



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

Gestión de acuíferos: impacto de los factores de descuento en la sostenibilidad y explotación económica de los recursos hídricos.

Aquifer Management: Impact of Discount Factors on the Sustainability and Economic Exploitation of Water Resources.

Autor

Pablo Aranda Luna

Directores

Elena Calvo Calzada

M. Carmen Calvo Yanguas

FACULTAD DE ECONOMÍA Y EMPRESA
2025

Autor: Pablo Aranda

Directores: Elena Calvo Calzada y M. Carmen Calvo Yanguas

Título: Gestión de acuíferos: impacto de los factores de descuento en la sostenibilidad y explotación económica de los recursos hídricos.

Resumen

En este estudio se analiza la gestión óptima del acuífero de La Mancha Oriental considerando distintos esquemas de descuento y su impacto en la sostenibilidad y explotación económica del recurso. Se comparan dos enfoques de gestión —uno sostenible y otro económico— evaluando sus efectos a corto (25 años), medio (50 años) y largo plazo (200 años) mediante modelos de control óptimo. En particular, se examina cómo la elección del tipo de factor de descuento influye en la planificación de la extracción de agua, comparando el modelo de descuento exponencial tradicional con el descuento hiperbólico, que refleja de manera más realista las decisiones intertemporales según teorías económicas y sociológicas.

A corto plazo, el modelo exponencial muestra un mayor bienestar social debido a su énfasis en beneficios inmediatos, mientras que a largo plazo, el descuento hiperbólico favorece decisiones más sostenibles al asegurar que las preferencias futuras se tengan en cuenta. Aunque el modelo hiperbólico ofrece inicialmente menor bienestar en comparación con el exponencial, a lo largo del tiempo genera mayores beneficios sociales. Además, las políticas que integran un enfoque sostenible revelan que los beneficios sociales son consistentemente superiores a los registrados en los enfoques exclusivamente económicos. El enfoque sostenible favorece a las generaciones futuras mediante la gestión responsable de los acuíferos. Esta perspectiva intergeneracional contrasta con el modelo de explotación económica, que prioriza beneficios inmediatos sin considerar las repercusiones a largo plazo sobre el ecosistema y la disponibilidad de recursos.

Este estudio subraya la necesidad de revisar las políticas de gestión hídrica, considerando no solo los beneficios económicos sino también los impactos ambientales de la sobreexplotación, ofreciendo una base teórica para la toma de decisiones que prevengan escenarios de degradación ecológica en situaciones críticas.

Palabras Clave

Acuífero de La Mancha Oriental, Control Óptimo, Descuento Exponencial, Descuento Hiperbólico.

Title: Aquifer Management: Impact of Discount Factors on the Sustainability and Economic Exploitation of Water Resources.

Abstract

This study analyzes the Optimal management of the Eastern La Mancha aquifer considering different schemes, and their impact on sustainability and the economic exploitation of the resource. Two management approaches—one sustainable and one economic—are compared, evaluating their effects in the short (25 years), medium (50 years), and long term (200 years) using optimal control models. In particular, the study examines how the choice of the discount rate influences water extraction planning, comparing the traditional exponential discount model with the hyperbolic discount model, which more realistically reflects intertemporal decision-making according to economic and sociological theories.

In the short term, the exponential model shows greater social well-being due to its emphasis on immediate benefits, while in the long term, hyperbolic discounting favors more sustainable decisions by ensuring that future preferences are properly weighted. Although the hyperbolic model initially provides lower well-being compared to the exponential one, it generates greater social benefits over time. Furthermore, policies that integrate a sustainable approach reveal that social benefits consistently surpass those recorded in purely economic approaches. The sustainable approach benefits future generations through the responsible management of aquifers. This intergenerational perspective contrasts with the economic exploitation model, which prioritizes immediate benefits without considering the long-term repercussions on the ecosystem and resource availability.

This study emphasizes the need to review water management policies, considering not only economic benefits but also the environmental impacts of overexploitation, offering a theoretical foundation for decision-making that prevents scenarios of ecological degradation in critical situations.

Keywords

Eastern La Mancha Aquifer, Optimal Control, Exponential Discounting, Hyperbolic Discounting.

Índice general

1. Introducción	1
2. Marco teórico	5
2.1. Objetivos	6
2.2. Zona de estudio: La Mancha Oriental	6
2.3. Teoría del control óptimo	10
2.3.1. Planteamiento del problema	11
2.3.2. Restricciones	11
2.3.3. Problema de control óptimo	12
2.4. Factor de descuento en la gestión de recursos hídricos	13
2.4.1. Exponencial	17
2.4.2. Hiperbólico	17
3. Modelo del acuífero	23
3.1. Modelo de acuífero	23
3.1.1. Daños ambientales	25
3.2. Aplicación del descuento hiperbólico	27
4. Resultados	31
4.1. Solución numérica	31
4.1.1. Simulación corto plazo: 25 años	33
4.1.2. Simulación medio plazo: 50 años	35
4.1.3. Simulación largo plazo: 200 años	37
5. Discusión y conclusiones	39
5.1. Discusión	39
5.2. Conclusiones	39
5.3. Limitaciones	40
5.4. Investigación futura	41
Bibliografía	43
Anexos	47
.1. Código Python	47

Capítulo 1

Introducción

La explotación de los recursos naturales es, desde hace décadas, uno de los principales temas de preocupación debido a su importancia en la vida del planeta. Recursos como el agua, los minerales, los bosques y los combustibles fósiles, son la base de las economías mundiales. Sin embargo, el uso intensivo y, en muchos casos, insostenible de estos recursos está causando daños ecológicos que ponen en riesgo su disponibilidad futura, especialmente cuando hablamos de los no renovables, afectando tanto a las generaciones presentes como a las venideras, como apunta [Gleick \(2014\)](#).

Con el crecimiento de la demanda de los recursos naturales y los efectos del cambio climático, la disponibilidad de estos recursos se está viendo perjudicada. Este incremento en la demanda ha sido asociado al desarrollo económico, al crecimiento agrícola intensivo, a la industrialización y a la expansión urbana, ya que estos procesos han necesitado de una mayor cantidad de materias primas. El impacto de estos aumentos ha sido ampliamente estudiado en informes como los de [United Nations Environment Programme \(UNEP\) \(2019\)](#), [Intergovernmental Panel on Climate Change \(IPCC\) \(2021\)](#), y en trabajos como el de [Foley et al. \(2011\)](#), destacando su relación con la sostenibilidad y la gestión de los recursos naturales.

Dentro del conjunto de los recursos del planeta, el agua es uno de los recursos más importantes de la naturaleza: permite la vida, genera energía en centrales hidroeléctricas mediante el uso de turbinas, y actúa como regulador de los ecosistemas, entre otros muchos usos. Por lo tanto es crucial llevar a cabo una buena gestión de todas las reservas de agua. Tal como señalan [Albiac et al. \(2020\)](#), la escasez de agua es un problema ambiental crítico a nivel global, particularmente en las regiones áridas y semiáridas. Las proyecciones del cambio climático indican que los suministros de agua dulce disminuirán en estas regiones, a la par que aumentarán la recurrencia, duración e intensidad de los episodios de sequía. Ante esto, es necesario identificar políticas hídricas que aborden eficazmente dicha escasez, optimizando el uso de este recurso vital.

Dentro de los recursos hídricos que sufren un serio peligro de ser explotados de manera insostenible se encuentran los acuíferos, los cuales van a ser el principal objeto de estudio en los capítulos posteriores. Los acuíferos son depósitos de agua subterránea ubicados en espacios rocosos, suelos porosos o en los huecos de las formaciones rocosas, y representan una de las fuentes más importantes de abastecimiento de agua dulce, como señalan [Nasim et al. \(2020\)](#).

Las extracciones de agua, tanto superficial como subterránea, son esenciales para cubrir ne-

cesidades humanas y económicas. Sin embargo, la creciente sobreexplotación de los recursos hídricos desde la segunda mitad del siglo XX ha superado con creces el ritmo de crecimiento poblacional, [AQUASTAT \(2016\)](#) y [World Water Council \(WWC\) \(2000\)](#), debido en gran medida al desarrollo de tecnologías para el riego a gran escala y al aumento de la capacidad de extracción mediante bombas y perforaciones profundas, lo que ha llevado al agotamiento de muchas fuentes hídricas, algo que ha sido señalado por [World Water Assessment Programme \(WWAP\) \(2006\)](#), [Wada et al. \(2010\)](#), [International Groundwater Resources Assessment Centre \(IGRAC\) \(2010\)](#), [Larson \(2020\)](#), y [Selby et al. \(2022\)](#). Este fenómeno refleja la necesidad de desarrollar estrategias de gestión sostenibles y estables. En sus estudios, [Albiac et al. \(2020\)](#) advierten que la escasez de agua en el mundo, especialmente en las regiones más vulnerables, es exacerbada por el agotamiento sin precedentes de las aguas subterráneas. Impulsado, en cierta medida, por la reducción de los costes de bombeo.

El uso abusivo de los acuíferos conlleva graves riesgos en su sostenibilidad. Cuando la extracción de agua subterránea supera la capacidad de recarga natural de los acuíferos, se provoca un descenso en los niveles de agua, pudiendo llevar a su agotamiento, lo que no solo pone en peligro la disponibilidad de agua para generaciones futuras, sino que también puede tener consecuencias graves a corto plazo, como la desertificación, el hundimiento del suelo y el deterioro de los ecosistemas locales, una idea que se confirma en el trabajo de [Nasim et al. \(2020\)](#) y en el de los autores [Amanambu et al. \(2020\)](#).

Según [Albiac et al. \(2020\)](#), la degradación de los recursos hídricos es una amenaza crítica tanto para la seguridad hídrica de las personas como para la biodiversidad ambiental en todo el mundo. La pérdida de biodiversidad en los ecosistemas acuáticos supera ampliamente a la de los ecosistemas terrestres. A pesar de los esfuerzos por integrar los daños ambientales en la gestión del agua, los resultados han sido, en su mayoría, insuficientes.

Por lo tanto, resulta crucial ser capaces de desarrollar estrategias para conseguir una gestión sostenible que permita preservar los acuíferos y garantizar su disponibilidad en el tiempo. Para ello, es necesario comprender los factores que influyen en cómo se gestionan y se mantienen los acuíferos, para así poder adoptar una forma de actuar responsable y adecuada, y asegurar que este recurso tan importante siga siendo una fuente de vida y bienestar, tanto para nuestra generación como para las generaciones venideras.

Los acuíferos, que constituyen la mayor reserva de agua dulce subterránea del planeta, son fundamentales para la agricultura, el consumo humano y los ecosistemas. Sin embargo, su sobreexplotación amenaza tanto su viabilidad como la de los sistemas naturales que dependen de ellos. En este contexto, los acuíferos de La Mancha, especialmente el acuífero de La Mancha Oriental, es un ejemplo paradigmático de los conflictos entre el desarrollo humano y la sostenibilidad ambiental.

Castilla-La Mancha, una región con gran extensión de tierras agrícolas y lugar donde se ubica este acuífero, afronta serios desafíos derivados de la sequía y la desertificación. La región ha experimentado una disminución significativa en la disponibilidad de agua, lo que ha impactado tanto a la agricultura como a la vida diaria de sus habitantes. La falta de lluvias y el aumento de las temperaturas debido al cambio climático han incrementado estos problemas, reduciendo la producción agrícola y contribuyendo a la degradación del suelo.

La desertificación en Castilla-La Mancha es una preocupación creciente, con más de 75 000 kilómetros cuadrados de suelo susceptibles a este fenómeno. La sobreexplotación de los recursos hídricos, la contaminación y la pérdida de vegetación debido a factores como los incendios forestales y la expansión urbana han acelerado la degradación del suelo. Además, la región ha experimentado un aumento en la demanda de agua para el riego, lo que ha generado aún más presión sobre los acuíferos subterráneos. Como se ha dicho anteriormente, para abordar estos problemas, es crucial implementar políticas de gestión sostenible del agua y la tierra.

En [Esteban and Albiac \(2012\)](#), y en [Kahil et al. \(2016\)](#), se pone de manifiesto la evidencia de experiencias exitosas de los acuíferos de La Mancha, donde las extracciones se han reducido gracias a la colaboración entre las partes involucradas. La expansión agrícola intensiva en estas zonas había provocado descensos considerables en los niveles freáticos, resultando en problemas graves como la degradación de humedales únicos. Esto ha llevado a la desaparición parcial de ecosistemas clave, como lo son las Tablas de Daimiel y la Albufera de Valencia. Estos ecosistemas, protegidos por normativas nacionales e internacionales, han sufrido una drástica reducción en su biodiversidad y en su capacidad para proporcionar servicios ambientales esenciales.

El uso eficiente y sostenible de los recursos hídricos subterráneos requiere herramientas analíticas avanzadas que integren tanto aspectos matemáticos y económicos como ecológicos. En este sentido, los modelos de **control óptimo** se presentan como una herramienta clave para evaluar estrategias de extracción que maximicen el bienestar social, considerando tanto los beneficios económicos como los costes ambientales. Una de las componentes fundamentales de estos modelos es la inclusión de una tasa de descuento, que define el peso relativo de los beneficios y costes del presente frente al futuro en la toma de decisiones. Siguiendo esta línea, este trabajo de fin de Máster pretende contribuir al desarrollo de modelos de gestión hídrica que equilibren las demandas económicas con la conservación ambiental y la sostenibilidad intergeneracional.

En su estudio, [Esteban and Albiac \(2012\)](#) examinan la gestión de los acuíferos en La Mancha, destacando la importancia de la intervención política y la cooperación entre los actores involucrados para lograr una gestión efectiva y sostenible. Siguiendo esta línea de investigación, en este trabajo nos proponemos un nuevo enfoque que incorpora otro tipo de descuento económico, que puede tener gran relevancia en las decisiones a largo plazo en la gestión de recursos hídricos.

En este contexto, exploraremos cómo el uso del **descuento exponencial**, tradicionalmente empleado, se compara con el **descuento hiperbólico** dentro de modelos de control óptimo. La elección del tipo de descuento impacta fundamentalmente la formulación de políticas sostenibles, reflejando la preferencia temporal de los agentes económicos y, por ende, la valoración de beneficios inmediatos frente a los futuros.

El análisis busca explorar cómo los diferentes esquemas de descuento afectan las decisiones óptimas para la gestión sostenible de los acuíferos. Se pone especial énfasis en la sostenibilidad intergeneracional, con el objetivo de garantizar la preservación de recursos para generaciones futuras y evitar la sobreexplotación. En muchos casos, como en los acuíferos de La Mancha, la extracción excesiva puede provocar cambios irreversibles en los ecosistemas, resultando en pérdidas económicas y ambientales permanentes. Este enfoque ajustado podría justificar la imple-

mentación de políticas más conservadoras para evitar alcanzar estos umbrales críticos (Esteban and Albiac (2011)).

Por otro lado, el cambio climático y la resiliencia hídrica representan desafíos adicionales. El aumento de las sequías prolongadas en regiones semiáridas como La Mancha plantea escenarios donde los costes futuros de la inacción superan ampliamente los beneficios inmediatos de maximizar las extracciones de agua (Esteban and Albiac (2011)). Estos aspectos subrayan la necesidad de adoptar enfoques de gestión que consideren tanto las presiones actuales como las proyecciones de largo plazo.

El trabajo sigue la siguiente estructura: en el **Capítulo 2** se explican los problemas y situaciones potencialmente peligrosas que sufren las aguas subterráneas a causa de la explotación de sus recursos. Se examina cómo la gestión de acuíferos en La Mancha ha sido abordada en el estudio de Esteban and Albiac (2012). Este análisis compara las prácticas sostenibles del acuífero de La Mancha Oriental con los problemas abordados en el acuífero occidental, que ha sido víctima de sobreexplotación y mala gestión, llevando a la degradación de ecosistemas esenciales como las Tablas de Daimiel. Posteriormente desarrollamos la teoría de control óptimo, y se describen los diferentes tipos de descuento y su fundamento teórico en el contexto de los recursos naturales.

En el **Capítulo 3** se expone el modelo matemático de Gisser and Sanchez (1980), desarrollado en primer lugar por Gisser and Mercado (1973), que representa las políticas óptimas de extracción de los recursos de un acuífero en diferentes contextos, añadiendo una función correspondiente a los daños ambientales de extracción del agua presentado por Esteban and Albiac (2011). Para terminar, evaluaremos el modelo con los diferentes factores de descuento y las distintas preferencias temporales (corto, medio y largo plazo), a fin de proporcionar una imagen más clara de las consecuencias ambientales de las decisiones en la gestión de los acuíferos. Esta integración de enfoques teóricos con el caso de estudio busca ofrecer una perspectiva más completa y efectiva para la gestión de los acuíferos en La Mancha Oriental.

La modelización llevada a cabo en este trabajo se ha basado en la metodología de control óptimo, implementada utilizando *Python* para garantizar la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales que dependen del tiempo, cuya complejidad matemática para determinar una solución analítica es elevada. Finalmente, para terminar la introducción, comentar que el documento ha sido redactado en *LaTeX*, lo que ha permitido una presentación clara del contenido matemático. Este enfoque multidisciplinar integra conocimientos adquiridos a lo largo del máster, combinando herramientas avanzadas de modelización, programación y redacción científica para ofrecer un análisis completo y bien fundamentado.

Capítulo 2

Marco teórico

En el presente trabajo de investigación, nos proponemos analizar la gestión óptima de un acuífero mediante la aplicación de modelos de control óptimo. En este capítulo se presentan los objetivos, la región en la que se localiza el acuífero objeto del estudio, describiendo sus características principales y su relevancia para la gestión hídrica. El enfoque busca preservar la capacidad del acuífero maximizando el bienestar social.

Para ello, uno de los pilares fundamentales del estudio es la teoría del control óptimo. Esta rama de las matemáticas proporciona un conjunto de herramientas analíticas para determinar las trayectorias óptimas de un sistema dinámico, maximizando una función objetivo y cumpliendo con ciertas restricciones. En este caso, la función objetivo representará la maximización del bienestar social derivado de la explotación del acuífero, mientras que la ecuación del movimiento indica la dinámica del sistema; el modelo fue desarrollado por [Gisser and Sanchez \(1980\)](#) y completado con daños ambientales en [Esteban and Albiac \(2012\)](#), y [Esteban et al. \(2024\)](#).

Los trabajos de [Esteban et al. \(2021\)](#) y [Esteban et al. \(2024\)](#) destacan el impacto de la sobreexplotación de los recursos hídricos subterráneos y la necesidad de considerar umbrales críticos para evitar efectos negativos en el acuífero. Inspirados en este enfoque, el presente trabajo se centra en evaluar estrategias de extracción que prevengan escenarios de sobreexplotación y maximicen el bienestar social. Los resultados subrayan la necesidad de reformular las políticas de gestión del agua para tener en cuenta la estructura de los ecosistemas y sus interacciones con el hábitat, un aporte significativo que amplía la comprensión de la gestión sostenible de los recursos hídricos.

En todos los trabajos descritos en las líneas anteriores, el beneficio futuro se descuenta utilizando una función exponencial, dada su amplia aceptación en la literatura sobre control óptimo. Sin embargo, esta no es la única forma de considerar la valoración de beneficios a lo largo del tiempo. Según la bibliografía reciente, el descuento hiperbólico ofrece una alternativa que refleja de manera más precisa ciertos comportamientos intertemporales observados en la toma de decisiones.

Los factores de descuento permiten evaluar las decisiones presentes en función de los beneficios futuros, ajustando las políticas de gestión según la valoración del recurso en el tiempo. Sin embargo, esta función de descuento presenta ciertas limitaciones a la hora de capturar la complejidad de las preferencias temporales humanas y las incertidumbres inherentes a los sistemas naturales, como se verá en el epígrafe 2.4.

En este capítulo se explican los objetivos de este trabajo y se exponen las ideas y herramientas matemáticas que están detrás de la gestión óptima de las reservas hídricas. En primer lugar se presenta la región de estudio, describiendo sus características principales y su relevancia para la gestión. Posteriormente, se introduce la teoría del control óptimo haciendo énfasis en los factores de descuento.

2.1. Objetivos

Este trabajo se centra en analizar la gestión de recursos hídricos mediante escenarios de gestión y técnicas de control óptimo, y su aplicación al acuífero de la Mancha Oriental. Destaca la importancia de los factores de descuento en la evaluación económica a largo plazo, fundamentales para valorar políticas de sostenibilidad. Se comparan el descuento exponencial, con tasa constante, y el hiperbólico, el cual se alinea mejor con las preferencias humanas y busca la planificación de estrategias más sostenibles. Así, el fin es garantizar la conservación de los acuíferos y su disponibilidad para el desarrollo futuro. Los objetivos específicos se estructuran de la siguiente manera:

- Definir indicadores clave en la gestión hídrica: ingreso privado, coste privado, coste social, bienestar social. Además la altura de la tabla y las extracciones en cada instante de tiempo.
- Implementar modelos matemáticos basados en control óptimo para equilibrar extracción y conservación.
- Analizar el efecto de diferentes factores de descuento en la sostenibilidad del acuífero, comparando el enfoque tradicional con el hiperbólico.
- Analizar el efecto de diferentes escenarios de sostenibilidad y explotación.

Estos objetivos buscan fomentar una gestión integral de los recursos hídricos, aportando un marco analítico que ayude a tomar decisiones en línea con la sostenibilidad y la protección del medio ambiente.

2.2. Zona de estudio: La Mancha Oriental

A través de un análisis detallado del comportamiento hidrogeológico de los acuíferos de Castilla-La Mancha, se buscará identificar los principales factores que influyen en su estado y proponer medidas de gestión que minimicen los riesgos de sobreexplotación y sequía.

Nos centramos en los acuíferos de La Mancha Oriental, abarcando las provincias de Albacete, Cuenca y una pequeña parte de Valencia. Dichos acuíferos han sido investigados anteriormente por Esteban y Albiac en varios trabajos: [Esteban and Albiac \(2011\)](#), [Esteban and Albiac \(2012\)](#), [Esteban et al. \(2021\)](#), [Esteban et al. \(2024\)](#). Este recurso hídrico subterráneo es uno de los más importantes y extensos de España, por su relevancia tanto ambiental como socio-económica, cubriendo una superficie aproximada de $8\,500\text{ km}^2$ en las provincias de Albacete (74%), Cuenca (18%), Valencia (7,5%) y Murcia (0,5%). Sus recursos se estiman en unos $435\text{ Mm}^3/\text{año}$, según la [Agencia del Agua de Castilla-La Mancha \(2024\)](#).

El mapa de la figura 2.1 ofrece una visión más precisa de la localización geográfica de los acuíferos en el territorio español:

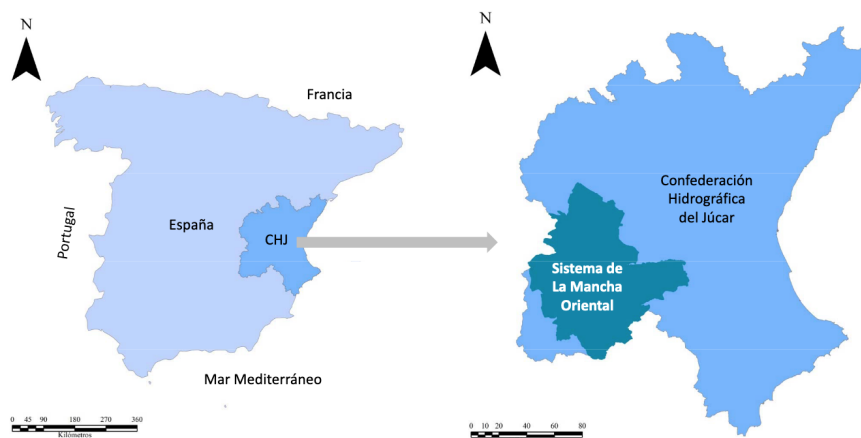


Figura 2.1: Localización de los acuíferos de La Mancha Oriental en el territorio español. Fuente: [Cassiraga et al. \(2013\)](#).

La recarga natural de estos acuíferos proviene, sobre todo, del agua de lluvia que se filtra por el suelo y el agua que corre por la superficie. Por otro lado, también recibe agua del río Júcar y sus afluentes, lo que hace que las aguas subterráneas y las superficiales estén conectadas. Enfrentan problemas de sostenibilidad debido al uso intensivo de sus aguas subterráneas en labores agrícolas, provocando el agotamiento de los acuíferos y la reducción de los caudales. Además de perjudicar los ecosistemas fluviales de la zona, afectando por lo tanto también a la fauna y flora del lugar.

Preservar los recursos naturales supone gran cantidad de problemas y desafíos que han de resolverse de una manera salomónica, es decir, buscando una solución equilibrada que tenga en cuenta tanto las necesidades humanas como la protección del medio ambiente. No sólo en el presente, sino que se deben tener en cuenta las consecuencias futuras de las decisiones que se tomen en la sostenibilidad del medio ambiente en el largo plazo. Esto implica encontrar un punto medio entre el desarrollo económico, como la agricultura o la industria, y la conservación de los ecosistemas que dependen de estos recursos.

A mediados del siglo XX el cultivo de la zona era mayoritariamente de secano, el uso de riego comenzó en los años 70 gracias a los avances en las tecnologías de bombeo y los diferentes subsidios que recibían. Según [Martínez Valderrama et al. \(2011\)](#), esto provocó un rápido crecimiento de la agricultura de regadío, con cultivos como el maíz y muchos otros que se adaptaron a los precios del mercado y las políticas, motivado por la explotación de los sistemas de acuíferos. Aparte, tal y como ya se ha apuntado, este acuífero suministra aproximadamente 435 Mm^3 de agua a cultivos de regadío y también abastece parcialmente al uso urbano de la ciudad de Albacete (275 000 habitantes), proporcionando 8 Mm^3 al año, según [Esteban and Albiac \(2012\)](#).

Sin embargo, este bombeo excesivo alteró el equilibrio de las aguas subterráneas y generó preocupaciones sobre su agotamiento, especialmente después de una sequía en los años 90, lo que llevó a la creación de un Organismo Regulador en 1995. Estudios recientes, como [Dinar et al. \(2021\)](#) y [Esteban et al. \(2024\)](#), destacan que, aunque la transferencia de agua desde otra

cuenca ha contribuido a aliviar la presión sobre los acuíferos, la disminución de la rentabilidad ha llevado a algunos agricultores a volver al cultivo de secano.

Si los describimos, de manera técnica y geológica, los acuíferos de La Mancha Oriental están compuestas por varias capas de rocas que se originaron desde el Triásico al Terciario, y que varían en tamaño, grosor y capacidad para transportar agua. La mayoría de los pozos se encuentran en las zonas occidental y central. Las formas de los acuíferos es bastante compleja debido a los diferentes movimientos tectónicos que los originaron, provocando que existan diferencias en cómo se comporta el agua en los diferentes lugares.

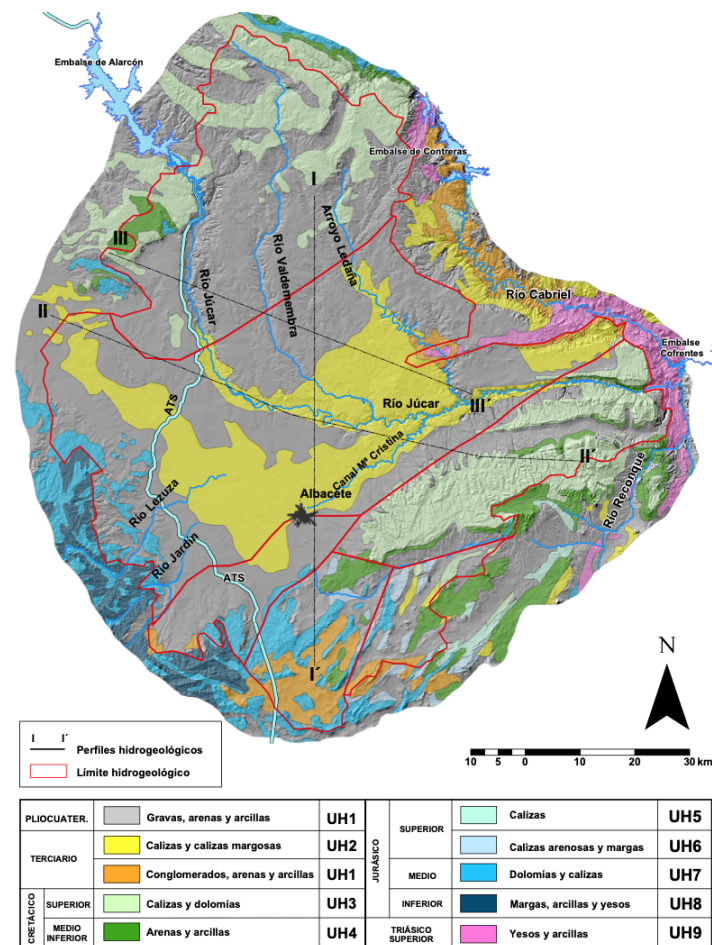


Figura 2.2: Mapa geológico de los acuíferos de La Mancha Oriental. Fuente: [Cassiraga et al. \(2013\)](#).

La importancia de no acabar con estos recursos radica en el papel que juega la agricultura en la economía de la zona. El desarrollo del regadío durante las últimas décadas ha sido clave en la renta local, y la agricultura de regadío sigue siendo una fuente principal de ingresos en estas zonas rurales, donde el porcentaje de la población activa dedicada a la agricultura, tal y como indican [Esteban and Albiac \(2012\)](#), ronda el 30 %.

Aparte de la gran utilidad que tienen estas reservas hídricas en la economía, vital para la región, es también muy importante su valor ambiental. La pérdida de un recurso natural conlleva

el deterioro del ecosistema local y puede tener repercusiones muy negativas, como la pérdida de biodiversidad, la degradación del suelo y la disminución de la calidad del agua. Los acuíferos no solo suministran agua para actividades humanas, sino que también desempeñan un papel crucial en el mantenimiento de humedales, ríos y otros ecosistemas asociados, que dependen de la estabilidad de estas reservas subterráneas para sobrevivir. Como consecuencia de estas catástrofes la fauna y la flora del lugar también se verían afectados, provocando la migración de las especies a otras zonas.

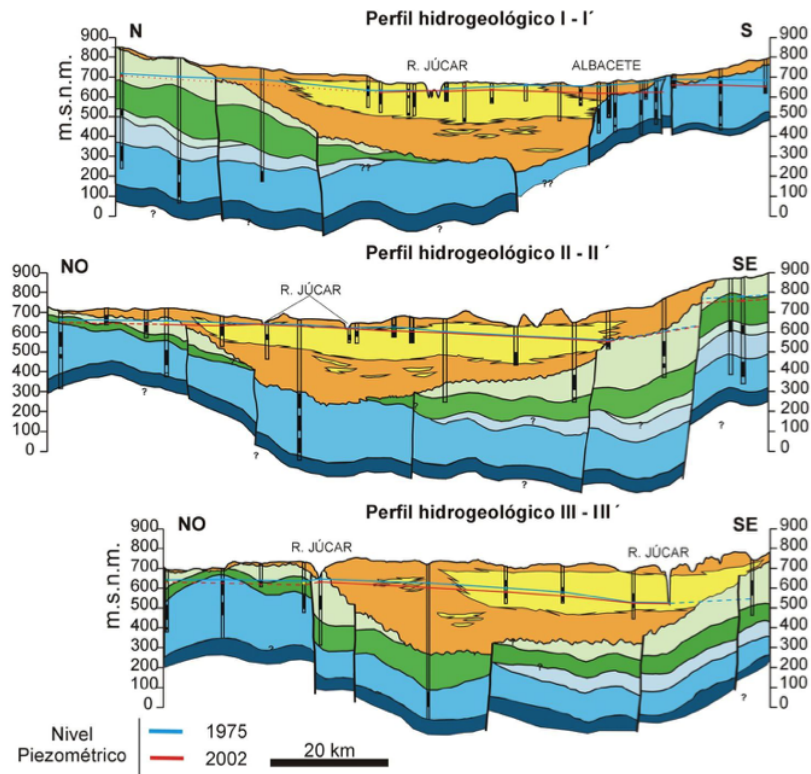


Figura 2.3: Cortes geológicos de los acuíferos de La Mancha Oriental. Fuente: [Cassiraga et al. \(2013\)](#).

Los estudios de [Cassiraga et al. \(2019\)](#) apuntan que el uso intensivo del agua desde la década de 1960, motivado por la disponibilidad de tecnología y la demanda agrícola, excedió el volumen sostenible de extracción, se usaban $400 \text{ Mm}^3/\text{año}$ frente a los $320 \text{ Mm}^3/\text{año}$ estimados. Teniendo consecuencias como el descenso de hasta 80 metros en el nivel piezométrico y la reducción del caudal del río Júcar, llegando a haber períodos en los que el río estuvo seco, lo que ocurrió entre 1990 y 1994.

El agotamiento del acuífero de La Mancha Oriental está causando daños importantes en los humedales de la cuenca alta del Júcar, así como en los ecosistemas acuáticos de las cuencas media y baja del Júcar debido a la reducción de los caudales. Al principio de la década de 2010, algo que también señala [Esteban and Albiac \(2012\)](#), es que el acuífero de La Mancha Oriental drenaba agua del río Júcar en lugar de alimentarlo, lo que generaba graves problemas de caudales bajos y degradación de la calidad del agua en el bajo Júcar.

El ecosistema acuático más importante de la cuenca del Júcar es el parque natural de la Albufera, situado en la costa valenciana. La Albufera recibe agua de los retornos de riego del distrito alimentado por la Acequia Real, pero el suministro ha disminuido en las últimas décadas debido a la caída de los caudales del río Júcar. Lo que se ha traducido en un descenso de los retornos de agua hacia la Albufera, causando un grave deterioro en la fauna y flora de sus ecosistemas.

El aspecto esencial de la gestión sostenible de acuíferos es que, desde mediados de la década de 1990, los usuarios del agua han estado cooperando en La Mancha Oriental para gestionar el acuífero. Diversos factores explican estos esfuerzos de cooperación, pero la principal razón parece ser la presión de los usuarios aguas abajo y de la autoridad del agua para mantener los caudales del río en la cuenca media y baja del Júcar. Tanto es así que [La Tribuna de Albacete \(2019\)](#) publicó un artículo en el cual se nombraba el caso del acuífero de La Mancha Oriental como uno de los únicos cuyo intento de gestión sostenible había resultado exitoso.

El modelo de gestión de la Junta Central de Regantes se basa en la cooperación de todo el ecosistema que rodea los recursos hídricos. Es decir, de los agricultores, de la administración hidrológica y del sistema investigador, en el cual se incluye principalmente el Instituto Técnico Agronómico Provincial. Los agricultores y otros usuarios de los recursos siguen un plan anual de riesgos, en el cual se les informa, por parte de la comunidad científica, de la situación del balance hídrico del acuífero para no llegar a un uso insostenible. Por su parte la Confederación Hidrográfica del Júcar lleva a cabo un marco de planificación y gestión.

Como acabamos de comprobar, el problema de gestionar de manera sostenible el acuífero de La Mancha Oriental señala la necesidad de equilibrar las demandas socioeconómicas con la preservación de los ecosistemas naturales. A lo largo de la segunda mitad del siglo XX, la sobreexplotación del recurso había provocado impactos negativos significativos en el caudal del río Júcar y en los ecosistemas que de él dependían, como el parque natural de la Albufera. Sin embargo, el caso de este acuífero destaca por ser un ejemplo positivo de gestión colaborativa, en el que agricultores, autoridades y científicos trabajan de manera conjunta para implementar medidas que permitan un uso sostenible del agua. Este modelo de gobernanza, basado en la cooperación y la planificación, no solo ha mitigado los impactos negativos, sino que también constituye una referencia para la gestión de recursos hídricos en otras regiones.

Este análisis no solo nos muestra la importancia de las soluciones participativas, sino que también contextualiza los desafíos futuros de la sostenibilidad hídrica, proporcionando una base para las herramientas matemáticas y los modelos que se desarrollarán en capítulos posteriores.

2.3. Teoría del control óptimo

El **control óptimo** es una herramienta matemática que permite determinar la mejor trayectoria de unas variables de decisión en el tiempo, dadas ciertas restricciones y un objetivo definido. Es una metodología ampliamente utilizada para la toma de decisiones dinámicas en sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo. Este enfoque permite identificar estrategias que maximizan, o minimizan, un objetivo dado, como el bienestar económico, el uso eficiente de recursos naturales o la inversión en políticas públicas. En su núcleo, el control óptimo integra una función objetivo que depende de variables temporales, las cuales se evalúan a través de un

modelo matemático que incluye restricciones dinámicas.

Desde el trabajo de Ramsey (1928), el control óptimo ha sido utilizado para modelizar problemas intertemporales en economía, como la asignación de recursos, el manejo de capital y la gestión de recursos naturales, permite evaluar cómo maximizar una función objetivo que integra los beneficios futuros descontados a valor presente. Este marco teórico nos ayuda a analizar y prever el impacto de diferentes estrategias de gestión a lo largo del tiempo, mejorando tanto la sostenibilidad como la eficiencia en el uso de los recursos.

En el caso que nos preocupa, la gestión de los recursos hídricos de los acuíferos, la teoría del control óptimo nos aporta una metodología para abordar el dilema entre satisfacer las demandas actuales de agua y preservar el recurso para generaciones futuras. Los acuíferos son sistemas dinámicos, donde el balance entre extracción y recarga depende de múltiples factores, como las condiciones climáticas, la disponibilidad de tecnología y las políticas de gestión. La relevancia del control óptimo radica en su capacidad para integrar estas dinámicas en un modelo matemático para, posteriormente, poder encontrar una solución sostenible en el tiempo.

Se expone ahora la teoría matemática que engloba los problemas de control óptimo, basándonos en el desarrollo presentado por Cerdá (2003) en su libro: *Optimización Dinámica*.

2.3.1. Planteamiento del problema

Consideremos un **sistema dinámico** en tiempo continuo y con un horizonte temporal $[t_0, t_1]$. Sea $x(t)$ la **variable de estado**, que nos informa de la situación actual del sistema y $u(t)$ la **variable de control**, de la que depende la situación del sistema e influye en él. Ambas variables toman valores en el intervalo $[t_0, t_1]$. La situación inicial está dada por $x(t_0) = x_0$. Este planteamiento se puede extender entendiendo las variables de control y de estado como trayectorias en \mathbb{R}^n , pero en nuestro caso vamos a tratar únicamente con variables escalares (unidimensionales).

Por lo tanto, la ecuación que describe el comportamiento del sistema, conocida como **ecuación de estado**, se define de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad \text{con } x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

siendo f una función con derivadas parciales primeras continuas.

El **funcional objetivo** J da una medida cuantitativa del comportamiento del sistema dinámico en el tiempo. Suponiendo que F y S poseen derivadas primeras continuas,

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t) dt + S(x(t_1)) \quad (2.2)$$

donde el primer sumando de la integral recoge el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo y el segundo sumando, la función S , valora el estado final del sistema en el extremo del intervalo.

2.3.2. Restricciones

Definiremos un control admisible como aquella variable de control $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ continua a trozos (quiere decir que quizá tiene un número finito de discontinuidades en $[t_0, t_1]$ y que

cumple $u(t) \in \Omega(t) \subseteq \mathbb{R}^m$ para cada $t \in [t_0, t_1]$. El conjunto $\Omega(t)$ representa un conjunto de restricciones a las variables de control en el tiempo t . Suponemos que las variables de estado $x(t)$ son funciones continuas en $[t_0, t_1]$ y con derivadas continuas a trozos verificando la ecuación (2.1) en todos los puntos de continuidad de u .

2.3.3. Problema de control óptimo

El objetivo de un problema de control óptimo es maximizar (o minimizar) un funcional objetivo sujeto a una ecuación de estado junto con una condición inicial para la variable de estado. El problema, que Cerdá presenta en (Cerdá (2003), p. 111), es el siguiente:

Dado un sistema dinámico con condición inicial x_0 , y que evoluciona en el tiempo de acuerdo con la ecuación de estado (2.1), se trata de encontrar la variable de control que sea admisible y que haga que el funcional objetivo alcance el máximo valor. El problema resultante es:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J &= \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t) dt + S(x(t_1)) \\ \text{sujeto a: } \dot{x} &= f(x(t), u(t), t), \\ \text{con: } x(t_0) &= x_0, \\ u(t) &\in \Omega(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

En nuestro caso, en el modelo que vamos a emplear posteriormente la función S es nula, los funcionales objetivos con esta particularidad se dice que están en forma de **Lagrange**. Ahora, necesitamos conocer cómo resolver el problema y obtener las soluciones óptimas.

Definición. Definimos el **Hamiltoniano** asociado al problema anterior como:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = F(x(t), u(t), t) + \lambda(t)f(x(t), u(t), t), \quad (2.4)$$

donde para cada $t \in [t_0, t_1]$, $\lambda(t)$ es la llamada **variable de coestado**.

El siguiente teorema establece las condiciones necesarias de optimalidad para el problema.

Teorema. Principio del máximo de Pontryagin. Sean Si $u^*(t)$ es la trayectoria de control óptimo del problema anterior, continua a trozos, y $x^*(t)$ es la trayectoria de estado óptima asociada, ambas definidas en $[t_0, t_1]$, entonces existe $\lambda^*(t)$ continua en $[t_0, t_1]$, que posee derivadas continuas a trozos, tal que para cada $t \in [t_0, t_1]$ cumple:

1. $\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)}{\partial x}$ en todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$, y con además $\lambda^*(t_1) = \frac{\partial S(x^*(t_1))}{\partial x}$.
2. $H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \geq H(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t)$ para cualquier $u(t) \in \Omega(t)$.
3. $\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t)$ en todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$, con $x^*(t_0) = x_0$.

Estas condiciones aportan los candidatos a óptimos del problema, pero no aseguran que lo sean, para ello hay que comprobar y cumplir las condiciones suficientes que garantizan que las condiciones necesarias que proporciona el principio del máximo son también suficientes de optimalidad global. Las condiciones suficientes estándar son:

- El hamiltoniano $H(x(t), u(t), \lambda(t), t)$ es cóncavo en $u(t)$, para confirmar que los puntos candidatos a óptimos $u^*(t)$ son óptimos en la condición 2 del Principio del máximo de Pontryagin.
- El hamiltoniano $H(x(t), u(t), \lambda(t), t)$ es cóncavo en $x(t)$, que garantiza que los puntos candidatos a óptimos $x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)$ son óptimos.

El problema de control óptimo, definido en (2.3), supone que el instante final está dado pero no se conoce el estado final, es decir, se conoce t_1 pero no $x(t_1)$. En nuestras aproximaciones emplearemos una modificación de este problema en el cual sí que conozcamos el estado final del sistema, por lo que podremos influenciar en él y plantear diferentes escenarios dependiendo de los estados finales.

Por otro lado, en economía se presentan gran cantidad de problemas con horizonte temporal infinito. En teoría del crecimiento económico es habitual considerar esta formulación, debido a que, en caso de suponer horizonte finito, habría que imponer una condición final para el stock de capital, es decir, para la variable de estado y ésta en general no se conoce. El problema que resulta de contemplar el horizonte infinito es:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} J &= \int_{t_0}^{\infty} F(x(t), u(t), t) dt + S(x(t_1)) \\ \text{sujeto a: } \dot{x} &= f(x(t), u(t), t), \\ \text{con: } x(t_0) &= x_0, \\ u(t) &\in \Omega(t), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) &= 0 \end{aligned}$$

En un horizonte infinito no se especifica un estado final explícito, $x(t_1)$. En su lugar, se establecen condiciones de transversalidad que aseguran la coherencia de la solución a largo plazo. Una condición común es $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$, la cual garantiza que los términos marginales sean insignificantes en el horizonte infinito.

La estructura del hamiltoniano permanece inalterada respecto a (2.4), y se conservan las ecuaciones necesarias para que las variables de estado, coestado y control cumplan con las condiciones del problema, incluidas las de transversalidad. Al resolver el modelo, se considera que las trayectorias de $x(t)$ y $\lambda(t)$ convergen y exhiben un comportamiento asintótico adecuado.

2.4. Factor de descuento en la gestión de recursos hídricos

En nuestro trabajo el funcional F del problema (2.3), se va a componer de un factor de descuento y de una **función de bienestar**, llamémosla G . Es decir, suponiendo que la función del factor de descuento es $D(t)$, entonces el funcional F es de la forma:

$$F(x(t), u(t), t) = D(t) \cdot G(x(t), u(t), t).$$

Por ejemplo, en el caso del descuento exponencial: $D(t) = e^{-rt}$. El factor de descuento afecta la forma en la que se valoran los beneficios o costes a lo largo del tiempo. Refleja la idea de que un beneficio recibido hoy tiene más valor que el mismo beneficio recibido en el futuro debido a diversos factores como la inflación, el riesgo, o una preferencia temprana por parte del

agente. En contextos económicos, se traduce en la preferencia por el presente frente al futuro, lo cual se conoce como tasa de descuento. Analicémoslo con más detalle.

Tal y como ya ha sido comentado, la gestión eficiente de los acuíferos requiere una valoración integral que considere tanto el valor económico de su explotación como el riesgo de agotamiento asociado a una gestión inadecuada. Los modelos de descuento son herramientas fundamentales en este contexto, ya que permiten estimar el valor actual de los beneficios futuros derivados de la explotación de estos recursos, facilitando la toma de decisiones óptimas.

Una de las suposiciones fundamentales en la aplicación del control óptimo es el uso de un descuento temporal para valorar los beneficios y costes futuros en términos presentes. La elección del factor de descuento tiene un impacto decisivo en las estrategias de manejo, particularmente en la gestión de recursos naturales como los acuíferos. Tradicionalmente, esta valoración se realiza bajo el modelo de descuento exponencial, propuesto por [Samuelson \(1937\)](#), que asume una tasa de descuento constante. Este enfoque, si bien es matemáticamente manejable y consistente con las teorías económicas clásicas, impone restricciones significativas en la representación de las preferencias humanas y en los resultados del control óptimo.

Las investigaciones en economía del comportamiento y psicología han cuestionado la validez del descuento exponencial, mostrando que las decisiones humanas no son consistentes con este modelo. Desde los estudios de [Chung and Herrnstein \(1967\)](#), se observó que las decisiones intertemporales no seguían patrones constantes, lo que llevó a modelos alternativos. [Thaler \(1981\)](#) introdujo el concepto de inconsistencia dinámica, destacando tasas de descuento decrecientes y la preferencia por recompensas inmediatas. [Mazur \(1987\)](#) desarrolló el modelo de descuento hiperbólico, mientras que [Loewenstein and Prelec \(1992\)](#) refinaron esta idea con la hipérbola generalizada para ajustarse mejor a las decisiones humanas. [Green et al. \(1994\)](#) confirmaron que el modelo hiperbólico representaba mejor las decisiones reales en contextos temporales.

Si bien el control óptimo ha sido ampliamente utilizado en economía, en la gestión de recursos naturales y políticas públicas, la mayoría de los trabajos asumen un modelo de descuento exponencial. La novedad de este trabajo va a ser integrar modelos de descuento alternativos en problemas de control óptimo, combinando enfoques que hasta ahora se habían desarrollado por separado. La aplicación de un descuento hiperbólico introduce un enfoque más realista y flexible para valorar el futuro. Se caracteriza por otorgar un peso más bajo al presente en comparación con el descuento exponencial, pero con una menor disminución relativa del peso a largo plazo, y que puede provocar que los agentes pueden mostrar mayor sensibilidad al futuro en horizontes largos. También tiene impacto en las políticas públicas, especialmente en áreas como la gestión de recursos naturales o la inversión en infraestructura, justificando decisiones más sostenibles y equitativas entre generaciones.

Por ejemplo, en problemas relacionados con el uso de acuíferos, el control óptimo tradicional basado en descuento exponencial podría subestimar el impacto de decisiones actuales en generaciones futuras. Al introducir un descuento hiperbólico, o intergeneracional, se obtiene una valoración más equilibrada de los beneficios y costes intertemporales, lo que podría justificar políticas de uso más conservadoras o sostenibles.

El modelo de descuento hiperbólico ofrece un enfoque más realista para capturar las decisio-

nes intertemporales. El descuento hiperbólico aborda las inconsistencias temporales, reflejando la preferencia por recompensas inmediatas y cómo estas cambian con un horizonte temporal más amplio. Proporciona una visión más flexible y ajustada a los comportamientos reales, convirtiéndose en una herramienta valiosa para la toma de decisiones en escenarios de largo plazo.

Estos modelos siguen la idea principal de la **ley de preferencia temporal** de que el valor de los recursos cambia con el tiempo, en general, las personas tendemos a preferir consumir o utilizar recursos en el presente en lugar de en el futuro, es decir, un recurso tiene menor valor cuanto más lejano esté en el tiempo. Como dice [Macedo \(2021\)](#) "satisfacer un deseo en el presente es preferible a satisfacerlo en un futuro cercano, así como satisfacerlo en un futuro cercano es preferible a un futuro más lejano". Este principio incentiva la gestión de recursos entre ahorradores e inversores, facilitando una asignación temporal óptima de los recursos en la economía.

El uso de modelos de descuento en la gestión de acuíferos tiene un impacto directo en las decisiones que se toman a largo plazo. Esto nos ayuda a entender cómo las acciones que tomamos ahora pueden afectar económicamente al acceso al agua en el futuro. En términos sencillos, estos modelos nos permiten priorizar acciones que aprovechen al máximo los beneficios actuales, sin poner en peligro el suministro de agua para las próximas generaciones. Así, podemos analizar la explotación de un acuífero no solo en función de las ganancias a corto plazo, sino también tomando en cuenta los riesgos de agotamiento o daño que podrían reducir su valor con el tiempo.

Los tipos de modelos de descuento que vamos a analizar en este trabajo son: el descuento fijo o constante y el hiperbólico, los cuales se aplican de manera diferente dependiendo del enfoque. En contextos como la gestión de recursos naturales, donde los efectos de las decisiones actuales repercuten a largo plazo, la elección del tipo de descuento tiene un impacto crítico en la formulación de políticas sostenibles. ([Philibert \(2003\)](#); [Gollier \(2008\)](#); [Arrow et al. \(2014\)](#); [Schoemaker and Schramade \(2024\)](#)).

Presentamos los tipos de factor de descuento:

- El descuento **constante** constituye el enfoque tradicional, en el cual se asume que el valor de los recursos disminuye a una tasa fija a lo largo del tiempo.
- El modelo **hiperbólico** refleja una preferencia mucho mayor por los beneficios inmediatos en comparación con los beneficios a largo plazo. Este modelo capta la impaciencia a corto plazo de los individuos, aunque son más pacientes a medida que nos alejamos del presente.

La elección del modelo adecuado para valorar la explotación de los acuíferos es crucial, ya que influye en las políticas de gestión que se implementen, en las inversiones que se realicen y, sobre todo, en la sostenibilidad del acuífero.

Por ejemplo, [Green and Myerson \(1996\)](#), apuntan que el modelo de descuento hiperbólico se ajusta mejor a cómo las personas varían en su forma de valorar el tiempo, tanto colectivamente como de manera individual. El modelo hiperbólico es capaz de mostrar cambios en las preferencias, es decir, cuando la recompensa está más cerca, se tiende a preferir una más pequeña y cercana en vez de una mayor pero lejana, pero, por el contrario, si ambas recompensas se

posponen en el tiempo la preferencia de los individuos cambia.

También [Laibson \(1997\)](#) analiza cómo las preferencias hiperbólicas afectan las decisiones de consumo y ahorro. Este modelo se caracteriza por la utilización de un descuento hiperbólico para capturar preferencias intertemporales en las que los agentes muestran mayor sensibilidad al corto plazo. Esto se traduce en una disminución del peso del futuro más pronunciada al principio y menos acentuada a largo plazo, ofreciendo una descripción más realista de la toma de decisiones que el modelo exponencial clásico.

Además, [Chichilnisky \(1996\)](#) propone un marco intergeneracional para problemas de sostenibilidad y gestión de recursos naturales. Este enfoque introduce una función de descuento decreciente no exponencial que asigna pesos diferenciados a las generaciones presentes y futuras, mitigando las limitaciones del descuento exponencial, el cual tiende a devaluar drásticamente los valores futuros. Este tipo de descuento refleja de manera más adecuada las preferencias por la equidad intergeneracional, especialmente relevante en contextos de desarrollo sostenible.

Por su parte, [Harris et al. \(2002\)](#), en su trabajo examinan cómo los consumidores que emplean funciones de descuento hiperbólicas toman decisiones intertemporales bajo ingresos estocásticos, especialmente cuando enfrentan restricciones para compartir riesgos. Los autores afirman que las funciones de consumo derivadas bajo descuento hiperbólico pueden exhibir discontinuidades, no monotonía y violaciones de la concavidad, indicando que este factor de descuento permite explicar en mejor medida los cambios bruscos y discontinuos de las preferencias de los usuarios. Además, comprueban que, comparado con el modelo exponencial, el modelo hiperbólico representa mejor ciertos comportamientos como el endeudamiento con tarjetas de crédito y las correlaciones entre consumo e ingreso.

Siguiendo esta línea de pensamiento, [Vladimirova and Rozmainsky \(2019\)](#) reafirman también que el modelo hiperbólico ayuda a explicar los cambios bruscos y discontinuos en las preferencias de los individuos, como podría ser la búsqueda inmediata de gratificación, ya que predice cambios de preferencia en favor de recompensas más inmediatas a medida que se acercan en el tiempo. Además señalan la importante influencia de los factores externos y psicológicos en la paciencia y el autocontrol en las decisiones de las personas.

En resumen, el factor de descuento que se elija para realizar un análisis económico va a depender de numerosos condicionantes, como la situación de las tasas de interés en el mercado, la duración del proyecto, lo que se espera que pase con los recursos hídricos en el futuro. También puede depender de factores sociales y ambientales que podrían afectar en la valoración del acuífero a lo largo del tiempo. A pesar de estas contribuciones teóricas, no tenemos constancia de que estos enfoques de descuento hayan sido formalmente integrados en el funcional de un problema de control óptimo clásico.

Incorporar tales descuentos en un marco de control óptimo requeriría una reformulación cuidadosa de las condiciones de optimalidad. Esta línea de investigación, que aquí se trabaja, podría abrir nuevas oportunidades para modelizar dinámicas económicas y sociales con un enfoque más realista y sostenible.

Se presentan ahora las expresiones matemáticas de los factores de descuento utilizados en este estudio para analizar la gestión de los recursos hídricos del acuífero. Estas formulaciones

permiten modelizar cómo se valora el uso futuro del recurso frente al presente, influyendo directamente en las estrategias óptimas de manejo. Proporcionamos una base matemática clara que sirva para integrar estos factores en el modelo de control óptimo, facilitando el análisis de diferentes escenarios de gestión a lo largo del tiempo.

2.4.1. Exponencial

El descuento exponencial, descrito en páginas anteriores, ha sido ampliamente utilizado en economía y, en el caso que nos ocupa, es el factor de descuento empleado en la modelación del acuífero por parte de los autores [Gisser and Sanchez \(1980\)](#). En este modelo los costes y beneficios se descuentan a una tasa r constante.

$$D(t) = e^{-rt}$$

Tal y como se ha mencionado, este tipo de descuentos valoran de forma constante el futuro y puede provocar una mala valoración del largo plazo.

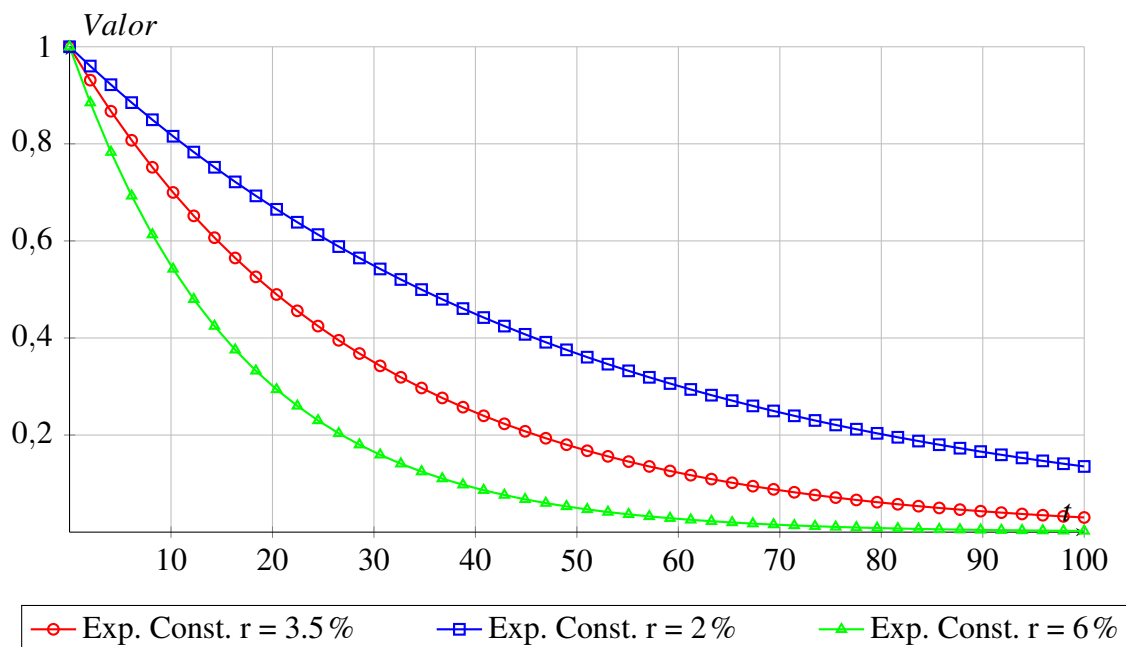


Figura 2.4: Factor de descuento Exponencial.

En la figura 2.4 podemos observar cómo afecta la variación de la tasa de descuento en el factor de descuento exponencial. Cuanto más alta es la tasa mayor es la velocidad en la que se devalúa el precio a lo largo del tiempo, dando más énfasis al corto plazo.

2.4.2. Hiperbólico

El modelo de descuento hiperbólico desafía la idea tradicional de que las personas valoran el futuro de manera constante, como se establece en el modelo de utilidad descontada de [Samuelson \(1937\)](#). En dicho modelo, la tasa de descuento es fija, lo que implica que el valor presente de una recompensa futura disminuye de manera proporcional con el tiempo, véase la comparación en figura 2.4.

A diferencia del descuento exponencial, donde la tasa de descuento es fija, el modelo hiperbólico introduce tasas que disminuyen con el tiempo, reflejando mejor las decisiones humanas. Entre sus ventajas, este enfoque incentiva la acción inmediata para abordar problemas urgentes, como la escasez de agua, y se adapta a contextos donde las necesidades actuales son prioritarias, como por ejemplo, de sequía extrema. Sin embargo, su principal inconveniente radica en la posible sobreexplotación del recurso, ya que tiende a subestimar los beneficios a largo plazo, poniendo en riesgo la sostenibilidad del acuífero y el bienestar de futuras generaciones. La expresión, empleada por gran cantidad de autores, del descuento hiperbólico es la siguiente:

$$D(t) = \frac{1}{1 + vt}$$

El modelo hiperbólico depende únicamente de la velocidad de descuento v , la cual nos indica la tasa de velocidad con la que se produce el descuento. Este modelo se basa en la idea de que las personas tienden a valorar más las recompensas que pueden obtener de forma rápida en relación con el esfuerzo o tiempo invertido, lo cual afecta sus decisiones y acciones.

Este tipo de descuento tiene otras variaciones, como podrían ser:

- [Green et al. \(1994\)](#):

$$D(t) = \frac{1}{(1 + vt)^p}$$

- [Anchugina et al. \(2017\)](#):

$$D(t) = \frac{r}{1 + vt}$$

- [Loewenstein and Prelec \(1992\)](#):

$$D(t) = \frac{1}{(1 + vt)^{\frac{a}{b}}}$$

En el caso del modelo de [Green et al. \(1994\)](#), p es un parámetro que ajusta la curvatura de la función de descuento. Este parámetro tiene un impacto en cómo se percibe el descuento a lo largo del tiempo. A lo largo del trabajo cuando se mencione el factor de descuento hiperbólico se hará referencia al de [Green et al. \(1994\)](#). Dependiendo de su valor puede hacer que el descuento se vuelva más intenso o más suave a medida que pasa el tiempo. Según p :

- $p = 1$: La función se comporta como un descuento hiperbólico clásico, con una tasa de descuento que decrece de manera más evidente al principio, pero se estabiliza con el tiempo.
- $p > 1$: El modelo enfatiza aún más el corto plazo, con una caída inicial más fuerte y un aplanamiento posterior.
- $p < 1$: Se otorga mayor peso a valores futuros, reflejando una percepción más optimista.

Cuando $p > 1$, se enfatiza el corto plazo, con una caída más pronunciada inicialmente; en cambio, si $p < 1$, se otorga más peso a valores futuros, reflejando una perspectiva más optimista. En casos con v y p altos, el descuento hiperbólico puede ser incluso más severo que el exponencial para valores grandes de t , subrayando cómo estos parámetros moldean la percepción del valor futuro.

Las figuras 2.5, 2.6, 2.7, ilustran cómo estos parámetros configuran la percepción del valor futuro, mostrando que el modelo hiperbólico no solo permite explicar preferencias a corto plazo, sino que también introduce variaciones significativas en la percepción del largo plazo, dependiendo de v y p . Si ambos parámetros son elevados, el modelo hiperbólico puede resultar más severo que el exponencial para tiempos largos, como apuntan [Green et al. \(1994\)](#).

Como se observa en las figuras los valores de los parámetros juegan un papel fundamental en la forma del descuento y en cómo estos parámetros afectan a la percepción del valor futuro de los recursos, lo que nos lleva a la cuestión de qué valores escoger.

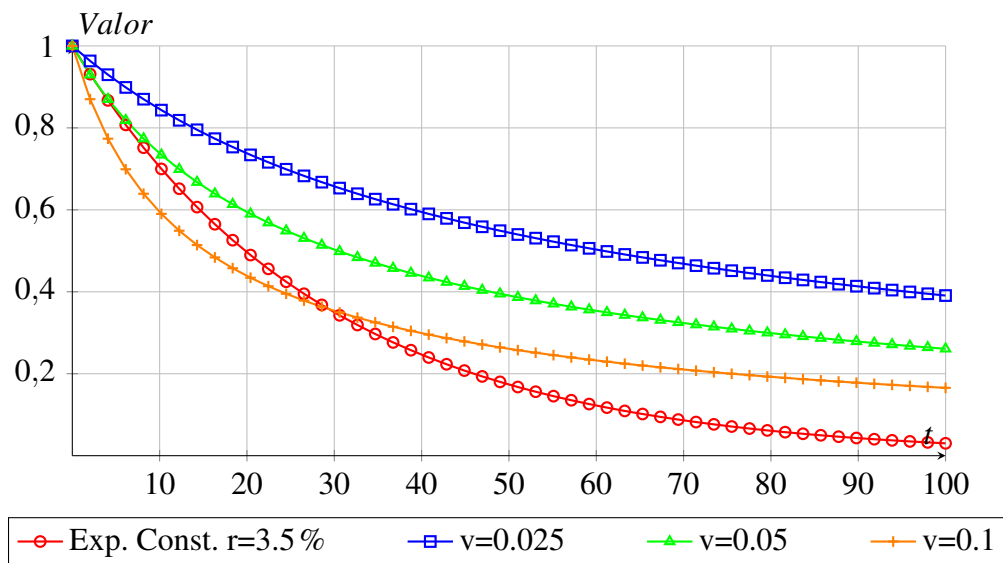


Figura 2.5: Exponencial vs Hiperbólico ($p = 0,75$).

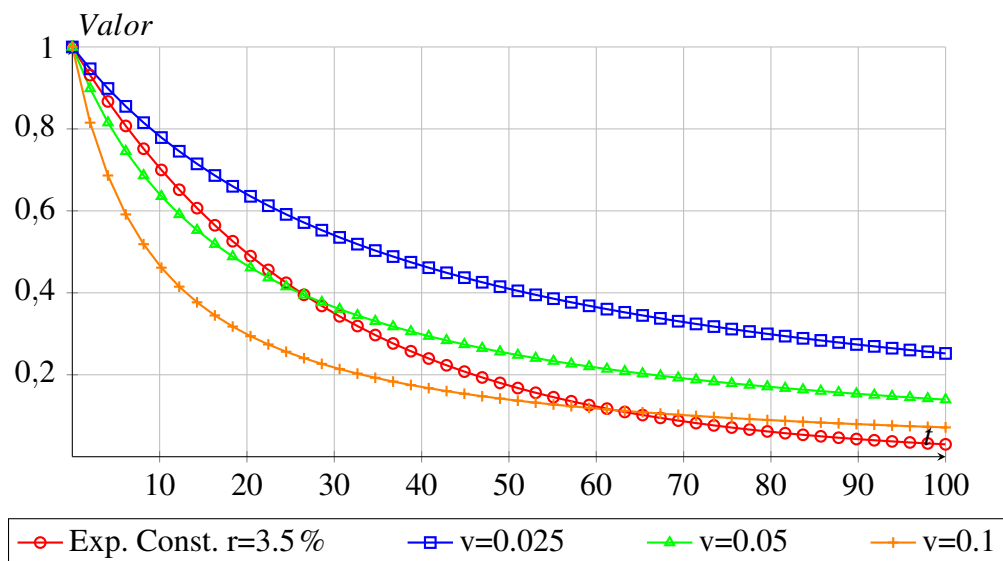


Figura 2.6: Exponencial vs Hiperbólico ($p = 1,1$).

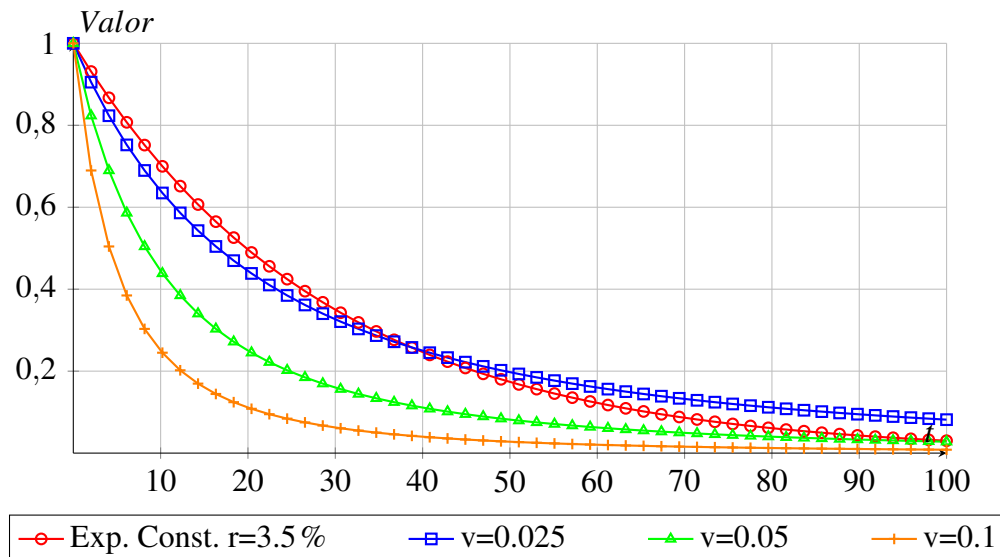


Figura 2.7: Exponencial vs Hiperbólico ($p = 2$).

En la literatura, [Lazaro et al. \(2002\)](#) realizaron un análisis detallado del comportamiento del descuento hiperbólico en diversos bienes sociales y privados. Sus investigaciones llevaron a la elección de parámetros específicos para este estudio, concretamente $v = 0,1655$ y $p = 0,6568$. Estos parámetros son particularmente relevantes, ya que los bienes estudiados por [Lazaro et al. \(2002\)](#) comparten características similares a las externalidades intergeneracionales y los beneficios colectivos relacionados con los acuíferos, lo que proporciona una base sólida para su implementación en el presente análisis.

Con dichos valores los dos descuentos que vamos a estudiar van a ser:

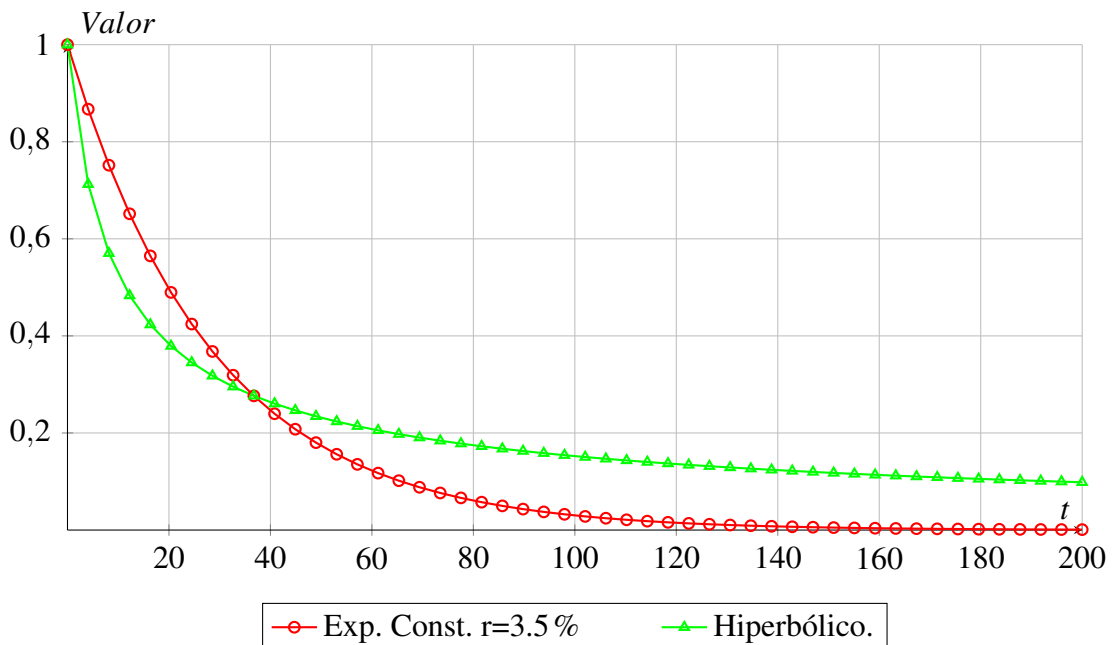


Figura 2.8: Exponencial vs Hiperbólico.

En la siguiente tabla se puede observar el resultado numérico del gráfico de la figura 2.8, es decir, cómo varía el valor de 1€ según el factor de descuento que se utilice a lo largo de

200 años. En esta comparación vamos a emplear los dos descuentos, con los parámetros que utilizaremos para obtener los posteriores resultados.

Años	Exponencial	Hiperbólico
20	0.497€	0.383€
40	0.247€	0.263€
60	0.123€	0.208€
80	0.061€	0.175€
100	0.030€	0.152€
120	0.015€	0.136€
140	0.007€	0.123€
160	0.004€	0.113€
180	0.002€	0.105€
200	0.001€	0.098€

Cuadro 2.1: Traza de 1€ a lo largo de 200 años.

Como podemos ver en el cuadro 2.1, el descuento hiperbólico valora menos el corto plazo que el descuento exponencial, pero, a medida que nos alejamos en el eje del tiempo, se observa cómo el factor de descuento hiperbólico supera al descuento *tradicional* y valora más el largo plazo. El punto en el cual ambos descuentos tienen el mismo valor lo encontramos a los 37 años aproximadamente ($x \approx 36,72$), a partir de este año el hiperbólico supera al exponencial.

Como se ha comentado, los coeficientes utilizados por [Lazaro et al. \(2002\)](#) constituyen un punto de partida importante para este análisis. No obstante, como se propone en las líneas futuras de investigación, sería interesante profundizar en la estimación de los parámetros v y p .

Capítulo 3

Modelo del acuífero

Los modelos matemáticos son muy importantes para entender y planificar cómo se deben gestionar los acuíferos en distintas condiciones de uso y extracción para no llegar a situaciones irreparables en la salud del mismo. La explotación excesiva y sin control de estos recursos puede provocar efectos irreversibles, como la extinción de los acuíferos y la degradación de los ecosistemas que coexisten en la cuenca hidrográfica. Por lo tanto, es crucial contar con modelos matemáticos que nos permitan simular los sistemas hídricos para poder tomar decisiones sobre su gestión a largo plazo.

Presentamos el modelo teórico base para abordar el problema, publicado en [Gisser and Sanchez \(1980\)](#), que busca representar la dinámica de los acuíferos y las restricciones inherentes a su explotación. El objetivo es explicar las ideas y herramientas matemáticas que están detrás de la gestión óptima de los acuíferos.

3.1. Modelo de acuífero

[Gisser and Sanchez \(1980\)](#) presentaron su modelo matemático de un acuífero considerando el factor de descuento constante e^{-rt} , resolviendo un problema de control óptimo, donde W es la cantidad de agua bombeada, H es el nivel del agua del acuífero sobre el nivel del mar, y r la tasa de descuento constante, véase figura 3.1.

En primer lugar, presentamos la ecuación de demanda de agua, la cual es una función lineal con pendiente negativa:

$$W(t) = g + kP(t), \quad (3.1)$$

donde $P(t)$ es el precio del agua y $g > 0, k < 0$ constantes. El parámetro g representa la demanda cuando el precio es 0, y k la sensibilidad de la demanda respecto al precio.

La oferta de agua es la función del coste marginal de bombeo $P = C_0 + C_1H(t)$, siendo C_0 y C_1 los parámetros que representan los costes fijos de extraer el agua (esta es una reformulación de $P(t) = C'_0 + C'_1(S_L - H(t))$, donde S_L es la elevación de la superficie de riego).

Sea ahora R el coeficiente de recarga natural del acuífero, α el coeficiente de retorno de flujo, A el área del acuífero, y S el coeficiente de almacenamiento específico (storativity). El cambio en la altura del acuífero se describe por la ecuación diferencial

$$AS \cdot \dot{H}(t) = R + (\alpha - 1)W(t).$$

Se plantea un problema de control óptimo, en el cual los agricultores tienen el objetivo de maximizar el valor presente de sus flujos de ingresos futuros, maximizando así el bienestar social.

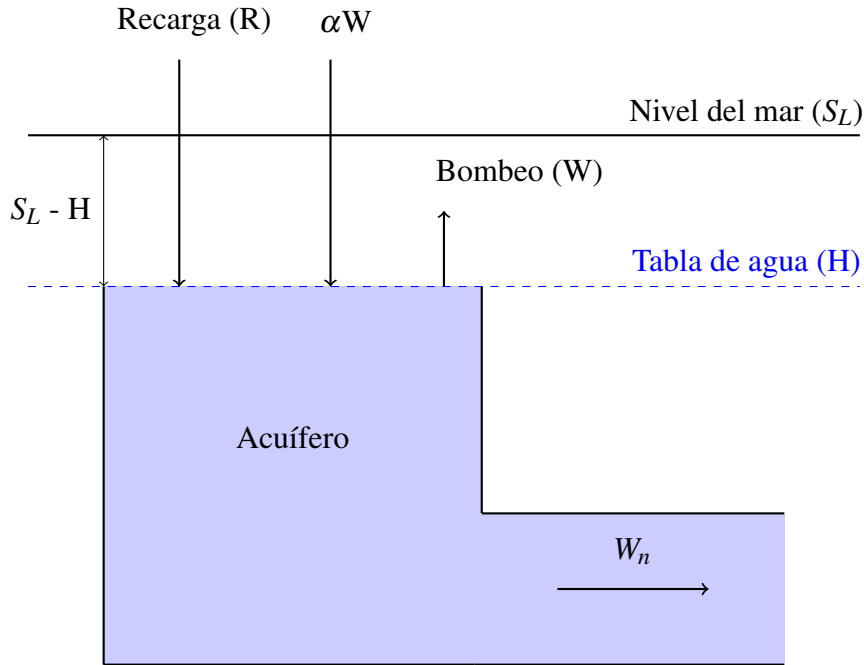


Figura 3.1: Modelo del acuífero.

El ingreso total se calcula despejando $P(t)$ de la ecuación (3.1) e integrando la función de demanda. Por otro lado, los costes totales se calculan como el producto del precio por bombeo por el bombeo total de agua. El ingreso neto de los agricultores es el ingreso total menos el coste total, formando así la función bienestar del problema:

$$\underbrace{\frac{1}{2k}W^2(t) - \frac{g}{k}W(t)}_{\text{Ingreso total}} - \underbrace{(C_0 + C_1H(t))W(t)}_{\text{Coste total}}.$$

Finalmente, el problema de control óptimo, en horizonte infinito, que plantean Gisser y Sánchez y que hay que maximizar es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \max_{u(t)} \int_0^{\infty} e^{-rt} \left[\frac{1}{2k}W^2(t) - \frac{g}{k}W(t) - (C_0 + C_1H(t))W(t) \right] dt \\ & \text{sujeto a: } \dot{H}(t) = \frac{R + (\alpha - 1)W(t)}{AS}, \\ & \text{con: } H(0) = H_0, \\ & \quad u(t) \in \Omega(t), \\ & \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0 \end{aligned}$$

En este problema $W(t)$ es la variable de control y $H(t)$ es la variable de estado, además es importante señalar que en este problema de control óptimo, y en los siguientes que veremos, la restricción $\Omega(t)$ de las extracciones es el intervalo abierto entre 0 y la capacidad máxima del acuífero. Los ingresos de los agricultores son $\frac{1}{2k}W^2(t) - \frac{g}{k}W(t)$, el coste de bombear el agua

$(C_0 + C_1H(t))W(t)$, y el factor de descuento es e^{-rt} . Notar que, en este problema de control óptimo, la integral se compone de la función de bienestar y del factor de descuento.

El conjunto de los parámetros que se emplean en el modelo son los siguientes:

Símbolo	Descripción	Valor numérico
k	Disminución de la demanda de agua por cada euro de aumento del precio.	-0.0004454 (€/Mm ³)
g	Intercepto de la función de demanda de agua.	465.15 (Mm ³)
C_0	Costes fijos de extracción del agua.	815 000 (€/Mm ³)
C_1	Costes fijos de extracción del agua.	-1 100 (€/Mm ³ · m)
R	Capacidad de recarga natural del agua.	270 (Mm ³)
α	Coefficiente del flujo de retorno.	0.2
AS	Área del acuífero multiplicada por la capacidad de almacenamiento.	126.5 (Mm ²)
H_0	Altura inicial del acuífero.	660 (m)

Cuadro 3.1: Estimaciones de los parámetros para el acuífero de La Mancha Oriental. Fuente: Esteban et al. (2021).

3.1.1. Daños ambientales

A partir del modelo de Gisser and Sanchez (1980), los autores Esteban and Albiac (2011) introducen una función que representa el coste de los daños ambientales que se producen cuando se extraen los recursos hídricos de un acuífero. Su modelo es el siguiente:

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} \left[\frac{1}{2k} W^2(t) - \frac{g}{k} W(t) - (C_0 + C_1 H(t)) W(t) - \beta (-(\alpha - 1)W(t) - R) \right] dt, \quad (3.2)$$

donde la expresión $\beta (-(\alpha - 1)W(t) - R)$ representa los costes ambientales.

Para ello se calcula el agotamiento del acuífero, que es básicamente la diferencia entre la cantidad neta de agua extraída $(1 - \alpha)W(t)$ y la recarga R . Por lo tanto, el coste se calcula como el volumen de agua que se gasta en cada período $-(\alpha - 1)W(t) - R$ multiplicado por el parámetro β , donde β es el daño ambiental del agotamiento por cada metro cúbico, de los recursos del acuífero. En este desarrollo tomamos el mismo valor que Esteban and Albiac (2012), $\beta = 50\,000 \text{ €/Mm}^3$.

Tras resolver este problema de control óptimo, siguiendo el mismo desarrollo analítico que Gisser and Sanchez (1980) siguen en su trabajo, la solución es la siguiente:

$$W(t) = 337,500 + 37,266 \cdot e^{-0,002864 \cdot t}$$

$$H(t) = 577,713 + 82,287 \cdot e^{-0,002864 \cdot t}$$

Por otro lado, Gisser y Sánchez comparan sus resultados, obtenidos con control óptimo, con la solución que se obtiene imponiendo la competencia entre los agricultores en [Gisser and Mercado \(1973\)](#), es decir, sin control. Si resolvemos nuestro problema en situación de libre competencia, de la misma manera que lo hacen [Gisser and Sanchez \(1980\)](#), obtenemos los siguientes resultados:

$$W(t) = 337,5 + 88,0094 \cdot e^{-0,003098 \cdot t}$$

$$H(t) = 480,367 + 179,633 \cdot e^{-0,003098 \cdot t}$$

Representamos la evolución de ambas variables a lo largo del tiempo, siguiendo este modelo, en un periodo de mil años.

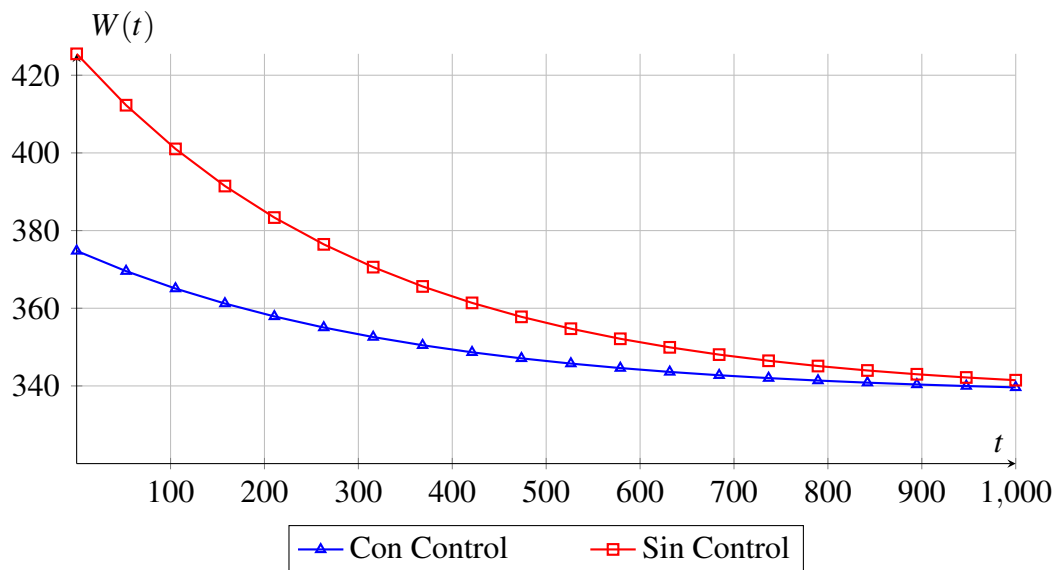


Figura 3.2: Comparación de las extracciones con control y sin control.

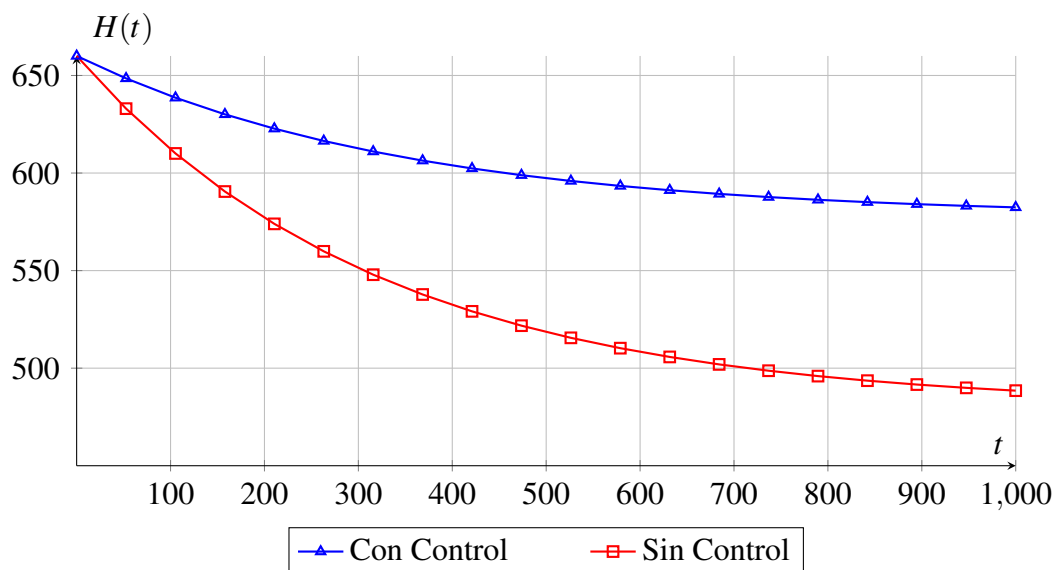


Figura 3.3: Comparación del nivel del acuífero con control y sin control.

De las Figuras 3.2, 3.3 podemos concluir que, al contrario que ocurría en el acuífero estudiado por Gisser y Sánchez, en el acuífero de la Mancha Oriental sí que existe una diferencia entre la situación con control y sin control. Se puede ver que las extracciones sin control son mayores, provocando que el nivel del acuífero sea menor a lo largo de los años. Comprobamos en este caso que el uso matemático del control óptimo permite una mayor conservación de los recursos hídricos del acuífero. Dado que la conclusión es que el control óptimo permite una mejor conservación del acuífero, vamos a investigar cómo optimizar su aplicación y evaluar su impacto bajo distintos escenarios.

3.2. Aplicación del descuento hiperbólico

Todos los estudios, como los mencionados en este trabajo, que han tratado la gestión óptima de los recursos hídricos lo han hecho empleando el factor de descuento exponencial (Esteban and Albiac (2012), Dinar et al. (2021), Esteban et al. (2021), Esteban et al. (2024)). Sin embargo, la literatura científica aún no ha explorado las implicaciones que tendría la utilización de otros factores de descuento en la optimización de los recursos de un acuífero, algo que podría cambiar la evolución temporal de la gestión hídrica.

Por tanto, una vez presentado el modelo del acuífero, incluyendo los daños ambientales, y su respectivo problema de control óptimo, vamos a centrarnos en el objetivo de este trabajo y se va a proceder a introducir el factor de descuento hiperbólico en (3.2). Es decir, el estudio trata de intercambiar el factor de descuento exponencial tradicional e^{-rt} por el factor de descuento hiperbólico $\frac{1}{(1+vt)^p}$.

Por otro lado, como ya hemos visto, los estudios previos han utilizado un horizonte de tiempo infinito para realizar el análisis, lo cual es útil para comprender su comportamiento a largo plazo y las condiciones de equilibrio. Sin embargo, para este estudio, hemos optado por un horizonte temporal finito que permite conclusiones a corto, medio y largo plazo, debido a las siguientes razones:

- Un horizonte finito nos permite centrar el análisis en distintos periodos específicos y estudiar el impacto de diferentes escenarios de gestión, para obtener resultados más aplicables en la toma de decisiones.
- Los estudios previos mencionan la incertidumbre en las condiciones futuras del acuífero, especialmente en factores como la recarga, la demanda y los precios de la energía. Un horizonte de 20 años nos permite modelizar esta incertidumbre de manera más realista, capturando posibles cambios y evaluando los riesgos asociados a diferentes escenarios.
- Si bien un horizonte infinito puede ser útil para modelizar el comportamiento a largo plazo, un horizonte finito es más adecuado para los objetivos de este estudio, que requieren una evaluación precisa de los escenarios bajo condiciones más realistas (los próximos años) en el que lo que se quiere comparar son los resultados de los descuentos.

El problema de control óptimo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} \int_0^{t_1} \frac{1}{(1+vt)^p} \left(\frac{1}{2k} W^2(t) - \frac{g}{k} W(t) - (C_0 + C_1 H(t)) W(t) - \beta [-(\alpha - 1)W(t) - R] \right) dt \\ \text{sujeto a: } \dot{H}(t) = \frac{R + (\alpha - 1)W(t)}{AS}, \\ \text{con: } H(0) = H_0, \\ H(t_1) = H_1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A continuación exponemos el desarrollo matemático para resolver este problema, empleando las condiciones necesarias que nos aporta el Principio del máximo de Pontryagin. En primer lugar planteamos el hamiltoniano del problema:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{(1+vt)^p} \left[\frac{1}{2k} W^2(t) - \frac{g}{k} W(t) - (C_0 + C_1 H(t)) W(t) - \beta [-(\alpha - 1)W(t) - R] \right] + \lambda(t) \left(\frac{R + (\alpha - 1)W(t)}{AS} \right)$$

Derivamos el hamiltoniano respecto de $W(t)$, la variable de control.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial W} = \frac{1}{(1+vt)^p} \left[\frac{1}{k} W(t) - \frac{g}{k} - (C_0 + C_1 H(t)) - \beta [-(\alpha - 1)] \right] + \lambda(t) \left(\frac{(\alpha - 1)}{AS} \right)$$

Usando la condición 2, tenemos que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial W} = 0$, y despejando $\lambda(t)$ de la ecuación tenemos:

$$\lambda(t) = -\frac{AS}{(\alpha - 1)(1+vt)^p} \left[\frac{1}{k} W(t) - \frac{g}{k} - (C_0 + C_1 H(t)) - \beta [-(\alpha - 1)] \right]$$

Derivamos la expresión respecto de t .

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{AS}{(\alpha - 1)(1+vt)^p} \left[\frac{-pv}{(1+vt)} \left(\frac{1}{k} W(t) - \frac{g}{k} - (C_0 + C_1 H(t)) - \beta [-(\alpha - 1)] \right) + \frac{1}{k} \dot{W}(t) - C_1 \dot{H}(t) \right]$$

Sustituimos el valor de $\dot{H}(t)$ por la restricción del problema.

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{AS}{(\alpha - 1)(1+vt)^p} \left[\frac{-pv}{(1+vt)} \left(\frac{1}{k} W(t) - \frac{g}{k} - (C_0 + C_1 H(t)) - \beta [-(\alpha - 1)] \right) + \frac{1}{k} \dot{W}(t) - \frac{C_1 R}{AS} - \frac{C_1(\alpha - 1)}{AS} W(t) \right]$$

Por otro lado, calculamos la derivada del hamiltoniano respecto de $H(t)$, la variable de estado.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} = -\frac{C_1 W(t)}{(1+vt)^p}$$

Teniendo en cuenta la condición 1, sabemos que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} = -\dot{\lambda}(t)$, luego podemos igualar ambas expresiones.

$$\frac{-C_1 W(t)}{(1+vt)^p} = \frac{AS}{(\alpha - 1)(1+vt)^p} \left[\frac{-pv}{(1+vt)} \left(\frac{1}{k} W(t) - \frac{g}{k} - (C_0 + C_1 H(t)) - \beta [-(\alpha - 1)] \right) + \frac{1}{k} \dot{W}(t) - \frac{C_1 R}{AS} - \frac{C_1(\alpha - 1)}{AS} W(t) \right]$$

De esta ecuación despejamos $\dot{W}(t)$ y llegamos a:

$$\dot{W}(t) = \frac{RC_1 k}{AS} + \frac{pbkv(\alpha - 1) - pC_0 kv - pC_1 kvH(t) - pgv + pvW(t)}{(1+vt)}$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{pmatrix} \dot{W}(t) \\ \dot{H}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{pv}{1+vt} & -\frac{kpvc_1}{1+vt} \\ \frac{\alpha-1}{AS} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t) \\ H(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{pv(bk(\alpha-1)-C_0k-g)}{1+vt} + \frac{C_1Rk}{AS} \\ \frac{R}{AS} \end{pmatrix}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones se realizará numéricamente, ya que su solución analítica, aunque pueda existir, no es inmediata y excede el alcance de este trabajo. Esta resolución numérica se ha llevado a cabo mediante el lenguaje de programación *Python*. La elección de *Python* se basa en su versatilidad, facilidad de uso y la amplia disponibilidad de librerías especializadas en cálculo numérico y optimización.

Cabe señalar que la comparación que se realiza en el capítulo siguiente es entre el problema de control óptimo que acabamos de desarrollar, con el descuento hiperbólico, y el problema de control óptimo con el descuento exponencial presentado en la sección 3.1, con las modificaciones necesarias para trabajar en un horizonte finito. El problema de control óptimo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} \int_0^{t_1} e^{-rt} \left(\frac{1}{2k} W^2(t) - \frac{g}{k} W(t) - (C_0 + C_1 H(t)) W(t) - \beta [-(\alpha - 1)W(t) - R] \right) dt \\ \text{sueto a: } \dot{H}(t) = \frac{R + (\alpha - 1)W(t)}{AS}, \\ \text{con: } H(0) = H_0 \\ H(t_1) = H_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

El desarrollo para obtener las soluciones numéricas de este problema de control óptimo es análogo al caso del descuento hiperbólico.

Por último queda comprobar que se cumplen las condiciones que garantizan que las condiciones necesarias son también suficientes.

El hamiltoniano del problema es:

$$\mathcal{H}(H(t), W(t), \lambda(t), t) = D(t) \cdot \left[\frac{1}{2k} W^2(t) - \frac{g}{k} W(t) - (C_0 + C_1 H(t)) W(t) - \beta [-(\alpha - 1)W(t) - R] \right] + \lambda(t) \left(\frac{R + (\alpha - 1)W(t)}{AS} \right)$$

- Cóncavo en el control (en $W(t)$):

Calculamos la primera derivada,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial W} = D(t) \cdot \left(\frac{1}{k} W(t) - \frac{g}{k} - (C_0 + C_1 H(t)) - \beta(-(\alpha - 1)) \right) + \lambda(t) \left(\frac{(\alpha - 1)}{AS} \right),$$

y la derivada segunda,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial W^2} = D(t) \cdot \left(\frac{1}{k} \right),$$

como $k < 0$ y $D(t) > 0$ para todo t en el intervalo de estudio, se tiene que $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial W^2} < 0$. Por lo tanto, $\mathcal{H}(H(t), W(t), \lambda(t), t)$ es cóncavo en $W(t)$.

- Cóncavo en el estado (en $H(t)$):

La comprobación de que el hamiltoniano $\mathcal{H}(H(t), W(t), \lambda(t), t)$ es cóncavo en $H(t)$ es directa, ya que es lineal en $H(t)$.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos del análisis del modelo matemático de gestión del acuífero bajo el factor de descuento exponencial y su contraposición con el modelo hiperbólico. El objetivo es evaluar cómo estas variables afectan a las estrategias óptimas de extracción de agua y a la sostenibilidad a largo plazo de los recursos hídricos.

Los resultados se derivan de las simulaciones realizadas utilizando los modelos descritos en el capítulo anterior. En cada escenario analizado se han considerado diferentes configuraciones y condiciones iniciales para reflejar diversas perspectivas temporales y económicas en la gestión del acuífero. Así podremos evaluar cómo las variaciones en los parámetros afectan en los resultados.

Se han realizado dos consideraciones para las condiciones iniciales, en primer lugar suponemos que queremos que el nivel del acuífero se mantenga después del periodo de estudio a como se encuentra en la actualidad. En el segundo caso vamos a suponer que la altura de la tabla llega a 600 metros de altura, cifra que sería resultado de una explotación más intensa de los recursos del acuífero. Es decir, analizamos los dos escenarios siguientes:

1. **Sostenibilidad:** Se pretende alcanzar al final del periodo de estudio una situación similar a la actual, en la cual las generaciones futuras dispongan de los mismos recursos.
2. **Explotación:** Se pretende que el nivel de la tabla de agua del acuífero disminuya alrededor de un 10 % en el periodo de estudio.

Ambos casos van a ser estudiados tanto con el factor de descuento exponencial, como con el factor de descuento hiperbólico. Estos dos casos representan diferentes políticas que pueden ser llevadas a cabo con el fin de preservar los recursos hídricos en la explotación de un acuífero, los diferentes escenarios pueden ayudar en la toma de decisiones apropiadas para conseguir el objetivo.

4.1. Solución numérica

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos, es decir, obtenemos los principales indicadores económicos asociados a la gestión del recurso hídrico, incluyendo los costes privados, los ingresos privados, los beneficios privados, las extracciones y el bienestar social. Estos resultados permiten evaluar el impacto económico de las diferentes estrategias de explotación

del acuífero, proporcionando una base cuantitativa para orientar la toma de decisiones en términos de sostenibilidad y eficiencia económica.

- Los ingresos privados los calculamos de la forma:

$$\int_0^{t_1} D(t) \cdot \left(\frac{1}{2k} W^2(t) - \frac{g}{k} W(t) \right) dt .$$

- El coste privado a partir de:

$$\int_0^{t_1} D(t) \cdot (C_0 + C_1 H(t)) W(t) dt .$$

- El coste social:

$$\int_0^{t_1} D(t) \cdot \beta [-(\alpha - 1)W(t) - R] dt .$$

- El bienestar total de cada situación:

$$\int_0^{t_1} D(t) \cdot \left(\frac{1}{2k} W^2(t) - \frac{g}{k} W(t) - (C_0 + C_1 H(t)) W(t) - \beta [-(\alpha - 1)W(t) - R] \right) dt .$$

- El número total de extracciones:

$$\int_0^{t_1} D(t) \cdot W(t) dt .$$

Para una mejor comparación de los resultados posteriores exponemos en la siguiente tabla las extracciones y el bienestar correspondientes al problema de control óptimo planteado en la sección 3.1.1.

	25	50	200
Bienestar (€)(·10 ⁹)	3.295	4.652	5.599
Extracciones (hm ³)	9336.58	18 611.04	73 173.89

Cuadro 4.1: Resultados sección 3.1.1.

En los siguientes epígrafes se presentan los resultados numéricos de simulaciones con horizontes temporales de 25, 50 y 200 años, bajo dos escenarios: sostenibilidad y explotación económica. Se analizan los efectos de los factores de descuento exponencial e hiperbólico en la gestión del acuífero, cuyos resultados se detallan en tablas y gráficas, ver figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y cuadros 4.1, 4.2, 4.3, 4.4. En las tablas y figuras se denota por “Exp.” a los resultados obtenidos con el modelo exponencial (3.4) y por “Hip.” a los resultados del modelo hiperbólico (3.3).

El estudio evalúa el impacto de la elección del factor de descuento en las políticas de gestión hídrica mediante un enfoque de control óptimo. Como ya ha sido comentado, estos indicadores se han calculado numéricamente en Python, imponiendo condiciones iniciales y finales según el escenario analizado, y aportando datos intermedios de los años acumulados.

Esta modelización proporciona un marco teórico para comprender la dinámica de extracción de agua y comparar distintas estrategias de gestión, equilibrando beneficios a corto plazo y sostenibilidad a largo plazo. A continuación, se exponen las tablas con los resultados de las diferentes estimaciones que hemos realizado, donde encontramos una tabla por cada simulación.

4.1.1. Simulación corto plazo: 25 años

Escenario de sostenibilidad: el objetivo es mantener los recursos hídricos en un nivel similar al de partida, asegurando un uso adecuado para generaciones futuras.

$h_f = 660m$		5	10	15	20	25
Ingreso priv. ($\cdot 10^9$) (€)	Exp.	0.852	1.756	2.510	3.137	3.656
	Hip.	0.771	1.478	2.037	2.506	2.913
Coste priv. ($\cdot 10^9$) (€)	Exp.	0.117	0.240	0.342	0.426	0.494
	Hip.	0.1072	0.204	0.279	0.341	0.395
Coste social ($\cdot 10^6$) (€)	Exp.	1.961	3.290	3.557	2.927	1.536
	Hip.	2.722	3.757	3.622	2.904	1.876
Bienestar ($\cdot 10^9$) (€)	Exp.	0.733	1.513	2.164	2.708	3.161
	Hip.	0.661	1.271	1.754	2.161	2.517
Extracciones (hm^3)	Exp.	1402.35	3131.09	4828.05	6486.93	8100.00
	Hip.	1429.76	3157.53	4837.59	6482.23	8100.00

Cuadro 4.2: Resultados de escenario sostenible en 25 años.

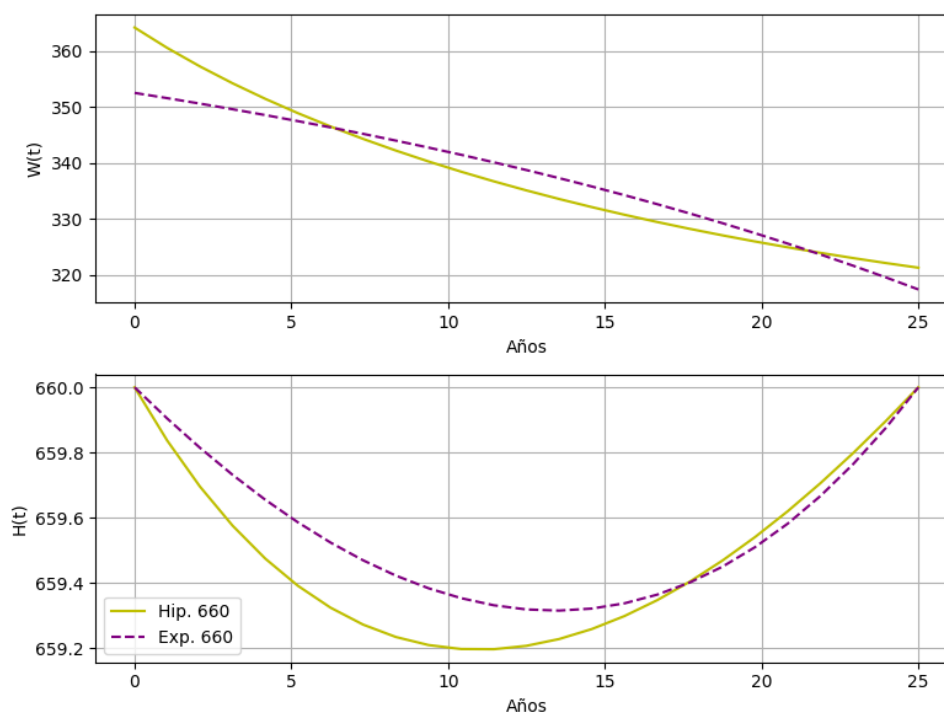


Figura 4.1: Comparación de ambos modelos en el corto plazo, escenario sostenible.

Por la forma en la que se ha definido el problema, la gestión con los diferentes descuentos, alcanzan el mismo nivel de extracciones finales acumuladas (8100 hm^3). El modelo exponencial supera al hiperbólico en ingresos acumulados (3.656 frente a 2.913 miles de millones), lo que refleja una mayor eficiencia del exponencial, aunque vemos cómo los gastos privados son más altos en el exponencial. Por otro lado, el modelo exponencial refleja un mayor bienestar social, algo que concuerda con la idea de que el descuento hiperbólico da más peso al futuro y, por lo tanto, en un periodo de 25 años no mejora al modelo exponencial.

Escenario de explotación: se prioriza maximizar el bienestar mediante la explotación más intensa de los recursos del acuífero.

$h_f = 600m$		5	10	15	20	25
Ingreso priv. ($\cdot 10^9$)	Exp.	0.827	1.652	2.259	2.655	2.840
(€)	Hip.	0.766	1.409	1.841	2.122	2.280
Coste priv. ($\cdot 10^9$)	Exp.	0.209	0.471	0.737	1.014	1.304
(€)	Hip.	0.179	0.382	0.584	0.795	1.021
Coste social ($\cdot 10^6$)	Exp.	39.642	88.482	136.82	184.93	233.02
(€)	Hip.	32.200	70.483	107.92	145.07	182.17
Bienestar ($\cdot 10^9$)	Exp.	0.578	1.092	1.385	1.457	1.303
(€)	Hip.	0.555	0.956	1.149	1.182	1.077
Extracciones	Exp.	2413.59	5635.67	9132.68	12 965.44	17 208.00
(hm^3)	Hip.	2317.17	5547.40	9117.99	13 009.21	17 208.00

Cuadro 4.3: Resultados de escenario en explotación en 25 años.

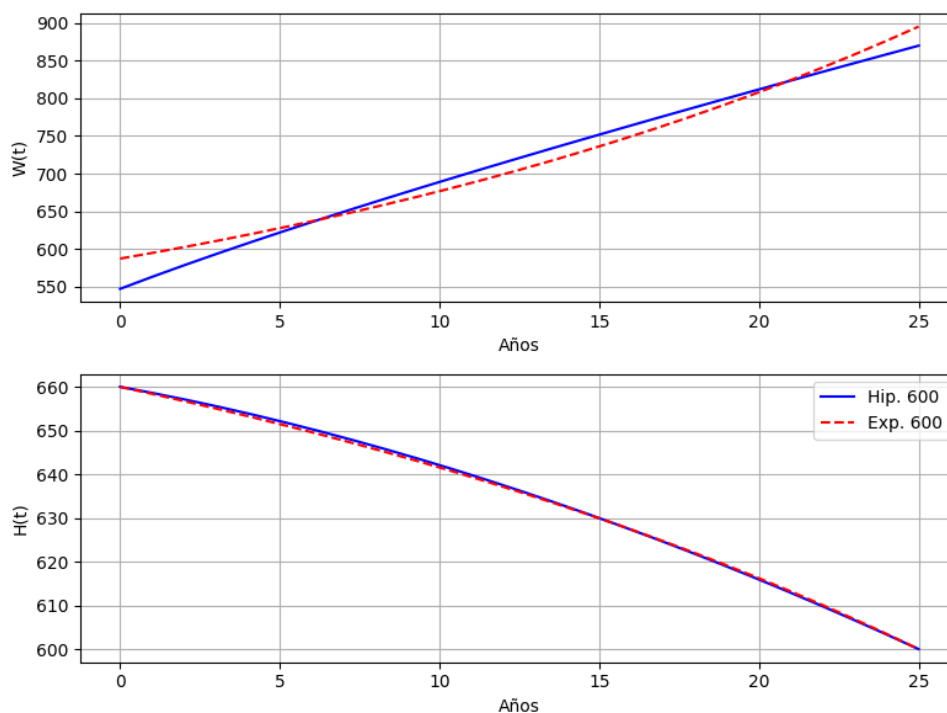


Figura 4.2: Comparación de ambos modelos en el corto plazo, escenario de explotación.

En este escenario de explotación la principal diferencia que encontramos entre ambos modelos es que el coste social es mayor en el exponencial, 233 frente a 182 millones de euros del modelo hiperbólico.

Si comparamos ambos escenarios encontramos que la gran discrepancia es que las extracciones son más del doble (8100 frente a 17 208 hm^3), algo que repercute en un menor bienestar y mayor coste social. Se tiene como consecuencia también, a pesar del incremento en los costes, en una bajada de los ingresos y beneficios privados, algo que podría indicar la no rentabilidad de agotar el acuífero tanto en tan solo 25 años, ya que provocaría una bajada en la demanda que al final tendría como consecuencia menores beneficios.

4.1.2. Simulación medio plazo: 50 años

Escenario de sostenibilidad:

$h_f = 660m$		10	20	30	40	50
Ingreso priv. ($\cdot 10^9$)	Exp.	1.779	3.188	4.169	4.847	5.310
	Hip.	1.487	2.527	3.310	3.953	4.508
Coste priv. ($\cdot 10^9$)	Exp.	0.249	0.447	0.584	0.676	0.735
	Hip.	0.207	0.350	0.455	0.541	0.614
Coste social ($\cdot 10^6$)	Exp.	6.937	10.76	11.69	10.57	7.99
	Hip.	5.202	5.991	5.414	4.489	3.597
Bienestar ($\cdot 10^9$)	Exp.	1.523	2.730	3.574	4.161	4.567
	Hip.	1.275	2.171	2.849	3.408	3.890
Extracciones	Exp.	3238.34	6766.06	10 190.91	13 469.43	16 537.50
	Hip.	3209.37	6624.06	9956.91	13 251.75	16 537.50

Cuadro 4.4: Resultados de escenario sostenible en 50 años.

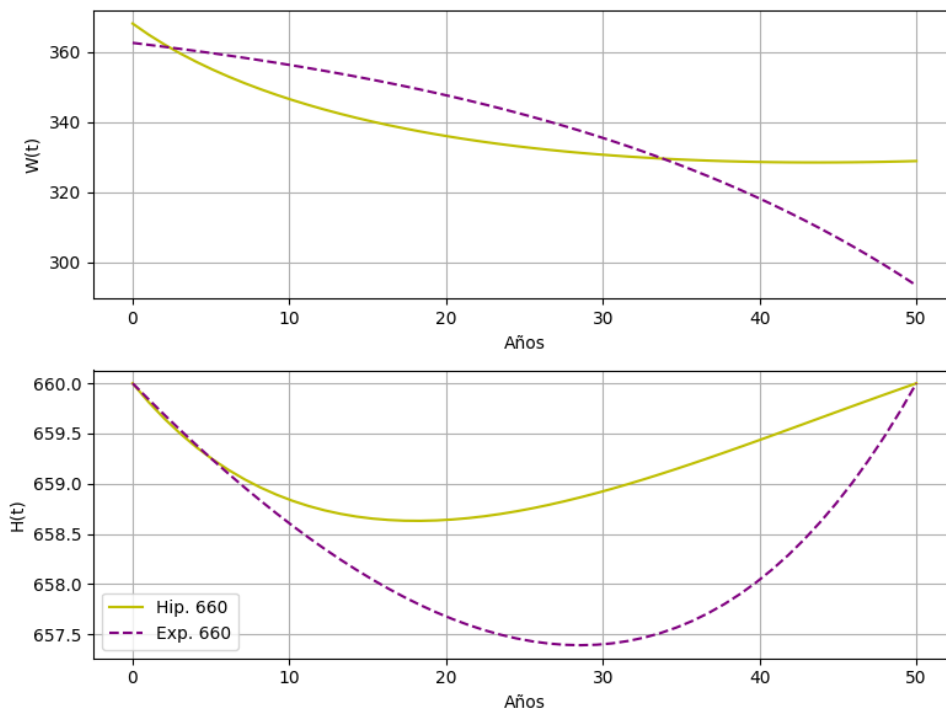


Figura 4.3: Comparación de ambos modelos en el medio plazo, escenario sostenible.

Podemos ver cómo en este caso las extracciones del modelo hiperbólico se distribuyen de manera más constante, por lo que el nivel del acuífero no disminuye tanto como lo hace en el modelo exponencial. Al igual que ocurría en el corto plazo los ingresos y costes son mejores en el caso exponencial (5.310 frente a 4.508 miles de millones de euros), también el bienestar es mayor lo que nos indica que incluso en un periodo de 50 años el modelo exponencial sería "mejor" que el modelo hiperbólico en términos de bienestar social. Algo que sí que parecen señalar los resultados es que el caso hiperbólico tiene un menor coste social, casi ocho millones en el caso exponencial frente a unos tres millones y medio.

Escenario de explotación:

$h_f = 600m$		10	20	30	40	50
Ingreso priv. ($\cdot 10^9$)	Exp.	1.869	3.364	4.409	5.118	5.556
	Hip.	1.569	2.684	3.521	4.193	4.746
Coste priv. ($\cdot 10^9$)	Exp.	0.311	0.596	0.836	1.049	1.249
	Hip.	0.267	0.493	0.700	0.909	1.128
Coste social ($\cdot 10^6$)	Exp.	31.14	62.27	91.11	118.68	145.66
	Hip.	28.67	55.88	82.06	108.23	134.76
Bienestar ($\cdot 10^9$)	Exp.	1.526	2.706	3.482	3.950	4.161
	Hip.	1.273	2.135	2.739	3.176	3.484
Extracciones	Exp.	3949.78	8597.93	13 649.04	19 298.85	25 835.24
	Hip.	4049.76	8913.38	14 162.64	19 801.67	25 835.25

Cuadro 4.5: Resultados de escenario en explotación en 50 años.

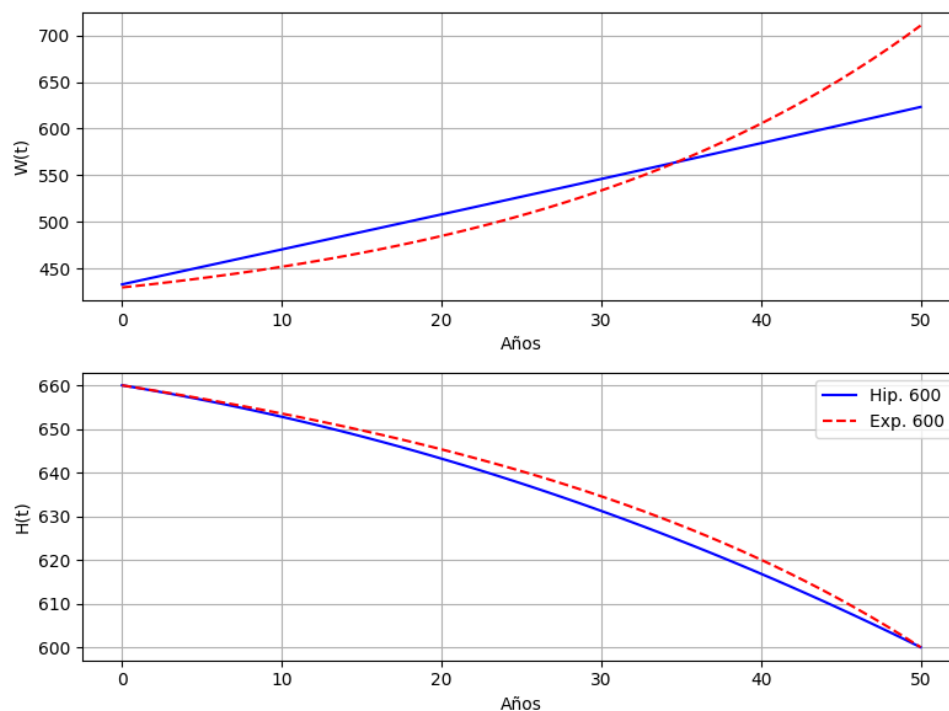


Figura 4.4: Comparación de ambos modelos en el medio plazo, escenario de explotación.

En esta simulación los ingresos privados y el bienestar son mejores para el caso exponencial, aunque en el apartado de los costes sociales el menor valor corresponde al caso hiperbólico (146 millones frente a 135), algo que ocurre en casi todos los escenarios. Algo destacable es que en este medio plazo sí que vemos es que los ingresos privados, en el escenario de explotación, son más altos que en el escenario sostenible, algo lógico debido a una mayor capacidad de explotación del acuífero y que no ocurría en el corto plazo.

Observar también que, como ocurría en el corto plazo, el bienestar es menor en el caso de un uso intensivo de los recursos. Aunque por otro lado las extracciones entre ambos escenarios, aunque tienen grandes diferencias, no llegan a ser el doble.

4.1.3. Simulación largo plazo: 200 años

Escenario de sostenibilidad:

$h_f = 660m$		40	80	120	160	200
Ingreso priv. ($\cdot 10^9$)	Exp.	4.964	6.242	6.555	6.630	6.647
	(€)	Hip.	3.906	5.755	7.110	8.238
Coste priv. ($\cdot 10^9$)	Exp.	0.736	0.943	0.997	1.010	1.012
	(€)	Hip.	0.522	0.743	0.895	1.025
Coste social ($\cdot 10^6$)	Exp.	30.18	36.98	38.28	38.34	38.11
	(€)	Hip.	-1.922	-11.03	-15.09	-13.50
Bienestar ($\cdot 10^9$)	Exp.	4.198	5.262	5.520	5.582	5.596
	(€)	Hip.	3.387	5.023	6.230	7.227
Extracciones	Exp.	14 527.06	29 239.40	43 650.53	57 186.50	67162.48
	(hm^3)	Hip.	12 846.51	25 281.51	38 140.60	51 977.90

Cuadro 4.6: Resultados de escenario sostenible en 200 años.

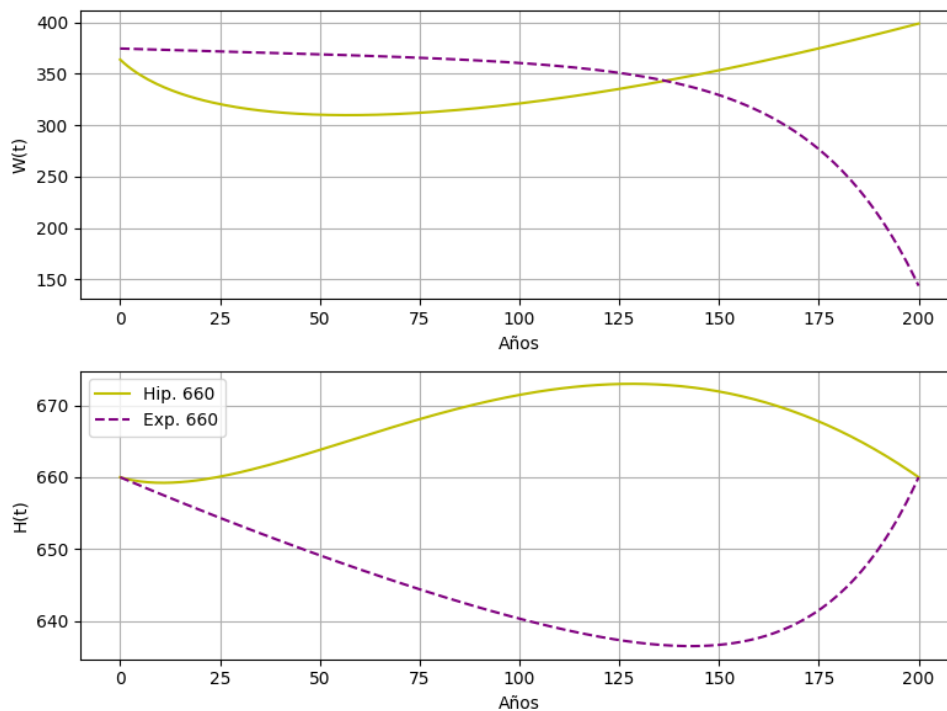


Figura 4.5: Comparación de ambos modelos en el largo plazo, escenario sostenible.

En este largo plazo es donde se ven las grandes diferencias de ambos descuentos. Por la forma de la gráfica se concluye que el exponencial agota el recurso más rápidamente y con el descuento hiperbólico, aunque reduce las extracciones iniciales, equilibra mejor el uso del recurso a largo plazo. El modelo hiperbólico prefiere extraer al final del periodo, provocando un aumento de la tabla de agua del acuífero, mientras que el exponencial al final casi no extrae nada, cayendo las extracciones hasta los 150 hm^3 . Vemos también que el ingreso del modelo hiperbólico supera al modelo exponencial, y que el bienestar social es mucho mayor en el caso hiperbólico (9.231 miles de millones frente a 6.647 miles de millones). Incluso podemos notar que el coste social en el caso hiperbólico arroja valores negativos, si bien no tienen un sentido lógico estas cifras, nos podría indicar que las repercusiones ambientales serían mínimas.

Escenario de explotación:

$h_f = 600m$		40	80	120	160	200
Ingreso priv. ($\cdot 10^9$)	Exp.	4.966	6.245	6.561	6.639	6.659
(€)	Hip.	3.981	5.916	7.350	8.539	9.567
Coste priv. ($\cdot 10^9$)	Exp.	0.737	0.945	1.001	1.016	1.021
(€)	Hip.	0.553	0.824	1.044	1.269	1.533
Coste social ($\cdot 10^6$)	Exp.	30.50	37.65	39.35	39.87	40.15
(€)	Hip.	8.519	10.62	18.32	32.22	52.17
Bienestar ($\cdot 10^9$)	Exp.	4.198	5.263	5.520	5.583	5.598
(€)	Hip.	3.419	5.082	6.288	7.238	7.981
Extracciones	Exp.	14 544.14	29 333.68	44 096.82	59 244.19	76 602.54
(hm^3)	Hip.	13 505.34	27 272.62	42 048.05	58 367.81	76 602.54

Cuadro 4.7: Resultados de escenario en explotación en 200 años.

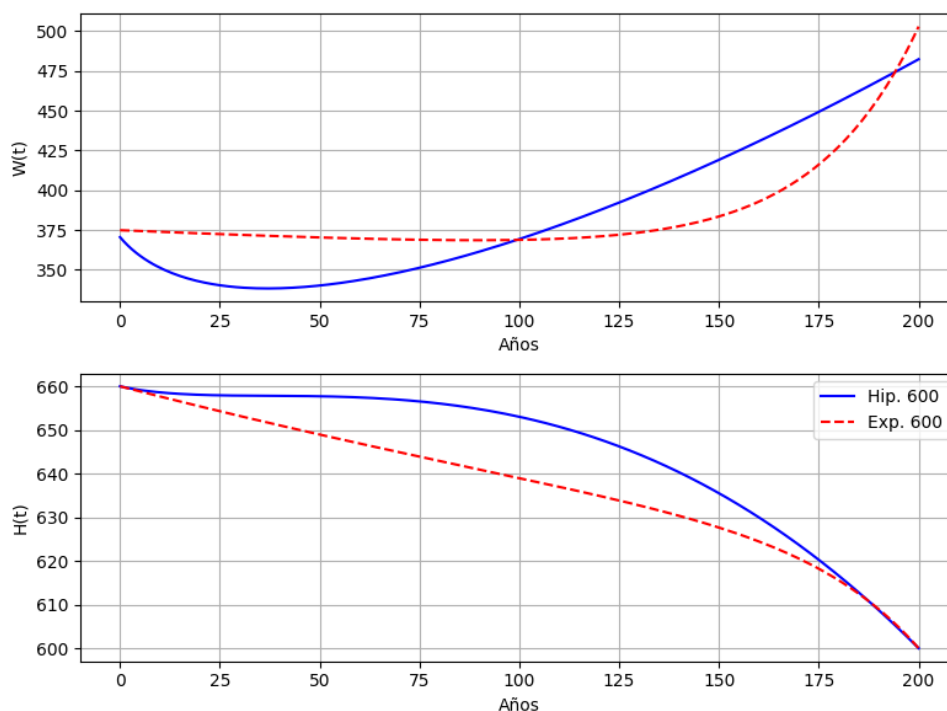


Figura 4.6: Comparación de ambos modelos en el largo plazo, escenario de explotación.

El bienestar del modelo hiperbólico es mucho mayor en este escenario también que el del exponencial. En este caso, aunque podría parecer antiintuitivo el coste social es mayor para el modelo hiperbólico que en el exponencial (40 millones frente a 52 millones de euros). En este escenario se comprueba una vez más que el modelo exponencial valora más el presente y consume antes que el hiperbólico al principio, aunque al final del periodo lo vuelve a superar.

Comparando este escenario con el sostenible podemos ver cómo las extracciones son superiores pero no existe tanta diferencia entre ambos casos como ocurría en el corto y medio plazo. Además el bienestar social es mayor en los modelos sostenibles independientemente del modelo de descuento empleado.

Capítulo 5

Discusión y conclusiones

5.1. Discusión

Los resultados obtenidos en este trabajo destacan el impacto del factor de descuento en las estrategias de gestión de acuíferos. Las simulaciones realizadas muestran que el uso del descuento hiperbólico no solo conserva mejor los recursos hídricos, sino que también ofrece beneficios económicos y sociales más sostenibles en el tiempo. En contraste, el descuento exponencial tiende a priorizar el corto plazo, generando ganancias inmediatas pero comprometiendo el recurso en horizontes más largos.

La aplicación del descuento hiperbólico también demuestra ser más sensible a las externalidades intergeneracionales, equilibrando las necesidades de las generaciones presentes y futuras. Este enfoque permite una mayor estabilidad del nivel del acuífero y reduce el riesgo de daños ambientales irreversibles, como la desertificación o la pérdida de biodiversidad. Sin embargo, también plantea retos en términos de implementación debido a la complejidad en la estimación de los parámetros clave, como el valor de v y p .

Estos hallazgos resaltan la importancia de integrar criterios económicos y ambientales en la toma de decisiones políticas. Una gestión sostenible no solo garantiza la disponibilidad de agua a largo plazo, sino que también promueve un bienestar social equilibrado y reduce los costes asociados a la restauración de ecosistemas degradados. Además, se destaca la relevancia de desarrollar marcos regulatorios que incentiven el uso de modelos que consideren factores de descuento más realistas, como el hiperbólico.

5.2. Conclusiones

Este trabajo proporciona una base cuantitativa y metodológica para la gestión sostenible de acuíferos, destacando cómo la elección del factor de descuento afecta de manera decisiva las decisiones óptimas de extracción. Los principales hallazgos incluyen:

- El modelo de descuento hiperbólico demuestra ser más eficiente y sostenible a largo plazo en ambos escenarios, especialmente en sostenibilidad. Aunque el descuento exponencial puede parecer más ventajoso en horizontes cortos, su impacto negativo en costes sociales y bienestar lo hace menos recomendable para políticas intergeneracionales.
- El descuento exponencial, aunque más simple de implementar, tiende a priorizar el corto plazo, llevando a una sobreexplotación y al deterioro del recurso.

- Las políticas basadas en modelos hiperbólicos pueden generar un mayor bienestar social y económico a largo plazo, siempre que se adapten adecuadamente a las condiciones locales.

Estos resultados enfatizan la necesidad de desarrollar estrategias de gestión que combinen sostenibilidad ambiental con criterios económicos robustos. La aplicación de modelos más complejos, como los basados en el descuento hiperbólico, puede ofrecer soluciones más equilibradas para abordar los desafíos crecientes asociados al cambio climático y al aumento de la demanda de agua.

Además, si comparamos entre los diferentes escenarios de sostenibilidad y explotación de los recursos podemos concluir que en el corto plazo la explotación económica genera mayores ingresos y extracciones, pero a costa de un incremento significativo en los costes sociales, además la sostenibilidad favorece un balance más equitativo, aunque los ingresos privados y extracciones son menores.

Si analizamos el medio plazo encontramos que sostenibilidad se posiciona como un modelo intermedio, equilibrando ingresos y bienestar con menores costes sociales. La explotación económica sigue siendo más rentable a nivel privado, pero incrementa notablemente las externalidades negativas.

Por último, en el periodo de 200 años, concluimos que la sostenibilidad asegura menores costes sociales y mayores niveles de bienestar acumulado, alineándose mejor con objetivos intergeneracionales. Por su parte, el escenario de explotación económica maximiza ingresos privados y extracciones, pero con impactos sociales desproporcionados.

Si comparamos nuestros resultados con el problema de control óptimo presentado en la sección 3.1.1, véase cuadro 4.1, se puede concluir que el escenario sostenible reduce las extracciones en todos los

5.3. Limitaciones

A pesar de los resultados prometedores, el modelo presentado tiene varias limitaciones que deben considerarse:

- Dependencia del valor de v y p : La elección del parámetro en el descuento hiperbólico, aunque adecuada para las simulaciones realizadas, podría no ser representativa de todos los contextos. Valores distintos de v y p podrían generar trayectorias de extracción significativamente diferentes, lo que afecta la aplicabilidad universal del modelo.
- Horizontes temporales finitos: El modelo no explora cómo los resultados variarían en horizontes temporales más largos o si se introdujeran incertidumbres en los parámetros, como cambios en la tasa de recarga del acuífero debido al cambio climático.
- Costes externos: Aunque se consideran costes ambientales, el modelo no incluye una evaluación completa de externalidades indirectas, como el impacto en la economía local o la salud de los ecosistemas asociados.

- **Aplicabilidad geográfica:** Los resultados están basados en un caso específico. La extrapolación a otros acuíferos o regiones debe hacerse con precaución, considerando las diferencias en factores como la demanda hídrica, la estructura económica y las condiciones climáticas.

5.4. Investigación futura

Para avanzar en la aplicación de modelos de gestión sostenible de acuíferos, se proponen las siguientes líneas de investigación:

- **Estimación empírica de v y p :** Realizar estudios para validar empíricamente los valores utilizados en el modelo, tomando como referencia trabajos como los de [Lazaro et al. \(2002\)](#), que analizan bienes sociales y privados con características similares a los recursos hídricos.
- **Integración de incertidumbre:** Incorporar modelos estocásticos que consideren incertidumbres en las tasas de recarga, costes ambientales y demandas futuras de agua.
- **Expansión geográfica:** Adaptar y validar el modelo en diferentes regiones con condiciones hídricas y económicas diversas para evaluar su aplicabilidad general.
- **Factores socioeconómicos:** Integrar variables como el crecimiento poblacional, el desarrollo tecnológico y las políticas de subsidios para evaluar su impacto en las decisiones de extracción.
- **Comparación entre modelos:** Desarrollar simulaciones comparativas entre el descuento hiperbólico y otros enfoques alternativos, como el intergeneracional, para identificar fortalezas y debilidades relativas.

En definitiva, profundizar en estas líneas de investigación podría no solo mejorar la comprensión de los factores que influyen en la gestión sostenible de los acuíferos, sino también contribuir al desarrollo de herramientas más efectivas para enfrentar los desafíos hídricos del futuro.

Bibliografía

- Agencia del Agua de Castilla-La Mancha (2024). Situación del agua en castilla-la mancha. Disponible en: <https://agenciadelagua.castillalamancha.es/>.
- Albiac, J., Calvo, E., Kahil, T., and Esteban, E. (2020). The challenge of irrigation water pricing in the water framework directive. *Water Alternatives*, 13(3):674–690.
- Amanambu, A. C., Obarein, O. A., Mossa, J., Li, L., Ayeni, S. S., Balogun, O., and Ochege, F. U. (2020). Groundwater system and climate change: Present status and future considerations. *Journal of Hydrology*, 589:125–163.
- Anchugina, N., Ryan, M., and Slinko, A. (2017). Hyperbolic discounting of the far-distant future. *Economics Letters*, 155:140–143.
- AQUASTAT (2016). *Water withdrawals by sector, around 2010*. Food and Agriculture Organization.
- Arrow, K. J., Cropper, M. L., Gollier, C., Groom, B., Heal, G. M., Newell, R. G., Nordhaus, W. D., Pindyck, R. S., Pizer, W. A., Portney, P. R., Sterner, T., Tol, R. S. J., and Weitzman, M. L. (2014). Should governments use a declining discount rate in project analysis? *Review of Environmental Economics and Policy*, 8(2):145–163.
- Cassiraga, E., Sanz, D., Castaño, S., Álvarez, O., and Sahuquillo, A. (2013). Modelo de flujo subterráneo de los acuíferos de la mancha oriental y sus relaciones con el río júcar. Technical report, Universidad Politécnica de Valencia, Universidad de Castilla-La Mancha. Informe realizado para la empresa TRAGSATEC.
- Cassiraga, E., Sanz, D., Gómez-Alday, J. J., and Gómez-Hernández, J. J. (2019). Groundwater management in spain: The case of the eastern mancha aquifer system. *Hydrolink*, 3:81–83.
- Cerdá, E. (2003). *Optimización dinámica*. Prentice Hall, Madrid, España, 1 edition.
- Chichilnisky, G. (1996). An axiomatic approach to sustainable development. *Social Choice and Welfare*, 13(2):231–257.
- Chung, S.-H. and Herrnstein, R. J. (1967). Choice and delay of reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 10(1):67–74.
- Dinar, A., Esteban, E., Calvo, E., Herrera, G., Teatini, P., Tomás, R., Albiac, J., et al. (2021). We lose ground: Global assessment of land subsidence impact extent. *Science of the Total Environment*, 786:147415.
- Esteban, E. and Albiac, J. (2011). Groundwater and ecosystems damages: Questioning the gisser–sánchez effect. *Ecological Economics*, 70:2062–2069.

- Esteban, E. and Albiac, J. (2012). The problem of sustainable groundwater management: the case of la mancha aquifers, spain. *Hydrogeology Journal*, 20:851–863.
- Esteban, E., Calvo, E., and Albiac, J. (2021). Ecosystem shifts: Implications for groundwater management. *Environmental and Resource Economics*, 79(3):483–510.
- Esteban, E., Dinar, A., Calvo, E., Albiac, J., Calatrava, J., Herrera, G., Li, Y., et al. (2024). Modeling the optimal management of land subsidence due to aquifers overexploitation. *Journal of Environmental Management*, 349:119333.
- Foley, J. A., DeFries, R., Asner, G. P., Barford, C., Bonan, G., Carpenter, S. R., Chapin, F. S., Coe, M. T., Daily, G. C., Gibbs, H. K., Helkowski, J. H., Holloway, T., Howard, E. A., Kucharik, C. J., Monfreda, C., Patz, J. A., Prentice, I. C., Ramankutty, N., and Snyder, P. K. (2011). Solutions for a cultivated planet. *Nature*, 478(7369):337–342.
- Gisser, M. and Mercado, A. (1973). Economic aspects of ground water resources and replacement flows in semiarid agricultural areas. *American Journal of Agricultural Economics*, 55:461–466.
- Gisser, M. and Sanchez, D. A. (1980). Competition versus optimal control in groundwater pumping. *Water Resources Research*, 16(4):638–642.
- Gleick, P. H. (2014). Water, drought, climate change, and conflict in syria. *Weather, Climate, and Society*, 6(3):331–340.
- Gollier, C. (2008). Ecological discounting. Technical report, Toulouse School of Economics (LERNA and EIF).
- Green, L., Fry, A. F., and Myerson, J. (1994). Discounting of delayed rewards: A life-span comparison. *Psychological Science*, 5(1):33–36.
- Green, L. and Myerson, J. (1996). Exponential versus hyperbolic discounting of delayed outcomes: Risk and waiting time. *American Zoologist*, 36(4):496–505.
- Harris, C. J., Laibson, D., Dewatripont, M., Hansen, L. P., and Turnovsky, S. (2002). Hyperbolic discounting and consumption. *Eighth World Congress. Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Volume 1*, pages 258–298.
- Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) (2021). *Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the IPCC*. IPCC, Geneva, Switzerland.
- International Groundwater Resources Assessment Centre (IGRAC) (2010). Global groundwater information system (ggis): International groundwater resources assessment centre - 2010.
- Kahil, M. T., Albiac, J., Dinar, A., Calvo, E., Esteban, E., Avella, L., and Garcia-Molla, M. (2016). Improving the performance of water policies: Evidence from drought in spain. *Water*, 8(2):34.
- La Tribuna de Albacete (2019). El acuífero mancha oriental es un caso «único» de recuperación. page 23. 1 de noviembre de 2019. En prensa impresa.
- Laibson, D. (1997). Golden eggs and hyperbolic discounting. *Quarterly Journal of Economics*, 112(2):443–477.

- Larson, R. B. (2020). *Just Add Water: Solving the World's Problems Using Its Most Precious Resource*. Oxford University Press, USA.
- Lazaro, A., Barberan, R., and Rubio, E. (2002). The discounted utility model and social preferences: Some alternative formulations to conventional discounting. *Journal of Economic Psychology*, 23(3):317–337.
- Loewenstein, G. and Prelec, D. (1992). Anomalies in intertemporal choice: Evidence and an interpretation. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2):573–597.
- Macedo, M. D. (2021). Preferencia temporal: El enfoque de la escuela austriaca y un debate sobre el descuento hiperbólico. *Procesos de Mercado: Revista Europea de Economía Política*, 18(2):69–106.
- Martínez Valderrama, J., Ibáñez, J., Alcalá, F. J., Dominguez, A., Yassin, M., and Puigdefábregas, J. (2011). The use of a hydrological-economic model to assess sustainability in groundwater-dependent agriculture in drylands. *Journal of Hydrology*, 402:80–91.
- Mazur, J. E. (1987). An adjusting procedure for studying delayed reinforcement. In Commons, M. L., Mazur, J. E., Nevin, J. A., and Rachlin, H., editors, *Quantitative Analysis of Behavior*, volume 5, pages 55–73. Erlbaum.
- Nasim, S., Helfand, S., and Dinar, A. (2020). Groundwater management under heterogeneous land tenure arrangements. *Resource and Energy Economics*, 62:101203.
- Philibert, C. (2003). Discounting the future.
- Ramsey, F. P. (1928). A mathematical theory of saving. *The Economic Journal*, 38(152):543–559.
- Samuelson, P. A. (1937). A note on measurement of utility. *The Review of Economic Studies*, 4(2):155–161.
- Schoenmaker, D. and Schramade, W. (2024). Which discount rate for sustainability? *Journal of Sustainable Finance and Accounting*, 3:100010.
- Selby, J., Daoust, G., and Hoffmann, C. (2022). *Entornos divididos: una ecología política internacional del cambio climático, el agua y la seguridad*. Cambridge University Press.
- Thaler, R. (1981). Some empirical evidence on dynamic inconsistency. *Economics Letters*, 8(3):201–207.
- United Nations Environment Programme (UNEP) (2019). *Global Resources Outlook 2019: Natural Resources for the Future We Want*. United Nations Environment Programme, Nairobi, Kenya.
- Vladimirova, M. and Rozmainsky, I. (2019). Hyperbolic discounting and its consequences: Empirical analysis on the base of surveys. *Ekonomicheskii vestnik Donbassa*, 4(58):5–19.
- Wada, Y., van Beek, L. P. H., van Kempen, C. M., de Jong, S. M., Ibáñez, M., Motta, P., Bindraban, P. S., Krol, M. S., and Bierkens, M. F. P. (2010). Global depletion of groundwater resources. *Geophysical Research Letters*, 37(20):L20402.

World Water Assessment Programme (WWAP) (2006). *Water: A Shared Responsibility. The United Nations World Water Development Report 2*. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO), Paris, France.

World Water Council (WWC) (2000). *World Water Vision*. Earthscan.

Anexos

.1. Código Python

En primer lugar, en el código se muestran las librerías que se emplean en su ejecución:

```
1 import numpy as np
2 from sympy import *
3 from scipy.integrate import solve_bvp, simpson
4 import matplotlib.pyplot as plt
```

Listing 1: Librerías del código

Seguidamente se definen las constantes y funciones que dependen de t :

```
5 # Variables
6 t = symbols('t')
7
8 # Constantes
9 r, v, k, g, c_0, c_1, sa, R, a, h_0, b, p = symbols(
10     'r v k g c_0 c_1 sa R a h_0 b p')
11
12 # Funciones
13 h = symbols('h', cls=Function)(t) # variable de estado
14 w = symbols('w', cls=Function)(t) # variable de control
15 lmda = symbols('lmda', cls=Function)(t) # variable de coestado
16
17 parametros =
18 {
19     r: Rational(35, 10**3),
20     v: Rational(1655, 10**4),
21     p: Rational(6568, 10**4),
22     g: Rational(46515, 10**2),
23     k: -Rational(4454, 10**7),
24     c_0: 815000,
25     c_1: -1100,
26     a: Rational(2,10),
27     sa: Rational(1265,10),
28     R: 270,
29     h_0: 660,
30     b: 50000
31 }
```

Listing 2: Declaración de variables

Introducimos el problema de control óptimo:

```
32 # Funcionales objetivo:
33
34 # fo[0] para  $D(t)=\exp(-r*t)$ 
```

```

35 # fo[1] para D(t)=1/(1+v*t)**(p)
36
37 D = [exp(-r*t), 1/(1+v*t)**(p)]
38 F = w*w/(2*k)-g*w/k-(c_0+c_1*h)*w-b*(-(a-1)*w-R)
39 fo = [D[i]*F for i in range(2)]
40 ec_mov = (R+(a-1)*w)/sa

```

Listing 3: Problema de control óptimo

Obtenemos la expresión de W con las condiciones del principio del máximo.

```

41 for i in range(2):
42 for i in range(2):
43     # Planteamos el hamiltoniano del problema
44     # en i=0 para D(t)=exp(-r*t)
45     # en i=1 para D(t)=1/(1+v*t)**(p)
46     ham = fo[i] + lmda * ec_mov
47
48     # Condiciones necesarias (Principio del max. de Pontryaguin)
49
50     # Condicion 2
51     c2 = Eq(diff(ham, w), 0)
52
53     lmda_ast[i] = solve(c2, lmda)[0] # coestado candidato a optimo
54
55     dlmda = diff(lmda_ast[i], t).subs(diff(h, t), ec_mov)
56
57     # Condicion 1
58     c1 = Eq(diff(ham, h), -dlmda)
59
60     ec1[i] = solve(c1, diff(w, t))[0]
61
62     # Condicion 3
63     c3 = Eq(diff(ham, lmda), diff(h, t))
64
65     ec2[i] = c3.lhs

```

Listing 4: Obtención del sistema de edos

Resolvemos ahora el sistema de ecuaciones diferenciales.

```

66 # Convertir expresiones simbolicas en funciones numericas usando
67     lambdify
68 edo1_f = {i: lambdify((t, w, h), ec1[i].subs(parametros)) for i in range
69     (2)}
70 edo2_f = {i: lambdify((t, w, h), ec2[i].subs(parametros)) for i in range
71     (2)}
72
73 # Sistema de ecuaciones diferenciales para solve_bvp
74 def sistema(t, y, i):
75     w, h = y
76     dw_dt = edo1_f[i](t, w, h)
77     dh_dt = edo2_f[i](t, w, h)
78     return np.vstack([dw_dt, dh_dt])
79
80 # Condiciones de contorno
81 def boundary_conditions(ya, yb, h_f):
82     return np.array([ya[1] - 660, yb[1] - h_f])
83
84 # Resolvemos el sistema de ecuaciones

```

```

82 t_represent = 125
83 t_eval = np.linspace(0, t_represent, t_represent)
84 y0 = np.zeros((2, len(t_eval)))
85
86 # Llamadas a solve_bvp con funciones lambda para pasar los parametros
87 sol = {}
88
89 sol[0] = solve_bvp(lambda t, y: sistema(t, y, 1),
90                   lambda ya, yb: boundary_conditions(ya, yb, 600),
91                   t_eval, y0)
92
93 sol[1] = solve_bvp(lambda t, y: sistema(t, y, 1),
94                   lambda ya, yb: boundary_conditions(ya, yb, 660),
95                   t_eval, y0)
96
97 sol[2] = solve_bvp(lambda t, y: sistema(t, y, 0),
98                   lambda ya, yb: boundary_conditions(ya, yb, 600),
99                   t_eval, y0)
100
101 sol[3] = solve_bvp(lambda t, y: sistema(t, y, 0),
102                   lambda ya, yb: boundary_conditions(ya, yb, 660),
103                   t_eval, y0)

```

Listing 5: Resolucion sistema de edos

Representamos el resultado:

```

105     fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(8, 6))
106
107 # Primer grafico: W(t)
108 axs[0].plot(sol[0].x[:t_represent], sol[0].y[0]
109            [:t_represent], label='Hip. 600', color='b')
110 axs[0].plot(sol[1].x[:t_represent], sol[1].y[0][:t_represent], label='
111 Hip. 660', color='y')
112 axs[0].plot(sol[2].x[:t_represent], sol[2].y[0][:t_represent],
113            label='Exp. 600', color='r', linestyle='--')
114 axs[0].plot(sol[3].x[:t_represent], sol[3].y[0][:t_represent], label='Exp
115 . 660', color='purple', linestyle='--')
116 axs[0].set_xlabel('t')
117 axs[0].set_ylabel('W(t)')
118 axs[0].grid(True)
119
120 # Segundo grafico: H(t)
121 axs[1].plot(sol[0].x[:t_represent], sol[0].y[1]
122            [:t_represent], label='Hip. 600', color='b')
123 axs[1].plot(sol[1].x[:t_represent], sol[1].y[1]
124            [:t_represent], label='Hip. 660', color='y')
125 axs[1].plot(sol[2].x[:t_represent], sol[2].y[1]
126            [:t_represent], label='Exp. 600', color='r', linestyle='--')
127 axs[1].plot(sol[3].x[:t_represent], sol[3].y[1]
128            [:t_represent], label='Exp. 660', color='purple', linestyle='--')
129 axs[1].set_xlabel('t')
130 axs[1].set_ylabel('H(t)')
131 axs[1].legend()
132 axs[1].grid(True)
133
134 plt.tight_layout()
135 plt.show()

```

Listing 6: Graficar la solución

Finalmente se calculan los indicadores de ingresos, costes, bienestar y extracciones.

```

133 #Definimos los indicadores
134 bien = []
135 fo_list = [fo[1], fo[1], fo[0], fo[0]]
136
137
138 #Lista con los factores de descuento
139 fd = [D[1], D[1], D[0], D[0]]
140
141 ingr_priv = []
142 fo_ingr_priv = [fd[i]*((w*w)/(2*k)-((g*w)/k)) for i in range(4)]
143
144 costes_priv = []
145 fo_costes_priv = [fd[i]*((c_0+c_1*h)*w) for i in range(4)]
146
147 costes_social = []
148 fo_costes_social = [fd[i]*(b*(-(a-1)*w-R)) for i in range(4)]
149
150 #Calculamos el indicador para cada valor calculado de la solución
151 for i in range(4):
152     bien.append([fo_list[i].subs(w, sol[i].y[0, j]).subs(h, sol[i].y[1,
153         j]).subs(valores).subs(t, j)
154                 for j in range(t_represent)])
155     ingr_priv.append([fo_ingr_priv[i].subs(valores).subs(w, sol[i].y[0,
156         j]).subs(t, j)
157                     for j in range(t_represent)])
158     costes_priv.append([fo_costes_priv[i].subs(w, sol[i].y[0, j]).subs(h
159         , sol[i].y[1, j]).subs(valores).subs(t, j)
160                       for j in range(t_represent)])
161     costes_social.append([fo_costes_social[i].subs(w, sol[i].y[0, j]).
162         subs(valores).subs(t, j)
163                         for j in range(t_represent)])
164 bien = np.array(bien)
165 ingr_priv = np.array(ingr_priv)
166 costes_priv = np.array(costes_priv)
167 costes_social = np.array(costes_social)
168
169 # Inicializamos las matrices para almacenar los resultados
170 ingr_priv_matriz = np.zeros((4, 6))
171 costes_priv_matriz = np.zeros((4, 6))
172 costes_social_matriz = np.zeros((4, 6))
173 bien_matriz = np.zeros((4, 6))
174 extr_matriz = np.zeros((4, 6))
175
176 for j in range(4):
177     i = 0
178     for x in np.linspace(1, t_represent, 6, dtype=int):
179
180         # Ingresos privados
181         ingr_priv_matriz[j, i] = simpson(ingr_priv[j, :x])
182

```

```
183     # Costes privados
184     costes_priv_matriz[j, i] = simpson(costes_priv[j, :x])
185
186     # Costes sociales
187     costes_social_matriz[j, i] = simpson(costes_social[j, :x])
188
189     # Bienestar
190     bien_matriz[j, i] = simpson(bien[j, :x])
191
192     # Extracciones
193     extr_matriz[j, i] = simpson(sol[j].y[0][:x])
194
195     i = i+1
```