



UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA

TRABAJO DE FINAL GRADO

# **SISTEMAS DINÁMICOS HAMILTONIANOS EN MECÁNICA CUÁNTICA: EL EFECTO ZENÓN.**

Pablo Sala de Torres-Solanot

---

Supervisado por:  
José Fernando Cariñena Marzo

# Índice general

Resumen . . . . .	1
<b>1. La formulación geométrica de la Mecánica Cuántica</b>	<b>3</b>
1.1. Base matemática . . . . .	3
1.2. Los observables . . . . .	6
1.3. El espacio complejo proyectivo . . . . .	7
1.4. La dinámica . . . . .	9
1.5. La información espectral . . . . .	11
<b>2. Efecto Zenón Cuántico. QZE</b>	<b>13</b>
2.1. Caso unidimensional . . . . .	14
2.2. Los subespacios de Zenón cuánticos . . . . .	15
2.3. Formas alternativas para la evolución de Zenón . . . . .	15
2.3.1. Medidas que proyectan . . . . .	15
2.3.2. Unitary kicks . . . . .	18
2.3.3. Acoplo continuo fuerte . . . . .	21
2.4. Conclusión . . . . .	24
2.5. Validación experimental . . . . .	25
<b>A. Algunos conceptos de geometría diferencial</b>	<b>27</b>
<b>B. Conceptos físicos</b>	<b>33</b>
B.1. El efecto Zenón inverso . . . . .	33



# Resumen

Las aproximaciones usuales a la mecánica cuántica y clásica son bastante diferentes. Por un lado tenemos una estructura lineal que se nos presenta en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , estructura que es considerada realmente importante para la formulación posterior; y por otro lado nos encontramos con las ecuaciones de Hamilton, que nos definen trayectorias en un espacio de fases. Sin embargo desde los años 70, ha surgido una formulación alternativa de la mecánica cuántica análoga a la perspectiva geométrica de la mecánica clásica no relativista. Para un estudio de esta rama completo e introductorio se recomienda la lectura de los artículos [1],[2] y [3].

Una vez se haya introducido esta formulación, se pasará al estudio del efecto Zenon cuántico (QZE), primeramente abordado por Von Neumann [4] y unos veinte años más tarde, desarrollado teóricamente por B. Misra y G. Sudarshan [5], los cuales acuñaron el nombre con el que hoy se le conoce, QZE. Destacar que pese a que académicamente se había hecho uso de los sistemas inestables para probar dicho efecto, la primera validación experimental fue hecha por Itano *et al.* [6], basándose en el experimento propuesto por Cook[7]. Para este apartado nos centraremos en el artículo de P. Facchi y S. Pascazio [8]. Además se aplicará la formulación geométrica aprendida al estudio del efecto Zenón cuántico, de forma análoga a como se desarrolla en [9]. Cabe resaltar que entre las aplicaciones prácticas existentes hasta la fecha de este efecto están la preservación de la polarización de spin en gases y el control de la decoherencia en computación cuántica.

Para el lector que no esté familiarizado con los términos geométricos que aquí se utilizan, se puede encontrar en el apéndice A, una descripción resumida de dichos conceptos. En el siguiente apéndice se anexa una breve descripción del efecto Zenón inverso (IZE). Además en el desarrollo de este trabajo se tomarán unidades naturales o de Planck ( $\hbar = 1$ ).



# Capítulo 1

## La formulación geométrica de la Mecánica Cuántica

Para poder reformular la teoría cuántica desde un punto de vista geométrico es imprescindible identificar los ingredientes principales que engloba el marco cuántico, de forma que podamos reformular la estructura matemática que lo sostiene. Entre estos ingredientes encontramos: un **espacio de estados** al cual denotaremos  $\mathcal{S}$ , que corresponde al conjunto de rayos de un espacio de Hilbert complejo separable en la formulación usual de la Mecánica Cuántica, y que representan los estados puros del sistema, y un **espacio de observables**  $\mathcal{O}$ , que corresponde al conjunto de las magnitudes físicas del sistema, y que en la formulación habitual es el conjunto de operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert considerado. Debemos considerar además el proceso de **medida** y la **evolución** de los estados del sistema físico. El proceso de medida viene representado por una asignación numérica al par definido por el estado físico y el observable  $\mathcal{O} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , mientras que para describir la evolución del sistema debemos introducir una ecuación diferencial, correspondiente a la ecuación de Schrödinger en la formulación tradicional, cuyas soluciones definen la evolución temporal de los estados del sistema físico. Toda la teoría desarrollada a continuación, será para el caso particular de un espacio de Hilbert de dimensión **finita**  $N$ , es decir un sistema de  $N$  niveles, con el objetivo de poder prescindir de dificultades topológicas que hacen referencia a propiedades de continuidad de los operadores que aparecen, así como a sus posibles dominios de definición.

### 1.1. Base matemática

En primer lugar, para poder aplicar el formalismo geométrico, debemos introducir una variedad diferenciable <sup>1</sup> donde trabajar. Para ello observemos que la realificación del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión compleja  $N$  puede dotarse de una estructura de variedad real diferenciable  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} := M_Q$  de dimensión real  $2N$ , que admite una carta global, por ejemplo la obtenida al elegir una base del mencionado espacio de Hilbert. Al elegir una tal base cada elemento de  $\mathcal{H}$  posee unas coordenadas  $\{|z_k\rangle\}$  y podemos separar cada una de sus coordenadas en su parte real y parte imaginaria de la forma:

$$|\psi\rangle = \sum_k \psi_k |e_k\rangle \text{ de forma que } \psi_k \rightarrow \psi_k^R + i \psi_k^I \quad (1.1)$$

Entonces,

$$(\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}) \in \mathcal{H} \mapsto (\{\psi_1^R, \psi_2^R, \dots, \psi_N^R, \psi_1^I, \psi_2^I, \dots, \psi_N^I\}) \equiv (\Psi_R, \Psi_I) \in M_Q \quad (1.2)$$

En consecuencia esta variedad real diferenciable  $M_Q$  es equivalente a  $\mathbb{R}^{2N}$

---

<sup>1</sup>Ver en apéndice A DFN A.1 y siguientes.

Además, el hecho de que el espacio de Hilbert sea complejo se traduce en la existencia de un tensor  $J$  de tipo (1,1) en la variedad  $M_Q$  tal que  $J^2 = -I$ , que recibe el nombre de estructura compleja<sup>2</sup>. La variedad que hemos obtenido así es del tipo particular que se conoce como variedad Kähler [10].

Por ahora hemos traducido el espacio de estados dados en unas ciertas coordenadas que por analogía con el caso de mecánica clásica, denotaremos

$$\psi_i^R \equiv q^i \text{ y } \psi_i^I \equiv p_i \quad (1.3)$$

En efecto, veamos que  $M_Q$  está dotada de una estructura simpléctica y que las mencionadas coordenadas son efectivamente coordenadas de Darboux<sup>3</sup> para tal forma simpléctica. La propiedad de que el producto interno sea tal que  $\langle \psi | \phi \rangle$  sea conjugado de  $\langle \phi | \psi \rangle$  se traduce en que el espacio lineal de Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$  está dotado de una forma bilineal antisimétrica no degenerada mediante  $\omega(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = \text{Im } \langle \phi | \psi \rangle$  y por tanto  $M_Q$  está dotado de una estructura simpléctica. Recordando que

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_{k=1}^n (\phi_k^R - i \phi_k^I)(\psi_k^R + i \psi_k^I),$$

vemos que

$$\omega(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = \text{Im } \langle \phi | \psi \rangle = \sum_{k=1}^n (\phi_k^R \psi_k^I - \psi_k^R \phi_k^I),$$

lo que nos muestra que  $q_k = \text{Re } \phi_k$ ,  $p_k = \text{Im } \phi_k$  son coordenadas de Darboux.

Podemos traducir las estructuras algebraicas disponibles en  $\mathcal{H}$  en objetos tensoriales sobre la variedad  $M_Q$ . Por otro lado, al igual que en el caso clásico, las trayectorias del sistema físico vendrán determinadas por las curvas integrales de un campo vectorial<sup>4</sup> responsable de la dinámica. Es por ello que para esta ‘traducción’ debemos considerar los fibrado tangente y cotangente, teniendo en cuenta que puesto que  $\mathcal{H}$  es un espacio vectorial podemos identificar para cada  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  el espacio tangente  $T_{|\phi\rangle} \mathcal{H}$  con el propio  $\mathcal{H}$ , de forma que a cada  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  le corresponde la aplicación que asocia a cada función  $f$  diferenciable en un entorno del punto  $|\phi\rangle$ , el valor real

$$\left( \frac{d}{dt} f(|\phi\rangle + t |\psi\rangle) \right)_{t=0}.$$

Además, con esta identificación los campos vectoriales en  $\mathcal{H}$  vendrán dados por aplicaciones  $X : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Mencionamos a continuación algunos ejemplos interesantes, como son los campos vectoriales constantes y los campos vectoriales lineales:

- Con cada elemento  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  le podemos asociar un campo vectorial constante

$$X_{|\psi\rangle} : M_Q \rightarrow TM_Q \quad |\phi\rangle \mapsto (|\phi\rangle, |\psi\rangle) \quad (1.4)$$

Observemos que lo que hemos hecho, es trasladar  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  al espacio tangente en cada punto, es decir, en este lenguaje los estados  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  son los vectores pertenecientes al espacio tangente en el punto  $|\phi\rangle$ . Además, elegida una base de  $\mathcal{H}$  las componentes de  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  tienen una parte real y una imaginaria pura de forma que el campo queda descrito por:

$$X_{|\psi\rangle}(|\phi\rangle) = (|\phi\rangle, \Psi_R, \Psi_I) \quad (1.5)$$

<sup>2</sup>Aunque inicialmente este cambio de notación  $i \rightarrow J$  parezca trivial, este pequeño cambio en el punto de vista permitirá introducir la formulación simpléctica de la mecánica cuántica.

<sup>3</sup>Ver en apéndice A el teorema A.0.1.

<sup>4</sup>Ver en apéndice A DFN A.3.

- Recordemos que si  $V$  es un espacio lineal real, con la identificación del espacio tangente a  $V$  en cada punto con el propio  $V$ , cada aplicación lineal  $A : V \rightarrow V$  define un campo vectorial  $X_A$  mediante  $X_A(v) = (v, Av)$ . En la carta definida por la elección de una base de  $V$ , cuyas coordenadas denotaremos  $\{x^i\}$ , dichos campos vectoriales  $X_A$  vendrán dados en tales coordenadas por  $X_A = a^i_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$ , de forma que las ecuaciones que determinan sus curvas integrales son ecuaciones diferenciales lineales.

En el caso particular de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  el campo vectorial  $X_A$  definido por la aplicación lineal  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , con la identificación  $T\mathcal{H} \approx \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , está dado por  $X_A : |\psi\rangle \mapsto (|\psi\rangle, A|\psi\rangle) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ . Las curvas integrales de estos campos vectoriales son soluciones de ecuaciones diferenciales lineales  $|\dot{\psi}\rangle = A|\psi\rangle$ . Veremos que el caso de interés en Mecánica Cuántica es cuando  $A$  es un operador (anti-)autoadjunto.

- El caso particular en que  $A = I$  es especialmente importante ya que el campo vectorial lineal correspondiente,  $\Delta = X_I$ , codifica la **estructura lineal** disponible en  $M_Q$ . Juega un papel bastante similar al conocido como campo de Liouville [11], o campo de dilataciones, ya que en este caso no sólo se dilata a lo largo de la fibra si no también del espacio base. Más en concreto,

$$\Delta : M_Q \rightarrow TM_Q \quad |\psi\rangle \mapsto (|\psi\rangle, |\psi\rangle) \quad (1.6)$$

se escribe en coordenadas  $\{q_k, p_k\}$  asociadas a la elección de una base mediante:

$$\Delta = q_k \frac{\partial}{\partial q_k} + p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (1.7)$$

Ya indicamos que la subvariedad  $M_Q$  también está dotada de otra estructura relevante, que es consecuencia de la **estructura Hermítica** en  $\mathcal{H}$ . Para el desarrollo matemático completo de este apartado se recomienda leer el Capítulo 3 de [11]. La estructura Hermítica queda codificada por el tensor Hermítico  $\mathfrak{h}$ . Para obtenerlo usamos que si  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$  entonces

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \mathfrak{h}(X_{|\psi_1\rangle}, X_{|\psi_2\rangle})(|\phi\rangle) \quad \forall |\phi\rangle \quad (1.8)$$

Llegados a este punto se puede ver siguiendo el desarrollo matemático encontrado en [10], que en coordenadas  $\mathfrak{z}_k = q_k + ip_k$ , el tensor Hermítico queda definido por

$$\mathfrak{h} = \sum_k d\bar{\mathfrak{z}}_k \otimes d\mathfrak{z}_k = \sum_k (dq_k - i dp_k) \otimes (dq_k + i dp_k) \quad (1.9)$$

y que sobre la variedad real  $M_Q$ , que está dotada de una estructura compleja, se puede expresar como

$$\mathfrak{h}(X_{|\psi_1\rangle}, X_{|\psi_2\rangle}) = \text{Re} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle + i \text{Im} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = g(X_{|\psi_1\rangle}, X_{|\psi_2\rangle}) + i \omega(X_{|\psi_1\rangle}, X_{|\psi_2\rangle}) \quad (1.10)$$

donde  $g$  es un tensor simétrico y  $\omega$  un tensor antisimétrico que define la mencionada estructura simpléctica, y además puesto que el producto interno es sesquilineal,

$$\langle \psi_1 | i \psi_2 \rangle = i \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad \langle i \psi_1 | \psi_2 \rangle = -i \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad (1.11)$$

implica que,

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) \quad g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \omega(JX, JY) = \omega(X, Y) \quad (1.12)$$

- Por último, la **estructura compleja** de  $\mathcal{H}$  es traducida mediante el tensor de tipo  $(1, 1)$

$$J : TM_Q \rightarrow TM_Q \text{ tal que } J \left( \frac{\partial}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial p_k} \quad J \left( \frac{\partial}{\partial p_k} \right) = -\frac{\partial}{\partial q_k} \quad (1.13)$$

cumpliendo que

$$J^2 = -\mathbb{I} \quad (1.14)$$



Cabe destacar que por tanto que en la descomposición (1.9) el tensor simétrico  $g$  es definido positivo y no degenerado y por tanto define una estructura Riemanniana en la variedad real,  $(M_Q, g)$ , mientras que el tensor antisimétrico  $\omega$  es también no degenerado y es cerrado ( $d\omega = 0$ ), por lo que dicho tensor es una forma simpléctica. Esto implica que  $(M_Q, \omega)$  es una variedad simpléctica. Más aún,  $(M_Q, (g, \omega, J))$  es una variedad Kähler y la forma covariante de estos tensores viene dada por:

$$J = \partial_{p_k} \otimes dq_k - \partial_{q_k} \otimes dp_k \quad g = dq_k \otimes dq_k + dp_k \otimes dp_k \quad \omega = dq_k \wedge dp_k \quad (1.15)$$

como se puede ver sin más que hacer uso de la relación (1.9).

Como  $\omega$  es no degenerada define un tensor de Poisson (su forma contragradiante)

$$\Omega = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial q_k} \wedge \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (1.16)$$

como también es posible considerar un tensor dos veces contravariante simétrico que corresponde a  $g$ ,

$$G = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial q_k} \otimes \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial p_k} \otimes \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (1.17)$$

Ambos tensores están relacionados por  $G = J \cdot \Omega$ . Como veremos estos tensores permiten definir un corchete de Poisson y un corchete Riemann-Jordan sobre funciones suaves.

En resumen, la traducción obtenida ha sido:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{H} & \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}} := M_Q \\ \langle \cdot, \cdot \rangle & \mathfrak{h} = g + i\omega \\ i & J \\ (\mathbb{C}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle) & (M_Q, (g, \omega, J)) \end{array}$$

Es interesante destacar, que han aparecido dos estructuras adicionales al caso de la mecánica clásica: la estructura compleja y la estructura Riemanniana compatible con la estructura simpléctica dada por la igualdad (1.12). Será esta segunda la que nos permitirá traducir las incertidumbres en la medida.

## 1.2. Los observables

Una vez introducida la base matemática sobre la que se trabaja y el espacio de estados considerado, se ha de dar significado a los operadores en el formalismo geométrico. En la imagen de Schrödinger, los operadores que representan las magnitudes físicas son los operadores lineales autoadjuntos, los cuales actúan sobre los estados. La forma más sencilla de traducir esto es asociar a cada observable una función real dada por

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}(M_Q) \quad H \rightarrow f_H(\psi) = \frac{1}{2} \langle \psi | H \psi \rangle \quad \text{con } \psi \in \mathcal{H} \quad (1.18)$$

donde  $\mathcal{F}(M_Q)$  es el conjunto de todas las funciones cuadráticas sobre  $M_Q$  y  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(M_Q)$  el subconjunto de funciones reales. Además se deben codificar las diferentes estructuras algebraicas existentes en  $\mathcal{O}$ . Consi-

derando el desarrollo de [3] se concluye que:

$$\mathcal{O}(\mathcal{H})$$

$$\mathcal{F}(M_Q)$$

$$\text{Estructura de álgebra de Lie: } [A, B] = -i(AB - BA) \quad \{f_A, f_B\} = f_{[A, B]} = \Omega(df_A, df_B)$$

$$\text{Estructura de álgebra de Jordan: } [A, B]_+ = AB + BA \quad \{f_A, f_B\}_+ = f_{[A, B]_+} = G(df_A, df_B)$$

$$\text{Producto asociativo: } AB = \frac{1}{2}[A, B]_+ + \frac{i}{2}[A, B] \quad f_A \star f_B := f_{AB} = \frac{1}{2}\{f_A, f_B\}_+ + \frac{i}{2}\{f_A, f_B\} \quad (1.19)$$

Nos damos cuenta que si  $A$  y  $B$  son Hermíticos, con funciones cuadráticas reales asociadas  $f_A$  y  $f_B$ , el producto  $f_A \star f_B$  no es necesariamente una función real (puesto que el producto de dos operadores Hermíticos no es Hermítico, en general). Pese a ello podemos trabajar en la complejización de nuestra variedad para poder tener definidas dichas funciones. Las estructuras de Lie y de Jordan pueden ser combinadas de forma que definan una estructura de Lie-Jordan, en este caso sobre el conjunto de funciones definidas sobre la variedad real  $M_Q$ . De esta forma, dadas tres funciones cualesquiera  $f$ ,  $g$  y  $h$  definidas sobre la variedad real  $M_Q$ , dicha álgebra satisface que:

$$\text{I)} \quad \{f, \{g, h\}_+\} = \{\{f, g\}, h\}_+ + \{g, \{f, h\}\}_+ \quad (1.20)$$

$$\text{II)} \quad \{\{f, g\}_+, h\}_+ - \{f, \{g, h\}_+\}_+ = \{g, \{h, f\}\} \quad (1.21)$$

Resaltar que mediante el uso de los tensores de Poisson  $\Omega$  y de Riemann  $G$ , se ha podido recuperar el producto de Lie y el producto de Jordan respectivamente, para las funciones cuadráticas.

### 1.3. El espacio complejo proyectivo

Cuando un sistema cuántico es descrito mediante un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , debemos tener en cuenta que el conjunto de estados que difieren en un factor  $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$  son **físicamente** equivalentes y por tanto debemos trabajar con el correspondiente espacio proyectivo. En la formulación geométrica de la mecánica cuántica, podemos introducir la acción de multiplicar por un número complejo de módulo uno sobre  $M_Q$  como una transformación cuyo generador infinitesimal se escribe,

$$\Gamma = \sum_k \left( p_k \frac{\partial}{\partial q_k} - q_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \quad (1.22)$$

Ver que el tensor dado en esas coordenadas lo que hace es cambiar la fase global, si pensamos en el plano, dado un par  $\{q_k, p_k\}$ ,

$$q_k = r_k \cos \theta_k \quad p_k = r_k \sin \theta_k$$

entonces,

$$\Gamma = \sum_k \frac{\partial}{\partial \theta_k}$$

Es decir, las curvas integrales del campo  $\Gamma$  están dadas por el conjunto de estados que se obtienen partiendo de un estado inicial  $|\psi\rangle$  y multiplicarlo por una fase global  $e^{i\theta} |\psi\rangle$ .

Por otro lado el campo de dilataciones  $\Delta$ , al expresarlo en coordenadas polares toma la forma

$$\Delta = \sum_k r_k \frac{\partial}{\partial r_k}$$

Ello implica, que las curvas integrales de este campo están dadas por el conjunto de vectores obtenidos multiplicando uno dado por un número real diferente de cero.

Por tanto, la acción de estos campos sobre la variedad real  $M_Q$ , corresponden a la acción del grupo  $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+ \otimes U(1)$  sobre  $M_Q$ . Como dicho grupo es Abeliano, se verifica que

$$[\Delta, \Gamma] = 0 \quad (1.23)$$

**Lema 1.3.1.**  $\Delta$  y  $\Gamma$  definen una foliación 1.1 (de dimensión 2) sobre la variedad  $M_Q$  (ver teorema de Frobenius [12])

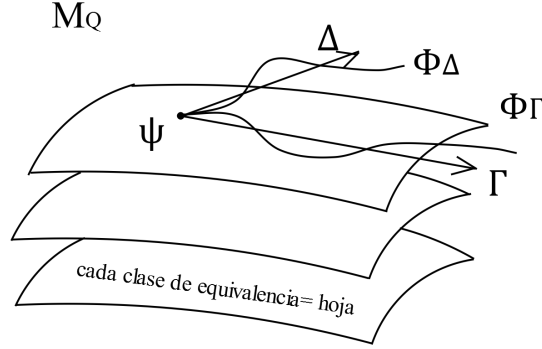


Figura 1.1: Foliación de  $M_Q$  dada por  $\Delta$  y  $\Gamma$

Por tanto, se tiene una distribución integrable<sup>5</sup> generada por  $\Gamma$  y  $\Delta$  los cuales forman una subálgebra de Lie Abeliana. Cada una de las hojas de la foliación es una clase de equivalencia formada por el conjunto de estados que pertenecen a la misma órbita<sup>6</sup> bajo la acción de  $\mathbb{C}^*$ . Obsérvese que  $\Gamma = J(\Delta)$ .

Por otro lado en el espacio de Hilbert, se suele trabajar con estados normalizados, o en caso de que no se haga, uno debe tener presente la norma del estado a la hora de dar probabilidades y valores medios. Es por ello que nos interesa ver el conjunto de estados incluidos en una de las hojas dadas por la foliación definida por  $\Delta$  y de  $\Gamma$ , ya que estos estados son equivalentes en cuanto a los resultados físicos que se obtienen.

De un modo más gráfico esto implica que dado un  $|\psi\rangle \in \mathcal{H} - \{0\}$  y sea  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , entonces  $|\psi\rangle$  y  $\lambda|\psi\rangle$  pertenecen a la misma clase de equivalencia y es este conjunto de clases de equivalencias al que denominamos **espacio complejo proyectivo**.

**DFN 1.1.** La variedad cociente resultante, denotada como  $\mathcal{P}$  y dada por

$$\pi : M_Q \rightarrow \mathcal{P} = M_Q / \mathbb{C}^* \quad (1.24)$$

se llama *espacio complejo proyectivo* y sus puntos representan los estados físicos **puros** de un sistema cuántico:

$$\mathcal{P} \ni [|\psi\rangle] := \pi(|\psi\rangle) \quad |\psi\rangle \in M_Q, \quad (1.25)$$

Conviene recordar que un espacio proyectivo no es lineal y por tanto la suma de dos estados físicos no determina un nuevo estado físico, es decir no existe la suma de clases de equivalencia. Es por ello que es más cómodo trabajar en la variedad real  $M_Q$ , al igual que también lo es en la formulación original de la mecánica cuántica, en la cual trabajamos en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Una vez hemos definido el espacio complejo proyectivo  $\mathcal{P}$  se deben traducir las herramientas y estructuras con las que ha sido dotada  $M_Q$  al espacio proyectivo subyacente, ya que para representar magnitudes físicas reales, estas se deben corresponder con funciones que sean constantes a lo largo de las fibras<sup>7</sup> de la

<sup>5</sup>Ver en apéndice A DFN A.9.

<sup>6</sup>Ver en apéndice A DFN A.16.

<sup>7</sup>Ver en apéndice A la sección dedicada a campos vectoriales.

fibración  $\pi : M_Q \longrightarrow \mathcal{P}$ , es decir funciones que para estados pertenecientes a la misma clase de equivalencia tomen los mismos valores. Entre otras muchas funciones de este tipo podemos considerar las funciones:

$$e_A = \frac{\langle \psi | A \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (1.26)$$

para las cuales se cumple que  $\Gamma(de_A) = \Delta(de_A) = 0$ , ya que dichas funciones son su propia imagen bajo el pullback<sup>8</sup>  $\pi^* : T^*\mathcal{P} \longrightarrow T^*M_Q$ , es decir representan tanto a funciones sobre  $M_Q$  como a funciones definidas sobre el espacio complejo proyectivo  $\mathcal{P}$ .

Es interesante ver la imposibilidad de traducir al espacio complejo proyectivo las formas  $g$  y  $\omega$ . Esto es debido a que dichos tensores están definidos sobre  $M_Q$  y por tanto no podemos proyectarlas mediante la aplicación codiferencial asociada a  $\pi : M_Q \rightarrow \mathcal{P}$ . Es por ello que necesitamos la forma contravariante de dichos tensores,  $G$  y  $\Omega$  ya que bajo la aplicación diferencial proyectan adecuadamente. Sin embargo, mientras que las funciones  $e_A$  definidas anteriormente, son proyectables a través de  $\pi : M_Q \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $G$  y  $\Omega$  no lo son. Es decir, sus derivadas de Lie<sup>9</sup>  $\mathcal{L}_\Delta G = -2G$  y  $\mathcal{L}_\Delta \Omega = -2\Omega$  no se anulan sobre la fibra de la aplicación. Podemos sustituirlos por otros nuevos tensores  $G_{\mathcal{P}}$  y  $\Omega_{\mathcal{P}}$  definidos sobre  $M_Q$  que sí lo sean dados por

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{P}} &:= \langle \psi | \psi \rangle G - \Gamma \otimes \Gamma - \Delta \otimes \Delta \\ \Omega_{\mathcal{P}} &:= \langle \psi | \psi \rangle \Omega - \Gamma \otimes \Delta - \Delta \otimes \Gamma \end{aligned} \quad (1.27)$$

Notar que en general cualquier  $G_{\mathcal{P}}$  y  $\Omega_{\mathcal{P}}$  dados por

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{P}} &:= \langle \psi | \psi \rangle G - a\Gamma \otimes \Gamma - b\Delta \otimes \Delta - c\Gamma \otimes \Delta - d\Delta \otimes \Gamma \\ \Omega_{\mathcal{P}} &:= \langle \psi | \psi \rangle \Omega - a'\Gamma \otimes \Gamma - b'\Delta \otimes \Delta - c'\Gamma \otimes \Delta - d'\Delta \otimes \Gamma \end{aligned} \quad (1.28)$$

con  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ , son proyectables. Se han elegido los coeficientes de forma que encontramos la métrica de Fubini-Study (ver [10]) sobre el espacio complejo proyectivo  $\mathcal{P}$ .

Un resultado importante obtenido en [3] es el siguiente:

**Lema 1.3.2.** *La acción de  $G_{\mathcal{P}}$  en el conjunto de funciones proyectables corresponde a*

$$G_{\mathcal{P}}(de_A, de_B) = e_{[A,B]_+} - e_A \cdot e_B$$

lo cual implica que si  $A = B$  se obtiene

$$G_{\mathcal{P}}(de_A, de_A) = e_{A^2} - e_A^2$$

de esta forma  $G_{\mathcal{P}}$  está directamente relacionada con las relaciones de indeterminación.

## 1.4. La dinámica

En la formulación geométrica de la mecánica Hamiltioiana, se considera una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  y una función  $H \in C^\infty(M)$ , lo que nos permite definir un campo Hamiltoniano  $X_H$  por la relación

$$i_{X_H} \omega = dH \iff X_H = \hat{\omega}^{-1}(dH). \quad (1.29)$$

<sup>8</sup>Sea  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables. Cada aplicación diferenciable  $F : M \longrightarrow N$  tiene asociadas dos aplicaciones entre campos vectoriales y formas dadas por la aplicación diferencial  $F_* : TM \longrightarrow TN$  y la codiferencial  $F^* : T^*N \longrightarrow T^*M$  respectivamente. De nuevo consultar apéndice A.

<sup>9</sup>En el apéndice A DFN A.11 se encuentra la definición de dicha derivada así como algún ejemplo.

La expresión en coordenadas de Darboux de  $X_H$  es

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (1.30)$$

por lo que las ecuaciones que determinan las curvas integrales del campo Hamiltoniano  $X_H$ , son las bien conocidas ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (1.31)$$

Para proceder de modo análogo en mecánica cuántica, se considera que el sistema dinámico se encuentra sobre la variedad  $M_Q$  en vez de sobre  $\mathcal{P}$ , ya que resultará más cómodo. Estamos en una variedad Kähler donde hemos construido una forma simpléctica de forma que tenemos el ingrediente básico para aplicar una formulación Hamiltoniana. En este caso la función Hamiltoniana viene dada por

$$f_H = \frac{1}{2} \langle \psi | H \psi \rangle \quad (1.32)$$

siendo  $H$  el operador Hamiltoniano definido sobre  $\mathcal{H}$ . El campo Hamiltoniano será

$$X_H = \Omega(\cdot, df_H) \quad (1.33)$$

cuyas curvas integrales son las soluciones de la ecuación de Schrödinger.

$$i\hbar |\dot{\psi}\rangle = H |\psi\rangle \quad (1.34)$$

Veamos que efectivamente, las curvas integrales del campo Hamiltoniano se corresponden con las soluciones de la ecuación de Schrödinger. Sea  $A$  un operador autoadjunto en  $\mathcal{H}$ . Entonces la función real  $f_A : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_A(|\psi\rangle) = \frac{1}{2} \langle \psi | A \psi \rangle$  tiene asociada un campo  $X_{f_A}$  tal que:

$$i_{X_{f_A}} \omega = \omega(X_{f_A}, \cdot) = df_A. \quad (1.35)$$

Si se toma un  $|\psi\rangle \in \mathcal{T}_{|\phi\rangle} \mathcal{H}$  entonces,

$$(df_A)_{|\phi\rangle}(|\psi\rangle) \quad (1.36)$$

es la derivada direccional de  $f_A$  en el punto  $|\phi\rangle$  en la dirección  $|\psi\rangle$ , de esta forma

$$\begin{aligned} (df_A)_{|\phi\rangle}(|\psi\rangle) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \phi + t\psi | A(\phi + t\psi) \rangle \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\langle \phi | A \phi \rangle + [\langle \psi | A \phi \rangle + \langle \phi | A \psi \rangle] t + \langle \psi | A \psi \rangle t^2) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} (\langle \psi | A \phi \rangle + \langle \phi | A \psi \rangle) = \frac{1}{2} (\langle \psi | A \phi \rangle + \langle \phi | A^\dagger \psi \rangle^*) = \text{Re} \{ \langle \psi | A \phi \rangle \} = \text{Im} \{ \langle -J A \phi | \psi \rangle \} \\ &= \omega(-J A |\phi\rangle, |\psi\rangle) \end{aligned} \quad (1.37)$$

así comparando con (1.35) se obtiene que,

$$X_{f_A}(|\phi\rangle) = -J A |\phi\rangle \quad (1.38)$$

Por tanto  $X_H$  es un campo globalmente Hamiltoniano y además es también un *campo de Killing*<sup>10</sup>,  $\mathcal{L}_{X_H} g = 0$ , lo cual significa que la forma Hermítica es “invariante” bajo la acción del grupo de isometrías asociado al campo  $X_H$ . Debido a estas dos propiedades tenemos que es un campo que conserva la estructura Riemanniana y la estructura simpléctica y por tanto también conserva la estructura Hermítica. Es por ello que la evolución temporal de cualquier sistema mecano cuántico se puede escribir en términos de las ecuaciones de Hamilton clásicas. Como se enuncia en [2] “Schrödinger’s equation is Hamilton’s equation in disguise!”.

<sup>10</sup>Ver en apéndice A DFN A.13

## 1.5. La información espectral

Finalmente se considera el problema de cómo recuperar la noción de autovalor y autovector de los operadores definidos sobre  $\mathcal{H}$  a nivel de las funciones definidas sobre  $M_Q$  o sobre el proyectivo. Sea  $A$  un operador autoadjunto,

$$A \mapsto e_A(|\psi\rangle) = \frac{\langle\psi| A\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \quad (1.39)$$

entonces,

- Los autovectores corresponden a los puntos críticos de las funciones  $e_A$ , es decir,

$$de_A(|\psi\rangle_a) = 0 \text{ si y sólo si } |\psi\rangle_a \text{ es un autovector de } A$$

donde cabe destacar que si  $|\psi\rangle$  es autovector de  $e_A$  entonces  $e^{i\alpha}|\psi\rangle$  también lo será.

- Los autovalores correspondientes están dados por  $e_A(|\psi\rangle_a)$ .



## Capítulo 2

# Efecto Zenón Cuántico. QZE

En el siglo 5 a.C, en Elea, nació Zenón, una figura importante de la escuela Eleática de filosofía fundada por Parménides. Ellos creían que los sentidos eran engañosos y que tanto el movimiento como el cambio eran meras ilusiones. Zenón introdujo estas enseñanzas mediante un conjunto de argumentos que resultaban en aspectos paradójicos de la noción de una realidad en continuo cambio y más concretamente chocaban con la posibilidad de movimiento representado en la paradoja de la flecha. De dicha paradoja se concluye, que la flecha nunca llegará a su destino. Para una introducción más completa ver [8].

En mecánica cuántica este efecto de la no posibilidad de movimiento fue planteado por primera vez por Alan Turing en 1954 [13] y acuñado por Misra y Sudarshan como Quantum Zeno Effect (QZE) en [5]. Es de esta publicación de donde partiremos para desarrollar la teoría del efecto Zenón cuántico.

El primer ejemplo de sistema cuántico considerado es el de un sistema cuántico inestable. El espacio de estados de este sistema cuántico se divide en los estados en los cuales la partícula no ha decaído y en aquellos estados en los que sí. Mediante una observación del estado sin decaer lo que hacemos es colapsar la función de ondas al estado sin decaer (visión a la von Neumann). La probabilidad de que el estado decaiga, después de este colapso crece cuadráticamente con el tiempo para tiempos suficientemente cortos. Si lo que se hace es realizar infinitas observaciones en intervalos muy cortos de tiempo de forma que no dejemos evolucionar al sistema, estaremos confinando el estado de la partícula al estado sin decaer, de manera que podremos evitar su decaimiento. De forma que un estado que sea continuamente observado nunca decaerá.

La dificultad de observar este efecto en decaimientos de partículas reside en que el intervalo temporal en el cual la probabilidad crece cuadráticamente, y por tanto el tope de nuestro intervalo de medida, es muy pequeño comparado con el tiempo requerido para hacer la medida, debido a que usamos una instrumentación con limitaciones físicas.

No obstante también se puede aplicar el QZE a la inhibición de transiciones inducidas mediante medidas frecuentes, efecto que es observado, por ejemplo, en el montaje experimental propuesto por Itano *et. al* [6], donde existe una transición Rabi y un tercer nivel que permite conocer el estado del sistema. En dicho experimento se observa cómo disminuye la probabilidad de transición entre los dos niveles conforme aumenta el número de medidas sobre el sistema.

Se entiende también el uso del QZE en el control de la decoherencia en sistemas cuánticos, la cual es una consecuencia del acoplo inevitable de cualquier sistema cuántico con su entorno que da lugar a pérdida de información del sistema y por tanto a una dinámica del sistema no unitaria.

**Nota:** para el desarrollo dado a continuación se usará el acrónimo QZE para referirse al efecto Zenón cuántico así como los nombres ingleses de algunos fenómenos.



## 2.1. Caso unidimensional

Comenzaremos desarrollando la teoría en un caso sencillo unidimensional y más adelante se desarrollarán otras formulaciones más generales. Consideremos un sistema cuántico cuya evolución viene determinada por el Hamiltoniano  $H$  independiente del tiempo. Si el estado puro del sistema en  $t = 0$  es  $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$  con  $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$ , la amplitud de probabilidad de que este estado sobreviva es:

$$p(t) = |\langle\psi_0|\psi_t\rangle|^2 = |\langle\psi_0|e^{-iHt}\psi_0\rangle|^2 \approx \left| \langle\psi_0|\psi_0\rangle - it\langle\psi_0|H\psi_0\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle\psi_0|H^2\psi_0\rangle \right|^2 = 1 - t^2/\tau_Z^2 + \dots \quad (2.1)$$

donde  $1/\tau_Z^2 \equiv (\Delta H_{\psi_0})^2$ , siendo  $\Delta H_{\psi_0}$  la incertidumbre en la medida de la energía.

Para obtener este resultado en el lenguaje geométrico se hace uso de la traducción de operadores a funciones proyectables definidas sobre  $M_Q$ . Haciendo uso de la linealidad de  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}(M_Q)$  y desarrollando hasta segundo orden en función del tiempo se obtiene,

$$\begin{aligned} p(t) &= |e_{U(t)}|^2 = \left| e_{\text{id} - iHt - \frac{1}{2}H^2t^2 + O(t^3)} \right|^2 = \left| e_{\text{id}} - i e_H t - \frac{1}{2} e_{H^2} t^2 \right|^2 \\ &= (e_{\text{id}})^2 - [(e_H)^2 - e_H^2] t^2 = 1 - G_{\mathcal{P}}(de_H, de_H) t^2 = 1 - (\Delta H_{\psi_0})^2 t^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hasta este momento no ha aparecido una evolución del sistema distinta a la libre, sino que sólo se ha obtenido la probabilidad de permanencia cuando ha pasado un período breve de tiempo. Hagamos ahora  $N$  medidas a intervalos de tiempo  $\tau = t/N$ , de forma que se compruebe si el sistema está todavía en el estado inicial  $|\psi_0\rangle$ . Si cada vez que se realiza una medida se obtiene que el sistema se encuentra en su estado inicial  $|\psi_0\rangle$ , entonces la función de ondas colapsará a dicho estado y la evolución volverá a partir otra vez desde  $|\psi_0\rangle$  hasta realizar la siguiente medida como se muestra en la figura 2.1.

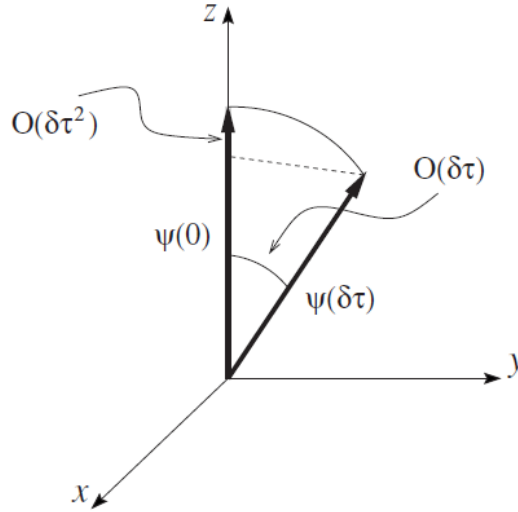


Figura 2.1: Evolución lineal de la fase y cuadrática de la pérdida de probabilidad [8]

La probabilidad de supervivencia tras las  $N$  medidas será<sup>1</sup>

$$p^{(N)}(t) = p(\tau)^N = p(t/N)^N \xrightarrow{N \text{ grande}} [1 - (t/(N\tau_Z))^2]^N \quad (2.3)$$

ahora tomando límite,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [1 - (t/(N\tau_Z))^2]^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1}{-((N\tau_Z)/t)^2} \right]^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp(-t^2/(N\tau_Z^2)) = 1 \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Recordar que las indeterminaciones del tipo  $1^\infty$  son potencias del número  $e$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$ .

Por tanto se deduce que si un sistema es continuamente observado ( $N \rightarrow \infty$  manteniendo  $\tau$  constante o de forma equivalente  $\Rightarrow \tau \rightarrow 0$  manteniendo  $N$  constante), la evolución libre del sistema es “interrumpida” y el sistema se congela en su estado inicial.

## 2.2. Los subespacios de Zenón cuánticos

En la sección anterior se ha supuesto que mediante una medida era determinada de forma unívoca si el sistema se encontraba en un estado concreto. Sin embargo, cuando se mide existe una cierta incertidumbre en la medida, dada por ejemplo por la resolución del aparato, de forma que no es posible determinar si el sistema se encuentra en un estado concreto, si no más bien si se encuentra en un cierto subespacio  $m$ -dimensional dado por un proyector  $P$   $m$ -dimensional. Se dice entonces que se trata de una medida *incompleta*.

Sea la evolución del sistema cuántico en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  gobernada por un operador unitario  $U(t)$ . La medida determinará si el sistema está en un cierto subespacio  $s$ -dimensional  $\mathcal{H}_P$ , determinado por el operador de proyección  $P$  que describe la medida sobre el sistema de forma que  $P\mathcal{H} = \mathcal{H}_P$ . Cada uno de estos subespacios  $s$ -dimensionales, los cuales probaremos que son invariantes en la evolución, son los que se conocen como **subespacios de Zenón**.

En este caso como consecuencia directa del *teorema de Misra y Sudarshan* (ver [5] y [8]), se deduce que si un sistema, vease una partícula, es continuamente observada para saber si ha sobrevivido en un cierto estado  $\mathcal{H}_P$ , jamás hará una transición a  $(\mathcal{H}_P)^\perp$ . Es aquí donde reside la formulación original de la paradoja de Zenón.

## 2.3. Formas alternativas para la evolución de Zenón

Generalmente se solía vincular el QZE a la repetición de medidas “proyectivas”, a la von Neumann [4], sobre el sistema cuántico. Sin embargo, se ha observado que esta forma de entender el QZE es demasiado limitada, ya que dichas medidas proyectivas pueden ser reemplazadas por otros sistemas cuánticos que interaccionen fuertemente con el sistema cuántico de interés, ya que después de todo uno esquematiza la medición como una proyección sobre el sistema, resumiendo de esta forma el hecho físico que ocurre en el proceso de la medida: un aparato externo o un campo cuántico que interacciona con el mismo.

En definitiva se deduce que las características físicas que dan lugar al QZE no quedan determinadas por el “colapso” de la función de ondas sino más bien como consecuencia de la dinámica dada por una perturbación suficientemente intensa.

A continuación se expondrán tres formulaciones distintas del QZE mediante el formalismo geométrico, trabajando en la variedad real diferenciable  $M_Q$  en vez de en el espacio proyectivo  $\mathcal{P}$  directamente. Se hará uso de la propiedad multiplicativa  $\star$  descrita en (1.19), del conjunto de las funciones  $\mathcal{F}(M_Q)$ , así como de sus propiedades. Además para las distintas formulaciones se deducirá la función Hamiltoniana que determina la dinámica del sistema, la cual será denotada función Hamiltoniana de Zenón  $f_{H_Z}$ .

### 2.3.1. Medidas que proyectan

Esta es la realización a priori más intuitiva que se aproxima a la dinámica tipo Zenón. Se considera que las medidas además de incompletas serán *no selectivas*, es decir el aparato de medida no selecciona la medida que va a salir, sino que destruye las correlaciones entre distintos estados proyectando sobre los subespacios de Zenón correspondientes.

Sea un sistema cuántico cuya evolución venga descrita por la función evolución  $f_{U(t)}$  con  $U(t) = \exp(-iHt)$  de forma que<sup>2</sup>

$$f_{\rho(t)} = \text{Ad}_{U(t)}(f_{\rho_0}) := f_{U(t)} \star f_{\rho_0} \star f_{U^\dagger(t)} \quad (2.5)$$

donde  $f_{\rho(t)}$  es la función que describe el estado del sistema en el tiempo  $t$  siendo  $\rho(t)$  el operador densidad. Sean un conjunto de proyectores ortogonales de forma que  $P_n \mathcal{H} = \mathcal{H}_n$  son los subespacios de Zenón correspondientes de forma que,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n \quad (2.6)$$

Entonces, existen un conjunto de funciones  $f_{P_n}$  asociadas a dichos proyectores tales que,

$$\{f_{P_n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad f_{P_n} \star f_{P_m} = \delta_{mn} f_{P_n}, \quad \sum_n f_{P_n} = 1 \quad (2.7)$$

Una medida no selectiva puede ser descrita por

$$\text{Ad}_P(f_\rho) := \sum_n f_{P_n} \star f_\rho \star f_{P_n} \quad (2.8)$$

Además daremos la evolución del sistema tras  $N$  medidas en un cierto tiempo  $t$  en función del superoperador

$$\hat{V}_t^{(N)} = PU(t/N)PU(t/N) \dots PU(t/N) = [PU(t/N)]^N \quad (2.9)$$

de forma que su traducción al formalismo geométrico es

$$\text{Ad}_{\hat{V}_t^{(N)}} = (\text{Ad}_P \star \text{Ad}_{U(t/N)})(\text{Ad}_P \star \text{Ad}_{U(t/N)}) \dots (\text{Ad}_P \star \text{Ad}_{U(t/N)}) = (\text{Ad}_P \star \text{Ad}_{U(t/N)})^{\star N} \quad (2.10)$$

Si por último preparamos el sistema en el estado inicial  $\rho_0$  dado por

$$f_{\rho_0} = \text{Ad}_P(f_{\rho_0}) \quad (2.11)$$

la evolución será de la forma

$$f_{\rho(t)} = \text{Ad}_{\hat{V}_t^{(N)}}(f_{\rho_0}) = \sum_{n_1, \dots, n_N} f_{V_{n_1 \dots n_N}^{(N)}}(t) \star f_{\rho_0} \star f_{V_{n_1 \dots n_N}^{(N)\dagger}}(t) \quad (2.12)$$

donde

$$f_{V_{n_1 \dots n_N}^{(N)}}(t) = f_{P_{n_N}} \star f_{U(t/N)} \star f_{P_{n_{N-1}}} \dots f_{P_{n_2}} \star f_{U(t/N)} \star f_{P_{n_1}} \quad (2.13)$$

Si ahora se toma el límite cuando  $N$  tiende a infinito, es decir cuando se realizan mediciones de forma muy frecuente, se obtiene que la evolución en el subespacio  $n$ -ésimo de Zenón viene gobernada por

$$f_{U_Z^{(n)}(t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{V_{n \dots n}^{(N)}}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} [f_{P_n} \star f_{U(t/N)} \star f_{P_n}]^{\star N}, \quad (2.14)$$

con la condición adicional de que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f_{U_Z^{(n)}(t)} = f_{P_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

---

<sup>2</sup>Se hará uso de esta notación de aquí en adelante, de forma que si  $A$  es un operador y  $g$  una función sobre la variedad diferenciable, entonces  $\text{Ad}_A(g) := f_A \star g \star f_{A^{-1}}$ . En el caso de  $U(t)$  recordar que se trata de un operador unitario.

Para deducir (2.14) se ha hecho uso de que en el límite de medidas muy frecuentes, el intervalo temporal en el cual evoluciona el sistema entre medida y medida es prácticamente nulo. Ello implica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_{U(t/N)} = f_{U(0)} = 1.$$

De esta manera, y teniendo en cuenta (2.7) obtenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_{V_{n \dots n' \dots}^{(N)}(t)} = 0 \quad \text{para } n \neq n' \quad (2.16)$$

Es decir la dinámica queda restringida dentro de cada uno de los subespacios de Zenón, siendo la dinámica para cada subespacio independiente de los demás. Esto es debido a que el responsable de las transiciones entre los diferentes subespacios invariantes  $\mathcal{H}_n$  es  $f_{U(t/N)}$ .

Por tanto, el estado final después de haber dejado evolucionar al sistema durante un tiempo  $t$  es

$$f_{\rho(t)} = \sum_n Ad_{U_Z^{(n)}(t)}(f_{\rho_0}) \quad (2.17)$$

Además se demuestra que la probabilidad de permanencia del sistema en un cierto subespacio  $\mathcal{H}_n$  se conserva y que es imposible una “fuga” de probabilidad entre dos subespacios de Zenón distintos. Es por esto que se comentaba anteriormente el posible uso de este efecto para el control de la decoherencia en sistemas cuánticos. Para demostrar la conservación de la probabilidad (es decir, la unitariedad en cada subespacio  $\mathcal{H}_n$ ) se hace uso de la invariancia, demostrada anteriormente, de los diferentes subespacios de Zenón bajo la acción del operador de evolución de Zenón:

$$U_Z(t)P_n = P_n U_Z(t) \implies \{f_{U_Z}, f_{P_n}\} = 0 \quad \forall t. \quad (2.18)$$

Para demostrar que dicha probabilidad se conserva conviene usar el formalismo en la imagen de Heisenberg, de forma que dejemos que los proyectores sobre los diferentes subespacios de Zenón evolucionen de acuerdo con la ley de evolución dada en dicha imagen. Por otro lado  $p_n(t)$  es la probabilidad de encontrar el estado del sistema en el subespacio de Zenón  $n$ -ésimo a un tiempo  $t$ :<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} p_n(t) &= f_{P_n(t)} = f_{U_Z^\dagger(t)} \star f_{P_n(0)} \star f_{U_Z(t)} = \frac{1}{2} \left\{ f_{U_Z^\dagger(t)}, f_{P_n(0)} \star f_{U_Z(t)} \right\}_+ + \frac{i}{2} \left\{ f_{U_Z(t)}, f_{P_n(0)} \star f_{U_Z^\dagger(t)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ f_{U_Z^\dagger(t)}, \frac{1}{2} \{ f_{P_n(0)}, f_{U_Z(t)} \}_+ + \frac{i}{2} \{ f_{P_n(0)}, f_{U_Z(t)} \} \right\}_+ + \frac{i}{2} \left\{ f_{U_Z(t)}, \frac{1}{2} \{ f_{P_n(0)}, f_{U_Z(t)} \}_+ + \frac{i}{2} \{ f_{P_n(0)}, f_{U_Z(t)} \} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ f_{U_Z^\dagger(t)}, \{ f_{P_n(0)}, f_{U_Z(t)} \}_+ \right\}_+ + \frac{i}{4} \left\{ f_{U_Z^\dagger(t)}, \{ f_{P_n(0)}, f_{U_Z(t)} \}_+ \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para este último punto se hace uso de las igualdades (1.20) y (1.21) de forma que:

$$\begin{aligned} \left\{ f_{U_Z^\dagger(t)}, \{ f_{P_n(0)}, f_{U_Z(t)} \}_+ \right\} &= \left\{ \left\{ f_{U_Z^\dagger(t)}, f_{P_n(0)} \right\}, f_{U_Z(t)} \right\}_+ + \left\{ f_{P_n(0)}, \left\{ f_{U_Z^\dagger(t)}, f_{U_Z(t)} \right\} \right\}_+ = 0 \\ \left\{ f_{U_Z^\dagger(t)}, \{ f_{P_n(0)}, f_{U_Z(t)} \}_+ \right\}_+ &= \left\{ f_{U_Z^\dagger(t)}, \{ f_{U_Z(t)}, f_{P_n(0)} \}_+ \right\}_+ = \\ &= \left\{ \left\{ f_{U_Z^\dagger(t)}, f_{U_Z(t)} \right\}_+, f_{P_n(0)} \right\}_+ - \hbar^2 \left\{ f_{U_Z(t)}, \left\{ f_{P_n(0)}, f_{U_Z^\dagger(t)} \right\} \right\} = \\ &= \{2, f_{P_n(0)}\}_+ = 4f_{P_n(0)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

y se obtiene de esta forma que,

$$p_n(t) = \frac{1}{4} 4f_{P_n(0)} = p_n(0) \quad (2.21)$$

<sup>3</sup>Se aplicarán las relaciones dadas en (1.19)

En el artículo de P. Facchi y S. Pascazio (ver [8]) explican el fenómeno usando el ejemplo del caparazón de una tortuga como se muestra en la figura 2.2: el espacio de Hilbert total  $\mathcal{H}$  se divide en subespacios invariantes  $\mathcal{H}_n$  en los cuales  $f_{\rho(t)}$  evoluciona de forma independiente en cada sector. Cada uno de estos subespacios invariantes serían las escamas, de forma que no existe movimiento posible entre las diferentes escamas y sin embargo todos se mueven con la tortuga al mismo tiempo.

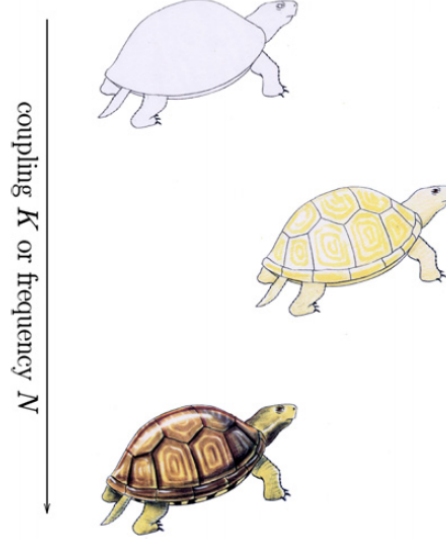


Figura 2.2: Subespacios de Zenón. El espacio de Hilbert del sistema se divide en sectores, de forma que conforme el número de medidas o el acoplamiento aumentan la dinámica queda tanto más restringida en dichos subespacios. Imagen sacada de [8]

Por último, como estamos trabajando con sistemas de dimensión finita y por tanto con Hamiltonianos acotados (ver sección 5 de [8]), se obtiene que la evolución dentro de cada subespacio invariante  $\mathcal{H}_n$  viene dada de forma explícita usando (2.14) por

$$f_{U_Z^{(n)}(t)} = f_{P_n} \star f_{\exp(-i P_n H P_n t)} \quad (2.22)$$

de forma que la evolución del sistema completo vendrá gobernada por **mirar si posible deducción**

$$\text{Ad}_{U_Z(t)}(f_\rho) = \sum_n f_{P_n} \star \exp_\star(-i f_{H_Z} t) \star f_{\rho_0} \star \exp_\star(i f_{H_Z} t) \star f_{P_n} \quad (2.23)$$

donde

$$f_{H_Z} = \sum_n f_{P_n} \star f_H \star f_{P_n} \quad (2.24)$$

es el Hamiltoniano global de Zenón.

### 2.3.2. Unitary kicks

En este caso es útil recordar el hecho de que para obtener QZE no es necesario realizar medidas proyectivas sino, más bien, partir de una evolución unitaria como se explica en [14] gobernada por algún aparato de medida con el cual el sistema de interés tiene un fuerte acoplo. Primero se hará uso de este tipo de evolución mediante un conjunto de transformaciones instantáneas unitarias y frecuentes para más adelante pasar al límite de acoplo continuo.

La idea subyacente de esta alternativa es la siguiente: supongamos que un sistema cuántico evoluciona libremente durante un cierto intervalo de tiempo  $\tau$ ; en ese momento el sistema recibe una “patada” (kick)

instantánea tal que se conserva la unitariedad, y además dicho proceso se repite  $N$  veces. A partir de este punto se puede demostrar que la evolución será de tipo Zenón, de forma que divide el espacio total en subespacios de Zenón determinados por los proyectores de la transformación unitaria  $U_{\text{kick}}$ .

En el lenguaje geométrico, la función evolución vendrá dada pasado un tiempo  $t$  y tras la realización de  $N$  medidas equiespaciadas por

$$f_{U_N(t)} = [f_{U_{\text{kick}}} \star f_{U(t/N)}] \star [f_{U_{\text{kick}}} \star f_{U(t/N)}] \cdots [f_{U_{\text{kick}}} \star f_{U(t/N)}] = [f_{U_{\text{kick}}} \star f_{U(t/N)}]^{\star N}, \quad (2.25)$$

donde dicha función no es real ya que los operadores no son Hermíticos. Es por ello que nuestro conjunto de funciones  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(M_Q)$  se ve extendido a  $\mathcal{F}(M_Q)$ .

El desarrollo presentado a continuación será una traducción al formalismo geométrico del artículo [15]. En el límite de  $N$  grande, la contribución dominante de  $f_{U_N(t)}$  es  $f_{U_{\text{kick}}^N(t)}$ , por lo cual se considera la secuencia de operadores unitarios

$$f_{V_N(t)} = f_{(U_{\text{kick}}^\dagger(t))^N} \star f_{U_N(t)} = [f_{U_{\text{kick}}^\dagger(t)}^*]^{\star N} \star f_{U_N(t)}, \quad (2.26)$$

de forma que el límite converja y donde  $f_{V_N(0)} = 1$  para todo  $N$ . A continuación se calcula la ecuación diferencial que cumple la función  $f_{V_N(t)}$  sin más que derivar respecto al tiempo la ecuación anterior, donde se ha tenido en cuenta que las funciones  $f_{U_{\text{kick}}}$  y  $f_{U(t/N)}$  no tienen por qué conmutar<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} f_{V_N(t)} &= i f_{(U_{\text{kick}}^\dagger(t))^N} \star \frac{d}{dt} f_{U_N(t)} \\ &= f_{(U_{\text{kick}}^\dagger(t))^N} \star \sum_{k=0}^{N-1} (f_{U_{\text{kick}}} \star f_{U(t/N)})^{\star k} \star \left( f_{U_{\text{kick}}} \star i \frac{d}{dt} f_{U(t/N)} \right) \star (f_{U_{\text{kick}}} \star f_{U(t/N)})^{\star N-k-1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como se ha tomado un Hamiltoniano independiente del tiempo, el operador evolución será de la forma  $U(t/N) = \exp(-iHt/N)$ . Puesto que nos interesa el límite para  $N$  grandes se puede desarrollar la exponencial en serie de Taylor y quedarnos a primer orden ( $U(t/N) \approx \text{id} - iHt/N$ ) de forma que

$$\frac{d}{dt} f_{U(t/N)} \approx \frac{-i}{N} f_H \quad (2.28)$$

así,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} f_{V_N(t)} &= \frac{1}{N} f_{(U_{\text{kick}}^\dagger(t))^N} \star \sum_{k=0}^{N-1} (f_{U_{\text{kick}}} \star f_{U(t/N)})^{\star k} \star f_{U_{\text{kick}}} \star f_H \star f_{U_{\text{kick}}^\dagger} \star \left( f_{U(t/N)^\dagger} \star f_{U_{\text{kick}}^\dagger} \right)^{\star k} \star (f_{U_{\text{kick}}} \star f_{U(t/N)})^{\star N} \\ &= f_{H_N(t)} \star f_{V_N(t)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$i \frac{d}{dt} f_{V_N(t)} = f_{H_N(t)} \star f_{V_N(t)}$$

de manera que en el límite  $N \rightarrow \infty$ , la evolución viene dada por la función,

$$f_{\mathcal{U}(t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{V_N(t)} \quad (2.30)$$

que satisface,

$$i \frac{d}{dt} f_{\mathcal{U}(t)} = f_{H_Z} \star f_{\mathcal{U}(t)} \quad [f_{\mathcal{U}(0)} = 1] \quad (2.31)$$

con la función de Zenón,

$$f_{H_Z} = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{H_N(t)}. \quad (2.32)$$

---

<sup>4</sup>Notar que si  $A$  es un operador, no necesariamente hermítico, entonces  $f_{A^\dagger} = f_A^*$  y por otro lado que debido a (1.19),  $f_{A^N} = [f_A]^{\star N}$ .

Por tanto  $f_{\mathcal{U}(t)} = f_{\exp(-i H_Z t)} = \exp_{\star}(-i f_{H_Z} t)$ . A partir de aquí uno puede mostrar que despreciando la contribución dada por  $f_{\mathcal{U}(t/N)}$  en  $f_{H_N(t)}$  cuando  $N \rightarrow \infty$  se obtiene que,

$$f_{H_Z} = \sum_n f_{P_n} \star f_H \star f_{P_n} \quad (2.33)$$

donde  $P_n$  son los proyectores sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  del operador unitario  $U_{\text{kick}}$ . Destacar por tanto que  $f_{H_Z}$ , se obtiene como la proyección de  $f_H$  en el centralizador de  $f_{U_{\text{kick}}}$ , es decir que:

$$\{f_{H_Z}, f_{U_{\text{kick}}}\} = 0 \quad (2.34)$$

### Un ejemplo

A continuación se ejemplifica la evolución dada por la alternativa *bang-bang* o de transformaciones unitarias. En este ejemplo se tiene un sistema de tres niveles acoplados dos a dos mostrado en la figura 2.3, donde entre los dos primeros estados se da una oscilación de Rabi<sup>5</sup> de frecuencia  $\Omega_1$ , mientras que un tercer estado los observa, pudiéndose interpretar esta última interacción como la pérdida de coherencia del subsistema formado por los dos primeros estados.

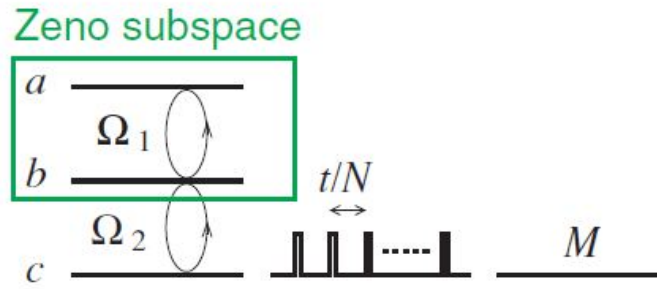


Figura 2.3: Sistema de tres niveles bajo la aplicación de *unitary kicks* que acopla uno de sus niveles a un sistema externo  $M$ . Se representa de forma explícita el subespacio de Zenón  $\mathcal{H}_1$ . [8]

Al proteger el subespacio  $\mathcal{H}_1$  determinado por los estados  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  de la decoherencia, mediante el acoplo con un instrumento externo  $|M\rangle$  que aplica pulsos (de luz por ejemplo) al sistema, se observa como dicho subespacio es liberado de la decoherencia. El sistema en cuestión viene determinado por:

$$\langle a| = (1, 0, 0, 0) \quad \langle b| = (0, 1, 0, 0)$$

$$\langle c| = (0, 0, 1, 0) \quad \langle M| = (0, 0, 0, 1)$$

$$H_{\text{sist}} = \Omega_1(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|) + \Omega_2(|b\rangle\langle c| + |c\rangle\langle b|) \text{ con } \Omega_1 \text{ y } \Omega_2 \in \mathbb{R}$$

y en el formalismo geométrico en coordenadas  $\{q_k, p_k\}$  toma la forma,

$$f_{H_{\text{sist}}} = \Omega_1(q_1 q_2 + p_1 p_2) + \Omega_2(q_2 q_3 + p_2 p_3)$$

Por otro lado la transformación unitaria,

$$U_{\text{kick}} = id_4 + id_2 \otimes e^{-i\theta\sigma_1}$$

<sup>5</sup>El modelo Rabi aparece en la modelización de transiciones entre dos niveles cuánticos  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$  con una diferencia de energía  $\hbar\omega_0$ .

o

$$f_{U_{\text{kick}}} = \frac{1}{2} [q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2 + \cos(\theta)(q_3^2 + q_4^2 + p_3^2 + p_4^2) - 2i \sin(\theta)(q_3 q_4 + p_3 p_4)]$$

En la gráfica 2.4(b) se observa tanto la evolución libre, en la cual no aplicamos pulsos, como la evolución de tipo *bang-bang*. En la gráfica 2.4(a) se observa que a menores intervalos temporales entre la aplicación de dos transformaciones unitarias consecutivas, la probabilidad de encontrar el estado en el subespacio  $\mathcal{H}_1$  aumenta. Además la dependencia con el parámetro  $\lambda$  no es relevante y sólo varía la frecuencia de oscilación de la onda observada.

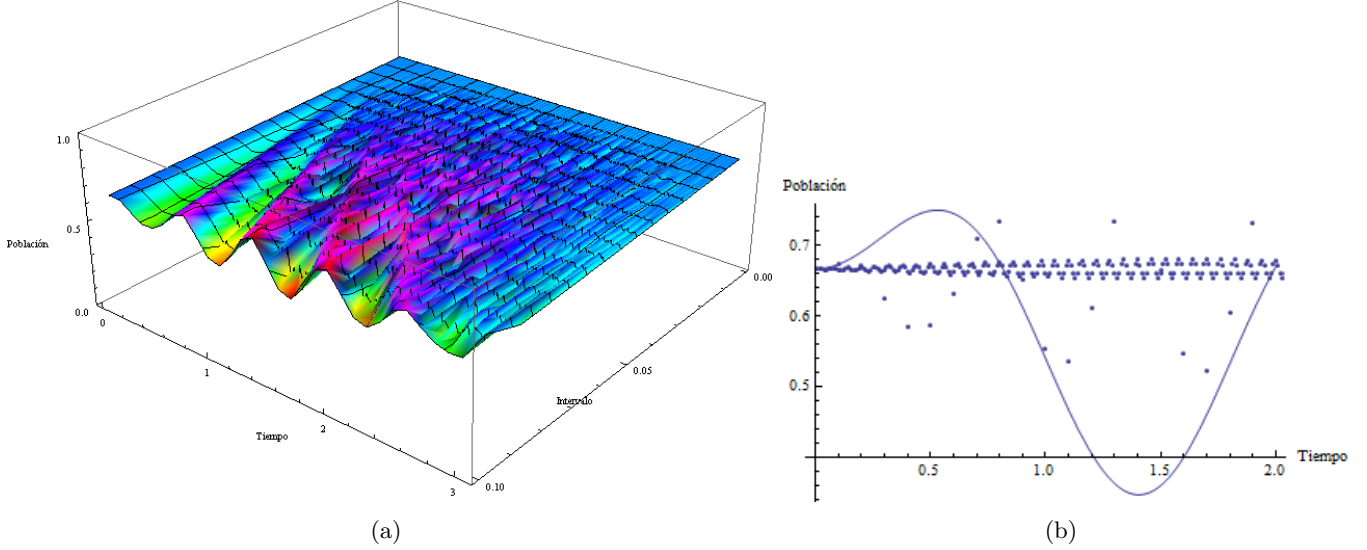


Figura 2.4: Evolución *bang-bang* para un sistema de tres niveles en función de: (a) el intervalo temporal entre *kicks*. Se observa como a menores intervalos temporales la probabilidad de permanencia en el subespacio  $\mathcal{H}_1$  aumenta. En la imagen (b) se compara la evolución libre del sistema (línea continua) con la evolución *bang-bang* para dos intervalos temporales distintos:  $\tau = 0,01$  y  $0,003$ . Población hace referencia a la probabilidad de permanencia en un cierto subespacio. Se ha usado como parámetro  $\theta = \pi/3$ .

### 2.3.3. Acoplo continuo fuerte

Hasta ahora las dos alternativas planteadas para conseguir una evolución de tipo Zenón han sido proyecciones tipo von Neumann y *Unitary kicks*, es decir procesos en los que se supone que la transformación (bien sea la proyección o la transformación unitaria tipo *kick*) toma lugar de forma instantánea, es decir en una escala de tiempos mucho menores que las otras escalas de tiempo que caracterizan la evolución del sistema. Por otro lado, las escalas cortas de tiempo pueden ser asociadas con acoplos fuertes. Es por ello que en definitiva, se puede pensar que las propiedades básicas del QZE se pueden obtener mediante un acoplo continuo y fuerte con un sistema externo, el cual realiza una especie de medidas de forma uniforme en el tiempo.

Supongamos una función Hamiltoniana genérica de la forma:

$$f_{H_K} = f_H + K f_{H_{\text{med}}(t)}, \quad (2.35)$$

donde  $f_H$  representa la función Hamiltoniana del sistema cuántico y  $f_{H_{\text{med}}(t)}$  es un término de interacción que representa al sistema de medida con una constante de acoplo  $K$ . A continuación, de modo análogo al desarrollo presentado en [16], se demostrará que en el límite  $K \rightarrow \infty$ , la función evolución<sup>6</sup>

$$f_{\mathcal{U}(t)} = \lim_{K \rightarrow \infty} f_{U_K(t)} \quad (2.36)$$

<sup>6</sup>Recordar que para introducir la función sobre la variedad real diferenciable  $M_Q$  de un operador no unitario es necesario hacer una complexificación del espacio donde se trabaja ya que dicha función no pertenece al conjunto de funciones  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(M)$



donde por  $U_K(t)$  se hace referencia al operador evolución del sistema completo, será diagonal con respecto a  $f_{H_{\text{med}}}$ , lo cual en términos de operadores significa,

$$\mathcal{U}(t)P_n = \mathcal{U}(t)P_n \text{ con } H_{\text{med}}(t)P_n = \eta_n P_n \quad (2.37)$$

donde  $P_n$  son los proyectores asociados a  $H_{\text{med}}(t)$  y  $\eta_n$  es el autovalor correspondiente al subespacio  $\mathcal{H}_{P_n}$ , el cual permanece invariante.<sup>7</sup>

En el lenguaje geométrico ello implica que obtendremos un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas entre las coordenadas que representan los distintos subespacios, por tanto

$$[f_{\mathcal{U}(t)}, f_{P_n}] = 0. \quad (2.38)$$

Para demostrarlo se hace uso de la imagen de interacción en el formalismo geométrico y del teorema adiabático en mecánica cuántica (consultar página 740 de [17]). Supóngase el caso de un sistema cuántico determinado por

$$H_K(t) = H(t) + KH_{\text{med}}(t) \quad (2.39)$$

de forma que aplicando la transformación unitaria  $U_0^\dagger$ , se describe el sistema en la imagen de interacción. De este modo, la evolución viene dada por  $U_K^I(t)$ , que cumple la ecuación diferencial,

$$i\hbar \partial_t U_K^I(t) = H_{\text{int}}^I(t) U_K^I(t). \quad (2.40)$$

Sea  $f_{U_K^I(t)}$  la función asociada al operador evolución en la imagen de interacción de forma que

$$f_{U_K^I(t)} = \langle \psi^I(0) | U_K^I(t) \psi^I(0) \rangle. \quad (2.41)$$

Derivando,

$$i\hbar \partial_t f_{U_K^I(t)} = i\hbar \langle \psi^I(0) | \partial_t U_K^I(t) \psi^I(0) \rangle = \langle \psi^I(0) | KH_{\text{med}}(t) U_K^I(t) \psi^I(0) \rangle \quad (2.42)$$

es decir,

$$i\hbar \partial_t f_{U_K^I(t)} = K f_{H_{\text{med}}(t)} \star f_{U_K^I(t)}. \quad (2.43)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la evolución adiabática con la condición equivalente  $K \rightarrow \infty$ . Suponiendo que  $f_{H_{\text{med}}(t)}$  varíe lentamente en el tiempo de forma que se cumpla el teorema adiabático se obtiene que,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} f_{U_K^I(t)} \star f_{P_n^I(0)} = f_{P_n^I(t)} \star \lim_{K \rightarrow \infty} f_{U_K^I(t)} \quad (2.44)$$

es decir, la evolución lleva estados de  $\mathcal{H}_{P_n^I(0)}$  a  $\mathcal{H}_{P_n^I(t)}$ :

$$|\psi_0^I\rangle \in \mathcal{H}_{P_n^I(0)} \longrightarrow |\psi^I(t)\rangle \in \mathcal{H}_{P_n^I(t)}. \quad (2.45)$$

Falta ver que dicha propiedad se mantiene en la imagen de Schrödinger, para lo cual se aplica la transformación inversa y de nuevo se hace uso de (1.19),

$$f_{\mathcal{U}(t)} \star f_{P_n(0)} = f_{U_0 \mathcal{U}^I(t) U_0^\dagger} \star f_{U_0 P_n^I(0) U_0^\dagger} = f_{U_0} \star f_{\mathcal{U}^I(t)} \star f_{P_n^I(0)} \star f_{U_0^\dagger} = f_{U_0} \star f_{P_n^I(t)} \star f_{U_K^I(t)} \star f_{U_0^\dagger} = f_{P_n(t)} \star f_{\mathcal{U}(t)} \quad (2.46)$$

y por tanto,

$$|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}_{P_n(0)} \longrightarrow |\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}_{P_n(t)}. \quad (2.47)$$

De nuevo, de modo análogo al caso de *Unitary kicks* se encuentra que,

$$p_n(t) = p_n(0). \quad (2.48)$$

---

<sup>7</sup>ver en apéndice A DFN A.15.

### Un ejemplo

A continuación se presenta el mismo sistema que en el caso de evolución *bang-bang*, pero en este caso presenta un acoplo continuo con el sistema de medida (ver figura 2.5) cuya intensidad viene dada por la constante  $K$ .

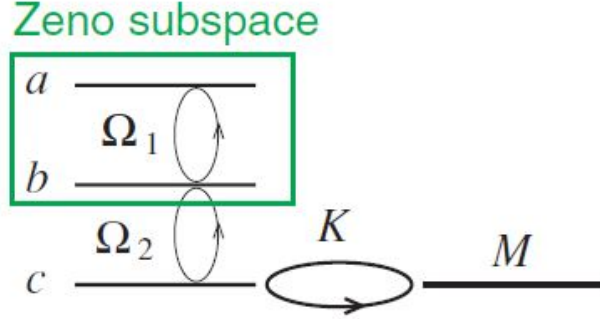


Figura 2.5: Sistema de tres niveles con uno de sus niveles acoplado de forma fuerte a un sistema externo  $M$ . Se representa de forma explícita el subespacio de Zenón  $\mathcal{H}_1$ . [8]

El Hamiltoniano del sistema de medida y su interacción viene dado por,

$$KH_{\text{med}} = K(|c\rangle\langle M| + |M\rangle\langle c|) \text{ con } K \in \mathbb{R}$$

Previo a analizar los resultados finales, es útil comparar los campos Hamiltonianos determinados por la evolución libre y la evolución de Zenón en función de las coordenadas  $\{q_k, p_k\}$ .

$$\begin{aligned} X_Z &= Kp_4 \frac{\partial}{\partial q_3} + Kp_3 \frac{\partial}{\partial q_4} - Kq_4 \frac{\partial}{\partial p_3} - Kq_3 \frac{\partial}{\partial p_4} \\ X_H &= \Omega_1 p_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + (\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_3) \frac{\partial}{\partial q_2} + (\Omega_2 p_2 + Kp_4) \frac{\partial}{\partial q_3} + Kp_3 \frac{\partial}{\partial q_4} - \Omega_1 q_2 \frac{\partial}{\partial p_1} \\ &\quad - (\Omega_1 q_1 + \Omega_2 q_3) \frac{\partial}{\partial p_2} - (\Omega_2 q_2 - Kq_4) \frac{\partial}{\partial p_3} - Kq_3 \frac{\partial}{\partial p_4} \end{aligned}$$

Ver que el campo de Zenón no engloba las coordenadas referentes al subespacio invariante que se quiere proteger de la evolución, es decir aquellas que representan al sistema. La figura 2.6 muestra la población existente en el subespacio  $\mathcal{H}_1$  en función del tiempo y de la constante de acoplo  $K$ . Se observa que cuando  $K$  es suficientemente grande, la evolución del sistema es tipo Zenón y se conserva la unitariedad. Se ha partido de un estado inicial en coordenadas  $\{q^i, p_i\}$  dado por

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \Rightarrow p_{\mathcal{H}_1}(0) = \frac{1}{2}$$

y se ha tomado  $\Omega_1 = 1$  y  $\Omega_2 = 2$ , es decir el acoplo entre  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  es menor que el que refleja la decoherencia. En este caso se observa que cuanto mayor es la intensidad de acoplo del sistema de medida, más restringida está la evolución dentro del subespacio  $\mathcal{H}_1$ . Por tanto se aprecia como el acoplo con el aparato de medida inhibe la decoherencia creada por el estado  $|c\rangle$ . No obstante si  $\Omega_2 \gg K$  y que  $\Omega_1$ , entonces los subespacios invariantes son distintos y no se protege  $\mathcal{H}_1$ . Para ejemplificarlo se parte de unas condiciones iniciales:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow p_{\mathcal{H}_1}(0) = 1$$

de forma que la evolución en función del parámetro  $\Omega_2$  viene dada por la figura 2.7.

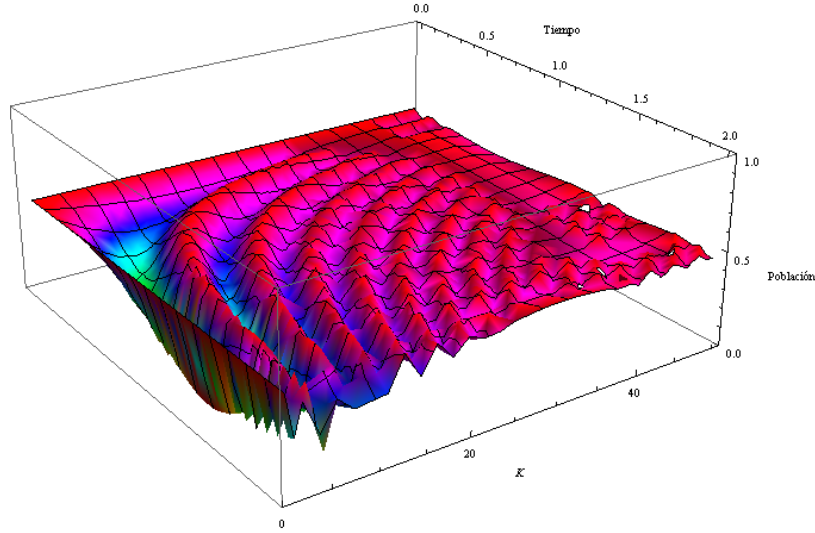


Figura 2.6: Población del subespacio  $\mathcal{H}_1$  en función del tiempo. De nuevo se observa que cuanto mayor es el acoplo, más se localiza el sistema en el subespacio  $\mathcal{H}_1$ . Así se puede entender la analogía dada en la figura 2.2

Es interesante resaltar que mientras que en la primera formulación cualquier término de coherencia entre subespacios distintos se desvanece tras la primera proyección, tales términos son preservados en las evoluciones dadas por las otras dos formulaciones. Sin embargo parece ser que dichos términos son inobservables en el límite  $N$ -grande y  $K$ -grande.

## 2.4. Conclusión

En esta formulación aparece de forma natural desde una perspectiva geométrica y resalta la diferencia esencial entre las mecánicas clásica y cuántica. También sirve para unificar de forma coherente una serie de generalizaciones propuestas de la mecánica cuántica, como su unificación con la relatividad general.

Cuando uno compara los marcos formales que subyacen en ambas mecánicas uno encuentra que la descripción clásica es geométrica y en general no lineal mientras que la descripción cuántica es algebraica y totalmente **lineal** formulado sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , lo cual desde una perspectiva general es bastante sorprendente, puesto que en física las estructuras lineales generalmente proceden de aproximaciones de estructuras no lineales más exactas. Sin embargo en este contexto, es la teoría más profunda y más correcta la que es lineal y la no lineal, geométrica y clásica es alcanzada en un cierto límite. No obstante la mecánica cuántica no es tan lineal como parece, ya que el espacio de estados físicos no es el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  sino el espacio complejo proyectivo  $\mathcal{P}$ , el cual es una variedad no lineal y más aún, una variedad Kähler, lo cual implica que el espacio de estados cuánticos correcto es una variedad simpléctica como en el caso clásico. Es por ello que introducir un lenguaje tensorial nos permite abordar directamente los problemas en el espacio complejo proyectivo. Por tanto, la dinámica en la formulación tensorial no tiene por qué ser lineal, incluso no es necesario que la evolución venga dada por operadores unitarios (que conserven la norma y por tanto la probabilidad) ya que trabajamos directamente sobre el proyectivo. Por todo ello esta formulación generaliza la mecánica cuántica y permite introducir dinámicas como la del efecto Zenón,

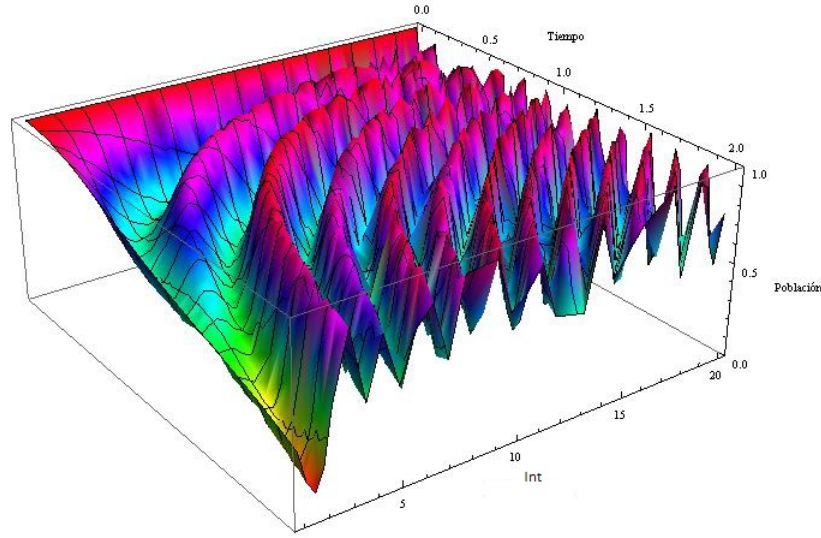


Figura 2.7: Población en subespacio  $\mathcal{H}_1$  en función del tiempo. Se ve como en este caso la población no está restringida al subespacio, y se da una evolución "libre" respecto del subespacio  $\mathcal{H}_1$

determinadas por campos Hamiltonianos directamente sobre el espacio proyectivo,  $X_H = \Omega_{\mathcal{P}}(\cdot, de_H)$ .

Además, mediante esta formulación, uno puede distinguir las estructuras que subyacen en la mecánica cuántica, algunas con análogos directos en la mecánica clásica, las cuales son referidas sólo a la parte simpléctica, y por otro lado, aquellas características tales como las incertidumbres y la reducción del estado en los procesos de medida, referidas a la métrica Riemanniana.

Por otro lado, esta formulación nos aporta una nueva perspectiva de las interacciones entre la mecánica clásica y la cuántica. Pensemos por ejemplo en un sistema de dos partículas clásicas, pongamos un péndulo doble plano cuyo espacio de fases viene dado por  $T^*S^1 \times T^*S^1$ . En este caso hemos compuesto dos sistemas, cada uno de los cuales es Hamiltoniano respecto de su estructura simpléctica que en coordenadas  $(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2)$  vienen dadas por  $(T^*S^1, \omega_1 = d\theta_1 \wedge dp_1)$  y  $(T^*S^1, \omega_2 = d\theta_2 \wedge dp_2)$ . El sistema compuesto es Hamiltoniano respecto a la estructura simpléctica  $(T^*S^1 \times T^*S^1, \omega_1 + \omega_2)$  y en dicho espacio podemos obtener las ecuaciones de Hamilton. De modo análogo se puede dar el caso de un sistema cuántico puro, como es el caso de la dinámica molecular, en el cual mediante una serie de aproximaciones describimos la dinámica nuclear mediante un sistema clásico y la dinámica de los electrones mediante un sistema cuántico. Esta aproximación, conocida como dinámica de Ehrenfest, viene descrita por un sistema compuesto por el sistema clásico nuclear  $(M_C, \omega_C)$  y el cuántico  $(M_Q, \omega_Q)$ , de modo que la variedad del sistema compuesto sea  $M_C \times M_Q$ . En este caso si cada uno de los sistemas es Hamiltoniano, el sistema compuesto también lo será y vendrá descrito por las ecuaciones de Hamilton, de forma que se tiene un sistema en el cual aparecen efectos cuánticos y clásicos y cuya dinámica viene gobernada por el campo Hamiltoniano determinado por la forma simpléctica  $\omega = \omega_C + \omega_Q$ .

## 2.5. Validación experimental

El efecto Zenón cuántico es difícil de observar en decaimientos espontáneos debido a que el intervalo en el cual la probabilidad crece cuadráticamente es muy corto comparado a el tiempo requerido para hacer la

medida. Sin embargo, se puede observar dicho fenómeno en transiciones inducidas debido a la inhibición de estas cuando se realizan medidas frecuentes. En este caso se comentará el experimento realizado por Itano *et al.* en [6] con un conjunto de iones  ${}^9\text{Be}^+$ , modelo experimental el cual fue planteado anteriormente por Cook en [7].

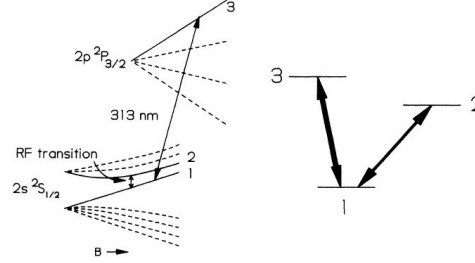


Figura 2.8: Comparativa de diagrama de niveles de energía propuesto por Cook [7] y diagrama para el  ${}^9\text{Be}^+$  usado en el experimento por Itano *et al.* [6]

Sea un sistema formado por dos estados: el estado 1 dado por el nivel fundamental y el estado 2 dado por un estado excitado metaestable de forma que la transición espontánea del 1 al 2 sea despreciable. La forma de forzar las transiciones  $1 \longleftrightarrow 2$  es mediante pulsos cuadrados de duración  $T = \pi/\Omega$ , siendo  $\Omega$  la frecuencia de Rabi entre dichos subniveles. Tener en cuenta que como la transición es forzada, en caso de no realizar ninguna medida la probabilidad de transición será uno. Asumamos que un tercer nivel puede realizar transiciones al estado fundamental de forma que la medida se realizará obligando a que se produzca la transición  $1 \rightarrow 3$  mediante un pulso óptico corto. De esta forma si al medir el ión está en el nivel 1 al principio del pulso, oscilará entre los niveles 1 y 3 emitiendo una serie de fotones hasta que el pulso sea apagado. En caso de que esté en el nivel 2 no se emitirán fotones. Si esta medida es continuada por otra inmediatamente después el resultado será prácticamente el mismo.

Los niveles 1 y 2 son en este caso los subniveles hiperfinos  $(m_I, m_J) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})^8$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  del nivel fundamental  ${}^2S_{1/2}$  del  ${}^9\text{Be}^+$ . El nivel 3 es el subnivel  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  del estado  $2p_{3/2}^2$  el cual decae al nivel 1. Para un número  $n$  de medidas los resultados obtenidos y la comparación con los resultados predichos se muestran en el histograma 2.9. Por tanto el decrecimiento de la probabilidad de transición conforme  $n$

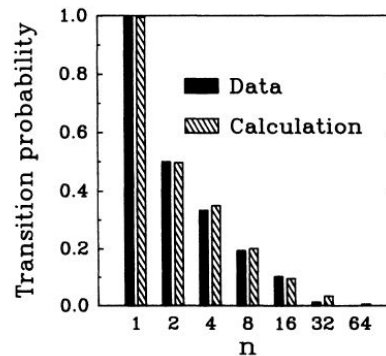


Figura 2.9: Histograma con las probabilidades de transición, tanto experimental como predichas, para  $1 \rightarrow 2$  en función del número de pulsos de medida  $n$ . [6]

aumenta, demuestra la existencia del efecto Zenón cuántico. Existen además muchos otros experimentos que han corroborado su existencia así como la existencia del efecto Zenón inverso como por ejemplo: [18], [19] y [20] entre otros.

<sup>8</sup>El subíndice  $I$  hace referencia al spin del núcleo del ión. La estructura hiperfina es debida a la interacción entre el momento magnético del núcleo y el de los electrones.

## Apéndice A

# Algunos conceptos de geometría diferencial

**DFN A.1.** Una variedad topológica  $M$  de dimensión  $n$  es un espacio localmente Euclídeo, lo que significa que para todo punto  $x \in M$  existe un entorno abierto  $\mathcal{U}$  de  $x$  y un homeomorfismo  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $\varphi(\mathcal{U})$  abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

Al par  $(\mathcal{U}, \varphi)$  se le denomina *carta local* de  $M$  en  $x$ . Un ejemplo, de variedad topológica es la circunferencia,  $S^1$  donde como carta puede ser usada entre otras la proyección estereográfica desde el polo norte  $N = (0, 1)$  o la parametrización de la circunferencia con un ángulo  $\alpha$ .

Una vez se ha introducido el concepto de variedad topológica, podemos pasar a definir *variedad diferenciable*.

**DFN A.2.** Una *variedad diferenciable*  $M$  de dimensión  $n$  y de clase  $C^\infty$  es una variedad topológica de dimensión  $n$  tal que existe un sistema de cartas locales  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  que satisfacen

$$\text{I) } \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha = M$$

$$\text{II) Para todo } \alpha, \beta \in A \text{ tal que } \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset \text{ la aplicación}$$

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \quad (\text{A.1})$$

es diferenciable de clase  $C^\infty$  (y, por tanto un difeomorfismo).

El significado de esta definición es que podemos encontrar un conjunto de abiertos  $\mathcal{U}_\alpha$  cuya unión cubra toda la variedad de forma que aunque dos de ellos solapen, el cambio de coordenadas de uno a otro es un difeomorfismo, es decir que el cambio de un sistema de coordenadas a otro es suave.

Como ejemplo sencillo de variedad diferenciable podemos pensar en cualquier abierto de  $\mathbb{R}^n$ , donde existe una carta global  $(\mathbb{R}^n, id_R)$

Cabría pensar qué relación tiene esta definición matemática tan abstracta con la física. Para apreciar dicho enfoque se recomienda leer el capítulo 2 de [21]. La definición aquí dada de variedad diferenciable no es la más general ni la más rigurosa. Para ver desarrollos más rigurosos de este concepto ver [22] y [23].

**DFN A.3.** sea  $M$  una variedad diferenciable y  $p \in M$ . LLamaremos vector tangente en  $p$  a toda aplicación  $X_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique:

$$\text{I) } X_p \text{ es lineal, es decir: } X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p(f) + \mu X_p(g), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

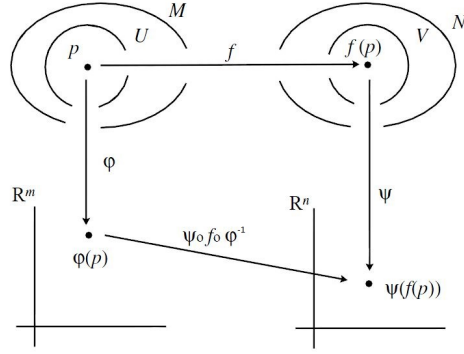


Figura A.1: Representación visual. [10]

II)  $X_p(f, g) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$  (Regla de Leibniz).

**DFN A.4.** LLamaremos espacio vectorial tangente a  $M$  en el punto  $p$  al espacio vectorial de los vectores en el punto  $p$ . Será denotado por  $T_p(M)$ .

De forma intuitiva un campo vectorial en un abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  es una aplicación que asigna a cada punto  $p \in \mathcal{U}$  un vector  $X_p \in T_p\mathcal{U}$ . El conjunto

$$T\mathcal{U} = \bigcup_{p \in \mathcal{U}} T_p\mathcal{U}$$

es el conjunto de todos los pares  $(p, X_p)$  con  $p \in \mathcal{U}$  y  $X_p \in T_p\mathcal{U}$ . Si denotamos por  $\tau$  la proyección  $\tau : T\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  definida por  $\tau(p, X_p) = p$ , un campo vectorial en  $\mathcal{U}$  es una aplicación  $X : \mathcal{U} \rightarrow T\mathcal{U}$  tal que  $\tau \circ X = \text{id}_{\mathcal{U}}$ .

**DFN A.5.** El conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

se denomina **fibrado tangente** de la variedad  $M$ .

Además diremos que un campo vectorial  $X$  es diferenciable en la variedad  $M$  si y sólo si para cada carta  $(\mathcal{U}, \phi)$  de  $M$ , las componentes del campo respecto de dicha carta son diferenciables. El conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre la variedad  $M$  al cual denotamos  $\mathcal{X}(M)$ , es un espacio vectorial real respecto a la operación suma y producto por escalar y puede ser dotado de una estructura de  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo.

**Ejemplo:**

Si la variedad es  $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ . El campo gravitatorio viene definido por algo proporcional al campo,

$$X_p = \sum_{i=1}^3 \frac{x^i}{r^3} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

Por otro lado el dual de  $T_pM$  recibe el nombre de espacio vectorial cotangente en  $p \in M$  y se denota  $T_p^*M$ . Sus elementos se llaman covectores en  $p$  o vectores covariantes. Por ejemplo, para cada función  $f \in \mathcal{C}^\infty(p)$ , podemos definir un covector en  $p$  que denotamos  $(df)_p$  por  $(df)_p(X_p) = X_p f$ .

Una 1-forma diferencial en una variedad diferenciable  $M$  es una aplicación

$$\omega : M \rightarrow T^*M$$

tal que  $\omega_p \in T_p^*M$ .

**DFN A.6.** El conjunto

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

se denomina **fibrado cotangente** de la variedad  $M$ .

Asociado a este espacio podemos definir la proyección (natural)

$$\pi_M : T^*M \rightarrow M$$

definida como sigue

$$\pi_M(p, \omega_p) = p, \quad \omega_p \in T_p^*M$$

Por ejemplo cuando un sistema mecánica admite una variedad diferenciable  $Q$  como espacio de configuración, la descripción del sistema en el espacio de fases hace uso del fibrado cotangente, en donde el campo vectorial Hamiltoniano  $X_H$  en  $T^*Q$  admite una expresión coordenada,

$$X_H|_{(q,p)} = a^i(q,p) \frac{\partial}{\partial q^i} |_{(q,p)} + b^i(q,p) \frac{\partial}{\partial p^i} |_{(q,p)}$$

Describamos a continuación lo que denominamos diferencial y codiferencial de una aplicación  $F : M \rightarrow N$ , siendo  $M$  y  $N$  variedad diferenciales.

Sea  $F : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable de  $M$  a  $N$ . Para cada punto  $p \in M$ , la diferencial de  $F$  en  $p \in M$ , denotada como  $F_{*p}$ , definida mediante  $F_{*p}(X_p)f = X_p(f \circ F)$ ,  $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(F(p))$  es un morfismo de espacios vectoriales,  $F_{*p} : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ . Por tanto  $F$  induce una aplicación  $F_*$  que transporta vectores tangentes  $X_p$  del conjunto de curvas que pasan por  $p$ , a vectores tangentes  $X_{F(p)}$  de curvas que pasan por  $F(p) \forall p \in M$ .

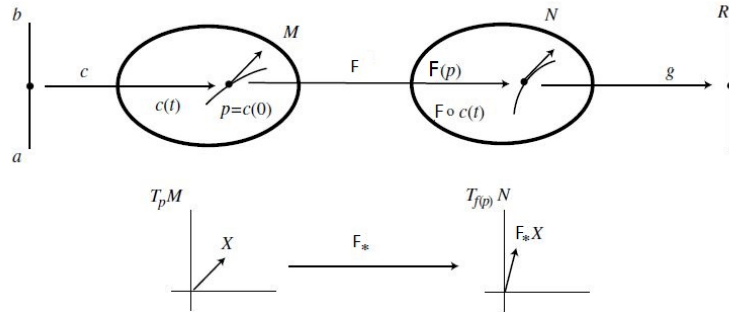


Figura A.2: La aplicación  $F : M \rightarrow N$  induce la aplicación diferencial  $F_* : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ .  $c(t)$  representa una curva sobre  $M$  y  $g$  una función definida sobre  $N$ . Imagen sacada de [10]

Del mismo modo una aplicación  $F : M \rightarrow N$  induce una aplicación  $F^* : T_{F(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ , de modo que para cada 1-forma diferencial  $\omega$  definida sobre  $N$  podemos definir una 1-forma diferencial en  $M$ , que se denotará  $F^*(\omega)$  y se dice imagen recíproca (pullback) de  $\omega$ , mediante

$$[(F^*(\omega)X)](p) = [(F^*(\omega))]_p X_p = \omega_{F(p)} [F_{*p}(X_p)], \quad \forall X \in \mathcal{X}(M)$$

Una vez definido el espacio tangente  $T_pM$  y su dual  $T_p^*M$  podemos construir el álgebra tensorial  $\mathcal{T}_pM$  correspondiente a  $T_pM$ , siendo los elementos de un subespacio de  $\mathcal{T}_pM$  de la forma  $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \dots \otimes v_{r+s}$  donde  $v_i \in T_pM$  con  $i = 1, \dots, r$  y  $v_i \in T_p^*M$  para los  $s$  índices restantes. Dicho elementos reciben el nombre de tensores en  $p$  de tipo  $(r, s)$ .

Por último definamos las formas diferenciales. Una 1-forma diferencial es una variedad diferenciable  $M$



**DFN A.7.** Si  $X$  es un campo vectorial sobre una variedad  $M$ , se dice que una curva diferenciable  $\gamma : I \rightarrow M$ , es una curva integral del campo  $X$  si

$$\frac{d\gamma}{dt}|_{t=t_0} = X_{\gamma(t_0)} \quad (\text{A.2})$$

Si tomamos una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $p \in \gamma(I)$  podemos expresar la curva en coordenadas de forma que  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $c = \varphi \cdot \gamma$ . La curva  $c$  así definida es una curva integral del campo  $\varphi_*(X)$  de forma que

$$\frac{dc^i}{dt} = F^i(c^1(t), \dots, c^m(t)) \quad (\text{A.3})$$

donde  $F^i$  son las componentes del campo  $\varphi_*(X)$  en  $\mathbb{R}^m$  respecto de la base canónica en  $\mathbb{R}^m$ .

**DFN A.8.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Se llama forma simpléctica en  $M$  a una 2-forma cerrada ( $d\omega = 0$ ) no degenerada (rango máximo)  $\omega$ . El par  $(M, \omega)$  recibe el nombre de variedad simpléctica. En particular, cuando  $\omega$  es exacta ( $\omega = d\Theta$ ) se dice que  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica exacta.

Un ejemplo sencillo de variedad simpléctica es la esfera  $S^2$  con la 2-forma diferencial dada por

$$\omega = \sin\theta d\phi \wedge d\theta \quad (\text{A.4})$$

donde  $\omega$  viene a representar el elemento de área inducido sobre la esfera unidad.

El estudio de las variedades simplécticas está basado en el teorema siguiente, el cual caracteriza localmente dichas variedades.

**Teorema A.0.1.** (*Teorema de Darboux*) Si  $\omega$  es una forma simpléctica en una variedad diferenciable  $M$ , para cada punto  $x \in M$  hay una carta local coordenada en torno a  $x$  en la cual las coordenadas de  $\omega$  son constantes.

*Corolario.* Si  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica de dimensión finita  $2n$ , entonces, alrededor de cada punto  $x \in M$ , hay una carta coordenada  $(\mathcal{U}, \varphi)$ , en donde la aplicación  $\varphi$  está dada por  $\varphi(x) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ , tal que  $\omega$  se escribe como:

$$\omega_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$$

A tales coordenadas  $(q^i, p_i)$  se les denomina coordenadas canónicas o de Darboux.

**DFN A.9.** Sea  $M$  una variedad  $m$ -dimensional y  $T_p M$  el espacio tangente en  $p \in M$ . Una distribución  $k$ -dimensional sobre  $M$  es una elección de un subespacio lineal  $k$ -dimensional  $D_p \subset T_p M$  para cada punto  $p \in M$ . Dicha distribución denotada como  $D$ , viene dada por

$$D = \coprod_{p \in M} D_p \subset TM$$

Diremos que dicha distribución es integrable si  $D_p = T_p M$  para todo  $p \in M$ .

**DFN A.10.** Si  $X \in \mathcal{X}(M)$ , se denota por  $i_X$  o  $i(X)$  a la aplicación  $i_X : \bigwedge(M) \rightarrow \bigwedge(M)$  (conjunto de formas antisimétricas sobre  $M$ ) tal que

- i)  $i_X \bigwedge^r(M) \subset \bigwedge^{r-1}(M)$  si  $r \geq 1$  mientras que  $i_X \bigwedge^0(M) = 0$ .
- ii) Si  $\omega \in \bigwedge^r(M)$ , entonces  $i_X \omega(X_1, \dots, X_{r-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{r-1})$ .

**DFN A.11.** Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $X$  un campo vectorial y  $\Phi_t$  el flujo de dicho campo. Si  $p \in M$ , entonces recordar que  $X_p$  es el vector tangente al flujo en el punto  $p$ , es decir  $X_p = \frac{d}{dt}\Phi_t(p)|_{t=0}$ . De esta forma como  $(Xf)(p) = X_p f$  se puede ver que

$$(Xf)(p) = \frac{d}{dt} [f(\Phi_t(p))] |_{t=0} \quad (\text{A.5})$$

La generalización para campos vectoriales covariantes es:

Para cada campo vectorial  $X \in \mathcal{X}(M)$  y cada campo  $r$ -covariante  $\omega$  se define la derivada de Lie de  $\omega$  según el campo vectorial  $X$  como el campo  $r$ -covariante,

$$(\mathcal{L}_X \omega)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\Phi_t^* \omega)(p) - \omega(p)] \quad (\text{A.6})$$

Además a continuación se presentan algunas propiedades útiles de la derivada de Lie.

i) Si  $f \in C^\infty(M)$  y  $\omega$  es un campo  $r$  veces covariante, para cada campo vectorial  $X \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$\mathcal{L}_X(f\omega) = (Xf)\omega + f\mathcal{L}_X\omega$$

ii) Si  $T$  y  $S$  son dos tensores sobre la variedad  $M$ , entonces

$$\mathcal{L}_X(T \otimes S) = (\mathcal{L}_X T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_X S)$$

iii) Para cada  $f \in C^\infty(M)$  y cada  $X \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$\mathcal{L}_X df = d(Xf) = d(\mathcal{L}_X f)$$

iv) Se puede demostrar que si  $X$  e  $Y$  son dos campos vectoriales diferenciables definidos sobre  $M$ , entonces

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Como ejemplo vamos a calcular  $\mathcal{L}_X G$  siendo  $G = g_{ij}(q) dq_i \otimes dq_j$

$$\mathcal{L}_X G = (Xg_{ij}(q)) dq_i \otimes dq_j + g_{ij}(q) d(Xq_i) \otimes dq_j + g_{ij}(q) dq_i \otimes d(Xq_j)$$

**DFN A.12.** Se llama sistema dinámico Hamiltoniano a una terna  $(M, \omega, H)$  donde  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica y  $H$  una función  $C^\infty(M)$ . El campo vectorial del sistema dinámico viene dado por  $X_H = \hat{\omega}^{-1}(dH)$ , o de forma equivalente por la solución de  $i_{X_H} \omega = dH$ .

De hecho el campo vectorial  $X_H$  correspondiente a  $H$  se escribe en coordenadas canónicas como

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (\text{A.7})$$

dado que

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \quad (\text{A.8})$$

De aquí se deduce que efectivamente las curvas integrales del campo vectorial  $X_H$  son determinadas en coordenadas canónicas por ecuaciones como las de Hamilton.

**DFN A.13.** Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana y  $X \in \mathcal{X}(M)$  un campo vectorial sobre dicha variedad. Si al practicar un desplazamiento  $\epsilon X$  infinitesimal, se genera una isometría (se preserva la métrica), el campo  $X$  se dice campo de Killing. Se puede ver que entonces  $\mathcal{L}_X g = 0$ .

**DFN A.14.** Se dice que un campo vectorial  $X \in \mathcal{X}(M)$  es localmente Hamiltoniano respecto de la estructura simpléctica  $\omega$  si  $i_X\omega$  es una 1-forma cerrada. En caso de que  $i_X\omega$  sea exacta se dice que es Hamiltoniano. El conjunto de los campos localmente Hamiltonianos, así como el subconjunto Hamiltoniano, son espacios vectoriales reales.

Además existe un teorema que demuestra, haciendo uso de la identidad de homotopía y de que  $\omega$  es una forma simpléctica (por tanto cerrada) que un campo es localmente Hamiltoniano si y sólo si  $\mathcal{L}_X\omega = 0$ , lo cual implica que bajo la acción del flujo de dicho campo  $\omega$  no varía.

**DFN A.15.** Sea  $V$  un subespacio vectorial tal que  $P_n$  es el proyector que proyecta sobre  $V$ . Si  $V$  es invariante bajo  $A$  entonces

$$PAP = AP$$

Además si no sólo  $V$  es invariante bajo  $A$  sino que también  $V^\perp$  lo es, entonces

$$(1 - P)A(1 - P) = A(1 - P)$$

lo cual implica que,

$$AP = PA$$

**DFN A.16.** Si  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  es una acción del grupo de Lie  $G$  en la variedad diferenciable  $M$ , se llama órbita del punto  $m \in M$  al subconjunto  $\Phi_m(G)$ .

**DFN A.17.** Sea  $M$  una variedad compleja con estructura compleja  $J$  y una métrica Riemanniana  $g$ . La 2-forma alterna, y por tanto antisimétrica

$$\omega(X, Y) := g(JX, Y)$$

es la llamada forma de Kähler asociada.

Además remarcar que visto  $TM$  junto con  $J$  como un espacio complejo tangente sobre  $M$ , y  $\mathfrak{h}$  una métrica Hermítica en  $TM$ . Entonces  $g = \text{Re } \mathfrak{h}$  es una métrica Riemanniana compatible en  $M$ , es decir,  $g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in TM$  e  $\omega = \text{Im } \mathfrak{h}$  es la forma Kähler asociada:

$$g(JX, Y) = \text{Re } \mathfrak{h}(JX, Y) = \text{Re } \mathfrak{h}(iX, Y) = \text{Re}(-i \mathfrak{h}(X, Y)) = \text{Im } \mathfrak{h}(X, Y) = \omega(X, Y)$$

Vice versa, si  $g$  es una métrica Riemanniana compatible en  $M$  y  $\omega$  es la forma Kähler, entonces  $\mathfrak{h} = g + i\omega$  es una forma Hermítica en  $TM$ . Además las propiedades del producto Hermítico dado por  $\mathfrak{h}$ , implican que  $g$  es un producto interno definido positivo y que  $\omega$  es una forma simpléctica, ambos no degenerados.

En resumen, el triplete  $(J, g, \omega)$  equipa a  $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$  con la estructura de un espacio de Kähler.

## Apéndice B

# Conceptos físicos

### B.1. El efecto Zenón inverso

De la misma forma que se puede impedir el decaimiento de una partícula de un estado excitado a otro de menor energía mediante la aplicación de medidas sucesivas, también es posible acelerar el decaimiento aplicando este mismo efecto.

En el caso de sistemas inestables se hace uso de la tasa de decaimiento  $\gamma$ , la cual se calcula mediante la regla de Fermi usando para ello, el Hamiltoniano del sistema. En el caso de que un sistema externo, como puede ser un sistema de medida, interaccione con el sistema inestable, la tasa de decaimiento será distinta a la anterior,  $\gamma_{\text{eff}}(K)$  donde  $K$  representa la intensidad del acoplo. Mediante el uso de ambas tasas se puede ver que se dará QZE si  $\gamma_{\text{eff}}(K) < \gamma$ , es decir decae más lento que el sistema por si mismo. Por el otro lado, el sistema exhibirá IZE si  $\gamma_{\text{eff}}(K) > \gamma$ .

A continuación se describen los aspectos que controlarán la dinámica en una transición de este tipo. Partiendo de la expresión deducida para el caso unidimensional (2.4) esta puede ser descrita de la siguiente manera:

$$p^{(N)}(t) = p(\tau)^N = \exp(N \log p(\tau)) = \exp(-\gamma_{\text{eff}}(\tau)t) \quad (\text{B.1})$$

donde se ha usado que  $t = N\tau$  y se ha introducido una tasa de decaimiento efectiva,

$$\gamma_{\text{eff}}(\tau) \equiv -\frac{1}{\tau} \log p(\tau) \quad (\text{B.2})$$

Observar que para tiempos suficientemente cortos la tasa de decaimiento efectiva es una función de  $\tau$ ,

$$\gamma_{\text{eff}} \equiv -\frac{1}{\tau} \log p(\tau) \approx -\frac{1}{\tau} \left( -\frac{\tau^2}{\tau_Z^2} \right) = \frac{\tau}{\tau_Z^2} \quad (\text{B.3})$$

Además para el caso en que el lapso temporal  $\tau$  sea grande se dará que

$$\gamma_{\text{eff}}(\tau) \rightarrow \gamma \quad (\text{B.4})$$

donde  $\gamma$  es la tasa de decaimiento característica del sistema estudiado.

Considerar ahora un sistema inestable cuya tasa de decaimiento sea  $\gamma$ . Si existe un tiempo  $\tau^*$  tal que

$$\gamma_{\text{eff}}(\tau^*) = \gamma \quad (\text{B.5})$$

entonces mediante la realización de medidas en intervalos de tiempo  $\tau^*$  el sistema decaerá de acuerdo con su escala de tiempos característica, su vida media, como si no se estuviesen realizando medidas. Sin embargo, en caso de que dicho intervalo sea menor que  $\tau^*$ , lo que se obtiene es un QZE. Lo que en este caso destaca es que si existe tal  $\tau^*$ , intersección de  $p(\tau)$  y  $e^{-\gamma t}$  al realizar medidas con un  $\tau_2 > \tau^*$ , uno obtiene un efecto Zenón inverso (IZE). En la figura B.1 se presenta una comparativa de ambos fenómenos donde se representa la amplitud de probabilidad cuando se realizan medidas en intervalos de tiempo  $\tau_1$  y  $\tau_2$  (líneas discontinuas) y una interpolación mediante la función exponencial asociada (líneas continuas). Se observa que en el primer caso aparece QZE y en el segundo IZE.

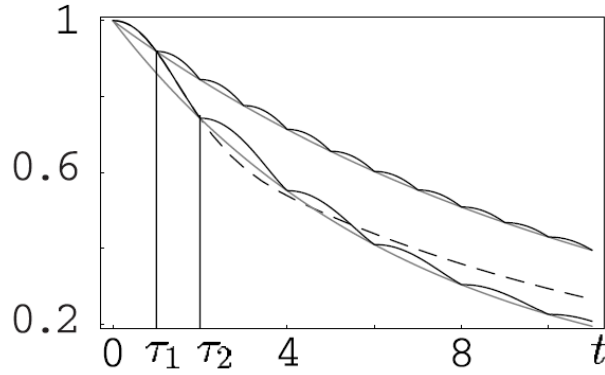


Figura B.1: IZE frente a QZE [8]

# Bibliografía

- [1] T. W. B. Kibble. *Geometrization of quantum mechanics*. *Communications in Mathematical Physics*, 65(2):189–201, 1979.
- [2] A. Ashtekar and T. A. Schilling. *Geometrical formulation of quantum mechanics*. In *On Einsteins Path*, pages 23–65. Springer, 1999.
- [3] J. Clemente-Gallardo. *The Geometrical Formulation of Quantum Mechanics*. *Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza*. 67: 51-103, 2012.
- [4] J. von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Number 2. Princeton university press, 1955.
- [5] B. Misra and E. C. G. Sudarshan. *The Zeno´s paradox in quantum theory*. *Journal of Mathematical Physics*, 18(4):756–763, 2008.
- [6] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland. *Quantum zeno effect* . *Physical Review A*, 41(5):2295, 1990.
- [7] R. J. Cook. *What are quantum jumps?* *Physica Scripta*, 1988(T21):49, 1988.
- [8] P. Facchi and S. Pascazio. *Quantum Zeno dynamics: mathematical and physical aspects*. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(49):493001, 2008.
- [9] P. Facchi and S. Pascazio. *The geometry of the quantum Zeno effect*. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 9(02), 2012.
- [10] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.
- [11] R. Abraham, J. E. Marsden, T. S. Ratiu, and R. Cushman. *Foundations of mechanics*. Benjamin/-Cummings Publishing Company Reading, Massachusetts, 1978.
- [12] S. Otten. *An Introduction to Distributions and Foliations*. Michigan State University, 2008.
- [13] C. Teuscher. *Alan Turing: Life and legacy of a great thinker*. Springer, 2004.
- [14] S. Pascazio. *Dynamical origin of the quantum Zeno effect*. *Foundations of Physics*, 27(12):1655–1670, 1997.
- [15] P. Facchi, D. A. Lidar, and S. Pascazio. *Unification of dynamical decoupling and the quantum Zeno effect*. *Physical Review A*, 69(3):032314, 2004.
- [16] P. Facchi and S. Pascazio. *Quantum Zeno subspaces and dynamical superselection rules*. *arXiv preprint quant-ph/0207030*, 2002.
- [17] A. Messiah. *Mecanique Quantique, Volume II*. *American Journal of Physics*, 28:580–581, 1960.

- [18] M. C. Fischer, B. Gutiérrez-Medina, and M. G. Raizen. *Observation of the quantum Zeno and anti-Zeno effects in an unstable system. Physical Review Letters*, 87(4):040402, 2001.
- [19] J.-M. Raimond, P. Facchi, B. Peaudecerf, S. Pascazio, C. Sayrin, I. Dotsenko, S. Gleyzes, M. Brune, and S. Haroche. *Quantum Zeno dynamics of a field in a cavity. Physical Review A*, 86(3):032120, 2012.
- [20] J. D. Franson, B. C. Jacobs, and T. B. Pittman. *Quantum computing using single photons and the Zeno effect. Physical Review A*, 70(6):062302, 2004.
- [21] R. M. Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [22] M. Crampin and F. A. E. Pirani. *Applicable differential geometry*, volume 59. Cambridge University Press, 1986.
- [23] J. F. Cariñena, F. Falceto, and M. F. Rañada. *A geometric approach to a generalized virial theorem . Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(39):395210, 2012.