Sistemas dinámicos con simetría.

Ana Rojo Echeburúa.

Trabajo de fin del grado de Matemáticas.

Universidad de Zaragoza.

RESUMEN EN INGLÉS

Chapter 1

Introduction to dynamical systems with symmetries.

The aim of this work is to find symmetries in dynamical systems. Symmetries in dynamical systems allow us to deduce certain properties that simplify the system for better understanding of its behavior. Although we distinguish the discrete case and the continuous case, we will be mainly interested in the continuous case. We will introduce the concept of Lie group and Lie algebra and we will also see that a manifold, in which a Lie group is acting, can be reduced to a smaller one and thus facilitate us the studying of the first one.

1.1 Basic concepts.

Definition 1.1.1. *A dynamical system is a tern $(\mathscr{S}, \phi, \mathscr{T})$ where $\mathscr{T} = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$, called set of times, $\mathscr{S}$ is a set called the state space, and $\phi = \{\phi_t\}$ is a family of maps, $\phi_t : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ defined for $t \geq 0$ satisfying:*

- $\phi_0 = id$,
- $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ *for all* $t, s \geq 0$.

When $\mathscr{T} = \mathbb{R}$ the dynamical system will be said to be coninuous, and if $\mathscr{T} = \mathbb{Z}$ the dynamical system will be said to be discrete.

If ϕ_t is defined for all $t \in \mathscr{T}$, whenever t is positive or not, and satisfies the above properties, we say that the dynamical system is invertible. We will refer to a dynamical system indicating only the family of maps ϕ_t. For a discrete dynamical system, $\mathscr{T} = \mathbb{Z}$, ϕ_t is just a t-times composition of $F = \phi_1$, that is called generator of the dynamical system. For a continuous dynamical system, $\mathscr{T} = \mathbb{R}$, and under suitable regularity conditions, ϕ_t is the general solution of a system of differential equations.

Definition 1.1.2. *An invertible map $\psi : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ is a symmetry of a dynamical system ϕ_t if it satisfies:*

$$\psi \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi \tag{1.1}$$

for all $t \geq 0$.

Proposition 1.1.3. *If ψ is a symmetry of a dynamical system ϕ_t and $x_0 \in \mathscr{S}$, $\psi(\phi_t(x_0)) = \phi_t(\psi(x_0))$.*

Let $(G, \circ)$ be the group of invertible maps from $\mathscr{S}$ to itself, $G = \{\psi \colon \mathscr{S} \to \mathscr{S} | \exists \psi^{-1} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}\}$, with the composition. The set of symmetries of a dynamical system is a subgroup of G.

1.1.1 Other notions of symmetry.

There are other more general notions of symmetries. Sometimes symmetry is accepted as a map $\psi\colon \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ such that $\psi \circ \phi_t = \phi_{-t} \circ \psi$. In this case ψ applies orbits in orbits in the opposite orientation. It isalso said that $\psi\colon \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ is a symmetry of ϕ_t if there is a map $\tau\colon \mathscr{S} \times \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}$ such that $\tau(x,\cdot) : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}$ is monotone, for each $x \in \mathscr{S}$, and it is satisfied that $\psi \circ \phi_t = \phi_{\tau(\ ,t)} \circ \psi$, for all $t \geq 0$. In this case, ψ applies orbits in orbits but its parametrization is changed. We will not consider here such generalizations.

1.2 Characterization in terms of the generator.

1.2.1 Discrete time systems.

Let ϕ_t be a discrete time dynamical system. Let $F = \phi_1 : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ be its generator. Then an invertible map ψ is a symmetry of ϕ_t if and only if $F \circ \psi = \psi \circ F$. The proof is immediate, since $\phi_t = F \circ \cdots \circ F$ (t-times).

1.2.2 Continuous time systems.

Suppose the state space is a smooth manifold $\mathscr{S} = M$, and that the map $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, defined by $\phi : (t,x) \mapsto \phi_t(x)$ is differentiable $\mathscr{C}^\infty$. We will denote by TM the tangent bundle of M.

Definition 1.2.1. *A vector field is a differentiable map $X\colon M \longrightarrow TM$ such that $X(m) \in T_mM$ for all $m \in M$.*

We denote by $\mathfrak{X}(M)$ the set of vector fields in M. We say that the generator of the dynamical system ϕ_t is the vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ defined by:

$$X(m) = \frac{d}{dt}\phi_t(m)\Big|_{t=0^+}, \qquad \text{for all } m \in M.$$

Definition 1.2.2. *An integral curve γ of a vector field X is a map $\gamma\colon I \longrightarrow M$ such that $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$ where I is an interval in $\mathbb{R}$.*

If I is as big as possible, we will say that the curve is maximal.

Definition 1.2.3. *A vector field it is said to be complete if all its maximal integral curves are defined in all $\mathbb{R}$ and semi-complete if they are defined in $[0,+\infty)$.*

Definition 1.2.4. *The flow ϕ_t of a vector field X is the map $\phi_t\colon \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ defined by $\phi_t(x) = \gamma_x(t)$, where $\gamma_x(t)$ is the maxiamal integral curve of X such that $\gamma_x(0) = x$.*

We also say that ϕ_t is a one-parameter group generated by X.

If a vector field X is semi-complete, it defines a dynamical system and if X is complete, it defines an invertible dynamical system. We can write $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X(\phi_t(x))$, for all $t \in \mathbb{R}$ and all $x \in M$.

In terms of the generator of the continuous dynamical system, a symmetry is characterized by the following property.

Proposition 1.2.5. *Let ϕ_t a continuous dynamical system and let X be its infenitesimal generator. A diffeomorphism $\psi : M \to M$ is a symmetry if and only if $T\psi \circ X = X \circ \psi$.*

Let ϕ_t be a discrete dynamical system genetated by F. Supose that it has an one-parameter group ψ_s of symmetries of F,i.e,

$$F \circ \psi_s = \psi_s \circ F.$$

If Y is the infinisesimal generator for ψ_s we have that $TF \circ Y = Y \circ F$. And if $TF \circ Y = Y \circ F$ then the one-parameter group that is generated by Y is a one-parameter group of symmetries of F.

1.3 Symmetry groups and reduction.

Definition 1.3.1. *A Lie group is a group G that is also a finite dimensioal differentiable manifold, such that the two group operations of G, multiplication and inversion, are differentiable maps.*

Let G be a Lie group and M a connected differentiable manifold. Consider a left action of G in M, i.e, a differentiable map $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ verifying:

i) $\varphi(e,m) = m,$ for all $m \in M$, with e identity element.

ii) $\varphi(g_1, \varphi(g_2,m)) = \varphi(g_1 g_2, m),$ for all $g_1, g_2 \in G$ and for all $m \in M$.

Definition 1.3.2. *A Lie algebra is a vectorial space V endowed with a bilinear operation $[,]$ such that for a,b,c elements in the algebra we have:*

- $[a,b] = -[b,a],$ *(skew symmetric),*
- $[a,[b,c]] + [a,[b,c]] + [c,[a,b]] = 0,$ *(Jacobi identity).*

Definition 1.3.3. *A vector field X on a Lie group G is called left-invariant if:*

$$(T_g' L_g)(X(g')) = X(gg'), \qquad \textit{for all } g, g' \in G.$$

The space of left-invariant vector fields is a vectorial space that we denote $\mathfrak{X}_L(G)$. If X, Y are left-invariant vector fields on a Lie group G, $[X,Y]$ is also a left-invariant vector field in G. Therefore $\mathfrak{X}_L(G)$ is a Lie algebra.

If e is the identity element of a Lie group G and $T_e G = \mathscr{G}$ is the tangent space to G in e, we define the map $\leftarrow : \mathscr{G} \to \mathfrak{X}_L(G)$ such that $\overleftarrow{\xi}(g) = (T_e L_g)(\xi)$, for all $g \in G$.

Definition 1.3.4. *Let G be a Lie group and $\mathscr{G}$ the tangent space to G in the identity element. Then a Lie algebra structure $[,]_{\mathscr{G}}$ exists in G such that: $[\xi,\eta]_{\mathscr{G}} = [\overleftarrow{\xi}, \overleftarrow{\eta}](e)$, for all ξ and η in $\mathscr{G}$. The vectorial space $\mathscr{G}$ with a Lie algebra structure $[,]_{\mathscr{G}}$ is called Lie algebra of a Lie group G.*

Let $\mathscr{G}$ be the Lie algebra of the Lie group G of M. For each $a \in \mathscr{G}$ we can define a vector field $X_a \in \mathfrak{X}(M)$ through:

$$X_a(m) = T_e \varphi_m(a),$$

or equivalently, if $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

$$X_a(m) f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(exp(ta)m)\Big|_{t=0},$$

The map $X : \mathscr{G} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ associating $a \in \mathscr{G}$ with X_a is an antihomomorphism of Lie algebras, i.e:

$$[X_a, X_b] = -X_{[a,b]}.$$

It follows that X_a is complete and the flow ϕ_t of X_a is defined by:

$$\phi_t = \varphi_{exp(ta)}.$$

Proposition 1.3.5. *Let M be a manifold and G a Lie group in M. Supppose M/G has a structure of cocient manifold. If X is a vector field such that $T\varphi_g \circ X = X \circ \varphi_g$, for all $g \in G$ the a unique vector field $\bar{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ exists such that $T\pi \circ X = \bar{X} \circ \pi$ where $\pi \colon M \longrightarrow M/G$ is the projection to the cocient. If ϕ_t is the flow of X then the flow of $(\bar{X})$ is $\bar{\phi}_t([m]) = [\phi_t(m)]$.*

From now, we will focus on dynamical systems in continuous time assumimg that they are invertible. If they have continuous symmetry is also assumed that the generator is complete.

Chapter 2

Riemannian geometry and symmetries. Geodesics.

A physical system is often subjected to restrictions in the state space. The kinetic energy in the constricted space is given by a riemannian metric. To study the symmetries of the dynamical system it is necessary to study the symmetries of the metric.

2.1 Linear connections

Definition 2.1.1. *A linear connection is a map which asocciates to every vector field $U \in \mathfrak{X}(M)$ an operator $\nabla_U : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ satisfying the following properties:*

- $\nabla_U(\alpha X + \beta Y) = \alpha \nabla_U X + \beta \nabla_U Y$, *for all $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ and for all $U, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*
- $\nabla_{fU+gV} X = f \nabla_U X + g \nabla_V X$, *for all $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ and for all $U, V, X \in \mathfrak{X}(M)$.*
- $\nabla_U(fX) = U(f)X + f\nabla_U X$, *for all $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ and for all $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

A vector field along a curve γ: $I \longrightarrow M$ is a differentiable map $X : I \longrightarrow TM$ such that:

$$X(t) \in T_{\gamma(t)}M,$$

where I is an interval of $\mathbb{R}$.

Let M be a differentiable manifold with an affine connection. Let X be a vector field along a differentiable curve γ: $I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$. We take a subinterval of I where γ is inyective. Let U be a neighbourhood of this subinterval, we can obtain an other vector field $Y \in \mathfrak{X}(M)$ such that $Y \circ \gamma = X$. We will call covariant derivative of X along γ to the vector field that satisfies:

$$\nabla_{\dot\gamma} X = \nabla_{\dot\gamma} Y.$$

Let $F : \bar{M} \longrightarrow M$ be a differentiable map. Two vector field $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ and $Y \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ are F-related if $TF \circ X = Y \circ F$. If F is a diffeomorphism, then for every vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$, $TF^{-1} \circ X \circ F$ is also a vector field on $\mathfrak{X}(\bar{M})$ that it is denoted by F^*X. Besides, if $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$, $TF \circ X \circ F^{-1}$ is a vector field in $\mathfrak{X}(M)$ and it is denoted by F_*X. If $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, $X(f \circ F) = (F^*X)f$.

Definition 2.1.2. *Let $\bar\nabla$ and ∇ be linear connections in $\bar{M}$ and M respectively. A map $F : \bar{M} \longrightarrow M$ it is said to be affine if*

$$F^* \nabla_X Y = \bar\nabla_{F^*X} F^* Y, \qquad \textit{for all } X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.1}$$

2.2 Riemannian geometry. Concepts.

Definition 2.2.1. *A riemannian metric g on a manifold M is a differentiable map*

$$g : TM \times_M TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

such that $g_m : T_mM \times T_mM \longrightarrow \mathbb{R}$ *defines a scalar product on* T_mM*, for all* $m \in M$.

Definition 2.2.2. *(pullback) Let* $F : \bar{M} \longrightarrow M$ *be a differentiable map and g a riemannian metric on M. The pullback of g by F is the map* $F^*g : T\bar{M} \times_{\bar{M}} T\bar{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *given by*

$$(F^*g)_{\bar{m}}(u,v) = g_{F(\bar{m})}(T_{\bar{m}}F(u), T_{\bar{m}}F(v))$$

for all $u,v \in T_{\bar{m}}\bar{M}$ *an all* $\bar{m} \in \bar{M}$.

Definition 2.2.3. *Let (M,g) be riemannian manifold and* $F : M \longrightarrow M$ *a diffeomorphism. We say that F is an isometry if* $F^*g = g$.

2.3 Levi-Civita connection.

Theorem 2.3.1. *In a riemannian manifold (M,g) there exists a unique linear connection ∇ which satisfies the following two properties:*

- $X(g(X,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, *metric connection,*
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, *torsion free connection,*

for all $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. *This connection is called the Levi-Civita connection.*

Choosing a coordinate system m^i the Levi-Civita connection is characterized by the Christoffel coefficients of the metric as follows:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial m^i}} \frac{\partial}{\partial m^j} = \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial}{\partial m^k}, \quad \Gamma^k_{i,j} = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial m^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial m^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial m^h} \right),$$

where g^{ij} is the inverse of the metric g_{ij}.

2.4 Killing vector fields.

Definition 2.4.1. *Let K be a vector field on (M,g) and let ϕ_t be its flow. K is a Killing vector field if each map ϕ_t is an isometry, i.e:*

$$\phi_t^* g = g.$$

Proposition 2.4.2. *The following three statements are equivalent:*

i) *A vector field K in (M,g) is a Killing vector field.*

ii) $\mathscr{L}_K g = 0$.

iii) $g(\nabla_X K, Y) + g(\nabla_Y K, X) = 0$, *for all* $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

In coordinates, $K^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial m^k} + g_{ik} \frac{\partial K^i}{\partial m^j} + g_{jk} \frac{\partial K^j}{\partial m^i} = 0$.

2.5 Geodesics.

Definition 2.5.1. *A curve $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ on a riemannian manifold (M,g) is a geodesic if there is no covariant change of the tangent vector field to the curve over time, i.e :*

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0.$$

If a curve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ is geodesic then it is easy to see that $g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})$ is constant.

Theorem 2.5.2. *In a local coordinate system, a curve $\gamma(t) = (\gamma^1(t),...,\gamma^k(t))$ is geodesic if and only if it satisfies the system of differential equations $\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + (\Gamma^k_{i,j} \circ \gamma)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0$.*

Corollary 2.5.3. *If $v_m \in TM$ the generator of this geodesic system is*

$$\Gamma(v_m) = \frac{d}{dt}\dot{\gamma}\Big|_{t=0},$$

where γ is the geodesic that satisfies that $\gamma(0) = x$ and $\dot{\gamma}(0) = v$.

Definition 2.5.4. *Let γ be a geodesic that satisfies that $\gamma(0) = x$ and $\dot{\gamma}(0) = v$. We say that a geodesic flow a the map $\phi_t : TM \longrightarrow TM$ that is defined by $\phi_t(m,v_m) = (\gamma(t),\dot{\gamma}(t))$ for all $v_m \in TM$.*

Proposition 2.5.5. *The map $\phi : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by $\phi(v_m) = g_m(K(m),v_m)$, for all $v_m \in TM$, where K be a Killing vector field, is a constant of motion for the geodesic flow.*

Theorem 2.5.6. *(Clairaut) Let $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))$ be a geodesic curve of a surface of revolution $M \subseteq \mathbb{R}^3$. If $r(t)$ is the function that measures the distance of $\gamma(t)$ to the rotation axis and $\theta(t))$ isthe angle that forms $\dot{\gamma}(t)$ with the parallel wich cuts it at the instant t, then $r(t)\cos(\theta(t))$ is constant.*

Note that the metric is inherited from $\mathbb{R}^3$, i.e $g(u,v) = u \cdot v$ where u,v are tangent vectors to M at the same point. The group of rotations about the z axis

$$R_t = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\},$$

is a one-parameter group of isometries.Then, it has an associated Killing vector field. Let's find that Killing vector field:

$$K(\gamma(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_t\Big|_{t=0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

We now apply the previous theorem. We have that $g(K,\dot{\gamma}) = |K||\dot{\gamma}|\cos(\theta)$ is constant. Applying (2.5) and since $|K| = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ is the distance of the point of the geodesic curve to the revolution surface axis, we have that $r(t)\cos(\theta)$ is constant. In cartesian coordinates $\mathbb{R}^3$ the expresion of that constant of motion is:

$$\phi(\dot{\gamma}(t)) = g_{\gamma(t)}(K(\gamma(t)),\dot{\gamma}(t)) = K(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{y}x - \dot{x}y.$$

In mechanics is called angular momentum, and it is constant.

2.6 Newtonian mechanics.

Let M be a differentiable manifold. We define the gradient of the potential $V: M \longrightarrow \mathbb{R}$ as the vector field $\operatorname{grad} V \in \mathfrak{X}(M)$ such that $g(\operatorname{grad} V(m), w) = dV(m)(w)$ for $m \in M$ and $w \in T_m M$. We set the following system of differential equations:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = -\operatorname{grad} V(\gamma(t)).$$

Note that this system matches the second Newton's law, $F = ma$, where $m = 1$ and $F = -\operatorname{grad} V$.

Proposition 2.6.1. *If K is a Killing vector field such that $\mathscr{L}_K V = 0$ then $g(K(m), v)$ is a constant of motion, for $v \in TM$.*

Chapter 3

Geometric formulation of hamiltonian mechanics.

In physics, mechanical systems are usually hamiltonian dynamical systems. The symplectic geometry allow us to find symmetries in these systems quickly. In this chapter we will study the invariance of the hamiltonian under a certain symmetry group and we will see that they have important consequences, such as Noether's theorem. Theorem of Marsden and Weinstein, which provides a method for constructing, from a symplectic manifold on which a Lie group acts, another symplectic manifold with smaller dimension with the same properties as the first one, will be also seen.

3.1 Symplectic manifolds. Symplectic forms. Symplectomorphisms.

Let M be a differentiable manifold.

Definition 3.1.1. *A symplectic form ω in M is a map*

$$\omega : TM \times_M TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

such that $\omega_m : T_mM \times T_mM \longrightarrow \mathbb{R}$ defines a bilinear form in each point that is close, skew symmetric and regular. The pair (M,ω) is called symplectic manifold.

Definition 3.1.2. *If (M,ω) y (N,ρ) are symplectic manifolds, a differentiable map $F : M \longrightarrow N$ is called symplectic when $F^*\rho = \omega$, i.e:*

$$\omega(u,v) = \rho_{F(m)}(TF(u),TF(v)), \quad \text{for all } u,v \in M.$$

If F is diffeomorphism we say that F is a symplectomorphism.

Locally, all symplectic manifolds are equivalent.

Theorem 3.1.3. *(Darboux): Let ω be a symplectic form on a differentiable manifold M.*
For each point $m \in M$, a local coordinate chart (U,φ) exists arround m in which the map φ is given by $\varphi(m) = (q^1,...,q^n,p_1,...,p_n)$ such that ω is expressed as:

$$\omega = dq^i \wedge dp_i.$$

Such coordinates (q^i, p_j) are called canonical coordinates. In mechanics, q^i are called positions and p_j are called momenta.

3.1.1 The canonical symplectic structure on the contangent bundle.

Let Q be a manifold such that $M = TQ^*$. A tangent covector to a manifold Q at a point q is a linear form on T_qQ. The set of such covectors is the dual vector space of the tangent space and is called cotangent space of Q in q and it is denoted by $(T_qQ)^*$. The cotangent bundle of a manifold is the union of all cotangent spaces at every point of the manifold. If the manifold Q represents the set of possible positions q_i in a dynamical system, then the cotangent space represents the set of possible positions q_i and momenta p_i. Thus the cotangent bundle describes the phase space of the system. The Liouville 1-form is a 1-form defined on the cotangent space TQ^* of Q.

Let (U,φ) a local chart Q which induces a chart on TQ^*. If the chart coordinates are denoted by $(q^1,...,q^n,p_1,...,p_n)$, then the Liouville 1-form is given by $\theta = p_i \mathrm{d}q^i$. Its exterior derivative defines a symplectic form endowing TQ^* with a symplectic manifold structure. Without using the coordinates, we can define the Liouville 1-form as follows: Let TQ^* be the cotangent bundle to the manifold Q and we denote π the projection map $\pi : TQ^* \longrightarrow Q$ such that every pair (q,p) is associated to q. Let $T\pi : T(TQ^*) \longrightarrow TQ$ the tangent map of π. For all $\alpha \in TQ^*$ we define the map $\theta_\alpha : T_\alpha(TQ^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ such that $\theta_\alpha(v) = \alpha T\pi(v)$ for all v in $T_\alpha(TQ^*)$. The symplectic form, called Poincaré 2-form is given by $\omega = -d\theta = dq^i \wedge dp_i$.

3.2 Hamiltonian dynamical systems and symmetries.

Definition 3.2.1. *A hamiltonian dynamical system is a tern (M,ω,H) where (M,ω) is a symplectic manifold and $H \in \mathscr{C}^\infty(M)$. H defines a unique vector field given by $i_{X_H}\omega = dH$.*

Proposition 3.2.2. *i) The vector field X_H corresponding to H it is written in canonical coordinates as follows:*

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

ii) The integral curves of the vector field X_H are determined in canonical coordinates by the equations:

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

iii) H is a constant of motion.

Definition 3.2.3. *We say that ϕ is a symmetry of ω if $\phi^*\omega = \omega$, i.e:*

$$\omega_m(u,v) = \omega_{\phi(m)}(T_m\phi(u), T_m\phi(v)), \qquad \textit{for all } m \in M, \textit{and for all } u,v \in T_mM.$$

Theorem 3.2.4. *Let Y be a vector field with flow ϕ_t. ϕ_t is a one-parameter group of symmetries of ω if and only if the Lie derivative of ω along Y is zero.*

Definition 3.2.5. *We say that ϕ is a symmetry of H if $\phi^*H = H$, i.e, $H(\phi(x)) = H(x)$.*

Theorem 3.2.6. *Let Y be a vector field let ϕ_t be his flow. ϕ_t is a one-paremeter group of symmetries of H if and only of the Lie derivative of H along Y is zero.*

Definition 3.2.7. *We say that $X \in \mathfrak{X}(M)$ is a hamiltonian vector field if there exists $H \in \mathscr{C}^\infty$ such that X is the hamiltonian vector field associated to H, i.e, $i_X\omega = dH$.*

Note that if X is hamiltonian $0 = d^2H = d(i_X\omega) = (di_X + i_Xd)\omega = \mathscr{L}_X\omega$. The reciprocal is not true generally but it is true locally:

Lemna 3.2.8. *(Poincaré) If $\mathscr{L}_X\omega = 0$ there exists a neighborhood $U \in M$ of each point $m \in M$ and a function $f \in \mathscr{C}^\infty$ such that $i_X\omega = df$.*

A vector field X such that $\mathscr{L}_X\omega = 0$ is called locally hamiltonian.

Theorem 3.2.9. *If $Y \in \mathfrak{X}(M)$ is hamiltonian with hamiltonian function f, i.e, $i_Y\omega = df$ and $\mathscr{L}_Y H = 0$, then $X_H f = 0$, i.e, f is a constant of motion for X_H.*

Proof. $X_H f = df(X_H) = i_Y\omega(X_H) = \omega(Y, X_H) = -\omega(X_H, Y) = -dH(Y) = -\mathscr{L}_Y H = 0.$ □

This result is called Noether's theorem in the hamiltonian formalism.

3.2.1 Poisson brackets.

Definition 3.2.10. *We will denote Poisson bracket of two functions $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ by :*

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g).$$

The Poisson bracket of two functions $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ can be written as follows:

$$\{f, g\} = X_g f = -X_f g.$$

Theorem 3.2.11. *The set $\mathscr{C}^\infty(M)$ is endowed with Lie algebra structure by the product defined by the Poisson brackets.*

If $m^i(t)$ are the coordinates of a integral curve of the vector field X_H:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(m^i(t)) = \{f, H\}(m^i(t))$$

3.3 Geodesic equations as a hamiltonian system.

Let g be a metric on a manifold Q and let TQ^* be its cotengent manifold. Let $H \in \mathscr{C}^\infty(TQ^*)$ be the hamiltonian function that can be written as $H(\alpha) = \frac{1}{2}g^{-1}(\alpha, \alpha)$. Expressed in canonical coordinates (q^i, p_i), $H = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_i p_j$, where g^{ij} is the inverse of the metric g_{ij}.The canonical equations are therefore:

$$\begin{cases} \dot{q}^k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} &= g^{ik} p_i, \\ \dot{p}_l &= -\frac{\partial H}{\partial q^l} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{rm}}{\partial q^l} p_r p_m. \end{cases}$$

Deriving and computing in the above equations we will get the following result:

$$\ddot{q}^k = \frac{1}{2} g^{ck} \left(-\frac{\partial g_{nc}}{\partial q^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^n} + \frac{\partial g_{bn}}{\partial q^c} \right) \dot{q}^b \dot{q}^n = -\Gamma^c_{n,b} \dot{q}^b \dot{q}^n.$$

Where $\Gamma^c_{n,b}$ are the Christoffel simbols.

So we get the following system of differential equations $\ddot{q}^k + \Gamma^c_{n,b}\dot{q}^b\dot{q}^n = 0$, which matches with the geodesic equations $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$. Note that the hamiltonian is constant of motion and $g(\alpha, \alpha)$ is constant, which was not as immediate as it was from the point of view of Riemann's geometry.

Now consider the case in which the hamiltonian has a potential $V(q)$. The hamiltonian will be written as $H(\alpha) = \frac{1}{2}g^{-1}(\alpha, \alpha) + V(\pi(\alpha))$ and in canonical coordinates $H = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_i p_j + V(q)$. The canonical equations are therefore:

$$\begin{cases} \dot{q}^k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} &= g^{ik} p_i, \\ \dot{p}_l &= -\frac{\partial H}{\partial q^l} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{rm}}{\partial q^l} p_r p_m + \frac{\partial V}{\partial q^l}. \end{cases}$$

Deriving and computing in the above equations we will get the following result:

$$\ddot{q}^k + \Gamma^k_{n,l}\dot{q}^l\dot{q}^n = -g^{kl}\frac{\partial V}{\partial x^l},$$

which matches with the equations of the newtonian mechanics section $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = -\operatorname{grad} V$.

3.4 Complete lift.

Definition 3.4.1. *Let $X \in \mathfrak{X}(Q)$ and let $\phi_t : Q \longrightarrow Q$ be its flow. The map $(T\phi_t^*)^{-1} : TQ^* \longrightarrow TQ^*$ is a flow in TQ^*. We will say that the infinitesimal generator of this flow is the complete lift of X and we will denote it by X^c.*

Proposition 3.4.2. *The expression in natural coordinates (q^i, p_i) in TQ^* of the complete lift is as follows:*

$$X^c(q,p) = X^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} - pj\frac{\partial X^j}{\partial q^i}(q)\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Definition 3.4.3. *Let $\hat{X} \in \mathscr{C}^\infty(TQ^*)$ given by $\hat{X}(\alpha_q) =< \alpha_q, X(q) >$ for all $\alpha_q \in TQ^*$. This map is called momentum in the direction of $X \in \mathfrak{X}(Q)$.*

In coordinates, $\hat{X}(q,p) = p_i X^i(q)$.

Proposition 3.4.4. *X is hamiltonian with hamiltonian function $\hat{X} = p_i X^i$.*

Proof. Indeed:

$$i_{X^c}\omega = X^i dp_i + p_j\frac{\partial X^j}{\partial q^i}dq^i = d[X^i p_i] = d\hat{X}.$$

□

Proposition 3.4.5. *Let $H(\alpha) = \frac{1}{2}g^{-1}(\alpha,\alpha)$. X is a Killing vector field if and only if $\mathscr{L}_{X^c}H = 0$.*

Proof. In coordinates, $H = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_i p_j$ we have that:

$$\mathscr{L}_{X^c}H = \frac{1}{2}\left(-X^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}v_i v_j - g_{kj}\frac{\partial X^j}{\partial q^i}v_i v_j - g_{ki}\frac{\partial X^i}{\partial q^j}v_i v_j\right) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g(v,v),$$

with $v^i = g^{ij}p_j$ and $p_j = g_{ij}v^i$.

If X is a Killing vector field then $\mathscr{L}_X g = 0$ and then $\mathscr{L}_{X^c}H = 0$. And if $\mathscr{L}_{X^c}H = 0$, then $\mathscr{L}_X g = 0$ and X is a Killing vector field. □

3.5 Mardsen-Weinstein reduction.

Theorem 3.5.1. *(Marsden-Weinstein) Let φ be a free and proper hamiltonian action of G in a symplectic manifold (M,ω) with equivariant momentum map J. Then the space $P_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ with μ regular value has a unique symplectic form characterized by $\pi_\mu^*\omega_\mu = i_\mu^*\omega$. Besides, if H is an invariant hamiltonian in M and $\tilde{H}_\mu$ is the induced hamiltonian in $J^{-1}(\mu)/G_\mu$, the flows ϕ_t and $\tilde{\phi}_t$ of X_H and $\tilde{X}_{H_\mu} \in \mathfrak{X}(P_\mu)$ satisfy that $\pi_\mu \circ \phi_t = \tilde{\phi}_t \circ \pi_\mu$.*

This theorem allows us to reduce a symplectic manifold, under certain conditions, to an other whit lower dimension wich preserves the dynamics and structure of the manifold from which it comes. An example where we can apply this teorem is in the Elroy's Beanie problem: Two rigid bodies that are joined at a fixed point are considered. Two reference semi-axes are set. The manifold to consider is $Q = S^1 \times S^1$ with coordinates (θ, φ), where θ is the angle between the x semi-axis with the semi-axis of reference of the first body and ϕ is the angle between a reference semi-axis of the first body with the reference axis of the second body. The angle between the first and the second body is always the same. In this problem we can reduce a manifold of dimension four - $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - to a manifold of dimension two - $S^1 \times \mathbb{R}$.

Prólogo.

La presencia de simetrías en un sistema dinámico implica ciertas propiedades que permiten simplicar dicho sistema y entender mejor su comportamiento. En este trabajo estudiaremos la teoría de la simetría en sistemas dinámicos y la aplicaremos a casos concretos.

De manera informal, podemos entender una simetría como lo que se repite, lo reiterativo, lo que vuelve a ser igual, es decir, si aplicamos una simetría a un objeto, este queda de la misma forma. Así pues, podríamos hablar de simetrías de un sistema como su conjunto de invariancias, es decir, que al aplicar una transformación de simetría sobre un sistema, el sistema queda inalterado.

Se definirá el concepto de sistema dinámico así como el de simetría de un sistema dinámico y se caracterizarán las simetrías de los sistemas dinámicos distinguiendo el caso en el que sean discretas o continuas. Estaremos interesados en las simetrías continuas y serán las que trataremos a lo largo de todo el trabajo. También se introducirá el concepto de grupo de Lie y álgebra de Lie, así como el de álgebra de Lie de un grupo de Lie. Interpretando el conjunto de estados como una variedad diferenciable, se verá que si la cocientamos por un grupo de Lie de simetrías, ésta puede reducierse a la variedad cociente, obteniendo un sistema dinámico en una variedad de dimensión menor.

En muchas ocasiones un sistema físico se ve sometido a restricciones en el espacio de estados. La energía cinética en el espacio restringido viene dada por una métrica riemanniana. Por tanto, estaremos interesados en estudiar el flujo geodésico asociado a dicha métrica. Para estudiar las simetrías del sistema dinámico se procede a estudiar las simetrías de la métrica. Los grupos uniparamétricos de isometrías son simetrías continuas de la métrica y por tanto estaremos interesados en estudiarlos junto con sus campos vectoriales asociados, los campos de Killing.

Un tipo de sistema dinámico muy común en mecánica clásica es el de los sistemas dinámicos hamiltonianos. La geometría simpléctica nos permite encontrar simetrías en estos sistemas de una manera sistemática. Estudiaremos la invariancia de los hamiltonianos bajo un cierto grupo de simetrías y veremos que tiene consecuencias importantes, como por ejemplo el teorema de Noether. Este teorema dice que cada simetría continua de un sistema dinámico implica que alguna magnitud del sistema se conserva, y que, cada magnitud conservada tiene una correspondiente simetría. También se verá el teorema de Marsden y Weinstein, que proporciona un método para construir, a partir de una variedad simpléctica sobre la que actúa un grupo de Lie, otra variedad simpléctica de dimensión menor con las mismas propiedades que la de partida.

En un apéndice se han recogido diversas propiedades de la derivada de Lie que hemos utilizado frecuentemente. Aunque su estudio también ha formado parte de este trabajo, se ha preferido separarlas del texto principal para una exposición más fluida.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a los sistemas dinámicos con simetría.

La presencia de simetrías en un sistema dinámico implica ciertas propiedades que permiten simplicar dicho sistema dinámico. En este capítulo se presentará la noción de sistema dinámico así como la de simetría de un sistema dinámico y se caracterizarán las simetrías de los sistemas dinámicos en el caso en que estas sean discretas o sean continuas. También se introducirá el concepto de grupo de Lie y álgebra de Lie, así como el de álgebra de Lie de un grupo de Lie. Interpretando el conjunto de estados como una variedad diferenciable, se verá que si la cocientamos por un grupo de Lie de simetrías de un sistema dinámico, éste puede reducierse a la variedad cociente, obteniendo un sistema dinámico en una variedad de dimensión menor.

1.1. Conceptos básicos.

Definición 1.1.1. *Un sistema dinámico es una terna* $(\mathscr{S}, \phi, \mathscr{T})$ *donde* $\mathscr{T} = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$*, denominado conjunto de tiempos,* $\mathscr{S}$ *es un conjunto, denominado espacio de estados, y* $\phi = \{\phi_t\}$ *es una familia de aplicaciones,* $\phi_t : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ *definida para* $t \geq 0$ *satisfaciendo:*

- $\phi_0 = id$,
- $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ *para todo* $t, s \geq 0$.

Cuando $\mathscr{T} = \mathbb{R}$ *se dirá que es un sistema dinámico en tiempo continuo, mientras que si* $\mathscr{T} = \mathbb{Z}$ *se dirá que el sistema dinámico es en tiempo discreto.*

Si ϕ_t está definido para todo $t \in \mathscr{T}$ (positivo o no) y satisface las propiedades anteriores, se dirá que es invertible. Por comodidad se referirá a un sistema dinámico indicando únicamente la familia de aplicaciones ϕ_t de la terna que define el sistema dinámico.

En el caso de un sistema dinámico en tiempo discreto, $\mathscr{T} = \mathbb{Z}$, la aplicación ϕ_t es simplemente la composición t-veces de la aplicación $F = \phi_1$, que se denomina generador del sistema dinámico. En el caso de un sistema dinámico en tiempo continuo, $\mathscr{T} = \mathbb{R}$, bajo condiciones adecuadas de regularidad (que se precisarán más adelante) la aplicación ϕ_t es la solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales.

En cualquier caso, nótese que un sistema dinámico equivale a la acción del semigrupo aditivo $\mathscr{T}_+ = \{t \in \mathscr{T} | t \geq 0\}$ sobre el espacio de estados $\mathscr{S}$. La órbita de un punto $x \in \mathscr{S}$ es el conjunto ordenado $\{\phi_t(x) | t \in \mathscr{T}\}$.

Definición 1.1.2. *Se dice que una aplicación invertible* $\psi : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ *es una simetría de un sistema dinámico* ϕ_t *si satisface*

$$\psi \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi \tag{1.1}$$

para todo $t \geq 0$.

Una simetría aplica órbitas en órbitas.

Proposición 1.1.3. *Si ψ es una simetría de un sistema dinámico ϕ_t y $x_0 \in \mathscr{S}$ entonces la imagen por ψ de la órbita de x_0 es igual a la órbita de $\psi(x_0)$, es decir, $\psi(\phi_t(x_0)) = \phi_t(\psi(x_0))$.*

Demostración. Se obtiene inmediatamente al aplicar (1.1) a x_0. □

Proposición 1.1.4. *Consideremos el grupo $(G,\circ)$ de las aplicaciones invertibles de $\mathscr{S}$ en sí mismo, $G = \{\psi\colon \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S} | \exists \psi^{-1}\colon \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}\}$, con la composición de aplicaciones. El conjunto de simetrías de un sistema dinámico es un subgrupo de G.*

Demostración. Hay que ver que $S = \{\psi \in G | \psi \text{ es simetría de } \phi_t\}$ es un subgrupo de G.

En primer lugar, contiene al elemento neutro de G, $id\colon \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$, ya que trivialmente se tiene que: $id \circ \phi_t = \phi_t \circ id$.

Por otro lado, hay que ver que si ψ es simetría entonces ψ^{-1} es simetría. A partir de $\psi \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi$ componiendo con ψ^{-1} por la izquierda se obtiene $\phi_t = \psi^{-1} \circ \phi_t \circ \psi$. Componiendo ahora con ψ^{-1} por la derecha se llega a $\phi_t \circ \psi^{-1} = \psi^{-1} \circ \phi_t$, por lo que ψ^{-1} es simetría.

Por último hay que ver que si ψ_1, ψ_2 son simetrías entonces $\psi_1 \circ \psi_2$ es simetría. Componiendo $\psi_2 \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi_2$ con ψ_1 por la izquierda se obtiene que $\psi_1 \circ \psi_2 \circ \phi_t = \psi_1 \circ \phi_t \circ \psi_2$, y componiendo $\psi_1 \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi_1$ con ψ_2 por la derecha se obtiene que $\psi_1 \circ \phi_t \circ \psi_2 = \phi_t \circ \psi_1 \circ \psi_2$, de donde se obtiene $\psi_1 \circ \psi_2 \circ \phi_t = \psi_1 \circ \phi_t \circ \psi_2 = \phi_t \circ \psi_1 \circ \psi_2$. □

1.1.1. Otras nociones de simetría.

Existen otras nociones más generales que la considerada aquí. En ocasiones se acepta como simetría una aplicación $\psi\colon \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ tal que $\psi \circ \phi_t = \phi_{-t} \circ \psi$. En este caso la aplicación ψ aplica órbitas en órbitas con la orientación contraria. Con más generalidad, se dice que $\psi\colon \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ es un simetría de ϕ_t si existe una aplicación $\tau\colon \mathscr{S} \times \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}$ tal que $\tau(x,\cdot) : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{T}$ es monótona, para cada $x \in \mathscr{S}$, y se satisface $\psi \circ \phi_t = \phi_{\tau(\ ,t)} \circ \psi$, para todo $t \geq 0$. En este caso, ψ aplica órbitas en órbitas, como conjuntos, aunque cambia su parametrización.

No se considerarán aquí dichas generalizaciones.

1.2. Caracterización en términos del generador.

Veamos cómo se puede caracterizar una simetría de un sistema dinámico dependiendo de si éste es discreto o continuo.

1.2.1. Sistemas en tiempo discreto.

Se considera un sistema dinámico ϕ_t en tiempo discreto, $\mathscr{T} = \mathbb{Z}$, y sea $F = \phi_1\colon \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ su generador. Entonces una aplicación invertible ψ es una simetría de ϕ_t si y sólo si $F \circ \psi = \psi \circ F$. La demostración es inmediata, ya que $\phi_t = F \circ \cdots \circ F$ (t-veces).

1.2.2. Sistemas en tiempo continuo.

Como se ha mencionado anteriormente los sistemas dinámicos en tiempo continuo están relacionados con los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Supongamos que el espacio de estados es una variedad diferenciable $\mathscr{S} = M$, y que la aplicación $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, definida por $\phi : (t,x) \mapsto \phi_t(x)$ es diferenciable de clase $\mathscr{C}^\infty$. De tonaremos por TM al fibrado tangente a M.

Definición 1.2.1. *Un campo vectorial es una aplicación diferenciable $X\colon M \longrightarrow TM$ tal que para todo $m \in M$ se tiene que $X(m) \in T_mM$.*

Se denota por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de los campos de vectores sobre M.

Llamamos generador infinitesimal del sistema dinámico ϕ_t al campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ definido por:

$$X(m) = \frac{d}{dt}\phi_t(m)\Big|_{t=0^+}, \qquad \text{para todo } m \in M.$$

Definición 1.2.2. *Una curva integral γ de un campo vectorial X es una aplicación $\gamma \in \mathbb{R}\colon I \longrightarrow M$ tal que $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ e I es un intervalo de $\mathbb{R}$.*

Diremos que una curva integral γ es maximal si su dominio de definición I es el mayor posible en el sentido de la inclusión.

Definición 1.2.3. *Un campo vectorial se dice completo si todas sus curvas integrales maximales están definidas en todo $\mathbb{R}$ y semicompleto si lo están para $[0,+\infty)$.*

Definición 1.2.4. *Sea γ_m una curva integral maximal del campo vectorial X tal que $\gamma_m(0) = m$ para todo $m \in M$. El flujo de un campo vectorial es una aplicación $\phi_t\colon M \longrightarrow M$ definida por $\phi_t(m) = \gamma_m(t)$.*

A ϕ_t también se le llama grupo uniparamétrico generado por X.

Si un campo X es semicompleto, define un sistema dinámico y se X es completo, define un sistema dinámico invertible.

Se sigue de la definición de generador que:

$$\frac{d}{dt}\phi_t(m) = X(\phi_t(m)), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y para todo } m \in M.$$

En términos del generador del sistema dinámico en tiempo continuo una simetría queda caracterizada por la siguiente propiedad.

Proposición 1.2.5. *Sea ϕ_t un sistema dinámico en tiempo continuo y sea X su generador infinitesimal. Un difeomorfismo $\psi : M \to M$ es una simetría si y sólo si $T\psi \circ X = X \circ \psi$.*

Demostración. Aplicando (1.1) a un punto cualquiera $m \in M$ y tomando la derivada en $t = 0^+$ se tiene, por un lado

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ \phi_t)(m)\Big|_{t=0^+} = T_{\phi_t(m)}\psi \frac{d}{dt}\phi_t(m)\Big|_{t=0^+} = T_m\psi(X(m)),$$

y por otro

$$\frac{d}{dt}(\phi_t \circ \psi)(m)\Big|_{t=0^+} = X(\psi(m)).$$

Se llega así a $T_m\psi(X(m)) = X(\psi(m))$.

Recíprocamente, supongamos que $T\psi \circ X = X \circ \psi$. Probaremos que $\phi_t \circ \psi \circ \phi_{-t} = \psi$. Derivando $\phi_t \circ \psi \circ \phi_{-t}$ con respecto de t en un punto cualquiera $m \in M$ se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(\phi_t \circ \psi \circ \phi_{-t})(m) = X(\phi_t \circ \psi \circ \phi_{-t})(m) - T_m\phi_t \circ T_m\psi \circ X \circ \phi_{-t}(m).$$

Por otro lado, derivando con respecto a s la igualdad $\phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t$ en un punto cualquiera $m \in M$ se tiene que $T_m\phi_t(X(m)) = X(\phi_t(m))$. Por tanto $T_m\phi_t \circ T_m\psi \circ X \circ \phi_{-t}(m) = T_m\phi_t \circ X \circ \psi \circ (\phi_{-t})(m) = X(\phi_t \circ \psi \circ \phi_{-t})(m)$ y $\frac{d}{dt}(\phi_t \circ \psi \circ \phi_{-t})(m) = 0$. Así $\phi_t \circ \psi \circ \phi_{-t}$ es constante respecto a t. Tomando, por ejemplo, $t = 0$ en $\phi_t \circ \psi \circ \phi_{-t}$ se obtiene ψ y así $\phi_t \circ \psi \circ \phi_{-t} = \psi$ para todo t ≥ 0. □

Consideremos un sistema dinámico en tiempo discreto generado por F. Supóngase que se tiene un grupo uniparamétrico ψ_s de simetrías de F, es decir,

$$F \circ \psi_s = \psi_s \circ F.$$

Si Y es el generador infinitesimal de ψ_s entonces $TF \circ Y = Y \circ F$. Recíprocamente, si se cumple $TF \circ Y = Y \circ F$ entonces el grupo uniparamétrico generado por Y es un grupo uniparamétrico de simetrías de F.

1.3. Grupos de simetría y reducción.

Definición 1.3.1. *Un grupo de Lie es un grupo G que es, al mismo tiempo, una variedad diferenciable de dimensión finita, de modo que las dos operaciones de grupo de G, multiplicación e inversión:*

- $\mu : G\times G \longrightarrow G$ *tal que* $(x,y)\mapsto xy\colon G\times G\longrightarrow G$,
- $\iota : G\longrightarrow G$ *tal que* $x\mapsto x^{-1}$,

son aplicaciones diferenciables.

Sea G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Consideramos una acción por la izquierda de G en M, es decir, una aplicación diferenciable $\varphi : G\times M \longrightarrow M$ verificando:

i) $\varphi(e,m) = m$, para todo $m\in M$, con e elemento neutro.

ii) $\varphi(g_1,\varphi(g_2,m)) = \varphi(g_1g_2,m)$, para todo $g_1,g_2\in G$ y para todo $m\in M$.

Las aplicaciones $\varphi_g : M\longrightarrow M$ y $\varphi_m : G\longrightarrow M$ definidas por $\varphi_g(m) = \varphi(g,m) = \varphi_m(g) = g\cdot m$ para todo $g\in G$ y $m\in M$ son diferenciables. Además $\varphi_e = id_M$ y $\varphi_{g_1}\circ\varphi_{g_2} = \varphi_{g_1g_2}$, y por tanto $\varphi_{g^{-1}}$ es el inverso de φ_g que será un difeomorfismo.

Definición 1.3.2. *Un álgebra de Lie es un espacio vectorial V dotado de una operación bilineal interna* $[,]$ *tal que para* a,b,c *elementos del álgrebra se tiene que:*

- $[a,b] = -[b,a]$, *(antisimétrica),*
- $[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]] = 0$, *(identidad de Jacobi).*

Definición 1.3.3. *Un campo de vectorial X sobre un grupo de Lie G se dice invariante a la izquierda si*

$$(T_{g'}L_g)(X(g')) = X(gg'), \qquad \textit{para todo } g,g'\in G.$$

El espacio de los campos invariantes a la izquierda es un espacio vectorial que denotaremos por $\mathfrak{X}_L(G)$. Se puede ver que si X e Y son campos invariantes a la izquierda, el corchete de Lie $[X,Y]$ también es un campo invariante a la izquierda.

Si e el elemento neutro de un grupo de Lie G y $T_eG = \mathscr{G}$ el espacio tangente a G en e, se define la aplicación $\leftarrow\colon \mathscr{G}\rightarrow\mathfrak{X}_L(G)$ tal que $\overleftarrow{\xi}(g) = (T_eL_g)(\xi)$, para todo $g\in G$.

Definición 1.3.4. *Sea G un grupo de Lie y* $\mathscr{G}$ *el espacio tangente a G en el neutro. Entonces,existe una estructura de álgebra de Lie* $[,]_{\mathscr{G}}$ *sobre G tal que* $[\xi,\eta]_{\mathscr{G}} = [\overleftarrow{\xi},\overleftarrow{\eta}](e)$*, para todo* ξ *y* η *en* $\mathscr{G}$*. Al espacio vectorial* $\mathscr{G}$ *dotado de la estructura de álgebra de Lie* $[,]_{\mathscr{G}}$ *se le denomina el álgebra de Lie del grupo de Lie G.*

Sea $\mathscr{G}$ el álgebra de Lie del grupo de Lie G de M. Para cada $a\in\mathscr{G}$ podemos definir un campo vectorial $X_a\in\mathfrak{X}(M)$ mediante:

$$X_a(m) = T_e\varphi_m(a),$$

o lo que es lo mismo, si $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$

$$X_a(m)f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(exp(ta)m)\Big|_{t=0}.$$

A este campo lo llamaremos campo fundamental. La aplicación $X:\mathscr{G}\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$ que lleva cada $a\in\mathscr{G}$ a X_a es un antihomomorfismo de álgebras de Lie, es decir:

$$[X_a,X_b] = -X_{[a,b]}.$$

Se deduce que X_a es completo y que el flujo ϕ_t de X_a está dado por:

$$\phi_t = \varphi_{exp(ta)}.$$

Proposición 1.3.5. *Sea M variedad y G un grupo de Lie que actúa en M y supongamos que M/G tiene estructura de variedad cociente. Si X es un campo vectorial tal que $T\varphi_g \circ X = X \circ \varphi_g$, para todo $g \in G$ entonces existe un único campo vectorial $\bar{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ tal que $T\pi \circ X = \bar{X} \circ \pi$ siendo $\pi \colon M \longrightarrow M/G$ la proyección sobre el cociente. Si ϕ_t es el flujo de X entonces el flujo de $(\bar{X})$ es $\bar{\phi}_t([m]) = [\phi_t(m)]$.*

En lo que sigue en este trabajo, nos centraremos en sistemas dinámicos en tiempo continuo. Supondremos que son invertibles, es decir, que el campo vectorial que lo genera es completo. Además cuando tengan simetría continua se supondrá también que el generador es completo.

Capítulo 2

Geometría riemanniana y simetrías. Geodésicas.

En muchas ocasiones un sistema físico se ve sometido a restricciones en el espacio de estados. La energía cinética en el espacio restringido viene dada por una métrica riemanniana. En ausencia de otras fuerzas las trayectorias del sistema dinámico están descritas por las geodésicas de dicha métrica. Por tanto, es interesante estudiar las simetrías de los flujos geodésicos en variedades riemannianas. Para ello se procede a estudiar las simetrías de la métrica. Los grupos uniparamétricos de isometrías son simetrías continuas de la métrica y por tanto estaremos interesados en estudiarlos junto con sus campos vectoriales asociados, los campos de Killing.

2.1. Conexiones lineales

Sea $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de campos vectoriales de una variedad diferenciable M.

Definición 2.1.1. *Una conexión lineal es una aplicación que a cada campo vectorial $U \in \mathfrak{X}(M)$ le asocia un operador $\nabla_U : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ satisfaciendo las siguientes propiedades:*

- $\nabla_U(\alpha X + \beta Y) = \alpha \nabla_U X + \beta \nabla_U Y,$ *para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $U, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*
- $\nabla_{fU+gV} X = f \nabla_U X + g \nabla_V X,$ *para todo $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ y para todo $U, V, X \in \mathfrak{X}(M)$.*
- $\nabla_U(fX) = U(f)X + f\nabla_U X,$ *para todo $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ y para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Definición 2.1.2. *Un campo vectorial a lo largo de una curva $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ con I intervalo de $\mathbb{R}$ es una aplicación $X : I \longrightarrow TM$ diferenciable tal que:*

$$X(t) \in T_{\gamma(t)}M.$$

Dos tipos relevantes de estos campos son los siguientes:

- Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X \circ \gamma$ es un campo vectorial a lo largo de la curva γ.
- El campo $\frac{\mathrm{d}\gamma}{dt} = \dot{\gamma}$ tangente a la curva γ.

Sea M una variedad diferenciable con una conexion lineal. Sea X un campo vectorial a lo largo de una curva diferenciable $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$. Tomamos un subintervalo de I donde γ es inyectiva. Sea U un entorno de ese trozo de curva. Se halla otro campo vectorial Y en ese entorno de tal forma que $Y \circ \gamma = X$. Se denomina derivada covariante de X a lo largo de γ al campo vectorial que cumple que:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = \nabla_{\dot{\gamma}} Y.$$

Sea $F\colon \bar{M} \longrightarrow M$ una aplicación diferenciable. Dos campos vectoriales $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ y $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se dicen F-relacionados si $TF \circ X = Y \circ F$. Si F es un difeomorfismo, entonces para cualquier campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $TF^{-1} \circ Y \circ F$ es también un campo vectorial en $\mathfrak{X}(\bar{M})$ que se denota F^*Y. Además $TF \circ X \circ F^{-1}$ es también es un campo vectorial en $\mathfrak{X}(M)$ y se denota F_*X. Si $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ entonces $X(f \circ F) = (F^*X)f$.

Definición 2.1.3. *Sean $\bar{\nabla}$ y ∇ conexiones lineales sobre $\bar{M}$ y M respectivamente. Una aplicación $F : \bar{M} \longrightarrow M$ se dice afín si*

$$F^*\nabla_X Y = \bar{\nabla}_{F^*X} F^*Y, \qquad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.1}$$

Una transformación afín de (M, ∇) es un difeomorfismo afín de M en sí mismo. El conjunto de transformaciones afines de una variedad M conexa es un grupo de Lie de dimension menor o igual $n^2 + n$. Para más detalles véase el libro [KN].

2.2. Geometría riemanniana. Conceptos.

Definición 2.2.1. *Una métrica de Riemann g sobre una variedad M es una aplicación diferenciable*

$$g : TM \times_M TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $g_m : T_mM \times T_mM \longrightarrow \mathbb{R}$ define un producto escalar sobre T_mM, para todo $m \in M$.

Definición 2.2.2. *(pullback) Sea $F : \bar{M} \longrightarrow M$ una aplicación diferenciable y g una métrica de Riemann sobre M. Se llama pullback de g por F a la aplicación $F^*g : T\bar{M} \times_M T\bar{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$(F^*g)_{\bar{m}}(u, v) = g_{F(\bar{m})}(T_{\bar{m}}F(u), T_{\bar{m}}F(v))$$

para todo $u, v \in T_{\bar{m}}\bar{M}$ y todo $\bar{m} \in \bar{M}$.

Recordemos que una inmersión es una aplicación diferenciable entre variedades cuyo rango coincide en todos los puntos con la dimensión de la variedad de partida. Si F es una inmersión entonces F^*g es una métrica riemanniana en $\bar{M}$.

Definición 2.2.3. *Sea (M, g) una variedad de Riemann y $F : M \longrightarrow M$ un difeomorfismo. Se dice que F es una isometría si $F^*g = g$.*

Definición 2.2.4. *Una simetría de una variedad riemanniana (M, g) es una isometría de (M, g) en sí misma.*

Ejemplo: Sea M un elipsoide en $\mathbb{R}^3$ con la métrica inducida. Los giros de $\frac{\pi}{2}$ y las reflexiones respecto a los planos ecuatoriales son simetrías. Si dos semiejes son iguales, cualquier giro alrededor del otro eje es una simetría.

Se puede ver que el grupo de isometrías es grupo de Lie de dimensión menor o igual que $n^2 + n$ con n la dimensión de M conexa y que su álgebra de Lie son los campos de Killing completos. Para más detalles véase el libro [M].

2.3. Conexión de Levi-Civita.

El siguiente resultado se suele denominar teorema fundamental de la geometría riemanniana.

Teorema 2.3.1. *En una variedad riemanniana (M, g) existe una única conexión lineal ∇ que satisface las dos siguientes propiedades:*

- $X(g(X,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, *conexión métrica.*
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, *conexión libre de torsión.*

para todo $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. Dicha conexión se denomina conexión de Levi-Civita.

Demostración. **Unicidad**
Usando las propiedades exigidas a la conexión de Levi-Civita se tiene que:

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) - g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y,Z) - g(Y, \nabla_Z X + [X,Z]) = \\
&= Xg(Y,Z) - Zg(X,Y) + g(\nabla_Z Y, X) + g(Y,[Z,X]) = \\
&= Xg(Y,Z) - Zg(X,Y) + g(\nabla_Y Z + [Z,Y], X) + g(Y,[Z,X]) = \\
&= Xg(Y,Z) - Zg(X,Y) + Yg(Z,X) - g(Z, \nabla_Y X) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) = \\
&= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) - g(\nabla_X Y, Z).
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}(Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])).$$

Esta identidad, denominada indentidad de Koszul, se cumple para cualquier conexión métrica libre de torsión, y como g es no singular para todo $m \in M$, ∇ es única.

Existencia
Sean X e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ fijos y $\mu : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(M)$ definida por:

$$\mu(Z) = \frac{1}{2}(Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])).$$

Es fácil, pero tedioso, probar que se cumple que $\mu(X+Y) = \mu(X) + \mu(Y)$ y que $\mu(fX) = f(\mu(X))$ para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

Así μ es lineal y por tanto, existe un único campo vectorial $\nabla_X Y$ en M tal que:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \mu(Z), \quad \text{para todo } X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

$\square$

Eligiendo un sistema de coordenadas locales (m^i), la conexión de Levi-Civita queda caracterizada por los coeficientes de Christoffel de la métrica $\Gamma^k_{i,j}$ de la siguiente forma:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial m^i}} \frac{\partial}{\partial m^j} = \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial}{\partial m^k},$$

$$\Gamma^k_{i,j} = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial m^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial m^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial m^h} \right),$$

donde g^{ij} es la inversa de la métrica g_{ij}.

La conexión de Levi-Civita es natural respecto a las isometrías, es decir, para la conexión de Levi-Civita una isometría es una transformación afín.

Proposición 2.3.2. *Si $F : \bar{M} \longrightarrow M$ es isometría, entonces F es afín:*

$$F^* \nabla_X Y = \bar{\nabla}_{F^* X} F^* Y, \qquad \textit{para todo} X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demostración. Sean $U,V,W \in \mathfrak{X}(M)$ campos F-relacionados con $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\bar{M})$, respectivamente. Por ser F isometría se tiene que:

$$U\bar{g}(V,W) = U\bar{g}(F^*Y,F^*Z) = U(g(Y,Z)\circ F) = F^*Ug(Y,Z) = Xg(Y,Z).$$

Análogamente se tiene que $V\bar{g}(W,U) = Yg(Z,X)$ y que $W\bar{g}(U,V) = Zg(X,Y)$. Por otro lado:

$$\bar{g}(U,[V,W]) = \bar{g}(F^*U,F^*[V,W]) = \bar{g}(F^*U,[F^*V,F^*W]) = g(X,[Y,Z]).$$

Análogamente se tiene que $\bar{g}(W,[U,V]) = g(Z,[X,Y])$ y que $\bar{g}(V,[W,U]) = g(Y,[Z,X])$. Teniendo en cuenta la identidad de Koszul:

$$\bar{g}(F^*\nabla_U V,F^*W) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y,Z)\circ F = \bar{g}(\nabla_{F^*U}Y,F^*W) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{F^*U}F^*V,F^*W),$$

para todo $W \in \mathfrak{X}(\bar{M})$, luego:

$$F^*\nabla_U V = \bar{\nabla}_{F^*U}F^*V.$$

Por tanto F es afín. □

2.4. Campos de Killing.

Un campo de Killing K es un campo vectorial en una variedad de Riemann (M,g) que define un grupo uniparamétrico de isometrías.

Definición 2.4.1. *Sea K un campo vectorial en (M,g) y sea ϕ_t su flujo. Se dice que K es un campo de Killing si cada aplicación ϕ_t es una isometría, es decir:*

$$\phi_t^*g = g.$$

Proposición 2.4.2. *Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:*

i) *Un campo vectorial K en (M,g) es de Killing.*

ii) $\mathscr{L}_K g = 0$.

iii) $g(\nabla_X K,Y) + g(\nabla_Y K,X) = 0,$ *para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demostración. $i) \Leftrightarrow ii)$

Sea ϕ_t el grupo uniparamétrico asociado a K campo de Killing. Derivando ϕ_t^*g con respecto de t y usando (A.1.6):

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*g = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\phi_{t+s}^*g = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\phi_t^*\phi_s^*g = \phi_t^*\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\phi_s^*g = \phi_t^*\mathscr{L}_K g.$$

Supongamos primero que K es de Killing. Entonces, $\phi_t^*g = g$. Por tanto se tiene que $\frac{d}{dt}\phi_t^*g = \frac{d}{dt}g = 0$ y así $\mathscr{L}_K g = 0$. Recíprocamente, supongamos ahora que $\mathscr{L}_K g = 0$. Entonces $\phi_t^*\mathscr{L}_K g = 0$ y así se tiene que $\frac{d}{dt}\phi_t^*g = 0$. Por tanto ϕ_t^*g constante respecto a t, luego $\phi_t^*g = g$ y así K es de Killing.

$ii) \Leftrightarrow iii)$

Utilizando (A.1.7), para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_K g(X,Y) &= Kg(X,Y) - g([K,X],Y) - g(X,[K,Y])\\ &= g(\nabla_K X,Y) + g(X,\nabla_K Y) - g(\nabla_K Y - \nabla_x K,Y) - g(X,\nabla_K Y - \nabla_Y K)\\ &= g(\nabla_K X,Y) + g(X,\nabla_K Y) - g(\nabla_K X,Y) + g(\nabla_X K,Y) - g(X,\nabla_K Y) + g(X,\nabla_Y K)\\ &= g(\nabla_X K,Y) + g(\nabla_Y K,X),\end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado.

□

Expresemos en coordenadas $\mathscr{L}_K g$. Usando otra vez (A.1.7) se tiene que para $X = \frac{\partial}{\partial m^i}$ y para $Y = \frac{\partial}{\partial m^j}$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_K g\left(\frac{\partial}{\partial m^i}, \frac{\partial}{\partial m^j}\right) &= Kg\left(\frac{\partial}{\partial m^i}, \frac{\partial}{\partial m^j}\right) - g\left(\left[K, \frac{\partial}{\partial m^i}\right], \frac{\partial}{\partial m^j}\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial m^i}, \left[K, \frac{\partial}{\partial m^j}\right]\right)\\ &= K^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik}\frac{\partial K^i}{\partial m^j} + g_{jk}\frac{\partial K^j}{\partial m^i},\end{aligned}$$

puesto que $\left[K, \frac{\partial}{\partial m^k}\right] = -\left[\frac{\partial}{\partial m^k}, K\right] = -\mathscr{L}_{\frac{\partial}{\partial m^k}} K = -\frac{\partial K^l}{\partial m^k}\frac{\partial}{\partial m^l}$.

Por tanto, K es campo de Killing si y sólo si se tiene que la expresión $K^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial m^k} + g_{ik}\frac{\partial K^i}{\partial m^j} + g_{jk}\frac{\partial K^j}{\partial m^i}$ se anula.

2.5. Geodésicas

Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión n.

Definición 2.5.1. *Una curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ sobre una variedad de Riemann (M, g) es una geodésica si no hay variación covariante del campo tangente a la curva a largo del tiempo, es decir:*

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0.$$

Lema 2.5.2. *Si una curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ es geodésica entonces el vector tangente en un punto de la misma tiene módulo constante, es decir:*

$$g(\dot\gamma, \dot\gamma) = cte.$$

Demostración. Derivando $g(\dot\gamma, \dot\gamma)$ respecto a t:

$$\frac{d}{dt}(g(\dot\gamma, \dot\gamma)) = g(\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t), \dot\gamma) + g(\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)) = 2g(\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t), \dot\gamma) = 0,$$

ya que por ser γ: $I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ geodésica, $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0$.Por tanto $g(\dot\gamma, \dot\gamma)$ es constante. □

Esta constante c es proporcional a la longitud de arco s ya que $s = \int_a^b g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\, dt = (b-a)c$. Se dice que γ está parametrizada por un parámetro natural. Si $c = 1$ está parametrizada por la longitud del arco.

Proposición 2.5.3. *En un sistema de coordenadas locales, una curva $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^k(t))$ es geodésica si y sólo si satisface el sistema de ecuaciones diferenciales:*

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + (\Gamma^k_{i,j}\circ\gamma)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0. \tag{2.2}$$

Demostración. Expresando $\dot\gamma$ en coordenadas, $\dot\gamma = \dot\gamma^i \frac{\partial}{\partial m^i}$. Se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma &= \nabla_{\dot\gamma^i \frac{\partial}{\partial m^i}} \dot\gamma^i \frac{\partial}{\partial m^i} = \dot\gamma^i \nabla_{\dot\gamma^j \frac{\partial}{\partial m^i}} \frac{\partial}{\partial m^i} + \frac{d^2\gamma^k}{dt^2}\frac{\partial}{\partial m^k}\\ &= \dot\gamma^i\dot\gamma^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial m^i}} \frac{\partial}{\partial m^i} + \frac{d^2\gamma^k}{dt^2}\frac{\partial}{\partial m^k} = \left(\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + (\Gamma^k_{i,j}\circ\gamma)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial m^k},\end{aligned}$$

de donde se deduce directamente el resultado. □

Corolario 2.5.4. *Sea $v_m \in TM$. El campo vectorial correspondiente al sistema de ecuaciones anterior se puede expresar como*

$$\Gamma(v_m) = \frac{d}{dt}\dot{\gamma}(t)\Big|_{t=0},$$

donde γ es la solución del sistema $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ que satisface $\dot{\gamma} = v_m$.

Demostración. En coordenadas podemos escribir el sistema anterior como:

$$\begin{cases} \dot{m}^k &= v^k \\ \dot{v}^k &= -\Gamma^k_{i,j} v^i v^j. \end{cases}$$

Por tanto el generador en coordenadas, al que denotaremos Γ, se expresa de la siguiente forma:

$$\Gamma = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^k_{i,j} v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Por el teorema de existencia y unicidad, si $m \in M$ y $v \in T_m M$, existe un intervalo maximal $I \in \mathbb{R}$ alrededor del 0 y una única geodésica $\gamma \colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ tal que:

$$\begin{cases} \gamma(0) = m, \\ \dot{\gamma}(0) = v. \end{cases}$$

Luego para todo $v_m \in TM$ se tiene que:

$$\Gamma(v_m) = \frac{d}{dt}\dot{\gamma}(t)\Big|_{t=0}.$$

□

El sistema (2.2) se puede reescribir de forma más cómoda de la siguiente forma:

$$\ddot{m}^k + \Gamma^k_{i,j}\dot{m}^i \dot{m}^j = 0.$$

Definición 2.5.5. *El flujo asociado a Γ se denomina flujo geodésico y está dado por $\phi_t : TM \longrightarrow TM$ tal que $\phi_t(m, v_m) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ para todo $v_m \in TM$ y $\gamma(t)$ curva geodésica con $\gamma(0) = m$, $\dot{\gamma}(0) = v_m$.*

Proposición 2.5.6. *Un difeomorfismo $F : (\bar{M}, \bar{\nabla}) \longrightarrow (M, \nabla)$ es afín si y sólo si la imagen de cualquier geodésica en $\bar{M}$ es una geodésica en M.*

Demostración. Supongamos que F es afín y sean γ y $\bar{\gamma}$ una curvas en $\bar{M}$ de forma que $\gamma = F \circ \bar{\gamma}$. Sea $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Y \circ \gamma = \dot{\gamma}$. Por (2.1.3) se tiene que $F^*\nabla_Z Y = \bar{\nabla}_{F^*Z} F^*Y$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Aplicando esta igualdad a $Z = Y$ se tiene que $F^*\nabla_Y Y = \bar{\nabla}_{F^*Y} F^*Y$. Evaluando en $\bar{\gamma}(t)$ el primer miembro se obtiene que:

$$TF^{-1} \circ \nabla_Y Y \circ F \circ \bar{\gamma}(t) = TF^{-1}(\nabla_{Y \circ F \circ \bar{\gamma}(t)} Y) = TF^{-1}(\nabla_{\dot{\gamma}} Y) = TF^{-1}(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}).$$

Evaluando en $\bar{\gamma}(t)$ el segundo miembro de la igualdad se obtiene que:

$$(\bar{\nabla}_{F^*Y} F^*Y) \circ \bar{\gamma}(t) = \bar{\nabla}_{(F^*Y)(\bar{\gamma})} F^*Y = \bar{\nabla}_{TF^{-1} \circ Y \circ F \circ \bar{\gamma}(t)}(F^*Y) = \bar{\nabla}_{TF^{-1} \circ \dot{\gamma}(t)} F^*Y = \bar{\nabla}_{\dot{\bar{\gamma}}(t)} F^*Y = \bar{\nabla}_{\dot{\bar{\gamma}}(t)} \dot{\bar{\gamma}}(t),$$

ya que $F^*Y \circ \bar{\gamma} = TF^{-1} \circ Y \circ F \circ \bar{\gamma} = TF^{-1} \circ Y \circ \gamma = \frac{d}{dt}(F^{-1} \circ \gamma) = \frac{d\bar{\gamma}}{dt} = \dot{\bar{\gamma}}$. Por tanto:

$$TF^{-1}(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t)) = \bar{\nabla}_{\dot{\bar{\gamma}}(t)}\dot{\bar{\gamma}}(t).$$

Supongamos que $\bar{\gamma}(t)$ es geodésica. Se tiene que $\nabla_{\dot{\bar{\gamma}}(t)}\dot{\bar{\gamma}}(t) = 0$, luego $TF^{-1}(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t)) = 0$. Como F es difeomorfismo, $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0$ y así γ es también geodésica. Recíprocamente, si γ es geodésica $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0$ y por ser F difeomorfismo $TF^{-1}(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t)) = 0$ y así $\bar{\nabla}_{\dot{\bar{\gamma}}(t)}\dot{\bar{\gamma}}(t) = 0$ y $\bar{\gamma}$ es geodésica.

□

Proposición 2.5.7. *Si K es un campo vectorial de Killing, entonces la aplicación $\phi : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(v_m) = g_m(K(m), v_m)$ para todo $v_m \in TM$, es constante de movimiento para el flujo geodésico.*

Demostración. Sea $\gamma(t)$ curva geodésica. Derivando $\phi(\dot\gamma(t))$ con respecto a t se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(\phi(\dot\gamma(t)) = \frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(K(\gamma(t)), \dot\gamma(t)) = g_{\gamma(t)}(\nabla_{\dot\gamma} K, \dot{\gamma(t)}) + g_{\gamma(t)}(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, K(\gamma(t))).$$

Por ser $\gamma(t)$ geodésica se tiene que $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ es cero, luego el segundo sumando es cero. Por (2.4.2) tomando los campos X e Y como $\dot\gamma(t)$ se tiene que:

$$L_K g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) = g(\nabla_{\dot\gamma(t)} K, \dot\gamma(t)) + g(\nabla_{\dot\gamma(t)} K), \dot\gamma(t)) = 2g(\nabla_{\dot\gamma(t)} K, \dot\gamma(t)) = 0$$

Luego el primer sumando también se anula y así $\frac{d}{dt}(\phi(\dot\gamma(t)) = 0$ y por tanto $\phi(\dot\gamma(t)) = cte$. □

Una aplicación de la proposición anterior se ve reflejada en el teorema siguiente:

Teorema 2.5.8. *(de Clairaut) Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva geodésica de una superficie de revolución $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Si r(t) es la función que mide la distancia de $\gamma(t)$ al eje de rotación y $\theta(t)$ángulo que forma $\dot\gamma(t)$ con el paralelo que corta en el instante t, entonces $r(t)cos(\theta(t))$ es constante.*

Demostración. Nótese que la métrica es la heredada de $\mathbb{R}^3$, es decir: $g(u,v) = u \cdot v$ donde u, v son vectores tangentes a M en el mismo punto. El grupo de rotaciones respecto al eje z

$$R_t = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle|\, t \in \mathbb{R} \right\},$$

es un grupo uniparamétrico de isometrías ya que preserva tanto la variedad como la métrica — si giramos cualquier ángulo la variedad respecto al eje z, la variedad no cambia y el ángulo formado por dos vectores tangentes en el mismo punto tampoco. Luego tiene asociado un campo vectorial de Killing.

Vamos a hallar ese campo de Killing:

$$K(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} R_t \Big|_{t=0} \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \sin(t) & -\cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Bigg|_{t=0} \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -y \\ x \\ 0 \end{array} \right)$$

$$K = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{que es tangente a los paralelos.}$$

Aplicamos ahora el anterior teorema. Se tiene que $g(K, \dot\gamma) = |K||\dot\gamma|\cos(\theta(t))$ es constante. Por (2.5.2) y como $|K| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ es la distancia de un punto de la curva geodésica al eje de revolución, se tiene que $r(t)\cos(\theta(t))$ es constante. □

En coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$ la expresión de dicha constante de movimiento es:

$$\phi(\dot\gamma(t)) = g_{\gamma(t)}(K(\gamma(t)), \dot\gamma(t)) = K(\gamma(t))\dot\gamma(t) = \left(\begin{array}{ccc} -y & x & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{array} \right) = \dot y x - \dot x y.$$

lo que en mecánica se llama momento angular. Por tanto, el momento angular se conserva.

2.6. Mecánica newtoniana.

Sea M variedad diferenciable y consideremos una función, $V: M \longrightarrow \mathbb{R}$, que llamaremos el potencial. Definimos el gradiente de V con respecto a la métrica g como el campo vectorial $\operatorname{grad} V \in \mathfrak{X}(M)$ que satisface $g(\operatorname{grad} V(m), w) = dV(m)(w)$, para todo $m \in M$. A partir de él, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = -\operatorname{grad} V(\gamma(t)).$$

Nótese que este sistema coincide con la segunda ley de newton, $F = ma$, donde $m = 1$ y $F = -\operatorname{grad} V$.

Proposición 2.6.1. *Si K es un campo de Killing tal que $\mathscr{L}_K V = 0$ entonces la función $\phi : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(v_m) = g(K(m), v_m)$ es constante de movimiento para el sistema dinámico anterior.*

Demostración. Derivando $g(K(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t))$ con respecto a t:

$$\frac{d}{dt} g(K(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) = g(\nabla_{\dot{\gamma}(t)} K, \dot{\gamma}(t)) + g(K(\gamma(t)), \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t)).$$

Como K es campo de Killing se tiene por (2.4.2) que el primer sumando es cero. Por otro lado, $g(K(\gamma(t)), \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t)) = -g(K(\gamma(t)), \operatorname{grad} V(\gamma(t))) = -dV(\gamma(t))K = -\mathscr{L}_K V(\gamma(t))$ que es cero por hipótesis.
Por tanto el segundo sumando es cero y $\frac{d}{dt} g(K(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t))$ también es cero. Así $g(K(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t))$ es constante.

□

Ejemplo: Supongamos que estamos las mismas condiciones del anterior ejemplo del teorema de Clairaut salvo que, en este caso, suponemos que existe un campo gravitatorio V(x,y,z)=mgz. Es obvio que $\mathscr{L}_K V$=0 puesto que no hay componente z en K y el gradiente de V es la proyección ortogonal de $mg \frac{\partial}{\partial z}\Big|_{(x,y,z)}$ sobre $T_{(x,y,z)}M$. Así podemos aplicar el teorema anterior y afirmar que $g(K, v)$ es constante de movimiento, que es la misma que la del teorema de Clairaut.

Capítulo 3

Formulación geométrica de la mecánica hamiltoniana.

En física, los sistemas mecánicos suelen ser sistemas dinámicos hamiltonianos. La geometría simpléctica es una herramienta que permite encontrar simetrías en estos sistemas de manera sistemática. En este capítulo estudiaremos la invariancia de los sistemas dinámicos hamiltonianos bajo un cierto grupo de simetrías y veremos que tiene consecuencias importantes, como por ejemplo el teorema de Noether. También se verá el teorema de Marsden y Weinstein, que proporciona un método para construir, a partir de una variedad simpléctica sobre la que actúa un grupo de Lie, otra variedad simpléctica de dimensión menor con las mismas propiedades que la de partida.

3.1. Variedades simplécticas. Formas simplécticas. Simplectomorfismos.

Sea M una variedad diferenciable.

Definición 3.1.1. *Una forma simpléctica ω en M es una aplicación diferenciable*

$$\omega : TM \times_M TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\omega_m : T_mM \times T_mM \longrightarrow \mathbb{R}$ define una forma bilineal en cada punto, antisimétrica, regular y cerrada. El par (M, ω) recibe el nombre de variedad simpléctica.

Nótese que ω es una 2-forma, es decir, $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$, cerrada, es decir, $\mathrm{d}\omega = 0$, siendo d la diferencial exterior, y no degenerada, es decir, para todo m en M, si existe u en T_mM tal que $\omega(u, v)$ para todo v en T_mM, entonces $u = 0$.

Definición 3.1.2. *Si (M, ω) y (N, ρ) son variedades simplécticas, una aplicación diferenciable $F : M \longrightarrow N$ se dirá simpléctica cuando $F^*\rho = \omega$, es decir:*

$$\omega(u, v) = \rho_{F(m)}(TF(u), TF(v)), \quad \text{para todo } u, v \in M.$$

Si F es difeomorfismo se dice que F es simplectomorfismo.

El ejemplo más sencillo de variedad simpléctica es $\mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ junto con la 2-forma diferencial $\omega = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$. Es de gran importancia puesto que proporciona el modelo local para una variedad simpléctica arbitraria. Este resultado es conocido como Teorema de Darboux.

Teorema 3.1.3. *(Darboux) Si ω es una forma simpléctica en una variedad diferenciable M, para cada punto $m \in M$ existe una carta local coordenada (U, φ) en torno a m en donde la aplicación φ está dada por $\varphi(m) = (q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ tal que ω se expresa como:*

$$\omega = dq^i \wedge dp_i.$$

Tales coordenadas (q^i, p_j) se denominan coordenadas canónicas. En mecánica, a q^i se les llama posiciones y a p_j se les llama momentos. Para la demostración y otros detalles véanse los libros [AM], [M].

3.1.1. Estructura simpléctica canónica en un fibrado cotangente.

Sea Q una variedad tal que $M{=}TQ^*$. Otro ejemplo de variedad simpléctica importante es el fibrado cotangente de una variedad. Un covector tangente a una variedad Q en un punto q es una forma lineal sobre T_qQ. El conjunto de tales covectores constituye el espacio vectorial dual del espacio tangente y se denomina espacio cotangente a Q en q, denotándose por $(T_qQ)^*$. El fibrado cotangente de una variedad es la unión de todos los espacios cotangentes en cada punto de la variedad. Si la variedad Q representa el conjunto de posiciones posibles q_i en un sistema dinámico, entonces el espacio cotangente representa el conjunto de posibles posiciones q_i y momentos p_i. Así el fibrado cotangente describe el espacio de fases del sistema. La 1-forma de Liouville es una 1-forma definida en el espacio contangente TQ^* de Q. Su derivada exterior define una forma simpléctica dando a TQ^* estructura de variedad simpléctica.

Sea (U, φ) una carta local de Q que induce una carta en TQ^*. Si las coordenadas en dicha carta se denotan $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$, entonces la 1-forma de Liouville está dada de la siguiente manera:

$$\theta = p_i \mathrm{d}q^i.$$

Sin recurrir a las coordenadas, podemos definir la 1-forma de Liouville como sigue: Sea TQ^* el fibrado contangente a la variedad Q y denotemos por π a la proyección $\pi : TQ^* \longrightarrow Q$ que a cada par (q, p) le asocia q. Sea $T\pi : T(TQ^*) \longrightarrow TQ$ la aplicación tangente de π. Para todo $\alpha \in TQ^*$ definimos la aplicación $\theta_\alpha \colon T_\alpha(TQ^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que $\theta_\alpha(v) = \alpha T\pi(v)$ para todo v en $T_\alpha(TQ^*)$. La forma simpléctica, a veces denominada 2-forma de Poincaré está dada por:

$$\omega = -d\theta = dq^i \wedge dp_i.$$

3.2. Sistemas dinámicos hamiltonianos y simetrías.

3.2.1. Sistemas dinámicos hamiltonianos

Definición 3.2.1. *Se llama sistema dinámico hamiltoniano a una terna (M, ω, H) donde (M, ω) es una variedad simpléctica y $H \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Esta función define un campo vectorial único dado por $i_{X_H}\omega = dH$. A dicho campo vectorial lo llamamos campo vectorial hamiltoniano definido por H.*

Propiedades 3.2.2. *i) El campo X_H correspondiente a H se escribe en coordenadas canónicas como:*

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

ii) Las curvas integrales del campo vectorial X_H son determinadas en coordenadas canónicas por las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

iii) H es integral primera de X_H.

Demostración. i) Sean $\omega = dq^i \wedge dp_i$ y $X = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ expresados en coordenadas canónicas. Determinemos A^i y B_i para que este campo sea X_H. Para ello ha de cumplirse que $i_{X_H}\omega = dH$. Expresando dH y $i_X\omega$ en coordenadas canónicas se tiene que $dH = \frac{\partial H}{\partial q^i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial p^i}dq_i$ y que $i_X\omega = A^i dp_i - B_i dq^i$. Igualando coeficientes se tiene que $A^i = \frac{\partial H}{\partial q^i}$ y que $B_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$ y se obtiene el resultado.

ii) Es inmediato por la proposición anterior y la definición de curva integral.
iii) Es inmediato ya que $X_H H = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$ por ser ω antisimétrica.

□

3.2.2. Simetrías en sistemas dinámicos hamiltonianos

Definición 3.2.3. *Se dice que ϕ es una simetría de ω si $\phi^*\omega = \omega$, es decir:*

$$\omega_m(u,v) = \omega_{\phi(m)}(T_m\phi(u), T_m\phi(v)), \qquad \text{para todo } m \in M, \text{y para todo } u,v \in T_mM$$

Teorema 3.2.4. *Sea Y un campo vectorial con ϕ_t su flujo. ϕ_t es un grupo uniparamétrico de simetrías de ω si y sólo si la derivada de Lie de ω a lo largo de Y es cero.*

Demostración. Supongamos que ϕ_t es un grupo uniparamétrico de simetrías de ω. Por (A.1.5) se tiene que:$\phi_t^*\mathscr{L}_Y\omega = \frac{d}{dt}\phi_t^*\omega = \frac{d}{dt}\omega = 0$, y como ϕ_t es un grupo uniparamétrico de simetrías de ω se tiene que $\mathscr{L}_Y\omega$ es también cero. Recíprocamente supongamos que $\mathscr{L}_Y\omega = 0$. Por (A.1.5) se tiene que $\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega = 0$, luego $\phi_t^*\omega$ es constante con respecto a t y así $\phi_t^*\omega = \omega$ y por tanto ϕ_t es un grupo uniparamétrico de simetrías de ω. □

Definición 3.2.5. *Se dice que ϕ es una simetría de $H \in \mathscr{C}^\infty(M)$ si $\phi^*H = H$, es decir:*

$$H(\phi(x)) = H(x).$$

Teorema 3.2.6. *Sea Y un campo vectorial con ϕ_t su flujo. ϕ_t es un grupo uniparamétrico de simetrías de H si y sólo si la derivada de lie de H a lo largo de Y es cero.*

Demostración. Supongamos que ϕ_t es un grupo uniparamétrico de simetrías de H. Por (A.1.5) se tiene que:$\phi_t^*\mathscr{L}_Y H = \frac{d}{dt}\phi_t^*H = \frac{d}{dt}H = 0$, y como ϕ_t es un grupo uniparamétrico de simetrías de H se tiene que $\mathscr{L}_Y H$ es también cero. Recíprocamente supongamos que $\mathscr{L}_Y H = 0$. Por (A.1.5) se tiene que $\frac{d}{dt}\phi_t^*H = 0$, luego ϕ_t^*H es constante con respecto a t y así $\phi_t^*H = H$ y por tanto ϕ_t es un grupo uniparamétrico de simetrías de H. □

Definición 3.2.7. *Se dice que un campo vectorial X es hamiltoniano si existe $H \in \mathscr{C}^\infty(M)$ tal que X es el campo vectorial hamiltoniano asociado a H, es decir:*

$$i_X\omega = dH.$$

Nótese que si X es hamiltoniano $0 = d^2H = d(i_X\omega) = (di_X + i_Xd)\omega = \mathscr{L}_X\omega$. El recíproco no es cierto globalmente, pero sí localmente:

Lema 3.2.8. *(Poincaré) Si $\mathscr{L}_X\omega = 0$ existe un entono $U \in M$ para cada punto $m \in M$ y una función $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ tal que $i_X\omega = df$.*

Por esta razón a un campo X tal que $\mathscr{L}_X\omega = 0$ se le llama campo localmente hamiltoniano.

Teorema 3.2.9. *Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es hamiltoniana con función hamiltoniana f, es decir, $i_Y\omega = df$ y además $\mathscr{L}_Y H = 0$, entonces $X_H f = 0$, es decir, f es constante de movimiento por X_H.*

Demostración. En efecto,

$$X_H f = df(X_H) = i_Y\omega(X_H) = \omega(Y, X_H) = -\omega(X_H, Y) = -dH(Y) = -\mathscr{L}_Y H = 0.$$

□

El resultado anterior se llama Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.

3.2.3. Paréntesis de Poisson

Los paréntesis de Poisson son operadores muy utilizados en la mecánica hamiltoniana y conviene mencionarlos puesto que permiten de manera cómoda encontrar las constantes de movimiento de un sistema. Consideramos una variedad simpléctica fija (M,ω).

Definición 3.2.10. *Llamaremos paréntesis de Poisson de dos funciones $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ a :*

$$\{f,g\} = \omega(X_f,X_g).$$

El paréntesis de Poisson de dos funciones $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ puede escribirse como:

$$\{f,g\} = X_g f = -X_f g.$$

Se puede expresar lo visto en el apartado de sistemas dinámicos hamiltonianos en términos del paréntesis de Poisson.

Nótese que $\{f,f\} = \omega(X_f,X_f) = 0$. Luego para H hamiltoniano se tiene que $0 = \{H,H\} = \omega(X_H,X_H) = X_H(H) = dH(X_H) = \mathscr{L}_{X_H}H$. Es decir, la derivada de lie de H a lo largo de su campo hamiltoniano es nula.

Podemos expresar en términos del paréntesis de Poisson el Teorema de Noether: si f es constante de movimiento se tiene, por (3.2.9) que: $\{f,H\} = \omega(X_f,X_H) = X_H f = 0$.

El paréntesis de Poisson es no degenerado en el siguiente sentido: Las funciones f a las que corresponde el campo vectorial nulo son las funciones constantes.

Teorema 3.2.11. *El conjunto $\mathscr{C}^\infty(M)$ queda dotado de estructura de álgebra de Lie mediante el producto definido por el paréntesis de Poisson.*

Corolario 3.2.12. *Si $m^i(t)$ son las coordenadas de una curva integral del campo X_H que parte de un punto, se tiene que:*

$$\frac{d}{dt}f(m^i(t)) = \{f,H\}(m^i(t))$$

Para la demostración y otros detalles véase el libro [AM].

3.3. Ecuaciones de las geodésicas como sistema hamiltoniano.

Vamos a probar que las ecuaciones de las geodésicas son hamiltonianos. Veremos primero en el caso en el que no haya potencial y luego en el caso en el que haya potencial. En cualquier caso, la energía cinética viene dada por inversa de la métrica.

Sea g una métrica en una variedad Q y sea TQ^* su variedad cotangente correspondiente. Sea $H \in \mathscr{C}^\infty(TQ^*)$ la función hamiltoniana dada de la siguiente forma:

$$H(\alpha) = \frac{1}{2}g^{-1}(\alpha,\alpha).$$

Expresado en las coordenadas canónicas (q^i,p_i),

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_ip_j,$$

donde g^{ij} es la inversa de la métrica g_{ij}.

Las ecuaciones canónicas serán por tanto:

$$\begin{cases} \dot{q}^k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} &= g^{ik}p_i, \\ \dot{p}_l &= -\frac{\partial H}{\partial q^l} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{rm}}{\partial q^l}p_rp_m. \end{cases}$$

Derivando con respecto a t la primera ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}\ddot{q}^k &= \frac{\mathrm{d}g^{ik}}{\mathrm{d}t}p_i + g^{ik}\dot{p}_i = \frac{\partial g^{ik}}{\partial q^n}\dot{q}^n p_i + g^{ik}\dot{p}_i \\ &= \frac{\partial g^{ik}}{\partial q^n}\dot{q}^n p_i - g^{ik}\frac{1}{2}\frac{\partial g^{rm}}{\partial q^i}p_r p_m \\ &= \frac{\partial g^{ik}}{\partial q^n}\dot{q}^n\dot{q}^s g_{is} - g^{ik}\frac{1}{2}\frac{\partial g^{rm}}{\partial q^i}\dot{q}^j g_{rj}\dot{q}^p g_{mp} \quad (*)\end{aligned}$$

donde hemos usado que $p_i = g_{ij}\dot{q}^j$.

Por otro lado se tiene que:

$$g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c.$$

Derivando ambos miembros:

$$\frac{\partial g^{ab}}{\partial q^d}g_{bc} + \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^d}g^{ab} = 0.$$

Multiplicando por g^{cf}:

$$\frac{\partial g^{ab}}{\partial q^d}g_{bc}g^{cf} + \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^d}g^{ab}g^{cf} = 0$$

$$\frac{\partial g^{ab}}{\partial q^d}\delta^f_b + \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^d}g^{ab}g^{cf} = 0$$

$$\frac{\partial g^{af}}{\partial q^d} = -\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^d}g^{ab}g^{cf}.$$

Así hemos obtenido una expresión general de la derivada parcial de la inversa de la métrica con respecto a una coordenada q^d cualquiera.

Sustituyendo en el sustraendo de $(*)$ se tiene que, agrupando los términos g^{ij} con sus inversas g_{ij}:

$$-\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^n}g^{ib}g^{ck}\dot{q}^n\dot{q}^s g_{is} = -\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^n}g^{ck}\dot{q}^b\dot{q}^n.$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial g^{rm}}{\partial q^i} = -\frac{\partial g_{b'c'}}{\partial q^i}g^{rb'}g^{c'm}.$$

Sustituyendo en el minuendo de $(*)$ se tiene que, agrupando los términos g^{ij} con sus inversas g_{ij}:

$$g^{ik}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{b'c'}}{\partial q^i}g^{rb'}g^{c'm}\dot{q}^j g_{rj}\dot{q}^p g_{mp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{b'c'}}{\partial q^i}\dot{q}^{b'}\dot{q}^{c'}g^{ik}.$$

Por tanto:

$$\ddot{q}^k = -\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^n}g^{ck}\dot{q}^b\dot{q}^n + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{b'c'}}{\partial q^i}\dot{q}^{b'}\dot{q}^{c'}g^{ik}.$$

Como los índices en cada sumando son independientes - se pueden repetir indices en cada sumando- se puede identificar $b' = b$ y $n = c'$, y así:

$$\ddot{q}^k = -\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^n}g^{ck}\dot{q}^b\dot{q}^n + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bn}}{\partial q^i}\dot{q}^b\dot{q}^c g^{ik}.$$

De la misma forma, identificando $c = i$:

$$\ddot{q}^k = -\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^n}g^{ck}\dot{q}^b\dot{q}^n + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bn}}{\partial q^c}\dot{q}^b\dot{q}^c g^{ck}.$$

Descomponiendo $\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^n}$ en parte simétrica y antisimétrica respecto a lo índices c y n:

$$\begin{aligned}\ddot{q}^k &= -\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{nc}}{\partial q^b}+\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^n})g^{ck}\dot{q}^b\dot{q}^n+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{bn}}{\partial q^c}\dot{q}^b\dot{q}^c g^{ck}\\ &=\frac{1}{2}g^{ck}\left(-\frac{\partial g_{nc}}{\partial q^b}-\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^n}+\frac{\partial g_{bn}}{\partial q^c}\right)\dot{q}^b\dot{q}^n\\ &=-\Gamma^c_{n,b}\dot{q}^b\dot{q}^n,\end{aligned}$$

donde $\Gamma^c_{n,b}$ son los símbolos de Christoffel.

Así por tanto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones (2.5) que coincide con las ecuaciones de las geodésicas $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=0$.

Consecuencia: Nótese si el hamiltoniano es constante también lo es $g(\alpha,\alpha)$, lo cual no era tan inmediato desde el punto de vista de la geometría riemanniana.

Consideremos ahora el caso en el que el hamiltoniano tiene un potencial $V(q)$, es decir, ahora:

$$H(\alpha)=\frac{1}{2}g^{-1}(\alpha,\alpha)+V(\pi(\alpha)).$$

Expresado en coordenadas canónicas:

$$H=\frac{1}{2}g^{ij}(q)p_ip_j+V(q).$$

Las ecuaciones canónicas serán por tanto:

$$\begin{cases}\dot{q}^k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} &= g^{ik}p_i,\\ \dot{p}_l &= -\frac{\partial H}{\partial q^l} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{rm}}{\partial q^l}p_rp_m+\frac{\partial V}{\partial q^l}.\end{cases}$$

Derivando con respecto a t la primera ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}\ddot{q}^k &= \frac{\mathrm{d}g^{ik}}{\mathrm{d}t}p_i+g^{ik}\dot{p}_i=\frac{\partial g^{ik}}{\partial q^n}\dot{q}^np_i+g^{ik}\dot{p}_i\\ &=\frac{\partial g^{ik}}{\partial q^n}\dot{q}^np_i-g^{ik}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g^{rm}}{\partial q^i}p_rp_m+\frac{\partial V}{\partial q^i}\right)\\ &=\frac{\partial g^{ik}}{\partial q^n}\dot{q}^n\dot{q}^sg_{is}-g^{ik}\frac{1}{2}\frac{\partial g^{rm}}{\partial q^i}\dot{q}^jg_{rj}\dot{q}^pg_{mp}-g^{ik}\frac{\partial V}{\partial q^i}.\end{aligned}$$

Por tanto, comparando con el caso en el que no hay potencial, se ve que excepto por el término $-g^{ik}\frac{\partial V}{\partial q^i}$ la expresión es la misma. Así, los cálculos son análogos y se obtiene:

$$\ddot{q}^k+\Gamma^k_{n,l}\dot{q}^l\dot{q}^n=-g^{kl}\frac{\partial V}{\partial x^l}.$$

que coincide con las ecuaciones del apartado de mecánica newtoniana (2.6).

3.4. Levantamiento completo.

Definición 3.4.1. *Sea $X\in\mathfrak{X}(Q)$ y sea $\phi_t\colon Q\longrightarrow Q$ el flujo que lo genera. La aplicación contragradiente $(T\phi_t^*)^{-1}\colon TQ^*\longrightarrow TQ^*$ es flujo en TQ^*. Al generador infinitesimal de dicho flujo se le denomina levantamiento completo y se denota por X^c.*

Nótese que $(T\phi_t^*)^{-1}=T^*\phi_{-t}$.

Proposición 3.4.2. *La expresión en coordenadas naturales* (q^i, p_i) *de* TQ^* *del levantamiento completo es de la siguiente forma:*

$$X^c(q,p) = X^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} - pj\frac{\partial X^j}{\partial q^i}(q)\frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Demostración. Sea $F: Q \longrightarrow Q$ aplicación diferenciable con $F(q) = F^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i}$ expresado en coordenadas q^i. A partir de F se contruye su aplicación tangente en el punto q de la siguiente forma:
$T_qF: T_qQ \longrightarrow T_{F(q)}Q$ con $TF(q,v) = F^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial F^i}{\partial q^j}(q)v^j\frac{\partial}{\partial v^i}$ con (q^i, v^j) coordenadas del espacio tangente de Q. Se puede también construir su dual en q de la siguiente forma:
$T_qF^*: T_{F(q)}Q^* \longrightarrow T_qQ^*$ con $TF^*(q,p) = F^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} + p_j\frac{\partial F^j}{\partial q^i}(q)\frac{\partial}{\partial p_j}$ con (q^i, p_j) coordenadas del espacio cotangente de Q .
Si F es difeomorfismo local, entonces existe la aplicación $(T_qF^*)^{-1}: T_qQ^* \longrightarrow T^*_{F(q)}Q$.

En el caso en el que F sea ϕ_t flujo de X entonces, expresando ϕ_t en coordenadas asociadas a una carta en Q, análogamente se tiene que $\phi_t(q) = \phi^i(t,q)\frac{\partial}{\partial q^i}$ y en la correspondiente carta de TQ^*, $T^*\phi_{-t}(q,p) = \phi^i(t,q)\frac{\partial}{\partial q^i} + p_j\frac{\partial \phi^j}{\partial q^i}(-t,q)\frac{\partial}{\partial p_j}$.

Así podemos expresar el generador X de ϕ_t en coordenadas asociadas a una carta en Q de las siguiente forma $X^i(q) = \frac{\partial \phi^i}{\partial t}(t,q)\Big|_{t=0}$. Por tanto el generador X^c de $T\phi_t^*$ se expresará en la correspondiente carta de TQ^* de la siguiente forma :

$$X^c(q,p) = \frac{d}{dt}(T\phi_t^*(q,p))\Big|_{t=0} = \frac{\partial \phi^i}{\partial t}(0,q)\frac{\partial}{\partial q^i} + p_j\frac{\partial^2 \phi^j}{\partial q^i \partial t}(0,q)\frac{\partial}{\partial p_j} = X^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} - pj\frac{\partial X^j}{\partial q^i}(q)\frac{\partial}{\partial p_j}.$$

□

Definición 3.4.3. *Sea* $\hat{X} \in \mathscr{C}^\infty(TQ^*)$ *definida por* $\hat{X}(\alpha_q) =< \alpha_q, X(q) >$ *para todo* $\alpha_q \in TQ^*$. *A esta función se le llama momento en la dirección de* $X \in \mathfrak{X}(Q)$.

Expresado en coordenadas, $\hat{X}(q,p) = p_iX^i(q)$

Teorema 3.4.4. *X es hamiltoniano con función hamiltoniana* $\hat{X} = p_iX^i$

Demostración. Es inmedianto ya que:

$$i_{X^c}\omega = X^i dp_i + p_j\frac{\partial X^j}{\partial q^i}dq^i = d[X^ip_i] = d\hat{X}.$$

□

Teorema 3.4.5. *Sea* $H(\alpha) = \frac{1}{2}g^{-1}(\alpha,\alpha)$. *Un campo X es de Killing si y sólo si* $\mathscr{L}_{X^c}H = 0$.

Demostración. En coordenadas $H = \frac{1}{2}g^{ij}(\mathbf{q})p_ip_j$ se tiene que utilizando que $\frac{\partial g^{ik}}{\partial q^n} = -\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^n}g^{ib}g^{ck}$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{X^c}H &= \frac{1}{2}\left(X^h\frac{\partial g^{ij}}{\partial q^k} - g^{ki}\frac{\partial X^j}{\partial q^i} - g^{kj}\frac{\partial X^i}{\partial q^j}\right)p_ip_j \\
&= \frac{1}{2}\left(-X^k\frac{\partial g_{cb}}{\partial q^k}g^{ib}g^{cj} - g^{ki}\frac{\partial X^j}{\partial q^k} - g^{kj}\frac{\partial X^i}{\partial q^k}\right)p_ip_j \\
&= \frac{1}{2}\left(-X^k\frac{\partial g_{cb}}{\partial q^k}v_bv_c - \frac{\partial X^j}{\partial q^k}v_kp_j - \frac{\partial X^i}{\partial q^k}v_kp_i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-X^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}v_iv_j - g_{kj}\frac{\partial X^j}{\partial q^i}v_iv_j - g_{ki}\frac{\partial X^i}{\partial q^j}v_iv_j\right) \\
&= -\frac{1}{2}\mathscr{L}_Xg(v,v), \quad \text{con } v^i = g^{ij}p_j, \text{ y con } p_j = g_{ij}v^i.
\end{aligned}$$

Supongamos ques X es campo de Killing entonces $\mathscr{L}_Xg = 0$ y asi $\mathscr{L}_{X^c}H = 0$. Recíprocamente, si $\mathscr{L}_{X^c}H = 0$ se tiene que $\mathscr{L}_Xg = 0$ y así X es de Killing.

□

3.5. Reducción de Mardsen-Weinstein

En esta sección se expondrá el teorema de reducción de Marsden-Weinstein sin dar la demostración y se verá un ejemplo en el que se aplicará el teorema.

Teorema 3.5.1. *(Marsden-Weinstein) Sea φ una acción hamiltoniana libre y propia de G en una variedad simpléctica (M,ω) con aplicación momento equivariante J. Entonces el espacio $P_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ con μ valor regular tiene una única forma simpléctica caracterizada por $\pi_\mu^*\omega_\mu = i_\mu^*\omega$. Además, si H es un hamiltoniano invariante en M y $\tilde{H}_\mu$ es el hamiltoniano inducido en $J^{-1}(\mu)/G_\mu$, los flujos ϕ_t y $\tilde{\phi}_t$ correspondientes a X_H y $\tilde{X}_{H_\mu} \in \mathfrak{X}(P_\mu)$ cumplen que $\pi_\mu \circ \phi_t = \tilde{\phi}_t \circ \pi_\mu$.*

Para la demostración y otros detalles véase el libro [AM].

Este teorema nos permite reducir una variedad simpléctica, bajo ciertas condiciones, a una de menor dimensión que conserva la dinámica y la estructura de la variedad de la que procede. Podemos cocientar la antimagen de la aplicación momento por un subgrupo de simetrías resultando una variedad que admite una estructura simpléctica tal que su pullback por la proyección coincide con la de la forma simpléctica original restringida a la aplicación momento.

Aunque no se dé la demostración del teorema, vamos a dar unas definiciones que nos permitirán entender el teorema.

Sea M una variedad.

Definición 3.5.2. *Una acción $\varphi\colon G \times M \longrightarrow M$ se dice que es:*

i) Libre si $\varphi_g(m) = m$ para algún $m \in M$ entonces $g = e$, donde e es el elemento neutro.

ii) Propia si la aplicación $G \times M \longrightarrow M \times M$ tal que $(g,m) \mapsto (m, \varphi_g(m))$ es propia.

Recordemos que una aplicación es propia si la antimagen de todo conjunto compacto es compacto. Se puede ver que si G es compacto entonces la acción es propia.

Teorema 3.5.3. *Sea (M,ω) variedad simpléctica y sea TM^* su espacio cotangente. Si G es de Lie y una acción es libre y propia, entonces el espacio cociente M/G admite una única estructura de variedad diferenciable tal que la proyección $\pi\colon M \longrightarrow M/G$ es una submersión.*

Definición 3.5.4. *φ es una acción simpléctica si $\varphi_g^*\omega = \omega$, para todo $g \in G$. Una acción simpléctica ϕ es hamiltoniana si, para cada $\xi \in \mathscr{G}$, el generador infinitesimal ξ_M es Hamiltoniano.*

En esta situación, denotamos J_ξ a la función hamiltoniana asociada al generador ξ_M. Por tanto se cumple:

$$i_{\xi_M}\omega = dJ_\xi.$$

La aplicación que a cada elemento del álgebra ξ le asocia J_ξ es lineal. Así podemos definir la aplicación momento como sigue:

Definición 3.5.5. *Con la notación anterior, la función $J\colon M \longrightarrow \mathscr{G}^*$ definida por $J_\xi =< J, \xi >$ se llama aplicación momento para la acción φ.*

Un automorfismo interno de G es una aplicación $I_g\colon G \longrightarrow G$ dada por $I_g(h) = ghg^{-1}$ para $h \in G$. Diferenciando en la identidad se obtiene la acción adjunta:

$$\begin{aligned} Ad_g\colon \mathscr{G} &\longrightarrow \mathscr{G} \\ \xi &\mapsto Ad_g\xi = T_e\varphi_g(\xi) \end{aligned}$$

Así, podemos definir la acción coadjunta de G en $\mathscr{G}^*$ como la contragradiente de la acción adjunta:

$$\begin{aligned} Coad_g\colon \mathscr{G}^* &\longrightarrow \mathscr{G}^* \\ \mu &\mapsto Coad_g\mu := Ad_{g^{-1}}^*\mu. \end{aligned}$$

Dadas acciones de G en A y en B, una función $f\colon A \longrightarrow B$ se dice equivariante si $f(gx) = gf(x)$ para todo $g \in G$ y para todo $x \in A$.

Definición 3.5.6. *La aplicación momento J es equivariante si es equivariante respecto a la G-acción φ en M y la acción coadjunta en $\mathscr{G}^*$, $Coad\colon G\times\mathscr{G}^*\longrightarrow\mathscr{G}^*$.*

Vamos a ver un ejemplo en el que gracias a que se cumplen todas las condiciones necesarias para aplicar el teorema de Marsden-Weinstein, podemos reducir una variedad de dimensión cuatro a una de dimensión dos.

Ejemplo: Elroy's beanie.

Se consideran dos cuerpos rígidos que están unidos en un punto de tal forma que pueden girar respecto a ese punto. Se fijan dos semiejes de refrencia. La variedad a considerar será $Q=S^1\times S^1$ con coordenadas (θ,φ), donde θ es el ángulo que forma el semieje x con el semieje de referencia del primer cuerpo y φ es el ángulo que forma el semieje de referencia del primer cuerpo con el semieje de referencia del segundo cuerpo. Así, al girar el primer cuerpo, el segundo cuerpo se moverá conjuntamente con él de forma que el ángulo que hay entre los dos cuerpos es siempre el mismo.

El movimiento queda descrito por el lagrangiano, que es la diferencia entre la energía cinética y la potencial,

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2+\frac{1}{2}I_2(\dot\theta+\dot\varphi)^2-V(\varphi)\\
&= \frac{1}{2}(I_1+I_2)\dot\theta^2+\frac{1}{2}I_2(\dot\theta)^2+2\frac{1}{2}\dot\varphi\dot\theta-V(\varphi)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot\theta & \dot\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1+I_2 & I_2\\ I_2 & I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta\\ \dot\varphi\end{pmatrix}-V(\varphi).
\end{aligned}$$

La energía cinética es la asociada a la métrica $g=\begin{pmatrix}I_1+I_2 & I_2\\ I_2 & I_2\end{pmatrix}$ y $g^{-1}=\frac{1}{I_1I_2}\begin{pmatrix}I_2 & -I_2\\ -I_2 & I_1+I_2\end{pmatrix}$ es la inversa de la métrica. Las constantes I_1 e I_2 son los momentos de inercia del primer y segundo cuerpo respectivamente.

Se construye el hamiltoniano correspondiente:

$$H=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}p_\theta & p_\varphi\end{pmatrix}g^{-1}\begin{pmatrix}p_\theta\\ p_\varphi\end{pmatrix}-V(\varphi),$$

donde (p_θ,p_φ) son los momentos asociados a (θ,φ) respectivamente.

Se considera la transformación que se produce al rotar ambos cuerpos conjuntamente un ángulo α:

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha\colon Q &\longrightarrow Q\\
(\theta,\varphi) &\mapsto (\theta+\alpha,\varphi).
\end{aligned}$$

Se tiene así una acción de $G=S^1$ sobre $Q=S^1\times S^1$. El álgebra de Lie es $\mathscr{G}=\mathbb{R}$ y su dual es también $\mathscr{G}^*=\mathbb{R}$.

Si hubiésemos considerado el conjunto de isometrías

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha,\beta}\colon Q &\longrightarrow Q\\
(\theta,\varphi) &\mapsto (\theta+\alpha,\varphi+\beta).
\end{aligned}$$

con β distinto de cero, el potencial no sería invariante ya que el potencial al depender de φ iría cambiando para cada par (α,β). El ángulo entre los dos cuerpos ya no seria el mismo.

Identificando TQ con $S^1\times S^1\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y TQ^* con $S^1\times S^1\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, se construye la acción tangente y cotangente respecto a la acción ϕ_α:

$$\begin{aligned}
T\phi_\alpha\colon TQ &\longrightarrow TQ\\
(\theta,\varphi,v_\theta,v_\varphi) &\mapsto (\theta+\alpha,\varphi,v_\theta,v_\varphi),
\end{aligned}$$

donde (v_θ, v_φ) son las velocidades asociadas a (θ, φ).

$$\begin{aligned}\psi_\alpha = (T\phi_\alpha^*)^{-1} \colon TQ^* &\longrightarrow TQ^* \\ (\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) &\mapsto (\theta+\alpha, \varphi, p_\theta, p_\varphi),\end{aligned}$$

donde (p_θ, p_φ) son los momentos asociados a (θ, φ).

La acción es libre ya que si $\psi_\alpha(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = (\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi)$ entonces $\alpha = e$, donde e es el elemento neutro.

La acción también es propia ya que G es compacto.

¿Es el hamiltoniano invariante en Q? Hay que ver que $H \circ \psi_\alpha = H$, lo que se cumple trivialmente ya que H no depende de θ y es la única variable que cambia en la acción. Por tanto al aplicarle la acción a H, no varía.

¿Deja la acción cotangente invariante a la forma simpléctica canónica de TQ^*, $\omega = d\theta \wedge dp_\theta + d\varphi \wedge dp_\varphi$. Hay que ver que $\psi_\alpha^* \omega = \omega$.

Haciendo el pullback de la forma por la acción cotangente:

$$\psi_\alpha^* \omega = d(\theta+\alpha) \wedge dp_\theta + d\varphi \wedge dp_\varphi = d\theta \wedge dp_\theta + d\varphi \wedge dp_\varphi.$$

Sea $\xi \in \mathscr{G}$. Hallemos el generador del espacio cotangente TQ^*.

$$\xi_{TQ^*}(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = \frac{d}{dt}\psi_{(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi)} t\xi \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\theta + t\xi, \varphi, p_\theta, p_\varphi)\Big|_{t=0} = \xi \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Luego si $v \in T_\alpha Q^*$:

$$\begin{aligned}\left(i_{\xi_{TQ^*}} \omega(\alpha)\right)(v) &= \omega(\xi_{TQ^*}(\alpha), v) \\ &= d\theta \wedge dp_\theta(\xi_{TQ^*}(\alpha), v) + d\varphi \wedge dp_\varphi(\xi_{TQ^*}(\alpha), v) \\ &= d\theta \wedge dp_\theta(\xi_{TQ^*}(\alpha), v) + d\varphi \wedge dp_\varphi(\xi_{TQ^*}(\alpha), v) \\ &= < d\theta, \xi_{TQ^*}(\alpha) >< dp_\theta, v > - < d\theta, v >< dp_\theta, \xi_{TQ^*}(\alpha) > \\ &+ < d\varphi, \xi_{TQ^*}(\alpha) >< dp_\varphi, v > - < d\varphi, v >< dp_\varphi, \xi_{TQ^*}(\alpha) > \\ &= < d\theta, \xi_{TQ^*}(\alpha) >< dp_\theta, v > = \xi < dp_\theta, v > .\end{aligned}$$

Por tanto:

$$i_{\xi_{TQ^*}} \omega = d < p_\theta, \xi > = d(\xi p_\theta),$$

y se tiene que $J = p_\theta$. Luego:

$$\begin{aligned}J \colon TQ^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) &\mapsto p_\theta.\end{aligned}$$

Para cada $\mu \in \mathscr{G}^*$:

$$J^{-1}(\mu) = \{(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) | \mu = p_\theta\} \simeq (S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}).$$

Nótese que tiene dimensión tres.

Denotamos G_μ al grupo de simetría que deja μ invariante. Pero como $G = S^1$ es abeliano, se tiene que $G_\mu = G = S^1$, ya que como $gh = hg$ se tiene que I_g es la identidad y por tanto, la acción adjunta y la coadjunta son la identidad. y por tanto:

$$J^{-1}(\mu)/G_\mu \equiv J^{-1}(\mu)/G = S^1 \times \mathbb{R} = TS^{1^*},$$

y

$$\begin{aligned}\pi_\mu \colon J^{-1}(\mu) \simeq (S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}) &\longrightarrow J^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq (S^1 \times \mathbb{R}) \\ (\theta, \varphi, p_\varphi) &\mapsto (\varphi, p_\varphi).\end{aligned}$$

Por tanto ya tenemos todas las condiciones necesarias para poder aplicar el teorema de Marsden-Weinstein y podemos asegurar que $J^{-1}(\mu)/G_\mu$ tiene una única forma simpléctica caracterizada por:

$$\pi_\mu^* \omega_\mu = i_\mu^* \omega.$$

Determinemos ω_μ. Esta forma ha de ser tener la expresión:

$$\omega_\mu = A d\varphi \wedge dp_\varphi,$$

$$\pi_\mu^* \omega_\mu = A d\varphi \wedge dp_\varphi.$$

ω es de la forma $d\theta \wedge dp_\theta + d\varphi \wedge dp_\varphi$. $i_\mu^* p_\theta = \mu$, luego $dp_\theta = 0$ y por tanto:

$$i_\mu^* \omega = d\varphi \wedge dp_\varphi.$$

Como $\pi_\mu^* \omega_\mu = A d\varphi \wedge dp_\varphi$ y$i_\mu^* \omega = d\varphi \wedge dp_\varphi$, se tiene que $A = 1$, y por tanto:

$$\omega_\mu = d\varphi \wedge dp_\varphi.$$

También se satisface la segunda parte del teorema y podemos asegurar que si $\tilde{H}$ es el hamiltoniano inducido en $J^{-1}(\mu)/G_\mu$, los flujos ϕ_t y $\tilde{\phi}_t$ correcpondientes a X_H y $\tilde{X}_H$ cumplen que:

$$\pi_\mu \circ \phi_t = \tilde{\phi}_t \circ \pi_\mu$$

.

Hallemos $\tilde{H}$ y $\tilde{X}_H$.

En $J^{-1}(\mu)$ el momento p_θ es una constante μ. Por tanto movimiento descrito por el hamiltoniano es el siguiente:

$$\tilde{H}\big|_{J^{-1}(\mu)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu & p_\varphi \end{pmatrix} g^{-1} \begin{pmatrix} \mu \\ p_\varphi \end{pmatrix} - V(\varphi),$$

que no depende de θ y pasa al cociente con la misma expresión.

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \tilde{H}\Big|_{J^{-1}(\mu)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu & p_\varphi \end{pmatrix} \frac{1}{I_1 I_2} \begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ -I_2 & I_1 + I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ p_\varphi \end{pmatrix} - V(\varphi) \\ &= \frac{1}{2 I_1 I_2} \begin{pmatrix} \mu I_2 - I_2 p_\varphi & -I_2 \mu + p_\varphi (I_1 + I_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ p_\varphi \end{pmatrix} - V(\varphi) \\ &= \frac{1}{2 I_1 I_2} (\mu^2 I_2 - 2 I_2 p_\varphi \mu + p_\varphi^2 (I_1 + I_2)) - V(\varphi). \end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones de hamilton:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{1}{2 I_1 I_2} (-2 I_2 \mu + 2 p_\varphi (I_1 + I_2)), \\ \dot{p_\varphi} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Como la forma simpléctica inducida en $J^{-1}(\mu)/G_\mu$ es la forma simpléctica en coordenadas canónicas, $\omega_\mu = d\varphi \wedge dp_\varphi$, se tiene que $\tilde{X}_H = \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{p_\varphi} \frac{\partial}{\partial p_\varphi}$. Por tanto:

$$\tilde{X}_H = \frac{1}{2 I_1 I_2} (-2 I_2 \mu + 2 p_\varphi (I_1 + I_2)) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial p_\varphi}.$$

Apéndice A

Derivada de Lie y diferencial exterior.

Se recogen en este apéndice algunas propiedades de la derivada de Lie que se han usado en este trabajo.

Dada una variedad diferenciable M, denotaremos TM al espacio tangente de M y TM^* al espacio cotangente de M. Dada $F: \bar{M} \longrightarrow M$ la aplicación diferenciable entre las variedades $\bar{M}$ y M quedarán definidas de forma natural las aplicaciones diferenciables $TF: T\bar{M} \longrightarrow TM$ y $TF^*: TM^* \longrightarrow T\bar{M}^*$.

Denotaremos $\mathscr{C}^\infty(M)$ al conjunto de funciones diferenciables en M, $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de campos vectoriales de M y $\Omega^p(M)$ al conjunto de p-formas sobre M.

A.1. Relación entre sistemas dinámicos simétricos y el corchete de Lie.

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y ϕ_t su flujo local. Para $m \in M$ y $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ se tiene que:

$$X(m)(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \phi_t)(m) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(f\circ\phi_t)(m) - f(m)].$$

Definición A.1.1. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se define el corchete de Lie $[X,Y] \in \mathscr{X}(M)$ por:*

$$[X,Y](m)(f) = X(m)(Y(f)) - Y(m)(X(f))$$

con $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

El corchete de dos campos de vectores cumple las siguientes propiedades :

- $[X,Y] = -[Y,X]$;
- $[X+X',Y] = [X,Y] + [X',Y]$;
- $[\lambda X,Y] = \lambda[X,Y]$;
- $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$;
- $[fX,gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X,Y]$;

para todo $X,Y,Z,X' \in \mathfrak{X}(M), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad$ y $f,g \in \mathscr{C}^\infty$.

Definición A.1.2. *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $m \in M$. Se define la derivada de Lie de Y con respecto de X como el campo de vectores sobre M que en el punto $m \in M$ vale:*

$$\mathscr{L}_X Y(m) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(T_{\phi_t(m)}\phi_{-t})(Y(\phi_t(m))) - Y(m)] = \frac{d}{dt}(\phi_t^* Y)(m)\Big|_{t=0}.$$

Proposición A.1.3. *Sean $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. Entonces:*

$$\mathscr{L}_X Y=[X,Y]. \tag{A.1}$$

Demostración. Sea $\alpha(r,s)=Y(\phi_r(m))(f\circ\phi_s)$. Se tiene que:

$$\alpha(0,s)=Y(m)(f\circ\phi_s),$$
$$\alpha(r,0)=Y(\phi_r(m))f=(Yf(\phi_r(m)).$$

De aquí:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,0)=\frac{d}{ds}Y(m)(f\circ\phi_s)\Big|_{s=0}=Y(m)(Xf)=Y(Xf)(m),$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial r}(0,0)=\frac{d}{dr}Yf(\phi_r(m))\Big|_{t=0}=X(Yf)(m).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X Y(f(m))&=\frac{d}{dt}(\phi_t^*Y)(m)f\\&=\frac{d}{dt}T\phi_{-t}Y(\phi_t(m)))f\Big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}Y(\phi_t(m))(f\circ\phi_{-t})\Big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}\alpha(t,-t)\Big|_{t=0}\\&=\frac{\partial\alpha}{\partial r}(0,0)-\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,0)\\&=X(Yf)(m)-Y(Xf)(m)\\&=[X,Y](m)f,\end{aligned}$$

de donde $\mathscr{L}_X Y=[X,Y]$. □

El paréntesis de Lie mide la conmutatividad de los flujos.

Proposición A.1.4. *Sean $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ y ϕ_t,ψ_t sus flujos respectivamente. Entonces, son equivalentes las siguientes condiciones:*

i) $\phi_t\circ\psi_s=\psi_s\circ\phi_t$.

ii) $[X,Y]=0$.

iii) $T\phi_t\circ Y=Y\circ\phi_t$.

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *iii)* Se ha probado en (1.2.5) y se omite.

i) $\Rightarrow$ *ii)*
Si $\phi_t\circ\psi_s=\psi_s\circ\phi_t$se tiene que Y es invariante por ϕ_t. Luego para todo $m\in M$ se tiene que:

$$\mathscr{L}_X Y(m)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(T_{\phi_t(m)}\phi_{-t})(Y(\phi_t(m)))-Y(m)]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Y(m)-Y(m)]=0.$$

ii) $\Rightarrow$ *i)*
Supongamos que $[X,Y]=0$. Luego, si $m\in M$ se tiene que:

$$\begin{aligned}0&=(T\psi_s\circ[X,Y]\circ\psi_{-s})(m)\\&=[T\psi_s\circ X\circ\psi_{-s},T\psi_s\circ Y\circ\psi_{-s}](m)=[X,T\psi_s\circ Y\circ\psi_{-s}](m)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T_{\psi_{-s}(m)}\psi_s)(Y(\psi_{-s}(m)))-(T_{\psi_{-s}(m)}\psi_t)(T_{\psi_{-(s+t)}(m)}\psi_s)(Y(\psi_{-(t+s)}(m)))\\&=-\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T_{\psi_{-(s+t)}(m)}\psi_{t+s})(Y(\psi_{-(t+s)}(m)))-(T_{\psi_{-s}(m)}\psi_s)(Y(\psi_{-s}(m)))\\&=\frac{d}{ds}(T\psi_s\circ Y\circ\psi_{-s})(m).\end{aligned}$$

Tomando $s = 0$ en $(T\psi_s \circ Y \circ \psi_{-s})(m)$ se tiene que $(T\psi_0 \circ Y \circ \psi_0)(m) = Y(m)$. Por tanto, Y es invariante por ψ_t y, así $\phi_t \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_t$.

□

Definición A.1.5. *Sea U un tensor covariante y sea X campo vectorial con ϕ_t su flujo. Se define la derivada de Lie de U a lo largo de X por:*

$$\mathscr{L}_X U = \frac{d}{dt}\phi_t^* U\Big|_{t=0}.$$

Proposición A.1.6. *Sea U tensor covariante y $X, Y_1, \ldots, Y_p$ campos vectoriales. Se tiene que:*

$$(\mathscr{L}_X U)(Y_1, \ldots, Y_p) = \mathscr{L}_X (U(Y_1, \ldots, Y_p)) - \sum U(Y_1, \ldots, \mathscr{L}_X Y_i, \ldots, X_p).$$

Proposición A.1.7. *Sea U un tensor covariante y sea X campo vectorial con ϕ_t su flujo. Entonces:*

$$\frac{d}{dt}\phi_t^* U = \phi_t^* \mathscr{L}_X U.$$

Como vimos en Análisis II:

Definición A.1.8. *Sea U una abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $\omega\colon U \longrightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ una p-forma diferencial de clase $\mathscr{C}^\infty$. Si*

$$\omega = P_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i1} \wedge \ldots \wedge dx_{ip},$$

se llama diferencial exterior de ω a la $(p+1)$-forma

$$d\omega\colon U \longrightarrow \Lambda^{p+1}(\mathbb{R}^n)$$

dada por

$$\begin{aligned} d\omega &= (dP_{i_1,\ldots,i_p}) \wedge dx_{i1} \wedge \ldots \wedge dx_{ip} \\ &= \left(\frac{\partial P_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j}\right) dx_j \wedge dx_{i1} \wedge \ldots \wedge dx_{ip}. \end{aligned}$$

La diferencial exterior se extiende de manera natural a formas diferenciales en variedades diferenciables sin mas que tomar cartas coordenadas. Se comprueba que el resultado no depende de la carta elegida, obteniendo un operador $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ que llamamos diferencial exterior en M.

Definición A.1.9. *Se define la aplicación contracción para p-formas $i_X : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M)$ de forma que $i_X\omega(Y_1, \ldots, Y_p) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_p)$, para todo $X, Y_1, \ldots, Y_p \in \mathfrak{X}(M)$.*

Teorema A.1.10. *Para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$ y ω una p-forma en una variedad M se tiene:*

$$\mathscr{L}_X \omega = i_X(d\omega) + d(i_X \omega).$$

Esta identidad suele llamarse fórmula de Cartan. Para la demostración véase el libro [M].

Bibliografía

[BC] Duistermaat, J. J.; Kolk, J. A. C. *Grupos de Lie*, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[M] Michor, Peter W, *Topics in differential geometry*, Graduate Studies in Mathematics, 93. American Mathematical Society, Providence.

[KN] Kobayashi, Shoshichi; Nomizu, Katsumi, *Foundations of differential geometry. Vol. I y II.*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 15 Vol. II Interscience Publishers John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydne

[AM] Abraham, Ralph; Marsden, Jerrold E. *Foundations of mechanics.*, Second edition. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978

[PW] Poor, Walter A. *Differential geometric structures.*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1981.

[B] Brickell, F.; Clark, R. S. *Differentiable Manifolds.*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1981.