

Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Geometría métrica con cuerpos geométricos: una propuesta didáctica para 2º de ESO

Autor: Raúl Moya Alonso

Director: José María Muñoz Escolano

Junio de 2014



Universidad
Zaragoza

ÍNDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar.....	1
B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.....	3
C. Sobre los conocimientos previos del alumno.....	6
D. Sobre las razones de ser del objeto matemático.....	7
E. Sobre el campo de problemas.....	9
F. Sobre las Técnicas.....	18
G. Sobre las Tecnologías.....	31
H. Sobre la secuencia didáctica y su programa.....	45
I. Sobre la evaluación.....	46
J. Sobre la bibliografía y páginas web.....	49

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar.

GEOMETRIA MÉTRICA CON CUERPOS GEOMÉTRICOS

- Tetraedro.
- Pirámides rectas.
- Hexaedro o cubo.
- Prisma recto.
- Cilindro.
- Cono.
- Esfera.
- Octaedro regular.
- Dodecaedro regular.
- Icosaedro regular.

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

2ºESO. Matemáticas.

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Problemas:

- Tipo 1: Desarrollos planos de cuerpos geométricos
- Tipo 2: Comparación de áreas laterales de cuerpos geométricos
 - Subtipo 2.1. Conocido su lado
 - Subtipo 2.2. Conocido su volumen.
- Tipo 3: Comparación de volúmenes de cuerpos geométricos
 - Subtipo 3.1. Conocido su lado.
 - Subtipo 3.2. Conocido su área.
- Tipo 4: Composición y descomposición de cuerpos geométricos en cuerpos más elementales.
- Tipo 5: Crear un cuerpo geométrico fijado su área.

- Tipo 6: Crear un cuerpo geométrico fijado su volumen.
- Tipo 7: Aproximaciones de áreas.
- Tipo 8: Aproximaciones de volúmenes.

Técnicas:

- Técnica 1: Identificar cuerpos geométricos en objetos del entorno
- Técnica 2: Componer y descomponer cuerpos geométricos en cuerpos conocidos
- Técnica 3: Realizar desarrollos planos de cuerpos geométricos
- Técnica 4: Calcular distancias en cuerpos geométricos
 - Técnica 4.1: Medida directa
 - Técnica 4.2: Medida indirecta (empleando algún razonamiento geométrico o fórmula).
- Técnica 5: Calcular áreas laterales de cuerpos geométricos
 - Técnica 5.1: Medida indirectas:
 - Técnica 5.1.1.: Mediante el desarrollo plano del cuerpo geométrico.
 - Técnica 5.1.2.: Mediante la descomposición de un cuerpo geométrico en otros conocidos.
 - Técnica 5.1.3.: Mediante el empleo de una fórmula.
- Técnica 6: Calcular volúmenes de cuerpos geométricos
 - Técnica 6.1.: Medida directa.
 - Técnica 6.2.: Medidas indirectas:
 - Técnica 6.2.1.: Mediante la descomposición de un cuerpo geométrico en otros conocidos.
 - Técnica 6.2.2.: Mediante el empleo de una fórmula.
- Técnica 7: Aproximar la medida de áreas de figuras planas.
- Técnica 8: Aproximar la medida de volúmenes de cuerpos geométricos.

Tecnologías:

- Comprobar las propiedades de los objetos y compararlas con las definiciones y propiedades de los cuerpos geométricos.
- Empleo de las fórmulas de volumen y área conocidas despejando la longitud deseada
- Conservación de área: la suma de las áreas de figuras más elementales es igual al área de la figura compuesta.
- Deducir las fórmulas que permiten calcular las áreas laterales de los cuerpos geométricos.
- Conservación del volumen: la suma de los volúmenes de los cuerpos elementales es igual al volumen del cuerpo geométrico compuesto.
- Deducir las fórmulas que permiten calcular el volumen de los cuerpos geométricos.
- Utilizar figuras geométricas rellenables para corroborar que el cálculo de los volúmenes que nos vienen dados por las fórmulas es el mismo.
- Utilizar recortables de cartulina, para posteriormente crear el volumen y ver el desarrollo de las áreas de las caras laterales.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Según los libros observados que se utilizan en la actualidad, (editoriales ANAYA, EDEBE, SANTILLANA) todos tratan de introducir los cuerpos geométricos desde un punto de vista aritmético. En todos los textos se inicia con una introducción sobre el objeto matemático, adaptado a la realidad de una forma bastante superficial, pues aunque en el apartado de introducción sí que hay alguna fotografía, (edificios, almenas de castillo, pirámides de Egipto, etc....) el resto de imágenes se centran exclusivamente en dibujos a color, mayoritariamente.

Posteriormente, una vez realizada la introducción, cada libro avanza de una forma diferente, mientras las editoriales ANAYA y SANTILLANA, comienzan con una clasificación de los poliedros y los cuerpos de revolución y ya van demostrando los cálculos de los desarrollos de las áreas laterales de los cuerpos y ya en el siguiente tema hacen una breve introducción explicando la geometría métrica con las unidades de volumen, posteriormente se realiza una clasificación y finalmente se procede a calcular los volúmenes de los cuerpos geométricos. Por otro lado, la

editorial EDEBE, dedica un tema a introducir lo que es el cálculo de áreas y volúmenes, tras dedicar una cara del libro a la introducción para la vida cotidiana del objeto matemático con una foto de unos rascacielos de Madrid y hacer un breve repaso a la historia de la construcción, comienzan haciendo un repaso de ocho páginas de geometría elemental del plano y del espacio para continuar con la clasificación bastante detallada y razonada de los cuerpos geométricos. Una vez terminado ese tema de conceptos elementales y básicos, se comienza un tema nuevo denominado áreas y volúmenes en el que ya aparecen las fórmulas de áreas y volúmenes de los cuerpos con todas las justificaciones de las técnicas que se utilizan para obtener esa información.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

La variedad de situaciones en las que se presenta tanto el área como los volúmenes de los cuerpos geométricos objeto de estudio son ilimitados, buena prueba de ello los enumeramos con unos cuantos ejemplos: lámina o cartulina de papel, campo de futbol o piscina, territorio de un estado, problemas de empaquetamiento, etiquetado de botes o latas de conserva, cantidad a almacenar en un depósito, cantidad de hormigón para llenar un cimiento, etc....

Los campos de problemas relacionados con las áreas, están enfocados al cálculo de áreas laterales de edificios, envases, la Tierra, depósitos, un balón etc....para pintar, enfoscar, etiquetar, medir, arreglar etc.....

Los campos de problemas relacionados con los volúmenes, están enfocados al cálculo del volumen de cuerpos geométricos, envases de colonia, monumentos, jarras, en los que hay que calcular su capacidad.

En definitiva, todos los problemas planteados no tiene aparentemente ningún atractivo especial que despierte en el alumno una motivación intrínseca en aprender a resolver los campos de problemas planteados, pues ningún problema se plantea desde un punto de vista en el que el alumno tenga que participar activamente en el sentido de que tengan que medir ellos físicamente algún objeto o tengan que demostrar algún volumen aplicando el principio de Arquímedes.

Las técnicas que se suelen utilizar, son la utilización de las formulas con las que se obtienen los

valores numéricos tanto de las áreas como de los volúmenes. No se aprecian ningún tipo de tarea para que los alumnos experimente y midan directamente el volumen de algún cuerpo; es decir, no hay tareas de medida directa, todas se hacen de manera indirecta mediante el empleo de fórmulas, por lo que los números que aparecen como resultado son concebidos de manera abstracta y sin vincularlos a ninguna unidad de medida dada. Se suele utilizar un apartado del tema para explicar las magnitudes de superficie así como de volumen y el cambio de una unidad de volumen a otra y la equivalencia con otro tipo de medidas también de volumen, por ejemplo la equivalencia entre un decímetro cúbico y un litro. No se aprecia ningún tipo de tarea para que los alumnos experimenten y midan directamente el volumen de algún cuerpo. Todas las medidas se hacen de forma indirecta, bien como dato en el dibujo del problema o como información en el texto.

Como tecnologías se suelen utilizar las demostraciones matemáticas de las formulas, tanto las del cálculo de áreas como las de volumen. Tanto en la justificación de los desarrollos de las áreas, como en el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos o trozos de estos, se utilizan secuencias de imágenes en donde progresivamente se va viendo el desarrollo completo de los distintos cuerpos geométricos. Para cada cuerpo geométrico se le asigna un elemento que se puede observar en la realidad.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Los resultados, si nos remitimos al último informe PISA, parece que en general los efectos no son muy positivos. Los alumnos olvidan a la semana lo que han ejercitado y estudiado, por tanto podemos intuir que debe existir una forma de enseñar en la que los resultados que se obtengan sean más satisfactorios en general.

Los alumnos no asimilan bien los conceptos, pues no participan activamente en la propuesta de los campos de problemas y aunque si bien es cierto que los problemas en los que hay que participar midiendo, tocando, palpando...se destina mucho más tiempo que en los otros tipos de problemas, se podría probar en realizar tres problemas de los de participación activa y cinco del tipo que se plantean en los libros actuales, en lugar de los quince o veinte que se hacen en la actualidad con los resultados que ya sabemos.

Además, los alumnos se tienen que imaginar los contextos de los problemas, lo que dificulta asimilar los conceptos que se trabajan, en lugar de primero trabajar tocar, palpar, objetos reales relacionados con los cuerpos geométricos para posteriormente identificarlos en las fotos e imágenes que aparecen en los problemas que aparecen en los libros actuales.

Esta descontextualización de la medida de superficies y volúmenes propicia la llamada *ilusión de linealidad* (Van Dooren, 2012) que lleva a los estudiantes a aplicar razonamientos de tipo proporcional a la relación entre longitudes, áreas y volúmenes.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Se necesitarán unos conocimientos básicos de geometría de figuras planas:

- Definición y propiedades de triángulos, paralelogramos, polígonos regulares y círculos.
- Elementos de esas figuras planas: lado, radio, diámetro, altura, apotema, ángulo.
- Fórmula del área de triángulos, paralelogramos, polígonos regulares, círculos.
- Conocer y aplicar el teorema de Pitágoras.

Se necesitarán unos conocimientos básicos de geometría de cuerpos geométricos:

- Definiciones y propiedades los poliedros regulares.
- Conocer de manera superficial los cuerpos de revolución: cono, cilindro y esfera.
- Elementos de esos cuerpos: aristas, caras, vértices, bases, altura y radio.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Según los libros de texto de 1º ESO observados sí, aparecen en el temario de los libros. En el Currículo también aparecen dentro de los contenidos del curso, por lo que se entiende que el alumno que está en 2ºESO, tiene los conocimientos previos apropiados. No obstante, somos conscientes de que algunos estudiantes pueden no haber adquirido esos conocimientos.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Se realizará una primera clase de repaso general de los conceptos básicos dados en 1ºESO.

Además se repartirán unas tablas con las figuras geométricas y todos los elementos característicos de las mismas y una fotografía a color de un elemento real cercano que se identifique con la figura geométrica.

También se pretende realizar una actividad a modo de introducción y a la vez para trabajar la visual de los cuerpos geométricos, que consiste en construir varios poliedros con gominolas como vértices y palillos en las aristas. También, para completar la introducción del tema, se realizará una actividad mediante un palillo largo y un trozo de cartulina pegado a él, para ver cómo se generan los distintos cuerpos de revolución.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La razón de ser que tendremos en cuenta en la introducción escolar del objeto estará vinculada a la vida cotidiana. En numerosas ocasiones es útil conocer las áreas laterales y los volúmenes de cuerpos geométricos, para por ejemplo ver qué tipo de trabajo te interesa más en un momento dado o cuando vas a comprar un material o producto que viene envasado y necesitas saber el volumen para ahorrarte un dinero.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

De alguna manera sí, porque la necesidad de medir y comparar es tan antigua como la existencia de las antiguas civilizaciones. Al comienzo de las civilizaciones, primero existió una necesidad de almacenar en recipientes y de ahí la formación de recipientes en arcilla. Posteriormente surgió la necesidad de tener una medida personal (palmo, brazo...) como conocimiento de construcciones propias y gestión de sus propios recursos, pero hasta que no aparece la necesidad del comercio o previamente el intercambio no se requiere de la necesidad de crear unos patrones de medida en los cuales el poder y el comercio fueron los dos factores que impulsaron fuertemente esta unificación.

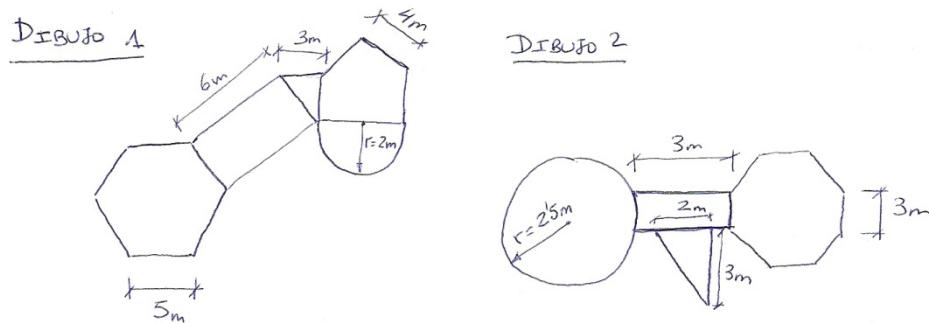
Hoy en día, esos patrones y unidades de medida están ya muy instaurados, pero la necesidad de medir es una de las principales razones de ser del objeto matemático de estudio, aunque en la

actualidad esa necesidad de medir se utilice para otras relacionadas con la economía y el arte.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Problema 1:

A Juan que es pintor de viviendas, le salen dos trabajos y solamente puede elegir uno porque hay que realizarlos en la misma fecha. El primer trabajo consiste en pintar las paredes y el techo de una casa que tiene una altura del suelo al techo de 2,5m, según el dibujo 1, este trabajo le pagan a 5 €/m². El segundo trabajo consiste en pintar otra casa con una altura entre el suelo y el techo de 2,40m y se lo pagan a 5,25€/m², según el dibujo 2. Si los dos trabajos le cuestan el mismo tiempo, ¿qué trabajo le interesaría más?



Problema 2:

Llevamos a clase unos envases de diferentes tipologías, una garrafa cilíndrica de las de agua de 25 litros, un tetrabrik de 1 litro de leche, una pelota de tenis, un envase cónico de colonia, el cubo de Rubik, y un tetraedro rellenable. A los alumnos se les dejará metro y un pie de rey para tomar las medidas oportunas y de esta forma calcular el área lateral y el volumen de cada envase.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología, se basaría en fomentar el interés de los alumnos en el tema que se desea impartir. En este caso, se les plantearían problemas que se puedan presentar en la vida cotidiana e incluso actividades que se tuvieran que realizar fuera del aula para tomar datos por ejemplo de la almena octogonal de un castillo o similar y se den cuenta que necesitan de saber el objeto matemático propuesto, en este caso cálculo de áreas y volúmenes.

En cuanto a los problemas a resolver, primero dejaría que los alumnos intentasen resolverlo con sus propios medios y posteriormente resolverlo de una forma ordenada para ver donde se han equivocado o que obstáculos han tenido en la resolución de estos problemas. Entregaría unas hojas con las soluciones de los problemas a resolver y en clase se resolverían además de los correspondientes a la explicación teórica como problemas tipo, los problemas en donde a los alumnos se les presenten obstáculos y dificultades.

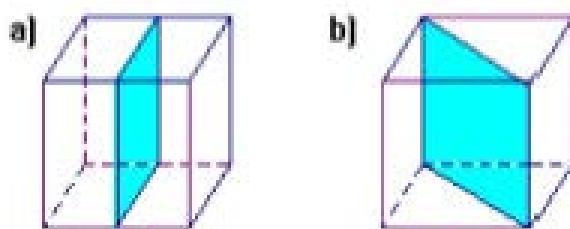
E. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

- **Tipo 1: Desarrollos planos de cuerpos geométricos**

Ejemplo 1:

De muchas formas es posible cortar un cubo en dos cuerpos geométricos iguales, como por ejemplo mediante un plano que pase por dos aristas y dos diagonales de las caras, o mediante un plano que pase por el punto medio de cuatro aristas, tal y como se observa en la ilustración. Haz el desarrollo plano de la sección del cubo de la figura b), y construye dos de esas secciones. Descríbelos. Piensa otros dos ejemplos de secciones del cubo en dos cuerpos geométricos iguales, confecciona su desarrollo plano y construye dichas secciones.



Ejemplo 2:

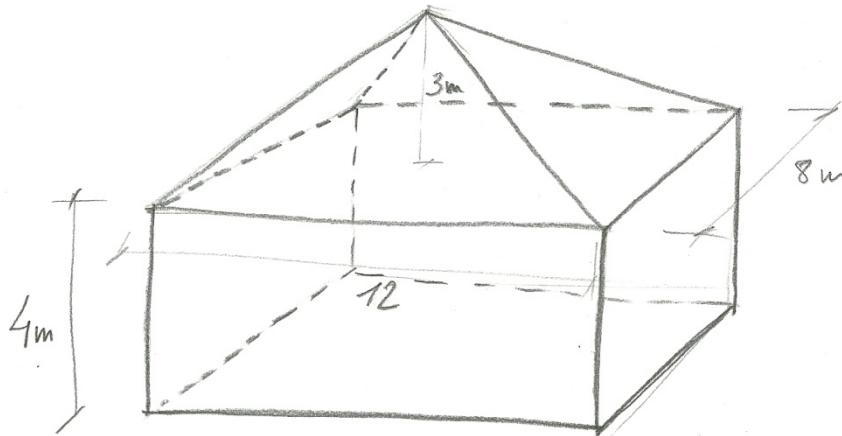
Se llevará a clase los desarrollos planos de los cuerpos que vamos a trabajar con lengüetas montables. El problema será montar todos los cuerpos geométricos con pegamento y calcular el área lateral de los cuerpos, utilizando lo que el alumno considere oportuno, regla, metro, formula, etc.....

- **Tipo 2: Comparación de áreas laterales de cuerpos geométricos.**
 - **Subtipo 2.1. Conocido su lado**

Es un problema de tipo en el que se debe de calcular el área lateral de una o varias figuras geométricas ó incluso descomponer un cuerpo en varias figuras simples, y a partir de ese dato objetivo, se tiene que razonar que opción planteada interesa más.

Ejemplo 1:

Se necesita hacer una reforma en casa y tienes dos presupuestos: el presupuesto 1 te cobran la reparación de la cubierta a $5\text{€}/\text{m}^2$ y el enfoscado de la fachada a $7\text{€}/\text{m}^2$. El presupuesto 2, cobran $6\text{€}/\text{m}^2$ la reparación de la cubierta y a $6,5\text{€}/\text{m}^2$ el enfoscado de la fachada. La geometría tanto de la casa se adjunto en el dibujo.



Ejemplo 2:

Cuántos ladrillos necesito de 25 cm. de largo por 12 de ancho y 8 de largo para hacerme un caseto que tiene forma rectangular de 5m. de largo por 2 de ancho y 2,50 de alto. (Ten en cuenta que le haremos una puerta de 1m. de ancha por 2 de alta).

- **Subtipo 2.2. Conocido su volumen.**

Ejemplo 1:

Construye una pirámide regular cuadrangular de lado de base 1 cm y altura 2 cm. Deja la base sin cerrar. Construye un prisma regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja

una base sin cerrar. Ahora llena de arena la pirámide y viértelo dentro del prisma, y cuenta cuantas veces necesita hacerlo para llenar el prisma. Calcula el área lateral de la pirámide y el prisma conocido su volumen.

Ejemplo 2:

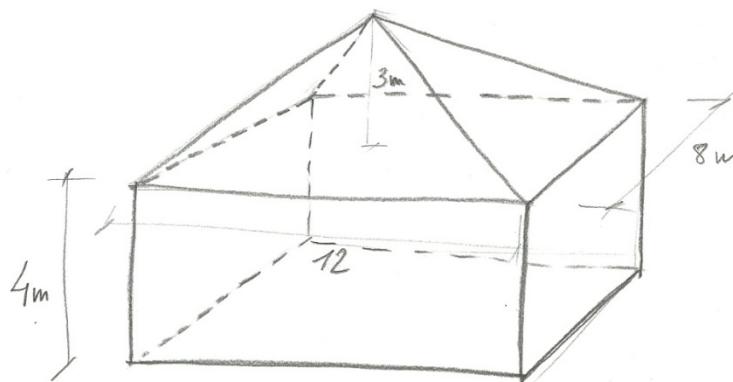
Sabiendo que tenemos una piscina de forma prismática rectangular y llena de agua tiene una capacidad de 150 m^3 . Si además sabemos que tiene una profundidad constante de 3 metros ¿Cuanto pintura necesitaremos para adecuar las cuatro paredes y el suelo de la misma?

- **Tipo 3: Comparación de volúmenes de cuerpos geométricos**
 - **Subtipo 3.1. Conocido su lado.**

Es un problema de tipo en el que se debe de calcular el volumen de una o varias figuras geométricas ó incluso descomponer un cuerpo en varias figuras simples, y a partir de ese dato objetivo, se tiene que razonar que opción planteada interesa más.

Ejemplo 1:

Se quiere instalar una maquina de aire acondicionado para una casa con geometría según se indica en la figura. Sabiendo que para saber la máquina adecuada hay que saber el volumen de aire a refrigerar que recoge toda la vivienda, ¿Que máquina interesa una que refrigerara $500 \text{ m}^3/\text{h}$ o una de $450 \text{ m}^3/\text{h}$?

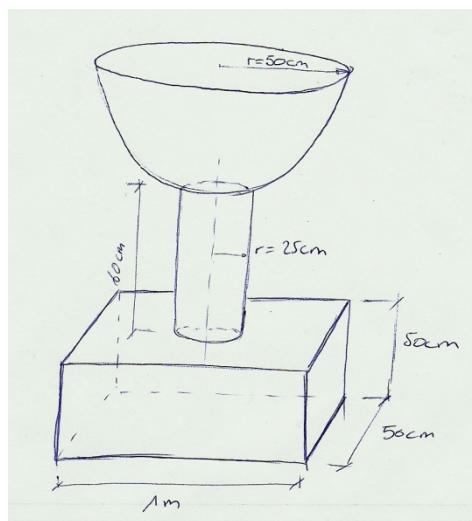


Ejemplo 2:

Tengo un acuario según la figura que se acompaña, y para ponerlo en funcionamiento voy a

comprar agua para el acuario y hay de dos tipos:

Un primer tipo de garrafas de 100 litros a 3 € cada una, y un segundo tipo que viene en garrafas de 8 litros a 0,25 € la garrafa. Si suponemos que el agua que sobra no la podremos utilizar y la calidad es la misma, ¿qué tipo de agua comprarías?



○ **Subtipo 3.2. Conocido su área.**

Ejemplo 1:

Desde la Plaza El Torico hacia la Plaza San Juan, podrás encontrar varios maceteros.

¿Qué forma geométrica te sugieren? Calcula su volumen.

Si en lugar de tener tierra hubiera agua, ¿cuántos litros de agua cabrían?

Sabiendo que la densidad de la tierra que contiene es aproximadamente de 1800 kg/m³, calcula su peso.

¿Cuántas personas son necesarias para elevarlo sabiendo que cada una de ellas puede levantar 40 kg?

Ejemplo 2:

Construye con cartulina un cono recto de 7cm de altura y de radio en la base 4 cm y deja abierta la base. Ahora construye un cilindro recto de 4cm de radio base y altura 7cm y gradúa cada cm de altura previamente. Calcula el volumen del cono a partir del área de su base. Calcula el volumen del cilindro a partir del área de su base. Rellena de arena el cono y viértelo sobre el cilindro. ¿Qué altura alcanzará la arena?

- **Tipo 4: Composición y descomposición de cuerpos geométricos en cuerpos más elementales.**

Ejemplo 1:

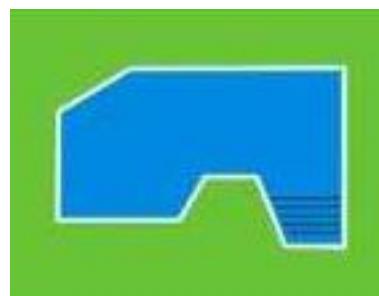
En esta actividad debes calcular el área de la Plaza del Torico de Teruel. En la foto aparece una zona en rojo de la que no debes salirte. Existen muchos métodos de medida, puedes utilizar tu ingenio.



Ejemplo 2:

Una piscina tiene forma según se adjunta en la figura ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenar la piscina? (Nota: Se recuerda que 1 litro equivale a 1 dm³)

Las dimensiones se pueden tomar con la regla. Profundidad de 2 m constante.



- **Tipo 5: Crear un cuerpo geométrico fijado su área.**

Ejemplo 1:

Tenemos una plancha de cartulina de 1m por 1m. ¿Qué dimensiones tiene el cuerpo geométrico que puedes construir que tenga mayor volumen con esa plancha de cartulina?

Ejemplo 2:

Tenemos una plancha de cartón de 90 cm por 90 cm. Si los rollos de papel higiénico son de 9,5 cm de altura por 4 cm de diámetro. ¿Cuántos rollos puedo hacer con la plancha de dimensiones indicadas?

- **Tipo 6: Crear un cuerpo geométrico fijado su volumen.**

Ejemplo 1:

Una caja tiene forma de ortoedro de 8 cm de longitud, 6 cm de anchura y 5 cm de altura. Averigua si en dicha caja puede caber un lápiz de 13 cm de longitud.

Ejemplo 2:

Un depósito cilíndrico tiene 2 m^3 de capacidad y $12,56 \text{ m}^2$ de superficie lateral. Determina el radio de la base y la altura de dicho depósito.

- **Tipo 7: Aproximaciones de áreas.**

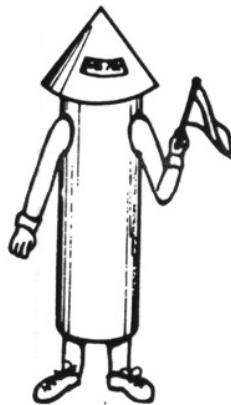
Ejemplo 1:

En una excursión a un lago, un alumno se plantea cuantos metros cuadrados de superficie ocupa dicho lago. El lago tiene una forma irregular de tal forma que la circunferencia interior que se inscribe en el lago tiene radio 48 metros y la circunferencia que circunscribe al lago tiene un radio de 64 metros. Calcula aproximadamente que superficie tiene el lago.



Ejemplo 2:

Te sugerimos el diseño de un bonito disfraz para los próximos carnavales. Para ello construirás un cilindro y un cono sin bases. Teniendo presente tus propias medidas, te habrás de proveer de la cartulina correspondiente a las áreas laterales de ambas figuras, las cuales dependerán de tu propia estatura.



Ejemplo 3:

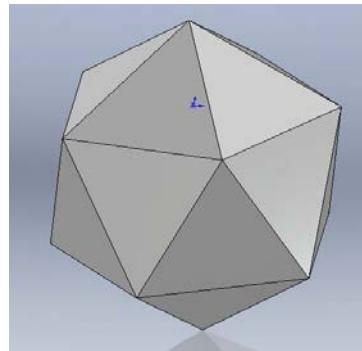
Estamos en una tienda y nos encargan para envolver en papel de regalo 10 balones de fútbol, 7 cajas de zapatillas, 3 raquetas de tenis y 12 botes de 3 pelotas cada bote. Todos los artículos hay que envolverlos por separado. ¿Cuántos dm^2 de papel hacen falta aproximadamente para envolver todos los artículos? Justifica la respuesta y todas las suposiciones que hagas.

• **Tipo 8: Aproximaciones de volúmenes.**

Ejemplo 1:

En el laboratorio de química hay un icosaedro regular de cristal del cual se pretende calcular su volumen por diferentes métodos:

- Con un cazo de 8 cm^3 graduado cada cm^3 .
- Sabiendo que la esfera inscrita en dicho icosaedro es de radio 5 cm y la esfera que la circunscribe tiene un radio de 7 cm.
- Sabiendo que el volumen de una esfera viene dado por la expresión $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, deducir una fórmula de aproximación del cálculo del volumen del icosaedro.



Ejemplo 2:

Con los datos obtenidos en el problema 4.1 (cálculo de la superficie de la plaza del Torico) y teniendo en cuenta que en la fuente (radio: 3 m) no se puede subir, estima el número de personas que hay en la Plaza El Torico en las Fiestas del Ángel.

Según el Documento Básico de Seguridad en caso de Incendio el aforo legal permitido en zona de espectadores de pie, es de cuatro personas por metro cuadrado. ¿Se cumple la normativa? Comenta el resultado.



Ejemplo 3:

Si tenemos una caja de zapatos de dimensiones 30cm por 15cm por 10cm, y tenemos que guardar canicas de diámetro 1 cm. ¿Cuántas canicas podemos guardar en la caja?

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

En un primer momento, en gran parte de los problemas hay un trabajo previo de toma de medidas mediante métodos directos, cinta métrica, pie de rey, cuerpos rellenables, desarrollos

planos en cartulina, etc.... Luego se pretende que se obtengan datos a través de medidas indirectas como, descomposición en cuerpos conocidos, datos expuestos en los dibujos de los problemas y finalmente mediante la utilización de fórmulas. En los problemas de aproximaciones de áreas y volúmenes se deben utilizar diferentes estrategias para obtener datos para la resolución de los problemas como por ejemplo identificar elementos de la vida cotidiana con cuerpos geométricos de los cuales sabemos calcular sus áreas y volúmenes. En muchos de los problemas planteados, como ya hemos comentado, habrá que salir del aula y tomar medidas por lo que, para optimizar el tiempo, los alumnos tendrán que utilizar tiempo fuera del horario escolar para obtener esas informaciones, por lo que se realizarán como deberes para los días asignados. La idea con la que están concebidos la mayoría de los problemas es que los alumnos participen activamente en la resolución de los problemas y despierten en ellos cierto interés por resolverlos, además de hacer más divertidas y entretenidas las clases de matemáticas y de esta forma vean una aplicación práctica de la asignatura.

También se plantean problemas en los que el profesor llevará al aula objetos medibles que aparecen en los problemas, en donde los alumnos podrán manipular, medir, tocar, observar y utilizar distintos aparatos de medida, para en ocasiones recopilar los datos necesarios para resolver los problemas planteados y en otras ocasiones hacer las comprobaciones que nos piden los problemas.

Alguno de los problemas se realizaran como actividades en grupo de 3 alumnos mezclados por capacidad cognitiva en donde los alumnos de distinta capacidad van proponiendo, explorando y descubriendo las soluciones de los problemas y se van dando cuenta que la opinión de otros alumnos puede ser constructiva.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Tras una breve explicación de teoría, se propone a los alumnos que vayan pensando que datos son necesarios para resolver el problema y después que instrumentos o herramientas necesitarán para resolver el problema.

Como profesor iría recorriendo las mesas de los grupos observando por donde van avanzando y

donde encuentran los obstáculos.

Una vez tomados los datos, los alumnos deben al menos intentar resolver el problema planteado.

Posteriormente trabajaría el razonamiento e interpretación de los cálculos obtenidos para tomar la decisión más acertada.

F. Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

Como Actividad de introducción al tema se realizará la Actividad “Poliedros Regulares con gominolas” en la que se trabajarán los contenidos (Del plano al espacio. Polígono-Poliedros. Vértices, caras y aristas). El objetivo de la actividad es conocer y reconocer los distintos tipos de figuras planas y espaciales a través de su construcción directa con palillos y gominolas. Otro objetivo es afianzar el concepto de poliedro regular relacionando vértices, caras y aristas.

Los alumnos construirán: tetraedro, octaedro, cubo, y cuando hayamos terminado la actividad podrán guardárselo o comérselo.

Otra Actividad a realizar en clase con el objetivo de entretener a la vez que se introduce el objeto matemático pretendido es realizar la práctica “Recortables para montar poliedros regulares”. En ella lo que se pretende es trabajar el desarrollo de las caras de los poliedros para posteriormente montar mediante el pegado de las pestañas de montaje los poliedros que en el origen estaban sobre un plano.

Como tercera actividad para atraer e introducir el objeto matemático propuesto, será la realización de la Actividad “Cuerpos de Revolución con pajitas y cartulinas”. En esta actividad, lo que se pretende a demás de introducir y amenizar el objeto matemático propuesto es ver como mediante una pajita utilizándola como eje de revolución y un elemento de cartulina unido a él, se pueden visualizar distintos cuerpos de revolución.

Para cada tipo de problemas se mandarán para casa como deberes, ejercicios sencillos una vez resuelto el problema general. Una técnica a utilizar serán las formulas que nos dan los volúmenes de los cuerpos a estudiar. Se realizará la Actividad “Comprobación de las formulas con poliedros rellenable”, de tal forma que los volúmenes calculados mediante las formulas se comprobarán rellenando el cuerpo geométrico y se corroboraran en litros que el resultado es el mismo y por

tanto la utilidad de las fórmulas.

Como una de las modificaciones de la técnica y para conseguir el objetivo de ver la utilidad de las fórmulas del cálculo de las áreas laterales, se realizará una práctica con el programa informático Geógebra, en el cual comprobaremos que el área lateral de un cuerpo geométrico se puede obtener de una forma fácil a través de la fórmula.

Se trabajará la elección de la toma de decisión en los problemas, de tal manera que se trabaje la visión global y el por qué de la elección correcta. Así, como recalcar y priorizar la necesidad de saber estos conocimientos sobre el objeto matemático propuesto para el futuro en la vida cotidiana.

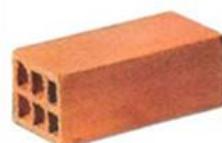
- **Ejercicios para practicar técnica 1: Identificar cuerpos geométricos en objetos del entorno**

Ejercicio 1:

A qué cuerpo geométrico se parecen los siguientes objetos:



se parece a _____



se parece a _____



se parece a _____



se parece a _____



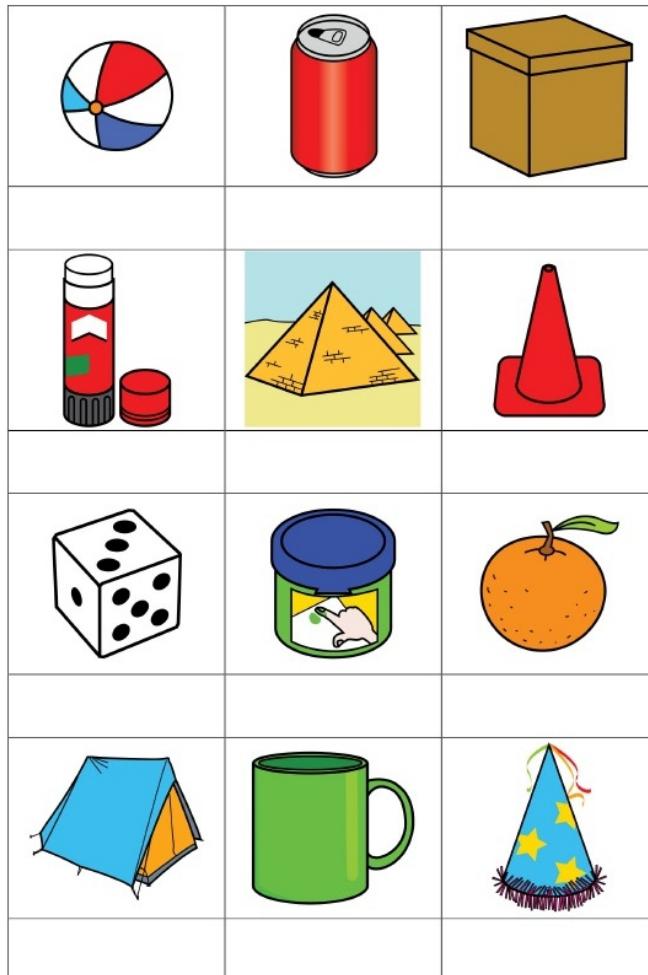
se parece a _____



se parece a _____

Ejercicio 2:

A qué cuerpo geométrico se parecen los siguientes objetos:

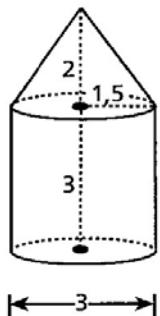


- **Ejercicios para practicar técnica 2: Componer y descomponer cuerpos geométricos en cuerpos conocidos**

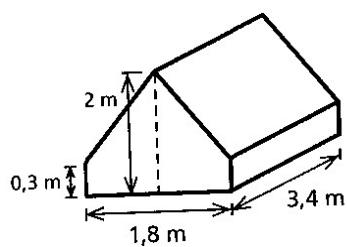
Ejercicio 3:

Descomponer las siguientes figuras en cuerpos geométricos conocidos e indicar las medidas características de éstos últimos.

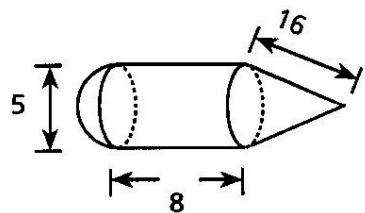
a)



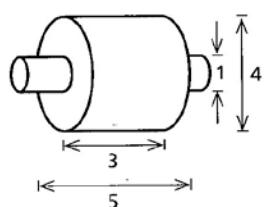
b)



c)

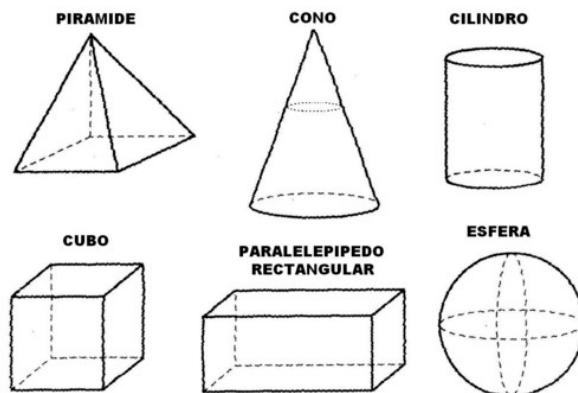


d)



Ejercicio 4:

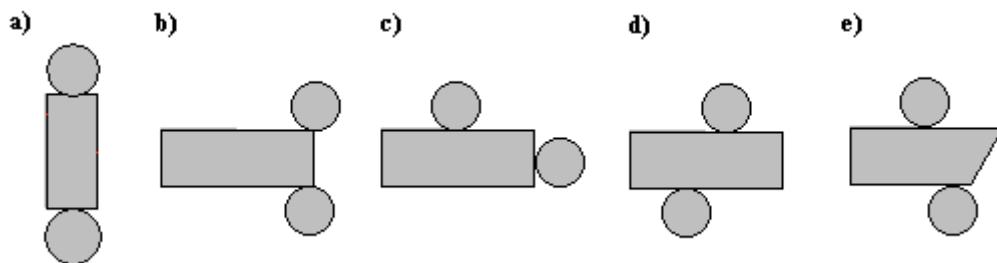
Con los siguientes cuerpos geométricos que se ven en el dibujo, componer ocho figuras que estén en tu entorno y al menos aparezca una vez todos los cuerpos geométricos.



- **Ejercicios para practicar técnica 3: Realizar desarrollos planos de cuerpos geométricos.**

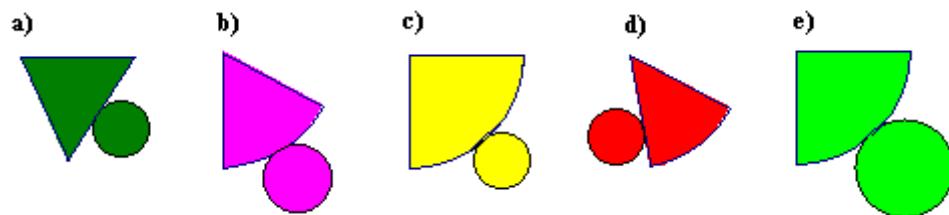
Ejercicio 5

¿Cuáles de las siguientes figuras son desarrollo de un cilindro?



Ejercicio 6

¿Cuáles de las siguientes figuras son desarrollo de un cono?



Ejercicio 7

Haz el desarrollo en superficie de:

- a) Un prisma triangular.
- b) Una pirámide cuadrangular.
- c) Hexaedro regular.

- **Ejercicios para practicar técnica 4: Calcular distancias en cuerpos geométricos**
 - **Técnica 4.1: Medida directa.**

Ejercicio 8

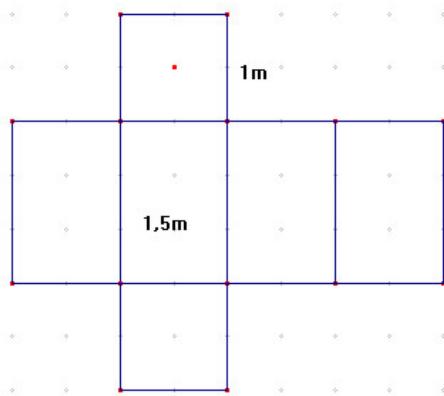
Tomad las medidas necesarias para calcular su área lateral y volumen de los siguientes lugares u objetos:

- Aula
- Un vaso
- Una pelota
- Una lata de refresco.
- El monumento de la plaza San Juan (pirámide de base cuadrada).

- Técnica 4.2: Medida indirecta (empleando algún razonamiento geométrico o fórmula).

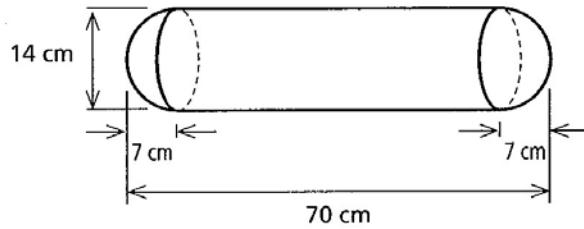
Ejercicio 9

En la figura tienes el desarrollo de un prisma de base cuadrada. Calcula su superficie total.



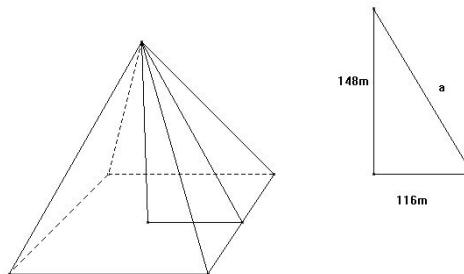
Ejercicio 10

Calcula el volumen del sólido que aparece a continuación:



Ejercicio 11

La Pirámide de Keops tiene base cuadrada con un lado de 232,805 m y altura 148,208 m. Quedándote sólo con las unidades en metros, calcula su superficie lateral.



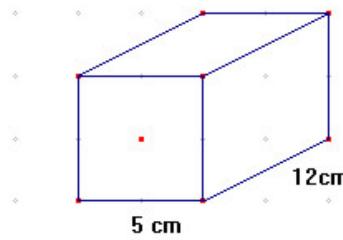
- **Ejercicios para practicar técnica 5: Calcular áreas laterales de cuerpos geométricos**

- **Técnica 5.1: Medida indirectas:**

- **Técnica 5.1.1.: Mediante el desarrollo plano del cuerpo geométrico.**
- **Técnica 5.1.2.: Mediante la descomposición de un cuerpo geométrico en otros conocidos.**
- **Técnica 5.1.3.: Mediante el empleo de una fórmula.**

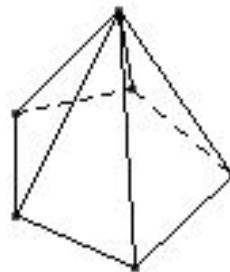
Ejercicio 12

Calcula la superficie lateral de un prisma de base cuadrada de 5 cm de lado y 12 cm de altura.



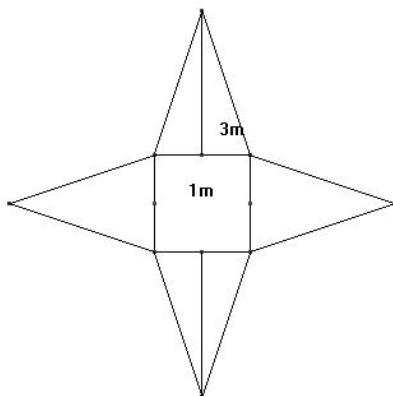
Ejercicio 13

Calcula la superficie lateral de la figura siguiente, sabiendo que la base es un pentágono regular de 20 cm de lado y la apotema de la pirámide mide 50 cm.



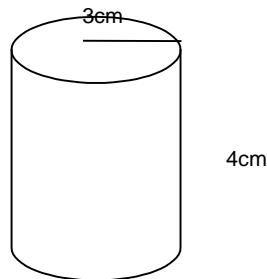
Ejercicio 14

Calcula la superficie total del sólido cuyo desarrollo plano se presenta a continuación:



Ejercicio 15

Calcula la superficie lateral de un cilindro de radio de la base 3 cm y altura 4 cm.



Ejercicio 16

Calcula la superficie lateral de un cono de radio 2 m y generatriz 1 m.

- **Ejercicios para practicar técnica 6: Calcular volúmenes de cuerpos geométricos**
Técnica 6.1.: Medida directa.

Ejercicio 17

Calcula el volumen de la caja de zapatos que te entrego junto con el metro.

Ejercicio 18

Calcula el volumen de este tornillo que te entrego junto con el pie de rey.

Ejercicio 19

Calcula el volumen de esta lata de refresco que te entrego junto con el pie de rey y el metro.

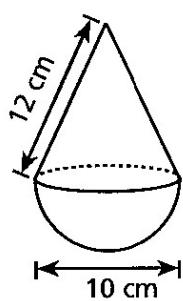
Técnica 6.2.: Medidas indirectas:

Técnica 6.2.1.: Mediante la descomposición de un cuerpo geométrico en otros conocidos.

Técnica 6.2.2.: Mediante el empleo de una fórmula.

Ejercicio 20

Calcula el volumen de esta figura:

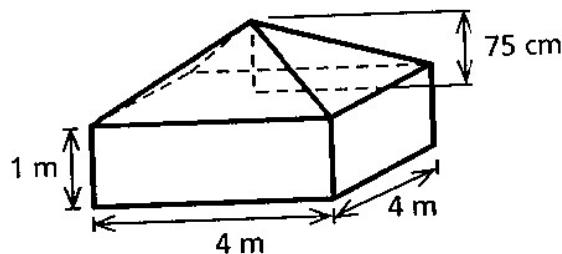


Ejercicio 21

Calcula el volumen de un cono de radio 4 m y generatriz 5 m.

Ejercicio 22

Calcula el volumen del sólido de la figura.

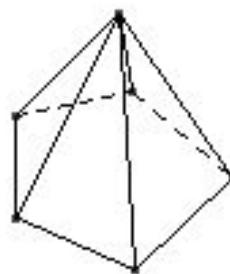


Ejercicio 23

Calcula el volumen de un prisma de base hexagonal regular de 2 cm de lado; 1,75 cm de apotema y 76 mm de altura.

Ejercicio 24

Calcula el volumen de la figura siguiente sabiendo que la base es un pentágono regular de 20 cm² de superficie y la altura de la pirámide es de 50 cm.



- **Ejercicios para practicar técnica 7: Aproximar la medida de áreas de figuras planas.**

Ejercicio 25

Calcula aproximadamente el área de la cara de una hoja de árbol.

Ejercicio 26

Calcula aproximadamente el área de la plaza de tu pueblo.

- **Ejercicios para practicar técnica 8: Aproximar la medida de volúmenes de cuerpos geométricos.**

Ejercicio 27

Calcula aproximadamente el volumen de este botijo junto con el cual te doy el metro para tomar las medidas que consideres oportunas.



Ejercicio 28

Calcula aproximadamente el volumen de este botijo junto con el cual te doy el metro para tomar las medidas que consideres oportunas.

Ejercicio 29

Calcular aproximadamente cuento volumen de agua cabe en tu bañera.

Ejercicio 30

Calcular aproximadamente el volumen de una bolsa de plástico.

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

En los dos primeros ejercicios en donde hay que indicar a qué cuerpos geométricos estudiados se parecen los objetos del dibujo se trabajará la técnica 1 de identificar cuerpos geométricos en objetos del entorno, además de trabajar la imaginación de los alumnos.

En los ejercicios 3 y 4 se trabaja la técnica 2 de componer y descomponer cuerpos geométricos en cuerpos conocidos, de tal forma que los alumnos practicarán por un lado la descomposición en figuras conocidas, trabajadas previamente y por otro lado se trabajará la composición de cuerpos en el que servirá para desarrollar el pensamiento creativo.

En los ejercicios 5,6 y 7 se ejercitarán la técnica 3 que consiste en realizar desarrollos planos de cuerpos geométricos.

En el ejercicio 8 se trabaja la técnica 4.1. que consiste en calcular distancias en cuerpos geométricos mediante la toma de medidas directamente con herramientas como el metro, pie de rey, etc....que son necesarias para calcular el área lateral o su volumen. Ya en los ejercicios 9 hasta 11, se practica la toma de medidas de una forma indirecta, bien empleando algún razonamiento geométrico o aplicando alguna fórmula sencilla y conocida para los alumnos.

Desde el ejercicio 12 hasta el 16 se practica las técnicas de calcular áreas laterales de cuerpos geométricos mediante diferentes medidas indirectas, por el desarrollo plano del cuerpo geométrico, por la descomposición de un cuerpo geométrico en otros conocidos, o mediante el empleo de una fórmula.

A partir del ejercicio 17 y hasta el 19 se emplea la técnica 6.1. que trata de calcular volúmenes de cuerpos geométricos mediante la toma de medidas directas, proporcionando a los alumnos las herramientas necesarias para la obtención de los datos necesarios y desde el ejercicio 20 hasta el 24 se emplean las técnicas de calcular los volúmenes mediante descomposición de un cuerpo geométrico en otros conocidos y a través de la utilización de la fórmula de cálculo.

Ya en los ejercicios 25 y 26 se trabaja la técnica 7 aproximar la medida de áreas de figuras planas y finalmente en los cuatro últimos ejercicios se practica la técnica 8 que consiste en

aproximar la medida de volúmenes de cuerpos geométricos.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Si, todas las técnicas están enfocadas para resolver los problemas que se plantean en el campo de problemas.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología a seguir sería ir introduciendo las técnicas en el orden que se han numerado, pues se han ordenado con el criterio de menor a mayor complejidad de comprensión para el alumno.

Se comenzaría explicando y practicando las dos primeras técnicas que como ya hemos dicho consisten en identificar cuerpos geométricos en objetos del entorno y en componer y descomponer cuerpos geométricos en cuerpos conocidos, de esta forma, nos serviría para introducir los distintos campos de problemas.

Una vez trabajadas las dos primeras técnicas que servirían de introducción, continuaríamos con las dos siguientes técnicas que son un poco más complejas y nos acercan un poco más a la razón de ser del objeto matemático. Estas técnicas son la de realizar desarrollos planos de cuerpos geométricos y calcular distancias en cuerpos geométricos de una forma directa e indirecta.

Posteriormente, y como previamente se han trabajado las técnicas de desarrollos planos de cuerpos geométricos y calcular distancias en cuerpos geométricos de una forma directa, continuaríamos con la técnica 5, que consiste calcular áreas laterales de cuerpos geométricos, mediante el desarrollo plano del cuerpo geométrico, mediante la descomposición de un cuerpo geométrico en otros conocidos y el empleo de una fórmula. A continuación de la técnica expuesta y con un grado más de dificultad se introduciría la técnica del cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos a través de medidas directas e indirectas que ya previamente se habrían avanzado.

Para finalizar y por ser unas técnicas en las que aparece un grado mayor de complejidad en el sentido que se incorpora una competencia de precisión y de identificación de objetos del entorno se trabajaría las técnicas 7 y 8 que consisten en aproximar la medida de áreas de figuras planas y la medida de volúmenes de cuerpos geométricos.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

Se aplicarán razonamientos matemáticos sencillos a partir de datos conocidos y se introducirán aplicaciones sencillas como por ejemplo el teorema de Pitágoras.

Se realizarán razonamientos lógicos mediante actividades de manualidades cuyos objetivos serán afianzar los razonamientos matemáticos, como por ejemplo comprobar los resultados obtenidos con las fórmulas con figuras rellenable.

Tecnologías:

- Comprobar las propiedades de los objetos y compararlas con las definiciones y propiedades de los cuerpos geométricos.
- Empleo de las fórmulas de volumen y área conocidas despejando la longitud deseada
- Conservación de área: la suma de las áreas de figuras más elementales es igual al área de la figura compuesta.
- Deducir las fórmulas que permiten calcular las áreas laterales de los cuerpos geométricos.
- Conservación del volumen: la suma de los volúmenes de los cuerpos elementales es igual al volumen del cuerpo geométrico compuesto.
- Deducir las fórmulas que permiten calcular el volumen de los cuerpos geométricos.
- Utilizar figuras geométricas rellenable para corroborar que el cálculo de los volúmenes que nos vienen dados por las fórmulas es el mismo.
- Utilizar recortables de cartulina, para posteriormente crear el volumen y ver el desarrollo de las áreas de las caras laterales.

TÉCNOLOGIAS DE LAS TÉCNICAS DE ÁREAS.

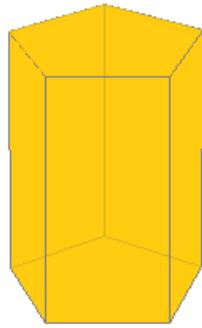
Área de los prismas

El **área** de un prisma o de cualquier poliedro, es la suma de las áreas de cada una de sus caras. Podemos distinguir:

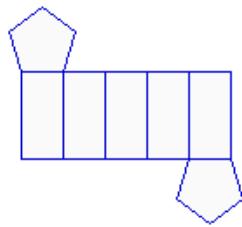
Área lateral: Suma de las áreas de las caras laterales. En el prisma las caras laterales son rectángulos.

Área total: Es la suma del área lateral y el área de las dos bases. Las bases son dos polígonos iguales.

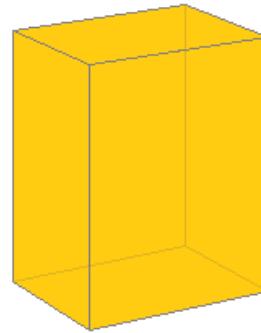
Prisma pentagonal



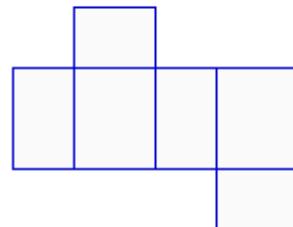
Desarrollo Prisma pentagonal



Prisma rectangular recto



Prisma rectangular recto

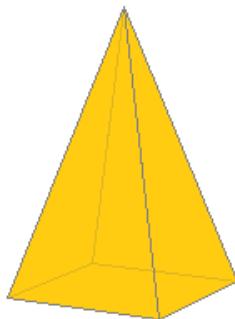


Área de la pirámide

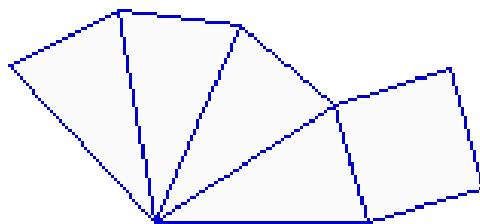
Al desarrollar una pirámide se obtiene la base que es un polígono y las caras laterales que son triángulos.

Área lateral: Suma de las áreas de las caras laterales.

Área total: Es la suma del área lateral y el área de la base. La base es un polígono cualquiera, regular o no. (Aquí trabajaremos con bases que son polígonos regulares).



Pirámide de base cuadrada



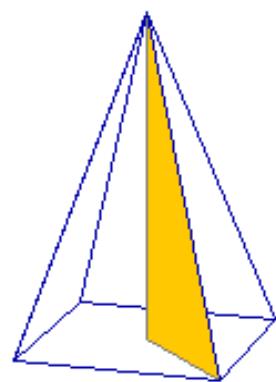
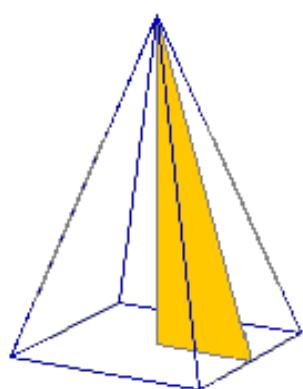
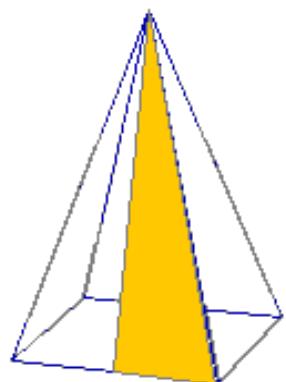
Desarrollo de una pirámide de base cuadrada: se obtienen cuatro triángulos isósceles iguales y un cuadrado.

En una pirámide de base cuadrada:

La arista lateral, la altura de una cara y la mitad de la arista de la base forman un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la arista lateral.

La altura de la pirámide, la altura de una cara y la mitad de la arista de la base forman un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la altura de una cara.

La altura de la pirámide, la arista lateral y la mitad de la diagonal de la base forman un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la arista lateral.



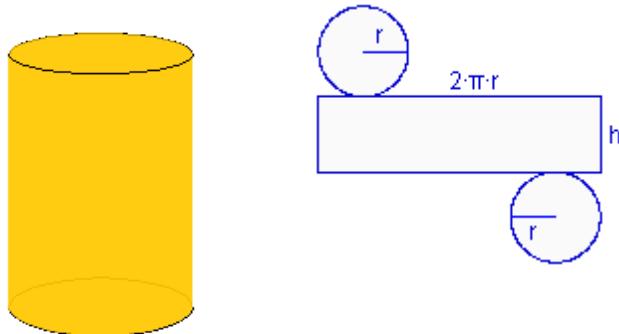
Área de los cuerpos de revolución

Área de un cilindro

El desarrollo de un cilindro se compone de dos círculos que son las bases y un rectángulo de base la longitud de la circunferencia y de altura la del cilindro.

Área lateral: $Al=2\cdot\pi\cdot r\cdot h$

Área total: $At=2\cdot\pi\cdot r\cdot h+2\cdot\pi\cdot r^2$

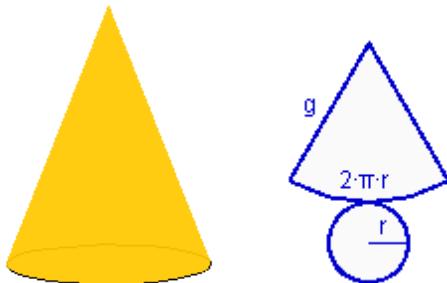


Área de un cono

El desarrollo de un cono se compone del círculo de la base y un sector circular que tiene por longitud de arco, la longitud de la circunferencia y por radio, la generatriz del cono.

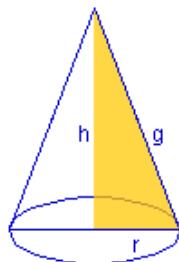
Área lateral: $Al=\pi\cdot r\cdot g$

Área total: $At=\pi\cdot r\cdot g+\pi\cdot r^2$



En un cono:

La generatriz, la altura y el radio de la base forman un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la generatriz.



Área de una esfera

La esfera no se puede desarrollar y representar en un plano.

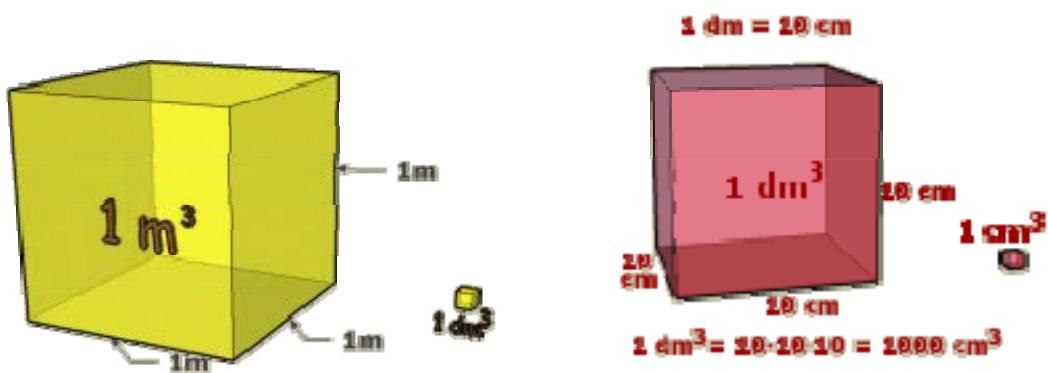
El área de la esfera es igual a cuatro veces la superficie del círculo de mayor radio que contiene.

$$\text{Área: } A = 4\pi r^2$$



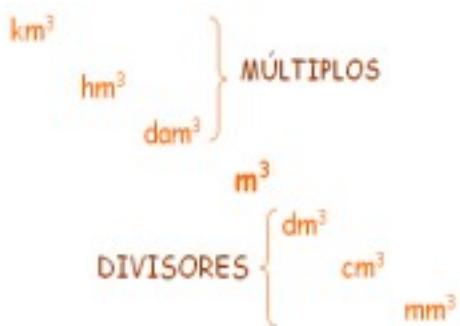
TÉCNOLOGIAS DE LAS TÉCNICAS DE VOLUMENES.**Volumen y capacidad****Unidades de volumen**

El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa. La unidad principal es el metro cúbico (m^3).



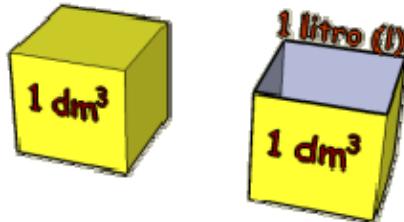
Una unidad de volumen es 1000 veces mayor que la del orden inmediato inferior y 1000 veces más pequeña que la del orden inmediato superior.

Relación entre las unidades. Cada unidad de volumen es 1000 veces mayor que la del orden inferior siguiente y 1000 veces menor que la del orden superior anterior.



Capacidad y volumen

El volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo y capacidad es lo que cabe dentro de un recipiente.



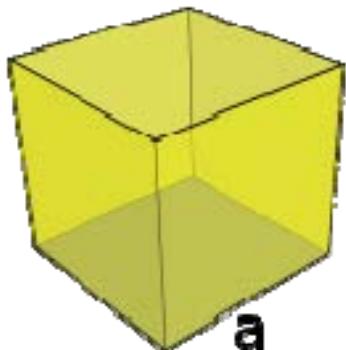
Un litro (l) es la capacidad de una caja cúbica de 1 dm de lado.

En general se llama capacidad de un recipiente a su volumen.

Volúmenes de prismas y pirámides

Cubo

Un **cubo** es un prisma particular formado por seis caras cuadradas. Su volumen es el cubo de la longitud de la arista.



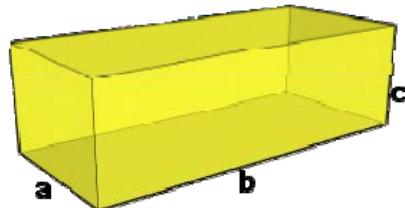
$$\text{Volumen (V)} = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Un cubo de 3 cm de arista estaría formado por $3^3 = 27$ cubos unidad, de un cm^3 cada uno.



Ortoedro

Un **ortoedro** es un prisma cuyas caras son todas rectangulares.

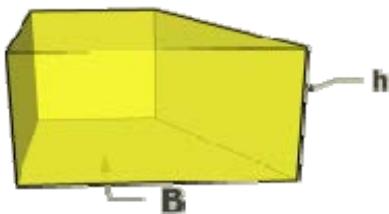


$$\text{Volumen (V)} = a \cdot b \cdot c$$



Resto de prismas rectos

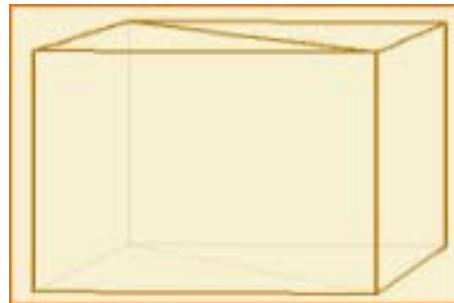
Un **prisma recto** es un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas, llamadas bases y cuyas caras laterales son rectangulares.



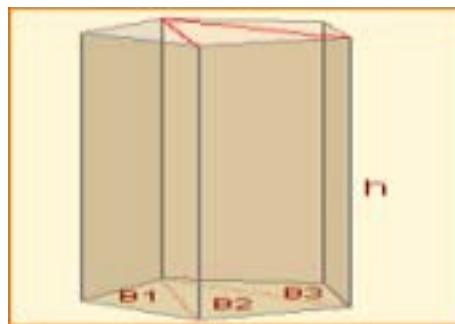
$$\text{Volumen (V)} = B \cdot h$$

B=área de la base

h=altura



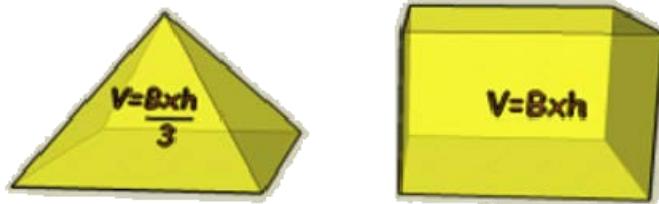
Con dos prismas triangulares se puede formar un paralelepípedo recto, y de éste se puede obtener un ortoedro. Es fácil deducir que el volumen del prisma triangular es el área de su base por su altura



Los restantes prismas rectos se pueden descomponer en prismas triangulares. De esta forma se deduce sin dificultad que el volumen de un prisma recto es el área de su base por su altura.

Relación entre prismas y pirámides

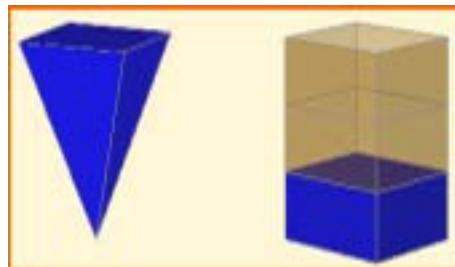
El **volumen de una pirámide** es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base que dicha pirámide y la misma altura que ésta.



$$\text{Volumen (V)} = (B \cdot h) / 3$$

B=área de la base

h=altura

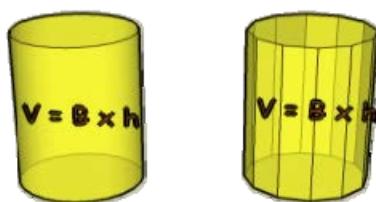


El volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma altura y misma base. Por tanto, el volumen de una pirámide es un tercio del área de su base por su altura.

Cuerpos de revolución

Volumen de un cilindro

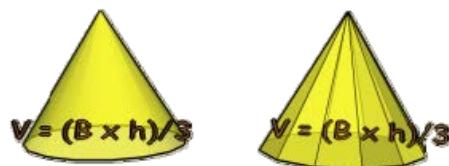
Al crecer el número de caras de un prisma indefinidamente, éste se transforma en un cilindro. Como en el prisma, el **volumen de un cilindro** es el área de su base por su altura.



$$\text{Volumen (V)} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Volumen de un cono

Al crecer el número de caras de una pirámide, ésta se transforma en un cono. Como en la pirámide, el **volumen de un cono** es un tercio del área de su base por su altura.

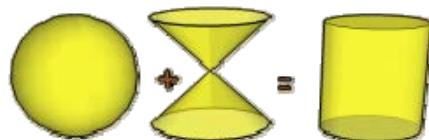


$$\text{Volumen (V)} = (\pi \cdot r^2 \cdot h) / 3$$

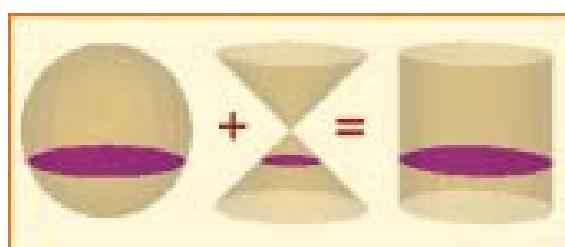
Volumen de una esfera

El **volumen de una esfera** se puede obtener a partir del volumen de un cilindro y de dos conos.

$$\text{Volumen (V)} = (4/3) \cdot \pi \cdot r^3$$

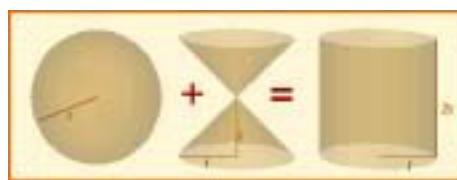


Deducción de la fórmula del volumen de una esfera.



Una propiedad importante. En la figura, el radio de las bases del cono y del cilindro es el mismo que el radio de la esfera. La altura del cilindro es el diámetro de la esfera y la altura de los conos coincide con el radio de la esfera. En estas condiciones, al seccionar los tres cuerpos por un plano horizontal se tiene que la suma de las áreas de las secciones de la esfera y del cono es igual al área de la sección del cilindro.

De la propiedad anterior se deduce que el volumen de esa esfera más el de los dos conos coincide con el volumen del cilindro:



Y de esta relación se tiene que:

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{conos}}$$

Se sabe que:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$$

$$V_{\text{conos}} = 2(\pi r^2 r / 3) = 2/3 \pi r^3$$

Por lo que:

$$V_{\text{esfera}} = 4/3 \pi r^3$$

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Las técnicas cuyos razonamientos se basen en demostraciones matemáticas serán los profesores quienes asuman dicha responsabilidad, sin embargo en técnicas cuyos razonamientos estén basados en demostraciones a partir de actividades con manualidades, se dejarán a los alumnos que sean los responsables de asumir las justificaciones. No obstante, y debido a que no se pretende justificar absolutamente todas las técnicas sino más bien lo que se pretende justificar son las relaciones entre áreas y volúmenes entre los diferentes cuerpos geométricos y la comprobación de los cálculos que nos proporcionan las formulas, se dejará en manos de la autoridad del profesor determinadas justificaciones matemáticas.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

En el Currículum actual de la LOE, en el curso de 2ºESO, en el apartado de contenidos aparece en el bloque 4 Geometría, Cuerpos en el espacio. Prismas y pirámides: descripción, elementos y propiedades. Poliedros. Cilindro, cono y esfera: descripción, elementos y propiedades. Desarrollos planos. Realización de clasificaciones de figuras geométricas del espacio atendiendo a diferentes características. Obtención de figuras planas mediante cortes o proyecciones de figuras espaciales. Áreas y volúmenes de cuerpos en el espacio: concepto y cálculo.

Por tanto en ese bloque de contenidos institucionalizaríamos los distintos aspectos del objeto matemático propuesto.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología a seguir en la implementación en el aula de las tecnologías se podrían separar en dos fases:

Una en donde para que el alumno adquiera nuevos conocimientos teóricos, el profesor además de proporcionar la documentación en formato de apuntes, explica en forma de clase magistral los nuevos conceptos, y de esta forma el alumno vaya estudiando con material adecuado lo explicado en clase. Estas tecnologías están enfocadas en la justificación de las técnicas más algebraicas y más puramente matemáticas.

Por otro lado, las tecnologías más prácticas en donde se van a utilizar elementos manuales como las figuras rellenables y los objetos de cartulina se irán alternando con las sesiones más teóricas con intención de amenizar las clases para los alumnos. En las sesiones donde el objetivo sea comprobar las formulas de cálculo, primero se realizará mediante la técnica de cuerpos rellenables y posteriormente se explicará la parte más teórica y deductiva.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

Una primera clase como introducción en el que se realizaría la actividad de la construcción de poliedros con palillos y gominolas.

Tres clases con explicación teórica de áreas planas y resolución de problemas.

Una clase con la actividad de recortables para composición de cuerpos geométricos a partir de desarrollos en el plano.

Tres clases teóricas de exposición del cálculo de volúmenes.

Una clase realizando la actividad de comprobación de los cálculos obtenidos mediante la fórmula con cuerpos geométricos rellenables.

Dos clases de resolución de problemas de volúmenes de poliedros.

Una clase realizando la actividad de cómo se generan los cuerpos de revolución mediante una pajita y un trozo de cartulina.

Dos clases de explicación teórica de los volúmenes de los cuerpos de revolución.

Dos clases de resolución de problemas de volúmenes de cuerpos de revolución.

Dos clases para resolver problemas del tipo fijado el volumen o su área crear un cuerpo geométrico y trabajar la visión global de los problemas.

Dos clases para tratar el tema de las aproximaciones.

2. Establece una duración temporal aproximada.

Según se ha estructurado en el punto H1, sobre unas veinte sesiones serán necesarias para que los alumnos adquieran de una competencia adecuada sobre el objeto matemático.

I. Sobre la evaluación

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

1. Estoy construyendo una piscina de 5,7 metros de largo, 4 metros de ancho y 1,9 metros de alto. Quiero cubrir las paredes y el fondo con azulejos de forma cuadrada de 20 cm de lado.
¿Cuántos azulejos necesitaré si aproximadamente se desperdicia un 10%?



2. Calcula los metros cuadrados de tela que se necesita para fabricar una sombrilla con forma de pirámide dodecagonal de 84 cm de arista de la base y 194 cm de arista lateral.



3. a) Calcula la superficie de una pelota de 5 cm de radio.
b) Calcula la superficie de una pelota de radio doble de la anterior.
c) Calcula la superficie de una pelota de radio 10 veces mayor que la primera.
d) ¿Qué relación hay entre las superficies de las esferas?



4. Un macetero de plástico tiene forma de tronco de pirámide hexagonal. Los lados de las bases miden respectivamente 36 y 42 cm y la arista lateral mide 7,5 cm. Calcula la cantidad de plástico que se necesita para su fabricación.



5. Una piscina tiene unas dimensiones de $7 \times 4 \times 2$ m. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarla dos grifos cuyo caudal es de 70 litros por minuto cada uno?

6. Calcula el peso en gramos de un lingote de plata de $24 \times 4 \times 3$ cm. La densidad de la plata es $10,5 \text{ g/cm}^3$.



7. La etiqueta lateral de papel, que rodea completamente una lata cilíndrica de tomate frito, mide 25×13 cm. Calcula el volumen de la lata.

8. Calcula el peso de un cable cilíndrico de cobre de 2 mm de diámetro y 1350 m de longitud, sabiendo que la densidad del cobre es $8,9 \text{ g/cm}^3$.

Todos los problemas valdrán 1,25 puntos

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Se sepa calcular áreas laterales de los cuerpos geométricos estudiados.

Se sepa asociar a cada elemento de la vida real un cuerpo geométrico.

Saber pasar de unas unidades de capacidad a otras.

Trabajar con diferentes unidades de medida.

Calcular volúmenes de cuerpos geométricos.

Saber cuántos cuerpos geométricos se pueden hacer con determinado material.

Saber cuánto material te hace falta para realizar un determinado trabajo.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Los problemas más sencillos que son de aplicar la formula, espero que la mayoría de los alumnos hayan resuelto correctamente ese tipo de problemas. Los problemas que se mezclan con unidades de longitud y densidad creo que la mayoría de alumnos calcularán correctamente el área o volumen y tendrán bastantes problemas llegados a este punto.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Como criterio de evaluación de la asignatura se desglosaría de la siguiente forma:

- Un 15% actividades que se realizan en clase, contabilizando su participación e interés.
- Un 20% problemas y ejercicios a realizar fuera del horario escolar.
- Un 65% prueba escrita.

Para la prueba escrita los criterios de evaluación serían los siguientes:

- Un 20% organización del planteamiento, croquis, dibujo, datos del problema, etc....
- Un 40% Correcto planteamiento y correctas fórmulas.
- Un 40% desarrollo de las operaciones.

J. Sobre la bibliografía y páginas web

1. Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.

- Moreno M.F., del Olmo M.A., Gil F., (1989) *Volumen 19 Superficie y Volúmenes ¿Algo más que el trabajo con formulas?* Síntesis: Madrid.
- Gómez Cutillas J.L., (2008) *Matemáticas 2ºESO*. Grupo EDEBE: Barcelona.
- Córlera J., Gaztelu I., (2008) *Matemáticas 2ºESO* ANAYA: Madrid.
- Domínguez Sánchez F., (2008) Matemáticas 2ºESO SANTILLANA: Madrid
- Web del centro de innovación y desarrollo a distancia CIDE@D
<http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/>
- Real Pérez M., (2009). Representación de poliedro y superficies con un aplicación TIC SUMA 60, 63-71.
- Muñoz Escolano J.M., Oller Marcén A.M., (2013). Identificación de figuras geométricas en fotografías de objetos reales. Un estudio con maestros. NÚMEROS, 83, 105-122.