N^2 transacciones cada una. Dado que en este caso se tiene $N = 5000$, para tener la misma media $< m >= 41/25$ se toma $M = 8200$.

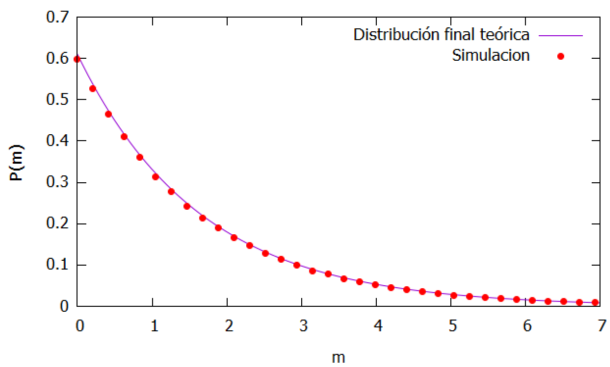


Figure 2: Distribución de la riqueza tras 500 iteraciones.

1.2 Anexo B: Obtención de las iteraciones en el modelo continuo

Para calcular la primera iteración se hace uso del programa *Octave* cuya función *integral*2 permite realizar integrales en dominios no rectangulares. Recuperando la expresión (**??**) la integral debe calcularse en todo el dominio que cumpla la condición $x > u + v$ con $u, v > 0$. Se recuerda que x es la cantidad obtenida en una transacción entre dos agentes. Representando de manera gráfica en la figura (3) esto implica integrar para cada valor de x todo el dominio- desde u, v igual a cero hasta el infinito- y restarle el triángulo limitado por la recta $v = x - u$.

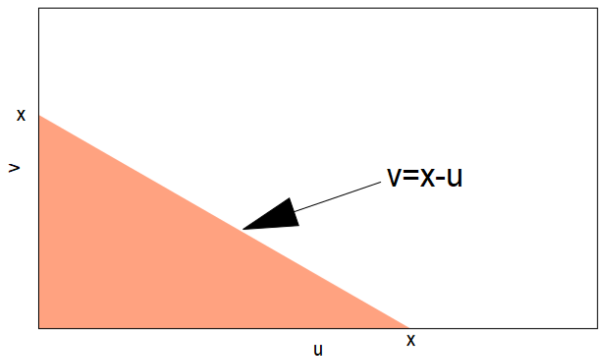


Figure 3: Dominio de integración. El área donde se integra es la blanca, mientras la zona coloreada se excluye, pues no cumple con la condición $x > u + v$.

Esta integral se calcula con intervalos de $\Delta x = 0.01$ hasta $x = 20$. Esta discretización, como se verá más tarde, limita la eficiencia del método.

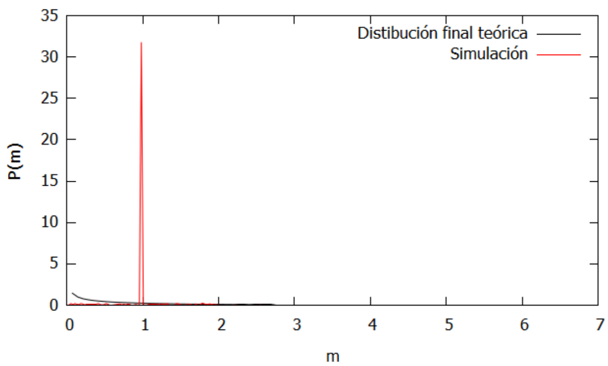
Tras esta primera iteración, se tiene una serie de puntos para x y sus valores calculados con la integral. Para calcular las siguientes iteraciones la integral es calculada *a la vieja usanza*, es decir, para cada valor de x se calcula el valor de $p(u) \cdot p(v)\, \Delta u \Delta v$, donde $p(u)$ y $p(v)$ son las nuevas funciones obtenidas en la primera iteración y Δu y Δv los intervalos en los que se calcula la integral.

La discretización llevada a cabo en el primer paso conlleva una pérdida que provoca que en el sexto paso la integral se aleja de la distribución teórica final. Por ello, para conseguir la menor desviación posible se realiza una previa calibración para saber, teniendo en cuenta el tiempo de ejecución del programa, hasta que x se calcula la integral. La forma con la que se realizó fue aplicando el segundo método para calcular la integral (explicado en el párrafo anterior) a la distribución teórica final. De esta manera, se obtuvo que calculando hasta $x = 20$ la distribución resultante no se alejaba mucho de la final.

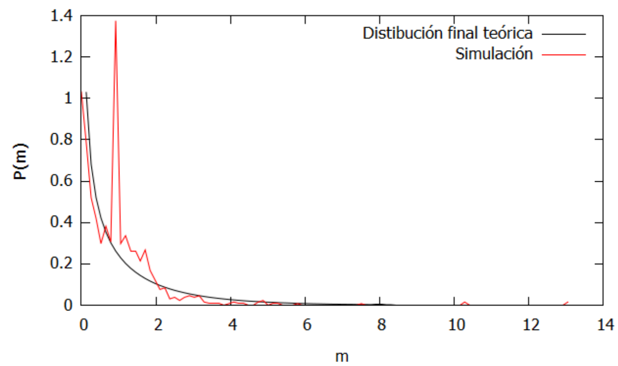
1.3 Anexo C: Simulaciones computacionales del modelo dirigido.

1.3.1 Distribución inicial con todos los agentes la misma riqueza.

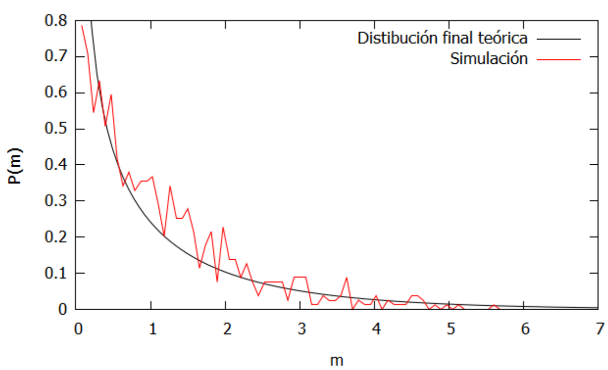
Aquí se tiene una situación en la que cada uno de los agentes tiene riqueza 1 y $N = 1000$, por lo que la media es $< m >= 1$.



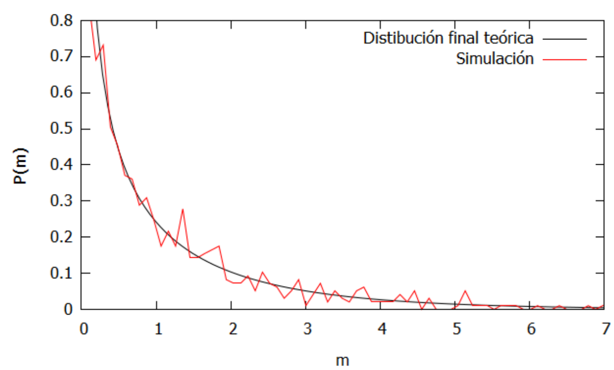
(a) t=100



(b) t=1000



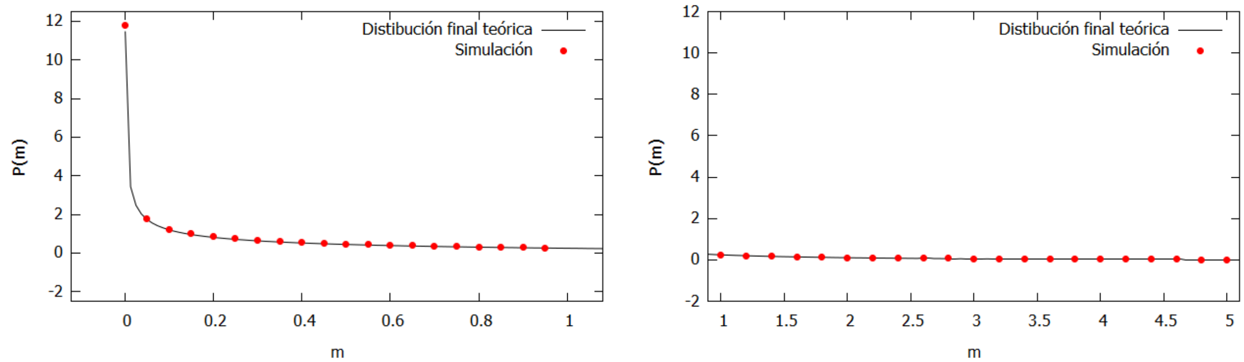
(c) t=2500



(d) t=5000

Figure 4: Evolución de la distribución de la riqueza en el modelo dirigido para 1000 agentes económicos y una riqueza total de 1000 donde en la situación inicial todos los agentes tienen la misma riqueza.

Realizando 500 iteraciones con N^2 transacciones cada una en un sistema con $N = 5000$:

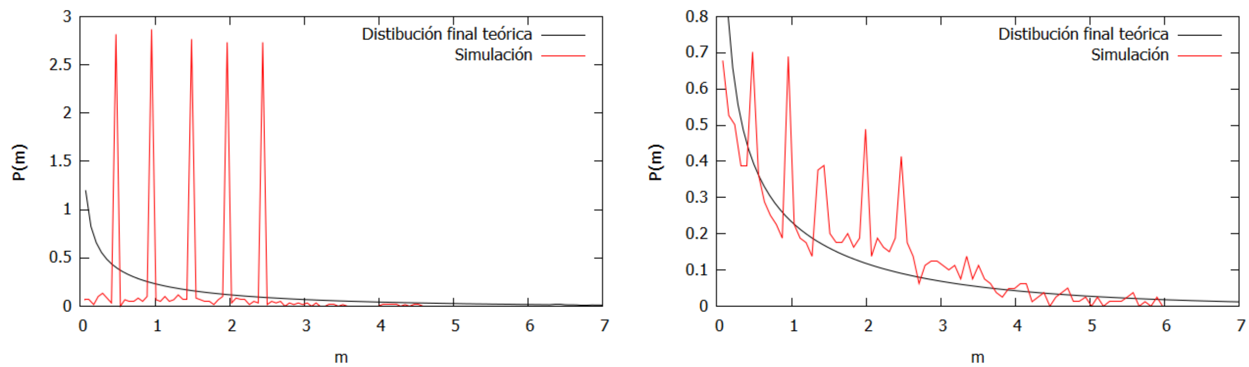


(a) (b)

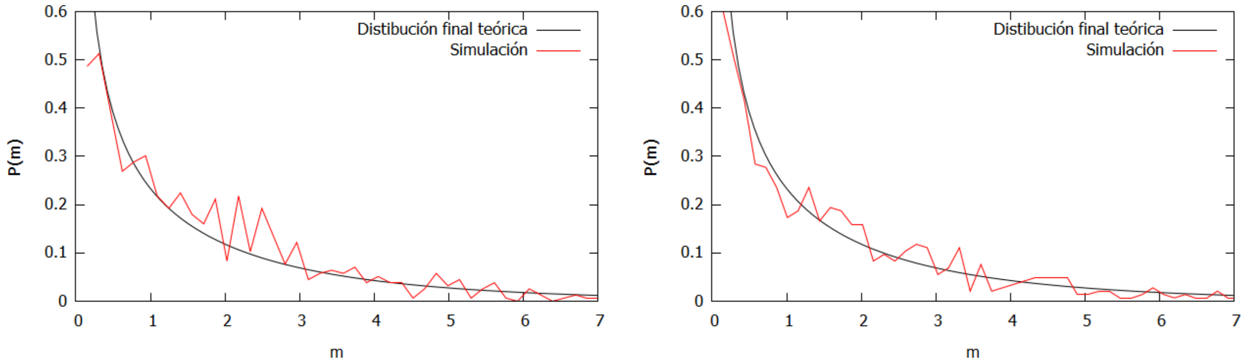
Figure 5: Distribución de la riqueza tras 500 iteraciones con N^2 transacciones en cada iteración.

1.3.2 Distribución inicial con cinco grupos divididos por su riqueza.

En este caso hay cinco grupos cada uno formado por doscientos agentes con riquezas iniciales: 0.5, 1.5,2.0 y 2.5.



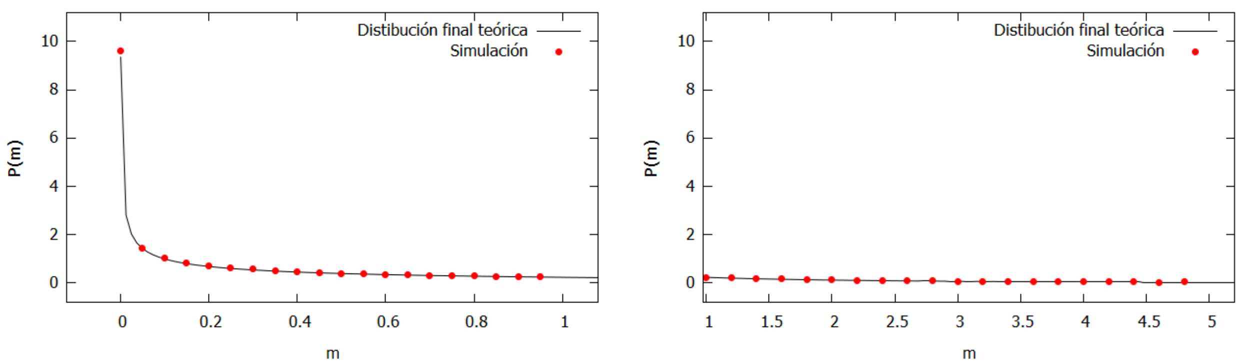
(a) t=100 (b) t=1000



(c) t=2500 (d) t=5000

Figure 6: Evolución de la distribución de la riqueza en el modelo dirigido para 1000 agentes económicos y una riqueza total de 1500 donde en la situación inicial los agentes se dividen en cinco grupos.

De nuevo, realizando 500 iteracions con N^2 transacciones ($N = 5000$) en cada una:



(a) (b)

Figure 7: Distribución de la riqueza tras 500 iteraciones con N^2 transacciones en cada iteración.

1.4 Anexo D: Norma y valor medio del operador Γ para el modelo dirigido

Recordando la forma del operador en cuestión:

$$\Gamma P(x) = \frac{1}{2}\int_{u>x} \frac{p(u)}{u} du + \frac{1}{2}\iint_{v<x<u+v} \frac{p(u)\,p(v)}{u}$$

A continuación se calcula la norma:

$$\int_0^\infty p_1'(x)\,dx = \int_0^\infty dx \int_{u>x} \frac{p(u)}{u} du = \int_0^\infty du \int_0^u \frac{p(u)}{u} dx = \int_0^\infty p(u) du = 1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p_2'(x)\,dx &= \int_0^\infty dx \int_{v<x<u+v} \frac{p(u)p(v)}{u} du\,dv = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_v^{u+v} \frac{p(u)p(v)}{u} dx \\ &= \int_0^\infty p(u) du \int_0^\infty p(v) dv = 1\end{aligned}$$

Para la el valor medio:

$$\int_0^\infty x\,p_1'(x)\,dx = \int_0^\infty x\,dx \int_{u>x} \frac{p(u)}{u} du = \int_0^\infty du \int_0^u x\,\frac{p(u)}{u} dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty u\,p(u)\,du = \frac{1}{2} < u > \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x\,p_2'(x)\,dx &= \int_0^\infty x\,dx \iint_{v<x<u+v} \frac{p(u)p(v)}{u} du\,dv = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_v^{u+v} x\,\frac{p(u)p(v)}{u} dx \\ &= \int_0^\infty du \int_0^\infty \frac{1}{2}\,\frac{u^2+2uv}{u} p(u)\,p(v)\,dv \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty du \int_0^\infty u\,p(u)\,p(v)\,dv + \int_0^\infty du \int_0^\infty 2v\,p(u)\,p(v)\,dv\right) = \frac{3}{2} < u >\end{aligned}$$