Trabajo Fin de Máster

Factorización de matrices Vandermonde y fórmula de Newton

Autora:
Yasmina Khiar Viana

Directores:
Jesús Carnicer Álvarez
Juan Manuel Peña Ferrández

Máster en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación

Zaragoza, Julio 2014

Facultad de Ciencias

Universidad Zaragoza

Índice

1. Introducción **4**

2. Problemas de interpolación y matrices de colocación **5**

3. Interpolación polinómica y matriz de Vandermonde **6**

4. Fórmula de Newton y factorización LU **7**

5. Condicionamiento **10**

6. Cálculo de las inversas de las matrices triangulares **10**

7. Alta precisión relativa **12**

8. La ordenación de Leja **13**

9. Ejemplos **15**
9.1. $K = [0, 1]$ 15
9.2. $K = [-1, 1]$ 17

10. Experimentos numéricos: factores triangulares **21**
10.1. Intervalo $[0, 1]$ 21
10.2. Intervalo $[-1, 1]$ 24

11. Experimentos numéricos: condicionamiento conjunto **27**
11.1. Intervalo $[0, 1]$ 28
11.2. Intervalo $[-1, 1]$ 29

12. Conclusiones **31**

Bibliografía **33**

1. Introducción

Uno de los métodos más utilizados para resolver un sistema lineal de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consiste en descomponer la matriz A como producto de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U y resolver los correspondientes sistemas triangulares. Esta forma de descomponer una matriz se conoce como factorización LU. En este trabajo vamos a considerar la matriz de Vandermonde V en nodos $x_0, \ldots, x_n$. Aunque disponemos de expresiones explícitas para la inversa de una matriz de Vandermonde, es habitual resolver el sistema mediante una factorización LU. Se explorarán las conexiones de la fórmula de interpolación de Newton con dichas factorizaciones triangulares. Como la fórmula de Newton depende de la ordenación de los nodos, se analizará el condicionamiento de factorizaciones triangulares asociadas a diferentes ordenaciones de los nodos.

En cualquier método numérico, además del coste computacional, es importante tener en cuenta los errores de redondeo que se cometen. Una medida apropiada del error cometido es el condicionamiento de una matriz A, que se denota por $\kappa_\infty(A)$ y se define del siguiente modo:

$$\kappa_\infty(A) := \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty.$$

Es bien conocido que la matriz de Vandermonde está mal condicionada. Además, se tiene que $\kappa_\infty(V) \leq \kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$. El objetivo de este trabajo es analizar posibles factorizaciones LU de V y ordenaciones de los nodos de forma que $\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$ sea lo menor posible. Las factorizaciones que vamos a considerar son dos: la primera está asociada a la fórmula de Newton para la resolución del correspondiente problema de interpolación polinómica y la segunda asociada a la eliminación gaussiana. Las ordenaciones que vamos a tomar son la natural, la de Leja y, en el caso de tomar los nodos en el intervalo $[-1, 1]$, proponemos una nueva ordenación llamada central.

En la Sección 2 de este trabajo se introduce el problema de interpolación de Lagrange y se define la matriz de colocación de un problema de interpolación respecto de una base dada. A continuación en la Sección 3, se presenta el problema de interpolación de Lagrange polinómico y se da la solución de éste a través de la fórmula de Lagrange y de la matriz de Vandermonde. La Sección 4 comienza con la fórmula de Newton, que expresa el interpolante mediante diferencias divididas y se presenta la factorización LU asociada. Se dan fórmulas de recurrencia para calcular los elementos de las matrices triangulares L y U. Estas matrices triangulares forman una factorización LU de la matriz de Vandermonde V donde U tiene unos en la diagonal principal. En la siguiente Sección 5, se define el condicionamiento tradicional $\kappa_\infty(A)$ y el condicionamiento de Skeel de una matriz. La Sección 6 está dedicada a calcular las inversas de las matrices L y U anteriores y se dan fórmulas explícitas que permiten calcular los elementos de estas matrices por recurrencia. En la siguiente Sección 7, se define el concepto de alta precisión relativa y se demuestra que los cálculos de L, L^{-1}, U y U^{-1} se realizan con alta precisión relativa. En la Sección 8 se introduce una nueva forma de ordenar los nodos:

la ordenación de Leja, descrita por Reichel en [10]. La Sección 9 está dedicada a ejemplos ilustrativos en los que se consideran distintos intervalos para tomar los nodos. Se consideran nodos equidistantes y se toman distintas ordenaciones para ellos. Las secciones 10 y 11 están dedicadas a los experimentos numéricos realizados. La primera de estas secciones recoge resultados sobre los factores triangulares, mientras que la segunda compara los resultados de los condicionamientos conjuntos. La última sección recoge las conclusiones extraídas de este trabajo.

2. Problemas de interpolación y matrices de colocación

En este trabajo queremos estudiar la factorización de matrices Vandermonde. Estas matrices aparecen al plantear un problema de interpolación de Lagrange respecto de la base de monomios.

Problema de interpolación de Lagrange. Sea U un espacio de funciones con $\dim U = n+1$. Dados nodos $x_0, \dots, x_n$ distintos y $f_0, \dots, f_n$, encontrar $u \in U$, con $u(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$.

El interpolante puede obtenerse en distintos espacios y dentro del mismo espacio puede expresarse en términos de diferentes bases. Si $(u_0, \dots, u_n)$ es una base ordenada de U, podemos expresar la solución u en términos de dicha base $u = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i$ y el problema de interpolación queda reducido a la resolución del sistema

$$M\binom{u_0, \dots, u_n}{x_0, \dots, x_n}\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

donde $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n)^T$, $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_n)^T$ y

$$M\binom{u_0, \dots, u_n}{x_0, \dots, x_n} = (u_j(x_i))_{i,j=0,\dots,n},$$

denota la *matriz de colocación* de la base en los nodos. Aquí nos apartamos del convenio usual y consideramos que el primer índice de filas y columnas es 0 en lugar de 1, por lo que la dimensión correspondiente a n es $n+1$, para acomodar nuestros resultados al problema de interpolación de grado n y a la notación de matrices de Vandermonde.

Más generalmente podemos plantear problemas de interpolación lineales respecto a una sucesión de funcionales $\lambda_0, \dots, \lambda_n$.

Problema de interpolación lineal general. Sea U un espacio de funciones de dimensión $n+1$. Dados funcionales $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ y f una función, encontrar $u \in U$, con $\lambda_i u = \lambda_i f$, $i = 0, \dots, n$.

Introducimos la notación de matriz de colocación de un problema de interpolación respecto a una sucesión de funcionales.

Definición. *La matriz de colocación de una base* $(u_0, \dots, u_n)$ *respecto a una sucesión de funcionales* $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ *es*

$$M\binom{u_0, \dots, u_n}{\lambda_0, \dots, \lambda_n} = (\lambda_i(u_j))_{i,j=0,\dots,n}.$$

Una vez elegida una base, $(u_0, \dots, u_n)$, el problema de interpolación lineal general se reduce a resolver el sistema

$$M\binom{u_0, \dots, u_n}{\lambda_0, \dots, \lambda_n}\mathbf{a} = M\binom{f}{\lambda_0, \dots, \lambda_n},$$

expresando la solución en la forma $u = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i$.

Un problema de interpolación lineal general no tiene necesariamente solución única. La condición necesaria y suficiente para que el problema admita una única solución es que el determinante de la matriz de colocación respecto de una base sea distinto de cero.

3. Interpolación polinómica y matriz de Vandermonde

Comencemos esta sección planteando el problema de interpolación de Lagrange polinómico.

Problema de interpolación de Lagrange polinómico. Dados nodos $x_0, \dots, x_n$ distintos y $f_0, \dots, f_n$, encontrar $p \in P_n$, con $p(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$.

Sabemos que este problema tiene una única solución. Para resolverlo expresamos $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_j x^j$ y reducimos el problema al sistema

$$V\mathbf{c} = \mathbf{f},$$

donde

$$V = V(x_0, \dots, x_n) := M\binom{1, x, \dots, x^n}{x_0, x_1, \dots, x_n} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

es la matriz de Vandermonde en los nodos $x_0, \dots, x_n$, $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n)^T$, $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)^T$.

Nuestro objetivo es estudiar la resolución del sistema $V\mathbf{c} = \mathbf{f}$, es decir, determinar los coeficientes respecto de la base de monomios del interpolante.

La solución del problema de Lagrange puede expresarse a través de la *fórmula de Lagrange*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_j l_j(x), \quad l_j(x) = \prod_{k\neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Dado que la fórmula de Lagrange resuelve el problema de interpolación explícitamente en términos de los datos $\mathbf{f}$ del segundo miembro, debe estar relacionado con la matriz inversa de V.

Llamando $\mathbf{l} = (l_0, \dots, l_n)^T$ a la base de Lagrange y $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_n)^T$ a la base de monomios $t_j(x) := x^j$, $j = 0, \dots, n$, podemos comparar las expresiones del interpolante respecto a ambas bases

$$\mathbf{l}^T \mathbf{f} = \mathbf{t}^T \mathbf{c}.$$

Utilizando la relación $\mathbf{c} = V^{-1}\mathbf{f}$ obtenemos

$$\mathbf{l}^T \mathbf{f} = \mathbf{t}^T V^{-1} \mathbf{f},$$

y, como esta relación debe verificarse para todo $\mathbf{f}$, deducimos que

$$\mathbf{l}^T = \mathbf{t}^T V^{-1},$$

es decir, la matriz de cambio de base de la base de Lagrange respecto de la base de monomios es la matriz inversa de Vandermonde. Considerando que

$$\begin{aligned}\prod_{k\neq j}(x - x_k) = x^n - \Big(\sum_{k\neq j} x_i\Big)x^{n-1} + \cdots \\ + (-1)^p \Big(\sum_{k_1<\cdots<k_p\in\{0,\dots,n\}\setminus\{j\}} x_{k_1}\cdots x_{k_p}\Big)x^{n-p} + \cdots + (-1)^n \prod_{k\neq j} x_k,\end{aligned}$$

tenemos que el coeficiente de l_j en x^i es de la forma

$$v_{ij}^{(-1)} = \frac{(-1)^i \sum_{\#K=n-i, K\subseteq\{0,\dots,n\}\setminus\{j\}} \prod_{k\in K} x_k}{\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)}, \tag{3.1}$$

obteniéndose el elemento (i, j) de la inversa de la matriz de Vandermonde.

4. Fórmula de Newton y factorización LU

La *fórmula de Newton* del interpolante polinómico

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} [x_0, \dots, x_j] f \omega_j(x)$$

permite expresar el interpolante en términos del vector de diferencias divididas $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_n)$, $d_j := [x_0, \dots, x_j]$, $j = 0, \dots, n$, y la base de Newton $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n)$, con

$$\omega_j(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{j-1}).$$

Cada elemento ω_j de la base de Newton es un polinomio mónico de grado j con la propiedad $\omega_j(x_i) = 0$, si $j > i$. Esto implica que la matriz de colocación en los nodos $M\left(\begin{smallmatrix}\omega_0, \dots, \omega_n \\ x_0, x_1, \dots, x_n\end{smallmatrix}\right)$ es una matriz triangular inferior

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \cdots & (x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix},$$

cuyo elemento (i, j) es $l_{ij} = \omega_j(x_i) = \prod_{k=0}^{j-1}(x_i - x_k)$, $j \leq i$. Evaluando en cada punto la expresión del polinomio de interpolación $p = \omega^T \mathbf{d}$, obtenemos $f_i = \omega^T(x_i)\mathbf{d}$, $i = 0, \dots, n$, obteniéndose el sistema

$$L\mathbf{d} = \mathbf{f}.$$

Es decir, el vector de diferencias divididas es la solución del sistema triangular $L\mathbf{d} = \mathbf{f}$.

Podemos calcular los elementos de la matriz L por recurrencia, porque los elementos de la columna j-ésima de la matriz L pueden obtenerse de la columna anterior de la siguiente manera

$$l_{ij} = l_{i,j-1}(x_i - x_{j-1}), \tag{4.1}$$

partiendo de $l_{i0} = 1$, $i = 0, \dots, n$.

Si aplicamos la fórmula de Newton a cada monomio obtenemos

$$(1, \dots, x^n) = (\omega_0(x), \dots, \omega_n(x)) M \begin{pmatrix} 1, \dots, x^n \\ [x_0], [x_0, x_1], \dots, [x_0, \dots, x_n] \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $[x_0, \dots, x_i]x^j = 0$ si $i > j$, se deduce que la matriz de cambio de base entre la base de Newton y la base de monomios es la matriz triangular superior

$$U := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & 1 & [x_0, x_1]x^2 & \cdots & [x_0, x_1]x^n \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & [x_0, \dots, x_{n-1}]x^n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parece ser que para calcular $u_{ij} := [x_0, \ldots, x_i]x^j$ es necesario realizar varias diferencias y restas. Sin embargo, podemos obtener el valor u_{ij} en términos de los $x_0, \ldots, x_i$ utilizando una relación en la que solo aparecen sumas de potencias de los nodos. De acuerdo con la regla de Leibniz para diferencias divididas, tenemos

$$[x_0, \ldots, x_i]x^j = x_i[x_0, \ldots, x_i]x^{j-1} + [x_0, \ldots, x_{i-1}]x^{j-1},$$

es decir

$$u_{ij} = u_{i-1,j-1} + x_i u_{i,j-1}. \tag{4.2}$$

Usando esas relaciones puede calcularse la fija i-ésima partiendo de la fila $(i-1)$-ésima, teniendo en cuenta que $u_{ii} = 1$, $i = 0, \ldots, n$, y $u_{ij} = 0$, $j < i$. Se deduce la siguiente fórmula para la fila i-ésima en términos de la fila $(i-1)$-ésima

$$u_{ij} = u_{i-1,j-1} + x_i u_{i-1,j-2} + x_i^2 u_{i-1,j-3} + \cdots + x_i^{j-i} u_{i-1,i-1},$$

o equivalentemente

$$[x_0, \ldots, x_i]x^j = \sum_{k=0}^{j-i} x_i^k [x_0, \ldots, x_{i-1}]x^{j-1-k}, \quad j \geq i.$$

Por inducción se demuestra que

$$u_{ij} = [x_0, \ldots, x_i]x^j = \sum_{\alpha_0+\cdots+\alpha_i=j-i} x_0^{\alpha_0} \cdots x_i^{\alpha_i}.$$

Si en la relación de cambio de bases $\mathbf{t}^T = \omega^T U$, tomamos matrices de colocación se deduce que

$$M\begin{pmatrix} 1, x, \ldots, x^n \\ x_0, x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \omega_0, \ldots, \omega_n \\ x_0, x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} U,$$

lo que implica que

$$V = LU, \tag{4.3}$$

es decir, las matrices L y U forman la factorización de Crout de la matriz de Vandermonde, donde la matriz triangular superior U tiene unos en la diagonal.

La factorización LU se utiliza con frecuencia para resolver el sistema $V\mathbf{c} = \mathbf{f}$. Llamando $\mathbf{d}$ al vector de diferencias divididas, tenemos

$$L\mathbf{d} = f, \quad U\mathbf{c} = d,$$

y la solución del sistema con matriz de Vandermonde se reduce a la resolución consecutiva de dos sistemas triangulares con matrices L y U. Estos sistemas intermedios relacionan la solución con un vector intermedio $\mathbf{d}$, el vector de las diferencias divididas y, por tanto, están relacionados directamente con la fórmula de Newton de interpolación.

5. Condicionamiento

Recordemos que el condicionamiento tradicional de una matriz es

$$\kappa_\infty(A) := \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty, \quad \|A\|_\infty := \max_{i=0,\dots,n} \sum_{j=0}^{n} |a_{ij}|.$$

Mencionemos que también se usa el llamado condicionamiento de Skeel (véase [9]). El condicionamiento de Skeel de una matriz A se denota por $\mathrm{Cond}(A)$ y se define como

$$\mathrm{Cond}(A) = \||A^{-1}||A|\|_\infty.$$

Se cumple que $\mathrm{Cond}(A) \leq \kappa_\infty(A)$ y que, a diferencia del condicionamiento tradicional, el condicionamiento de Skeel es invariante para escalados de fila (es decir, $\mathrm{Cond}(DA) = \mathrm{Cond}(A)$ para cualquier matriz diagonal D no singular).

Como $V = LU$, se tiene que $\kappa_\infty(V) \leq \kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$. Aunque disponemos de expresiones explícitas para la inversa de una matriz de Vandermonde, es habitual resolver el sistema mediante la factorización LU o utilizar un cálculo intermedio con diferencias divididas. Por ello, estamos interesados en el condicionamiento de cada uno de los factores $\kappa_\infty(L)$ y $\kappa_\infty(U)$.

Para abordar el tratamiento de estos números es interesante disponer de expresiones explícitas de las inversas, que realizaremos en la siguiente sección.

6. Cálculo de las inversas de las matrices triangulares

Sean L y U las matrices triangulares que factorizan la matriz de Vandermonde obtenidas en la sección 4.

La inversa de L está relacionada con el cambio de bases entre la base de Lagrange $\mathbf{l}$ y la base de Newton ω. Comparando la fórmula de Lagrange y la fórmula de Newton obtenemos

$$\mathbf{l}(x)^T \mathbf{f} = \omega(x)^T \mathbf{d}$$

y sustituyendo $\mathbf{d} = L^{-1}\mathbf{f}$, obtenemos la relación

$$\mathbf{l}(x)^T \mathbf{f} = \omega(x)^T L^{-1} \mathbf{f},$$

válida para cualquier vector $\mathbf{f}$, de donde se deduce que

$$\mathbf{l}(x)^T = \omega(x)^T L^{-1}.$$

Por tanto, la inversa de L^{-1} representa la matriz de cambio de base entre la base de Lagrange y la base de Newton,

$$L^{-1} = M\Big(\begin{matrix} l_0, l_1, \ldots, l_n \\ [x_0], [x_0, x_1], \ldots, [x_0, \ldots, x_n] \end{matrix}\Big).$$

La fórmula anterior no proporciona explícitamente los elementos de L^{-1}, sino que los describe en términos de diferencias divididas. Una segunda opción consiste en utilizar la fórmula

$$[x_0, \ldots, x_i]f = \sum_{j=0}^{i} \frac{f(x_j)}{\prod_{k\in 0,\ldots,i\setminus\{j\}}(x_j - x_k)}.$$

En aras a simplificar la notación, notemos que

$$\omega_i'(x_j) = \prod_{k\in\{0,\ldots,i\}\setminus\{j\}} (x_j - x_k),$$

lo que permite establecer la siguiente relación entre **d** y **f**

$$d_i = \sum_{j=0}^{i} \frac{f(x_j)}{\omega_k'(x_j)}.$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{d} = L^{-1}\mathbf{f}$, deducimos que el elemento (i, j) de la matriz L^{-1} es

$$l_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{\omega_i'(x_j)} = \frac{1}{\prod_{k\in\{0,\ldots,i\}\setminus\{j\}}(x_j - x_k)}$$

cuando $j \leq i$ y 0 en caso contrario. Podemos calcular los $l_{ij}^{(-1)}$, teniendo en cuenta que

$$l_{ii}^{(-1)} = \frac{1}{l_{ii}}, \quad l_{ij}^{(-1)} = -\frac{l_{i-1,j}^{(-1)}}{x_i - x_j}, \; i > j. \tag{6.1}$$

Para poder invertir la matriz U partimos de la relación de cambio de base entre la base de Newton y la base de monomios

$$(\omega_0(x), \ldots, \omega_n(x)) = (1, \ldots, x^n)U^{-1}.$$

Expresando la base de Newton en términos de los monomios

$$\omega_j(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_{j-1}) = \sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\Big(\sum_{\#K=j-i;K\subset\{0,\ldots,j-1\}} \prod_{k\in K} x_k\Big)x^i,$$

se obtiene el elemento (i, j) de la matriz U^{-1} en la forma

$$u_{ij}^{(-1)} = (-1)^{j-i}\Big(\sum_{\#K=j-i;K\subset\{0,\ldots,j-1\}} \prod_{k\in K} x_k\Big).$$

Teniendo en cuenta que los $u_{ij}^{(-1)}$, $i = 0, \ldots, j$, son los coeficientes de ω_j respecto a la base de monomios $(1, x, \ldots, x^j)$, podemos comparar los coeficientes de $\omega_j(x)$ y $(x - x_{j-1})\omega_{j-1}$ y deducir la recurrencia

$$u_{ii}^{(-1)} = 1, \quad u_{ij}^{(-1)} = u_{i-1,j-1}^{(-1)} - x_{j-1}u_{i,j-1}^{(-1)}, \quad i < j, \tag{6.2}$$

en el caso de la primera fila tenemos las relaciones

$$u_{00}^{(-1)} = 1, \quad u_{0j}^{(-1)} = -x_{j-1} u_{0,j-1}^{(-1)}. \tag{6.3}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (6.2) y (6.3) y que U^{-1} es triangular superior, podemos determinar todos los elementos de U^{-1}.

7. Alta precisión relativa

Una expresión $\mathbf{X}$ puede obtenerse con *alta precisión relativa* (HRA) si el error relativo del valor calculado $\widehat{\mathbf{X}}$ puede acotarse del siguiente modo ([2]):

$$\frac{||\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{X}}||}{||\mathbf{X}||} \leq Cu,$$

donde C es una constante positiva independiente de la precisión aritmética y u es la unidad de redondeo.

Podemos asegurar que podemos calcular con alta precisión relativa los productos, cocientes y sumas verdaderas (sumas de números del mismo signo) de expresiones que se pueden calcular con alta precisión relativa. Sólo se permite efectuar operaciones de diferencia (sumas de números de signo opuesto) con los datos iniciales del problema (ver [5]). La importancia de poder asegurar alta precisión relativa proviene de que podemos asegurar que los errores relativos son del orden de la unidad de redondeo, independientemente del condicionamiento del problema. Para el concepto anterior, observemos que el cálculo de los elementos de la inversa de una matriz de Vandermonde correspondiente a nodos positivos se puede realizar con alta precisión relativa mediante de la fórmula (3.1). De hecho, el denominador producto de diferencias de datos iniciales y el numerador suma términos del mismo signo, que a su vez pueden calcularse con HRA.

Enunciemos ahora el siguiente resultado sobre las matrices L y U de la Sección 4:

Teorema 1. *Los cálculos de L, U, L^{-1} y U^{-1} pueden hacerse con alta precisión relativa cuando todos los nodos son positivos.*

Comencemos justificando la afirmación sobre L. Ya hemos visto en (4.1) que, partiendo de $l_{i0} = 1$, $i = 0, \ldots, n$, tenemos que

$$l_{ij} = l_{i,j-1}(x_i - x_{j-1}), \quad j \leq i.$$

Como la resta se aplica a los nodos x_i (los datos iniciales), tenemos que L se calcula con HRA.

Los elementos de L^{-1} se pueden calcular como hemos deducido en (6.1):

$$l_{ii}^{(-1)} = \frac{1}{l_{ii}},\ i = 0, \ldots, n,$$
$$l_{ij}^{(-1)} = \frac{l_{i-1,j}^{(-1)}}{x_j - x_i},\ i > j.$$

Claramente, también se calculan con HRA ya que la resta sólo afecta a los nodos.

Veamos ahora que los elementos de la matriz triangular superior U se calculan con alta precisión relativa. Recordemos que $u_{ii} = 1$, para todo $i = 0, \ldots, n$. Por (4.2) se tiene:

$$u_{ij} = u_{i-1,j-1} + x_i u_{i,j-1}.$$

Si $x_i \geq 0$, para todo $i = 0, \ldots, n$, vemos por inducción que los elementos de U son no negativos y por tanto, los elementos de la suma anterior son todos mayores o iguales que cero. Es decir, U también se calcula con HRA.

Por último, (6.2) y (6.3) nos dan los elementos de U^{-1}.

$$\begin{aligned}
&u_{00}^{(-1)} = 1, \quad u_{0j}^{(-1)} = -x_{j-1} u_{0,j-1}^{(-1)},\\
&u_{ii}^{(-1)} = 1,\\
&(-1)^{(j-i)} u_{ij}^{(-1)} = (-1)^{(j-i)} u_{i-1,j-1}^{(-1)} + x_{j-1} (-1)^{(j-i)} u_{i,j-1}^{(-1)}.
\end{aligned}$$

Como $x_i \geq 0$, para todo $i = 0, \ldots, n$, se deduce por inducción que $(-1)^{j-i} u_{ij}^{-1}$, $i \leq j$, son positivos. Por tanto, los sumandos son del mismo signo y el cálculo de U^{-1} también se realiza con HRA.

8. La ordenación de Leja

Cuando $0 < x_0 < \cdots < x_n$ la matriz de Vandermonde tiene todos sus menores positivos, es decir, se trata de una matriz totalmente positiva (TP). Una matriz es una matriz TP si y sólo si tiene una factorización LU tal que L y U son TP (ver Cryer [3]). Algunas propiedades de las matrices totalmente positivas indican que la eliminación gaussiana sin reordenación de filas conduce a buenos resultados de estabilidad (ver [4] y [6]), lo que proporciona argumentos para trabajar con los nodos ordenados de menor a mayor.

Sin embargo, otras ordenaciones de los nodos también pueden dar lugar a estabilidad en los cálculos. Observamos que en la diagonal de la matriz L tenemos los pivotes de la eliminación gaussiana. Mediante una estrategia de pivotaje parcial, se intenta maximizar en cada paso los multiplicadores. Notemos que el pivotaje parcial equivale a reordenar los nodos en el conjunto X. En [1] y [7] se muestra que esta forma de ordenar los nodos es esencialmente el orden de Leja (la diferencia es que en el pivotaje parcial no se cambia el primer pivote).

El orden de Leja se consigue siguiendo la siguiente estrategia como señala Reichel en [10]:

Orden de Leja.

(i) Inicialmente, se elige x_0 un nodo cualquiera. No obstante para maximizar $x_1 - x_0$ en el segundo paso conviene elegir un punto extremo, el mínimo o el máximo.

(ii) En el segundo paso se elige x_1 tal que

$$|x_1 - x_0| = \max_{j=1,\dots,n} |x_j - x_0|.$$

El segundo punto x_1 es el otro extremo (mínimo o máximo).

(iii) El el paso i-ésimo se selecciona x_i tal que

$$\prod_{k=0}^{i-1} |x_i - x_k| = \max_{j=i,\dots,n} \prod_{k=0}^{i-1} |x_j - x_k|.$$

De esta forma conseguimos que la diagonal en cada columna de L sea mayor que los elementos extradiagonales, dando lugar a un buen número de condición para la matriz L (véase [8]).

El orden de Leja es un caso particular de selección de puntos propuesta por Leja en un subconjunto compacto del campo complejo. En el caso de un compacto K en la recta real, se elige primero un punto x_0 (normalmente el mínimo o el máximo) y en cada paso se selecciona $x_i \in K$ para el que la función

$$\prod_{k=0}^{i-1} |x - x_k|.$$

alcance su valor máximo. La ordenación de Leja, se obtiene cuando el compacto K es finito y tiene cardinal $n+1$, precisamente el número de nodos que utilizaremos para la matriz de Vandermonde.

Reichel (ver [10]) demuestra que el condicionamiento de la fórmula de Newton definido por interpolación en los puntos de Leja tiene un crecimiento subexponencial atendiendo al número de puntos de interpolación.

Nuestro objetivo es comparar normas de L, U y L^{-1}, U^{-1} para diferentes ordenaciones, incluyendo el orden natural y el de Leja, para extraer conclusiones sobre la ordenación que produce una factorización LU con mejores propiedades de condicionamiento.

Finalmene observar que la factorización LU descrita en la Sección 4 es la factorización de Crout. La factorización de Doolittle asociada a la eliminación gaussiana es $\tilde{L}\tilde{U}$ con

$$\tilde{L} := LD^{-1}, \quad \tilde{U} = DU,$$

siendo

$$D := \operatorname{diag}(1, \omega_1(x_1), \omega_2(x_2), \dots, \omega_n(x_n)).$$

Observemos que $\tilde{L}$ tiene unos en la diagonal.

9. Ejemplos

Los siguientes ejemplos muestran las factorizaciones LU y $\tilde{L}\tilde{U}$, sus normas y condicionamientos. El dominio K es un intervalo cerrado en los dos casos: $[0,1]$ y $[-1,1]$. Consideraremos diferentes ordenaciones de los puntos equidistantes en el intervalo K.

9.1. $K = [0,1]$

Tomemos $K = [0,1]$. Los puntos equidistantes en este intervalo son de la forma:

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Para estos puntos vamos a tomar diferentes ordenaciones: el orden natural y el de Leja.

Orden natural

Comencemos con el orden natural y tomemos $n = 3$. Por tanto, los nodos son:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1.$$

La matriz de Vandermonde basada en estos nodos es

$$V_N = V(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a dar dos factorizaciones LU distintas para V. En la primera de ellas U tiene unos en la diagonal, mientras que en la segunda es L la que tiene la diagonal de unos.

La primera factorización es:

$$V_N = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 2/9 & 0 \\ 1 & 1 & 2/3 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyas normas son:

$$||L||_\infty = 2{,}8889, \qquad ||U||_\infty = 2,$$
$$||L^{-1}||_\infty = 36, \qquad ||U^{-1}||_\infty = 2.$$

La siguiente factorización es:

$$V_N = \tilde{L}\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 0 & 0 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix},$$

y sus normas son:

$$||\tilde{L}||_\infty = 8, \qquad ||\tilde{U}||_\infty = 1,$$
$$||\tilde{L}^{-1}||_\infty = 8, \qquad ||\tilde{U}^{-1}||_\infty = 9.$$

En la siguientes tablas podemos ver los condicionamientos de estas matrices.

$\kappa_\infty(V_N)$	$\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$	$\kappa_\infty(L)$	$\kappa_\infty(U)$
216	416	104	4

$\kappa_\infty(V_N)$	$\kappa_\infty(\tilde{L})\kappa_\infty(\tilde{U})$	$\kappa_\infty(\tilde{L})$	$\kappa_\infty(\tilde{U})$
216	576	64	9

Orden de Leja

Vamos a hacer un análisis similar al realizado con la ordenación natural. Tomamos $n = 3$, los puntos equidistantes siguiendo la ordenación de Leja son:

$$\tilde{x}_0 = 1, \tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 = \frac{1}{3}, \tilde{x}_3 = \frac{2}{3}.$$

La matriz de Vandermonde en estos puntos es

$$V_L = V(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \end{pmatrix}.$$

Análogamente al apartado anterior, vamos a dar dos factorizaciones LU distintas. La primera de ellas:

$$V_L = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2/3 & -2/9 & 0 \\ 1 & -1/3 & -2/9 & -2/27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$||L||_\infty = 2, \qquad ||U||_\infty = 4,$$
$$||L^{-1}||_\infty = 36, \qquad ||U^{-1}||_\infty = 2{,}3333.$$

La segunda factorización es:

$$V_L = \tilde{L}\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2/9 & -8/27 \\ 0 & 0 & 0 & -2/9 \end{pmatrix},$$

$$||\tilde{L}||_\infty = 3{,}3333, \qquad ||\tilde{U}||_\infty = 4,$$
$$||\tilde{L}^{-1}||_\infty = 2{,}6667, \qquad ||\tilde{U}^{-1}||_\infty = 22{,}5.$$

Las tablas mostradas a continuación recogen los condicionamientos de estas matrices:

$\kappa_\infty(V_L)$	$\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$	$\kappa_\infty(L)$	$\kappa_\infty(U)$
216	672	72	9,3333

$\kappa_\infty(V_L)$	$\kappa_\infty(\tilde{L})\kappa_\infty(\tilde{U})$	$\kappa_\infty(\tilde{L})$	$\kappa_\infty(\tilde{U})$
216	800	8,8889	90

9.2. $K = [-1, 1]$

El intervalo que vamos a considerar en esta sección es $[-1, 1]$ y $n = 3$. En este intervalo tomaremos las siguientes ordenaciones:

1. La ordenación natural.
2. La ordenación de Leja.
3. Los puntos ordenados crecientemente según su distancia a cero. Si el intervalo es $[-1, 1]$, esto equivale a ordenar según su distancia al centro del intervalo. Por ello, vamos a llamarla *ordenación central*.

De la misma manera que en los ejemplos en $[0, 1]$, consideraremos dos factorizaciones LU distintas.

Orden natural

Tomando el orden natural tenemos que los nodos son:

$$x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 1.$$

La matriz de Vandermonde sobre estos nodos es:

$$V_N = V(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1/3 & 1/9 & -1/27 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una de las factorizaciones es la siguiente:

$$V_N = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1 & 4/3 & 8/9 & 0 \\ 1 & 2 & 8/3 & 16/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4/3 & 13/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación escribimos las normas de estas matrices y de sus inversas:

$$||L||_\infty = 7{,}4444, \qquad ||U||_\infty = 4,$$
$$||L^{-1}||_\infty = 4{,}5, \qquad ||U^{-1}||_\infty = 2{,}4444.$$

La segunda factorización:

$$V_N = \tilde{L}\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2/3 & -8/9 & 26/27 \\ 0 & 0 & 8/9 & -8/9 \\ 0 & 0 & 0 & 16/9 \end{pmatrix},$$

y sus normas son:

$$||\tilde{L}||_\infty = 8, \qquad ||\tilde{U}||_\infty = 4,$$
$$||\tilde{L}^{-1}||_\infty = 8, \qquad ||\tilde{U}^{-1}||_\infty = 3{,}0625.$$

En las siguientes tablas podemos ver los condicionamientos de estas matrices.

$\kappa_\infty(V_N)$	$\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$	$\kappa_\infty(L)$	$\kappa_\infty(U)$
18	327,5556	33,5	9,7778

$\kappa_\infty(V_N)$	$\kappa_\infty(\tilde{L})\kappa_\infty(\tilde{U})$	$\kappa_\infty(\tilde{L})$	$\kappa_\infty(\tilde{U})$
18	784	64	12,25

Orden de Leja

Siguiendo el mismo esquema que el utilizado con el orden natural vamos a ver el orden de Leja. Los puntos equidistantes siguiendo el orden de Leja son:

$$\tilde{x}_0 = 1, \tilde{x}_1 = -1, \tilde{x}_2 = -\frac{1}{3}, \tilde{x}_3 = \frac{1}{3}.$$

La matriz de Vandermonde en estos puntos es

$$V_L = V(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1/3 & 1/9 & -1/27 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \end{pmatrix}.$$

Análogamente al apartado anterior, vamos a dar dos factorizaciones LU distintas. La primera de ellas:

$$V_L = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -4/3 & -8/9 & 0 \\ 1 & -2/3 & -8/9 & -16/27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$||L||_\infty = 3{,}222, \qquad ||U||_\infty = 4,$$
$$||L^{-1}||_\infty = 4{,}5, \qquad ||U^{-1}||_\infty = 3{,}3333.$$

La segunda factorización es:

$$V_L = \tilde{L}\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -8/9 & 8/27 \\ 0 & 0 & 0 & -16/27 \end{pmatrix},$$

$$||\tilde{L}||_\infty = 3{,}3333, \qquad ||\tilde{U}||_\infty = 4,$$
$$||\tilde{L}^{-1}||_\infty = 2{,}6667, \qquad ||\tilde{U}^{-1}||_\infty = 3{,}1875.$$

Podemos ver los condicionamientos de estas matrices en las siguientes tablas:

$\kappa_\infty(V_L)$	$\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$	$\kappa_\infty(L)$	$\kappa_\infty(U)$
18	193,3333	14,5	13,3333

$\kappa_\infty(V_L)$	$\kappa_\infty(\tilde{L})\kappa_\infty(\tilde{U})$	$\kappa_\infty(\tilde{L})$	$\kappa_\infty(\tilde{U})$
18	113,3333	8,8889	12,75

Orden central

Por último, tomemos los puntos ordenados crecientemente según su distancia a cero:

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{3}, \bar{x}_1 = -\frac{1}{3}, \bar{x}_2 = -1, \bar{x}_3 = 1.$$

La matriz de Vandermonde en estos puntos es

$$V_L = V(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & -1/3 & 1/9 & -1/27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La primera factorización es la siguiente:

$$V_C = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 1 & -4/3 & 8/9 & 0 \\ 1 & 2/3 & 8/9 & 16/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$||L||_\infty = 4{,}3333, \qquad ||U||_\infty = 2,$$
$$||L^{-1}||_\infty = 4{,}5, \qquad ||U^{-1}||_\infty = 2.$$

A continuación escribimos la segunda factorización:

$$V_C = \tilde{L}\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 0 & -2/3 & 0 & -2/27 \\ 0 & 0 & 8/9 & -8/9 \\ 0 & 0 & 0 & 16/9 \end{pmatrix},$$

$$||\tilde{L}||_\infty = 4, \qquad ||\tilde{U}||_\infty = 1{,}7778,$$
$$||\tilde{L}^{-1}||_\infty = 8, \qquad ||\tilde{U}^{-1}||_\infty = 1{,}6875.$$

Comparemos los condicionamientos de estas matrices:

$\kappa_\infty(V_C)$	$\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$	$\kappa_\infty(L)$	$\kappa_\infty(U)$
18	78	19,5	4

$\kappa_\infty(V_C)$	$\kappa_\infty(\tilde{L})\kappa_\infty(\tilde{U})$	$\kappa_\infty(\tilde{L})$	$\kappa_\infty(\tilde{U})$
18	96	32	3

10. Experimentos numéricos: factores triangulares

En esta sección vamos a comparar normas y condicionamientos de las matrices de las dos factorizaciones LU propuestas para distintas ordenaciones. Para ello vamos a considerar dos intervalos distintos. Los cálculos se han realizado en doble precisión con MATLAB.

10.1. Intervalo $[0, 1]$

En este caso $K = [0, 1]$. Denotemos por LU la factorización en la que U tiene unos en la diagonal y por $\tilde{L}\tilde{U}$ la factorización en la que $\tilde{L}$ tiene unos en la diagonal.

Vamos a considerar puntos equidistantes en el intervalo $[0, 1]$ con dos ordenaciones:

1. Orden natural
2. Orden de Leja

Comparemos primero las normas de L y $\tilde{L}$ con las dos ordenaciones.

	$\|\|L\|\|_\infty$	
n	Natural	Leja
3	2,8889	2
4	3,2188	2
5	3,5104	2,0112
9	4,4583	2,0425
19	6,1522	2,0498

	$\|\|\tilde{L}\|\|_\infty$	
n	Natural	Leja
3	8	3,3333
4	16	4
5	32	4,65
9	512	7,5726
19	$5{,}2429 \times 10^5$	11,7892

Vemos que, tanto para $||L||_\infty$ como para $||\tilde{L}||_\infty$, es mejor la ordenación de Leja. Hemos podido probar la siguiente proposición sobre $||\tilde{L}||_\infty$ y $||\tilde{L}^{-1}||_\infty$:

Proposición 2. *Sea V la matriz de Vandermonde en los nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$ equidistantes en $[0,1]$ con la ordenación natural, y la factorización $\tilde{L}\tilde{U}$. Se tiene*

$$||\tilde{L}||_\infty = 2^n$$
$$||\tilde{L}^{-1}||_\infty = 2^n$$

Demostración.

Sea $L = (l_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$ la matriz resultante de la factorización LU con U con unos en la diagonal. Ya hemos visto que $l_{ij} = \omega_j(x_i)$, por tanto:

$$\tilde{l}_{ij} = \frac{\omega_j(x_i)}{\omega_j(x_j)} = \frac{\prod_{k=0}^{j-1}(x_i - x_k)}{\prod_{k=0}^{j-1}(x_j - x_k)} \overset{\text{equidistantes}}{=} \frac{(i-j+1)(i-j+2)\dots(i-0)}{j(j-1)\dots 1} = \binom{i}{j}$$

Por tanto,

$$||\tilde{L}||_\infty = \max_{i=0,\dots,n} \sum_{j=0}^{i} |\tilde{l}_{ij}| = \max_{i=0,\dots,n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} = \max_{i=0,\dots,n} 2^i = 2^n$$

Denotemos por $l_{ij}^{(-1)}$ y por $\tilde{l}_{ij}^{(-1)}$ los elementos de L^{-1} y $\tilde{L}^{-1}$ respectivamente.

$$l_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{\omega_i'(x_j)} \Longrightarrow \tilde{l}_{ij}^{(-1)} = \frac{\omega_i'(x_i)}{\omega_i'(x_j)} = \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(x_i - x_k)}{\prod_{\substack{k=0,\dots,i\\ k\neq j}}(x_j - x_k)} \overset{\text{equidistantes}}{=} (-1)^{i-j}\binom{i}{j}$$

Así,

$$||\tilde{L}^{-1}||_\infty = \max_{i=0,\dots,n} \sum_{j=0}^{i} |\tilde{l}_{ij}^{(-1)}| = \max_{i=0,\dots,n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} = \max_{i=0,\dots,n} 2^i = 2^n$$

□

De la proposición anterior se deduce el valor del condicionamiento de $\tilde{L}$. Por tanto, $\kappa(\tilde{L}) = 2^{2n}$.

Veamos qué ocurre para las matrices triangulares superiores.

	$\lvert\lvert U\rvert\rvert_\infty$	
n	Natural	Leja
3	2	4
4	2,5	5
5	3,2	6,5200
9	10,2469	36,2812
19	222,5312	$2{,}1332 \times 10^3$

	$\lvert\lvert\tilde{U}\rvert\rvert_\infty$	
n	Natural	Leja
3	1	4
4	1	5
5	1	6
9	1	10
19	1	20

En contraste con lo que sucede con $||L||_\infty$ y $||\tilde{L}||_\infty$, vemos que para las normas de $||U||_\infty$ y $||\tilde{U}||_\infty$ es preferible la ordenación natural.

Las siguientes tablas nos muestran los condicionamientos de estas matrices triangulares de las dos factorizciones.

	Natural	Leja	Natural	Leja
n	$\kappa_\infty(L)$		$\kappa_\infty(U)$	
3	104	72	4	9,3333
4	549,3333	341,3333	6,2500	16,875
5	$2{,}9253 \times 10^3$	$1{,}6760 \times 10^3$	11,5200	33,6432
9	$2{,}4370 \times 10^6$	$1{,}1165 \times 10^6$	138,6496	684,7808
19	$5{,}2495 \times 10^{13}$	$1{,}7479 \times 10^{13}$	$1{,}0119 \times 10^5$	$1{,}5611 \times 10^6$

	Natural	Leja	Natural	Leja
n	$\kappa_\infty(\tilde{L})$		$\kappa_\infty(\tilde{U})$	
3	64	8,8889	9	90
4	256	16	26,6667	480
5	$1{,}0240 \times 10^3$	14,88	88,5417	$4{,}0625 \times 10^3$
9	$2{,}6214 \times 10^5$	46,1569	$1{,}3840 \times 10^4$	$9{,}0002 \times 10^6$
19	$2{,}7488 \times 10^{11}$	82,3227	$7{,}1536 \times 10^9$	$7{,}6698 \times 10^{15}$

Vemos que $\kappa_\infty(L)$ es mejor con la ordenación de Leja aunque con el orden natural se obtienen resultados similares. En cambio, los mejores resultados para $\kappa_\infty(U)$ se obtienen con el orden natural. Para la factorización $\tilde{L}\tilde{U}$ obtenemos conclusiones análogas. Con el orden de Leja $\kappa_\infty(\tilde{L})$ es más bajo, pero $\kappa_\infty(\tilde{U})$ es mejor con el orden natural.

El hecho de que $\kappa_\infty(L)$ y $\kappa_\infty(\tilde{L})$ sea menor para el orden de Leja es el esperado ya que es bien conocido que el pivotaje parcial controla el tamaño de los elementos de la matriz triangular inferior. Como ya hemos visto, el orden de Leja corresponde a seguir una estrategia de pivotaje parcial.

En [9] se justifica el buen condicionamiento de $\tilde{U}$, y por tanto de U, para nodos positivos con la ordenación natural. En este artículo se prueba que si existe una estrategia de pivotaje óptima para reducir el condicionamiento de Skeel de la matriz triangular superior U, entonces esta estrategia coincide con el pivotaje parcial escalado para una norma $||.||$ estrictamente monótona y en [6] se prueba que dicha estrategia aplicada a la eliminación gaussiana de una matriz TP no da lugar a cambio de filas. Una norma $||.||$ se dice estrictamente monótona si, para cualesquiera vectores $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ con $|u_j| \geq |v_j|$, $\forall j = 1, \ldots, n$

entonces $||\mathbf{u}|| \geq ||\mathbf{v}||$ y si además para algún j $|u_j| > |v_j|$ entonces $||\mathbf{u}|| > ||\mathbf{v}||$. Así, los resultados mencionados dan una justificación teórica del buen condicionamiento de U y $\tilde{U}$ para el orden natural.

Para terminar esta sección, vamos a analizar los condicionamientos de las matrices de las dos factorizaciones LU con la ordenación natural y de Leja de los puntos de Chebyshev en $[0,1]$. La matriz de Vandemonde está mejor condicionada para puntos de Chebyshev como se muestra en el capítulo 21 de Higham [8] donde se recopilan resultados sobre los condicionamientos de matrices de Vandermonde con distintas distribuciones de nodos. Las dos siguientes tablas muestran los condicionamientos de las matrices de las dos factorizaciones.

	Natural	Leja	Natural	Leja
n	$\kappa_\infty(L)$		$\kappa_\infty(U)$	
3	112,5004	80,4374	4,1537	8,8590
4	512,6342	327,1301	6,3730	20,0671
5	$2{,}2857 \times 10^3$	$1{,}3061 \times 10^3$	11,0868	26,1224
9	$7{,}9909 \times 10^5$	$3{,}3996 \times 10^5$	124,4100	642,6657
19	$1{,}2943 \times 10^{12}$	$3{,}5654 \times 10^{11}$	$7{,}7281 \times 10^4$	$1{,}5873 \times 10^6$

	Natural	Leja	Natural	Leja
n	$\kappa_\infty(\tilde{L})$		$\kappa_\infty(\tilde{U})$	
3	53,4558	9,3137	10,7657	94,4402
4	158,0263	17,7082	32,4371	568,3153
5	588,4486	24,9545	106,5281	$2{,}1546 \times 10^3$
9	$8{,}0701 \times 10^4$	47,3294	$2{,}9425 \times 10^4$	$2{,}6893 \times 10^6$
19	$2{,}2591 \times 10^{10}$	149,7096	$2{,}2093 \times 10^{11}$	$8{,}7018 \times 10^{13}$

Se obtienen los mismos resultados que para puntos equidistantes. $\kappa_\infty(L)$ es mejor con el orden de Leja mientras que $\kappa_\infty(U)$ lo es con el orden natural. Ocurre lo mismo para la factorización $\tilde{L}\tilde{U}$: $\kappa_\infty(\tilde{L})$ es mucho más bajo con Leja y con el orden natural se obtienen los mejores resultados para $\kappa_\infty(\tilde{U})$.

10.2. Intervalo $[-1,1]$

Ahora el intervalo que vamos a considerar es el $[-1,1]$. Vamos a tomar los puntos equidistantes en este intervalo con diferentes ordenaciones:

1. La ordenación natural, es decir, los puntos ordenados de menor a mayor.

2. La ordenación de Leja.

3. La ordenación central, es decir, los puntos ordenados crecientemente según su distancia a cero.

En este caso también vamos a comparar las dos factorizaciones: LU y $\tilde{L}\tilde{U}$. La primera se caracteriza por ser U la que tiene unos en la diagonal y en la segunda es la matriz triangular inferior, $\tilde{L}$, la que tiene unos en la diagonal. Empecemos comparando las normas de las matrices triangulares inferiores:

	$\|\|L\|\|_\infty$		
n	Natural	Leja	Central
3	7,4444	3,2222	4,3333
4	10,5	3,625	5,75
5	14,3408	3,8032	6,5392
9	2,4315	4,07726	8,3627
19	429,8239	4,1264	12,9618

	$\|\|\tilde{L}\|\|_\infty$		
n	Natural	Leja	Central
3	8	3,3333	4
4	16	4	8
5	32	4,65	13
9	512	7,5762	87
19	$5{,}2429 \times 10^5$	11,7892	$9{,}899 \times 10^3$

Con el orden de Leja es con el que se obtienen las mejores normas para ambas factorizaciones. Esto es debido, de nuevo, a que el orden de Leja es similar a hacer pivotaje parcial y el pivotaje parcial controla la norma de la matriz triangular inferior.

Las siguientes tablas muestran las normas de U y $\tilde{U}$.

	$\|\|U\|\|_\infty$		
n	Natural	Leja	Central
3	4	4	2
4	6,125	5	2
5	9,0416	6	2,24
9	42,9016	10	3,6214
19	$2{,}3971 \times 10^3$	49,5469	9,0455

	$\|\|\tilde{U}\|\|_\infty$		
n	Natural	Leja	Central
3	4	4	1,7778
4	5	5	1,5
5	6	6	1,2499
9	10	10	1,125
19	20	20	1,0556

En el caso de las matrices U y $\tilde{U}$ la ordenación que da mejores resultados sobre las normas es la central. Además, vemos que la norma de $\tilde{U}$ disminuye cuando la dimensión del problema crece.

Comparemos los condicionamientos de estas matrices con las diferentes ordenaciones: natural, Leja y central. Primero veamos los de la factorización LU en la tabla mostrada a continuación:

	Natural	Leja	Central	Natural	Leja	Central
n	$\kappa_\infty(L)$			$\kappa_\infty(U)$		
3	33,5	14,5	19,5	9,7778	13,3333	4
4	112	38,6667	61,3333	19,9063	15	4
5	373,4583	99,0417	101,2917	33,9964	20,352	5,376
9	$4{,}5301 \times 10^4$	$4{,}348 \times 10^3$	$8{,}9283 \times 10^3$	334,8425	48,6574	13,9491
19	$6{,}9906 \times 10^9$	$6{,}7112 \times 10^7$	$2{,}1081 \times 10^8$	$1{,}2356 \times 10^5$	878,1643	100,662

Vemos que en el caso de los condicionamientos ocurre lo mismo que con las normas. $\kappa_\infty(L)$ es menor con el orden de Leja y $\kappa_\infty(U)$ con la central.

Realicemos el mismo análisis para la factorizacion $\tilde{L}\tilde{U}$.

	Natural	Leja	Central	Natural	Leja	Central
n	$\kappa_\infty(\tilde{L})$			$\kappa_\infty(\tilde{U})$		
3	64	8,8889	32	12,25	12,75	3
4	256	16	128	29,1667	22,5	5,25
5	$1{,}0204 \times 10^3$	14,88	416	60,0703	85,9375	7,0796
9	$2{,}6214 \times 10^5$	46,1569	$4{,}4544 \times 10^4$	$1{,}1775 \times 10^3$	$3{,}6329 \times 10^3$	39,3594
19	$2{,}7488 \times 10^{11}$	82,3227	$5{,}1899 \times 10^9$	$1{,}646 \times 10^6$	$2{,}7007 \times 10^8$	$4{,}7657 \times 10^3$

Los resultados obtenidos con esta factorización son los mismos que hemos visto para la factorización LU. Con el orden de Leja $\kappa_\infty(\tilde{L})$ es el más bajo, mientras que para $\kappa_\infty(\tilde{U})$ es mejor el orden central.

Como ya hemos dicho en el apartado anterior, el problema de interpolación en puntos de Chebyshev es un problema mejor condicionado. Vamos a comparar los condicionamientos de las matrices triangulares de las factorizaciones LU y $\tilde{L}\tilde{U}$ de la matriz de Vandermonde basada en los puntos de Chebyshev en el intervalo $[-1, 1]$.

	Natural	Leja	Central	Natural	Leja	Central
n	$\kappa_\infty(L)$			$\kappa_\infty(U)$		
3	34,3288	18,5786	18,5786	8,9683	11,0692	3,7013
4	99,6629	39,4822	40,865	21,4886	12,947	4,8321
5	288,0861	77,3323	116,2017	39,9411	17,8965	7,5483
9	$2{,}4997 \times 10^4$	$1{,}2542 \times 10^3$	$2{,}4966 \times 10^3$	693,5977	60,0135	23,4927
19	$2{,}1059 \times 10^9$	$1{,}2739 \times 10^6$	$3{,}7716 \times 10^6$	$1{,}0362 \times 10^6$	$1{,}9737 \times 10^3$	470,56

Observando la tabla anterior, vemos que $\kappa_\infty(L)$ es mejor con el orden de Leja aunque para el orden central también se obtienen buenos resultados y similares a los del orden de Leja. Sin embargo, para U es preferible la ordenación central. Veamos en la siguiente tabla los condicionamientos de las matrices de la factorización $\tilde{L}\tilde{U}$.

	Natural	Leja	Central	Natural	Leja	Central
n	$\kappa_\infty(\tilde{L})$			$\kappa_\infty(\tilde{U})$		
3	53,4558	10,4853	25,3137	11,6481	11,8059	3,3627
4	158,0263	17,7082	60,0689	28,8185	21,1049	4,4285
5	588,4486	26,2224	145,282	61,2865	53,6384	7,7313
9	$8{,}0701 \times 10^4$	47,3294	$1{,}8387 \times 10^3$	$1{,}0379 \times 10^3$	$1{,}8972 \times 10^3$	56,2671
19	$2{,}2591 \times 10^{10}$	49,7096	$1{,}1769 \times 10^6$	$1{,}9738 \times 10^6$	$9{,}9133 \times 10^6$	$4{,}76 \times 10^4$

Vemos que para $\kappa_\infty(\tilde{U})$ la mejor ordenación es la central. Sin embargo, con el orden de Leja se obtienen mejores resultados para $\kappa_\infty(\tilde{L})$.

11. Experimentos numéricos: condicionamiento conjunto

En la sección anterior hemos estudiado separadamente los comportamientos de cada uno de los factores de la descomposición LU. Sin embargo, el condicionamiento de ambos incide en la propagación del error en la resolución del sistema.

Para obtener una medida conjunta de ambos condicionamientos ($\kappa_\infty(L)$ y $\kappa_\infty(U)$) proponemos como medida de comparación el producto de condicionamientos de ambas matrices.

En esta sección estudiaremos los condicionamientos conjuntos $\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$ de las dos factorizaciones: la factorización LU relacionada con la fórmula de Newton y la factorización $\tilde{L}\tilde{U}$ que está asociada a la eliminación gaussiana. Tomaremos distintas ordenaciones de los puntos equidistantes como en la sección anterior. En las tablas de esta sección aparecerán el condicionamiento de la matriz de Vandermonde V y el producto de condicionamientos de las distintas ordenaciones y factorizaciones.

11.1. Intervalo $[0, 1]$

Comencemos con el intervalo $[0, 1]$. Las siguientes tablas muestran los resultados obtenidos para la factorizaciones LU y $\tilde{L}\tilde{U}$ con *nodos equidistantes*:

		Natural	Leja
n	$\kappa_\infty(V)$	$\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$	
3	216	416	672
4	$1{,}7067 \times 10^3$	$3{,}4333 \times 10^3$	$5{,}7600 \times 10^3$
5	$1{,}2500 \times 10^4$	$3{,}3700 \times 10^4$	$5{,}6386 \times 10^4$
9	$4{,}8184 \times 10^7$	$3{,}3789 \times 10^8$	$7{,}6455 \times 10^8$
19	$5{,}0877 \times 10^{16}$	$5{,}3085 \times 10^{18}$	$2{,}7287 \times 10^{19}$

		Natural	Leja
n	$\kappa_\infty(V)$	$\kappa_\infty(\tilde{L})\kappa_\infty(\tilde{U})$	
3	216	576	800
4	$1{,}7067 \times 10^3$	$6{,}8267 \times 10^3$	$7{,}6800 \times 10^3$
5	$1{,}2500 \times 10^4$	$9{,}0667 \times 10^4$	$6{,}0450 \times 10^4$
9	$4{,}8184 \times 10^7$	$3{,}6280 \times 10^9$	$4{,}1542 \times 10^8$
19	$5{,}0877 \times 10^{16}$	$1{,}9664 \times 10^{21}$	$6{,}3140 \times 10^{17}$

Los experimentos indican que con el orden natural se obtiene el menor producto de condicionamientos para la factorización LU aunque los resultados son muy similares con el orden de Leja. Para la factorización $\tilde{L}\tilde{U}$ es con la ordenación de Leja con la que se obtienen mejores resultados.

Como ya hemos dicho en la sección anterior, la matriz de Vandermonde en nodos de Chebyshev está mejor condicionada (véase [8]). Para obtener resultados más acertados hagamos el mismo análisis para *puntos de Chebyshev*:

		Natural	Leja
n	$\kappa_\infty(V)$	$\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$	
3	236,8983	467,2919	712,5928
4	$1{,}5777 \times 10^3$	$3{,}2670 \times 10^3$	$6{,}5645 \times 10^3$
5	$9{,}4792 \times 10^3$	$2{,}5341 \times 10^4$	$3{,}4119 \times 10^4$
9	$1{,}4029 \times 10^7$	$9{,}9415 \times 10^7$	$2{,}1848 \times 10^8$
19	$9{,}2568 \times 10^{14}$	$1{,}0002 \times 10^{17}$	$5{,}6594 \times 10^{17}$

		Natural	Leja
n	$\kappa_\infty(V)$	$\kappa_\infty(\tilde{L})\kappa_\infty(\tilde{U})$	
3	236,8983	575,4895	879,5889
4	$1{,}5777 \times 10^3$	$5{,}1259 \times 10^3$	$1{,}0064 \times 10^4$
5	$9{,}4792 \times 10^3$	$6{,}2686 \times 10^4$	$5{,}3768 \times 10^4$
9	$1{,}4029 \times 10^7$	$2{,}3746 \times 10^9$	$1{,}2728 \times 10^8$
19	$9{,}2568 \times 10^{14}$	$4{,}9911 \times 10^{21}$	$1{,}3027 \times 10^{16}$

Vemos que tomando puntos de Chebyshev el menor producto de condicionamientos se obtiene con la factorización $\tilde{L}\tilde{U}$ con el orden de Leja. Sin embargo, no hay diferencias significativas comparando con LU que justifiquen el uso de esta descomposición ya que la factorización LU (U con unos en la diagonal) es más natural por el uso de diferencias divididas y está más relacionada con la fórmula de Newton, además de dar lugar a un buen comportamiento respecto al error para la evaluación del polinomio de interpolación (véase [7] y el capítulo 5 de [8]).

11.2. Intervalo $[-1, 1]$

Ahora el intervalo que vamos a considerar es el $[-1, 1]$. Vamos a tomar los *puntos equidistantes* en este intervalo con las tres ordenaciones: natural, Leja y la llamada central.

Vamos a comparar los productos de los condicionamientos de las matrices triangulares de las factorizaciones LU con las diferentes ordenaciones. Comencemos con la factorización LU:

		Natural	Leja	Central
n	$\kappa_\infty(V)$	$\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$		
3	18	327,5556	193,3333	78
4	53,3333	$2{,}2295 \times 10^3$	580	245,3333
5	187,5	$1{,}2696 \times 10^4$	$2{,}0157 \times 10^3$	915,488
9	$2{,}0562 \times 10^4$	$1{,}5169 \times 10^7$	$2{,}1156 \times 10^5$	$1{,}2454 \times 10^5$
19	$1{,}7511 \times 10^9$	$8{,}6376 \times 10^{14}$	$5{,}8935 \times 10^{10}$	$2{,}122 \times 10^{10}$

Con la ordenación central es con la que el producto de los condicionamientos, $\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$, es menor. Podemos ver que el producto de condicionamientos para el orden de Leja es semejante al obtenido con el orden central.

Realicemos el mismo análisis para la factorización $\tilde{L}\tilde{U}$. En la siguiente tabla vemos los productos de estos condicionamientos:

		Natural	Leja	Central
n	$\kappa_\infty(V)$	$\kappa_\infty(\tilde{L})\kappa_\infty(\tilde{U})$		
3	18	784	113,3333	96
4	53,3333	$7{,}4667 \times 10^3$	360	672
5	187,5	$6{,}1512 \times 10^4$	$1{,}2788 \times 10^3$	$2{,}9451 \times 10^3$
9	$2{,}0562 \times 10^4$	$3{,}0868 \times 10^8$	$1{,}6768 \times 10^5$	$1{,}7532 \times 10^6$
19	$1{,}7511 \times 10^9$	$4{,}5246 \times 10^{17}$	$2{,}2233 \times 10^{10}$	$2{,}4734 \times 10^{13}$

Con esta factorización sí podemos ver diferencias significativas de las tres ordenaciones. En este caso, la ordenación de Leja es con la que se consigue que $\kappa_\infty(\tilde{L})\kappa_\infty(\tilde{U})$ sea menor.

Por tanto, hemos visto que para la factorización LU es mejor la ordenación central y para $\tilde{L}\tilde{U}$ obtenemos mejores resultados con el orden de Leja. Además, el producto de los condicionamientos en estos dos casos es casi idéntico. En el caso $n = 19$, $\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U) = 2{,}122 \times 10^{10}$ y $\kappa_\infty(\tilde{L})\kappa_\infty(\tilde{U}) = 2{,}2233 \times 10^{10}$. Sin embargo, la factorización LU, como ya hemos señalado al final del apartado anterior en el que se estudia el intervalo $[0, 1]$, es más natural ya que está relacionada con la fórmula de Newton, involucra a las diferencias divididas y resulta más adecuada para la evaluación del polinomio interpolante.

En el capítulo 21 de [8] Higham detalla cómo se comportan los condicionamientos en función de la dimensión del problema. En el caso del intervalo $[-1, 1]$ afirma que, cuando n crece, $\kappa_\infty(V)$ es menor para puntos de Chebyshev que para puntos equiespaciados. Para tener conclusiones más acertadas hagamos el mismo estudio tomando los *puntos de Chebyshev* en el intervalo $[-1, 1]$ con las 3 ordenaciones anteriores: natural, Leja y central.

Veamos en la siguiente tabla el producto de condicionamientos de la factorización LU.

		Natural	Leja	Central
n	$\kappa_\infty(V)$	$\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$		
3	18,6369	308,2145	205,6499	68,7653
4	46,9508	$2{,}1416 \times 10^3$	511,1747	197,4646
5	131,5733	$1{,}1506 \times 10^4$	$1{,}384 \times 10^3$	877,1201
9	$6{,}7024 \times 10^3$	$1{,}7338 \times 10^7$	$7{,}5266 \times 10^4$	$5{,}8652 \times 10^4$
19	$6{,}3678 \times 10^7$	$2{,}1821 \times 10^{15}$	$2{,}5143 \times 10^9$	$1{,}7748 \times 10^9$

Para esta factorización el producto de condicionamientos, $\kappa_\infty(L)\kappa_\infty(U)$, es mejor con la ordenación central. Ésto también ocurría en el caso de puntos equidistantes en el intervalo $[-1, 1]$.

Veamos el producto de condicionamientos de la factorización $\tilde{L}\tilde{U}$ en la siguiente tabla:

		Natural	Leja	Central
n	$\kappa_\infty(V)$	$\kappa_\infty(\tilde{L})\kappa_\infty(\tilde{U})$		
3	18,6369	622,6565	123,7877	85,1214
4	46,9508	$4{,}5541 \times 10^3$	373,7304	266,0179
5	131,5733	$3{,}6064 \times 10^4$	$1{,}4065 \times 10^3$	$1{,}1232 \times 10^3$
9	$6{,}7024 \times 10^3$	$8{,}3763 \times 10^7$	$8{,}9795 \times 10^4$	$1{,}0346 \times 10^5$
19	$6{,}3678 \times 10^7$	$4{,}4591 \times 10^{16}$	$1{,}4841 \times 10^9$	$5{,}6091 \times 10^{10}$

Vemos que para la factorización $\tilde{L}\tilde{U}$ la ordenación que da el menor producto de condicionamientos es la de Leja. La diferencia con los resultados obtenidos con el orden central para la factorización LU no es significativa. Parece conveniente utilizar la factorización de Crout, más relacionada con la fórmula de Newton.

12. Conclusiones

El condicionamiento de las matrices de Vandermonde crece exponencialmente con el número de nodos (véase capítulo 21 de [8]). En este trabajo se intenta buscar una factorización LU de la matriz de Vandermonde V de forma que el producto de los condicionamientos de estas matrices no diste mucho del condicionamiento de V.

Una de las conclusiones que hemos obtenido es que, dada una matriz de Vandermonde V basada en los nodos $x_0, \ldots, x_n$ tales que $x_i \geq 0$, $i = 0, \ldots, n$ podemos realizar su factorización LU (asociada a la fórmula de Newton), de modo que el cálculo de L, L^{-1}, U y U^{-1} puede realizarse con alta precisión relativa.

En los experimentos numéricos hemos tomado dos factorizaciones distintas de la matriz de Vandermonde V. Una de las factorizaciones tiene unos en la diagonal de U y la hemos denotado por LU. La factorización LU está relacionada de forma natural con la fórmula de interpolación de Newton. La segunda factorización analizada, $\tilde{L}\tilde{U}$, se caracteriza por ser $\tilde{L}$ la que tiene unos en la diagonal y está asociada a la eliminación gaussiana.

En el primer caso estudiado hemos tomado los puntos en el intervalo $[0, 1]$ con dos ordenaciones distintas: natural y de Leja. Con la factorización LU, el producto de condicionamientos es menor para la ordenación natural, aunque $\kappa_\infty(L)$ sea mejor con Leja. La factorización $\tilde{L}\tilde{U}$ con el orden de Leja da lugar al producto de condicionamientos ligeramente más bajo. Sin embargo, no existen diferencias significativas cuando utilizamos el orden natural con la factorización LU y ésta última es más natural dada su relación con la fórmula de Newton y con las diferencias divididas.

En el caso del intervalo $[-1, 1]$, además del orden natural y el de Leja, también hemos propuesto otra ordenación llamada orden central. Hemos visto que para la factorización LU es mejor la ordenación central y para $\tilde{L}\tilde{U}$ se obtienen los mejores resultados con el orden de Leja. Los productos de los condicionamientos son casi idénticos en ambos casos por lo que escogemos la factorización LU de la ordenación central por la misma razón que en el caso $[0, 1]$: por su relación con las diferencias divididas, con la fórmula de Newton y porque es adecuada para la evaluación del polinomio interpolante.

12. Referencias

[1] L. Bos, S. de Marchi, A. Sommariva, M. Vianello: *Computing multivariate Fekete and Leja points by numerical linear algebra*, SIAM J. Numer. Anal., 48 (2010), pp. 1984-1999.

[2] J. M. Carnicer, T. N. T. Goodman, J. M. Peña: *Roundoff errors for polynomial evaluation by a family of formulae*, Computing, 82 (2008), pp. 199-215.

[3] C. W. Cryer: *Some properties of totally positive matrices*, Linear Algebra and its Applications, 15 (1976), pp. 1-25.

[4] C. de Boor, A. Pinkus: *Backward error analysis for totally positive linear systems*, Numer. Math, 27 (1976/77), pp. 485-490.

[5] J. Demmel, M. Gu, S. Eisenstat, I. Slapniňar, K. Veselić, Z. Drmač: *Computing the singular value decomposition with high relative accuracy*, Lineal Algebra and its Applications, 299 (1999), pp. 21-80.

[6] M. Gasca, J. M. Peña: *Scaled pivoting in Gauss and Neville elimination for totally positive systems*, Applied Numerical Mathematics, 13 (1993), pp. 354-355.

[7] N. J. Higham: *Stability analysis of algorithms for solving confluent Vandermonde-like systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl.,1 (1990), pp. 23-41.

[8] N. J. Higham: *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, SIAM, 1996.

[9] J. M. Peña: *Pivoting strategies leading to small bounds of the errors for certain linear systems*, IMA Journal of Numerical Analysis, 16 (1996), pp. 141-153.

[10] L. Reichel: *Newton interpolation at Leja points*, BIT 30, 2 (1990), pp. 332-346.