



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

El uso de los números fraccionarios

The use of fractional numbers

Autor/es

Rafael Celorrio Alonso

Director/es

Óscar Carrión Lostal

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Año 2023/2024

A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR.	3
A.1 Nombra el objeto matemático a enseñar.	3
A.2 Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.	3
A.3 ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?	3
B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO.	7
B.1 ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?	7
B.2 ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?	11
B.3 ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?	13
C. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO	15
C.1 ¿Qué conocimientos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?	15
C.2 La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiriera esos conocimientos previos?	16
C.3 ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?	17
D. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO	20
D.1 ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?	20
D.2 ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?	22
D.3 Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.	27
D.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	29
E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS	32
E.1 Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.	32
E.2 ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?	40
E.3 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	40
F. SOBRE LAS TÉCNICAS	41
F.1 Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.	41
F.2 ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?	44
F.3 Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?	44
F.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	45
G. SOBRE LAS TECNOLOGÍAS	45
G.1 ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?	45
G.2 ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?	45
G.3 Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto	

matemático.	45
G.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	46
H. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA	47
H.1 Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.	47
I. Sobre la evaluación	55
I.1 Diseña una prueba escrita que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.	55
I.2 ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretende evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?	57
I.3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?	59
I.4 ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?	61
BIBLIOGRAFÍA	64

A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR.

A.1 Nombra el objeto matemático a enseñar.

Este Trabajo de Fin de Máster se centrará en la elaboración de una propuesta didáctica sobre el objeto matemático del uso de los números fraccionarios en la asignatura de matemáticas.

Presentaremos los números fraccionarios utilizando diversas acepciones, desligando el concepto de fracción de la idea de parte-todo, con la intención de darle un sentido más amplio, en relación con lo establecido en el currículo.

Esto último no quiere decir que renunciemos a este significado, si no que intentaremos potenciar la comprensión del número racional como un operador, el resultado de un reparto, de una medida y de una razón entre otros.

A.2 Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

La unidad didáctica que vamos a desarrollar en este Trabajo de Fin de Máster se impartirá en el curso de 1º de Educación Secundaria Obligatoria en la asignatura de Matemáticas. Se impartirá de acuerdo a lo establecido en la ORDEN ECD/1172/2022, de 2 de agosto, siendo el sentido numérico y el de la medida los que hacen especial énfasis en el objeto matemático de los números fraccionarios.

A.3 ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

En este apartado concretamos los campos de problemas, técnicas y tecnologías que emplearemos a lo largo de esta unidad didáctica.

Vamos a presentar los campos de problemas (CP), las técnicas (T) y las tecnologías (TEC) asociadas al objeto matemático, el uso del número fraccionario.

Nuestra principal intención será trabajar las distintas acepciones del número fraccionario a través de una serie de problemas, por lo que distinguiremos los campos de problemas en una serie de subcategorías. Los campos de problemas que presentaremos en esta unidad didáctica serán los siguientes:

- **CP.1:** Distintas formas de representar gráficamente un número fraccionario:

- -Como parte de un todo o proceso de reparto.
- - En problemas de medida.
- - De los porcentajes como fracciones y viceversa.
- **CP.2:** Problemas en los que se deba realizar una comparación de fracciones, identificar fracciones equivalentes, simplificar fracciones hasta llegar a una fracción irreducible.
- **CP.3:** Creación por parte del alumnado de situaciones contextualizadas en la vida real en las que intervengan las distintas acepciones del número fraccionario (parte-todo, medida, reparto, porcentajes).
- **CP.4:** Operaciones con fracciones en situaciones contextualizadas.
- CP.4.1: Suma y resta de fracciones en problemas contextualizados en la vida cotidiana.
- CP.4.2: Problemas en los que intervengan el producto y la división de fracciones.
- **CP.5:**Problemas de la vida cotidiana que implican la identificación de las distintas acepciones del número fraccionario:
 - CP.5.1: Identificación de las fracciones en un problema de medida.
 - CP.5.2: Identificación del concepto de fracción como parte-todo.
 - CP.5.3: La fracción en un problema de reparto.
 - CP.5.4: Identificación de los números fraccionarios como porcentajes.

A continuación, vamos a dar un listado de las técnicas que se van a enseñar a lo largo de esta unidad didáctica:

- **T.1:** Representación de un número fraccionario:
 - - T.1.1: Como resultado de una parte de un todo/ reparto.
 - - T.1.2: Producto de un proceso de medida.
 - - T.1.3: A través del concepto de porcentaje.
- **T.2:** Comparación de fracciones (mediante reducción a común denominador ,a través de la recta o mediante las relaciones entre numeradores y denominadores). Simplificación de fracciones, e identificación de fracciones equivalentes e irreducibles.
- **T.3:** Reconocimiento de las distintas acepciones asociadas al número fraccionario en situaciones contextualizadas en la vida real.(parte-todo, reparto, medida, operador, porcentaje).

- **T.4:** Mínimo común múltiplo de dos números naturales.
- **T.5:** Operaciones con fracciones: suma y resta de fracciones.
- **T.6:** Operaciones con fracciones: producto/división de fracciones .
- **T.7:** Resolución de problemas contextualizados en la vida real mediante la identificación de fracciones, así como el correcto manejo de éstas.

Veamos a continuación la lista de tecnologías que vamos a utilizar para justificar las técnicas presentadas en la lista anterior. Estas tecnologías son las siguientes:

- **TEC.1:** Definición de la fracción a través del concepto parte-todo.
- **TEC.2:** Definición de la fracción a través del concepto de la medida.
- **TEC.3:** Relación del concepto de número fraccionario y porcentajes.
- **TEC.4:** Institucionalización de la fracción como reparto.
- **TEC.5:** Concepto de fracciones equivalentes e irreducibles.
- **TEC.6:** Definición de la suma y resta de fracciones.
- **TEC.7:** Definición del producto/división de fracciones.
- **TEC.8:** Caracterización del mínimo común múltiplo de números naturales.
- **TEC.9** Ordenación de fracciones a través de sus términos (numerador y denominador) o de la recta.

Incluimos una tabla que relaciona los distintos apartados mencionados (CP: campos de problemas, T: técnicas, TEC: tecnologías).

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
C.P.1.1	T.1.1	TEC 1, TEC 4
C.P.1.2	T.1.2	TEC 2
C.P.1.3	T.1.3	TEC 3
C.P.2	T.2, T.4	TEC 5, TEC 8, TEC.9
C.P.3	T.1.1, T.1.2, T.1.3, T.3, T.7	TEC 1, TEC 2, TEC 3, TEC 4
C.P.4.1	T.2, T.3, T.4.	TEC1, TEC2,

	T.5, T.7	TEC4, TEC 5, TEC 6, TEC 8
C.P.4.2	T.3, T.6, T.7	TEC1, TEC 2, TEC 4 TEC 5, TEC 7
C.P.5.1	T.1.2, T.2, T.3, T.4, T.5, T.6, T.7	TEC 2, TEC 5, TEC 6, TEC 7.
C.P.5.2	T.1.1, T.2, T.3, T.4, T.5, T.6,T.7	TEC 1, TEC 5, TEC 6, TEC 7, TEC 8
C.P.5.3	T.1.1, T.2, T.3, T.4, T.5, T.6, T.7	TEC 4, TEC 5, TEC 6, TEC 7, TEC 8
C.P.5.4	T.1.3, T.2, T.3, T.6, T.7	TEC 3, TEC 6 TEC 7, TEC 8

Tabla 1. Campos de problemas, técnicas y tecnologías

También adjuntamos una tabla que relaciona directamente las técnicas y tecnologías:

Técnicas	Tecnologías
T.1.1	TEC.1. TEC 4
T.1.2	TEC.2
T.1.3	TEC.3
T.2	TEC.5, TEC.8, TEC.9
T.3	TEC.1, TEC.2, TEC.3, TEC.4
T.4	TEC.8
T.5	TEC.6
T.6	TEC.7
T.7	TEC.1,TEC.2,TEC.3,TEC.4,TEC.5,TEC.6,TEC.7,TEC.8

Tabla 2. Técnicas y tecnologías

B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO.

En función de lo establecido en la ORDEN ECD/1172/2022, en el sentido numérico se determina la importancia de la comprensión de los números fraccionarios desde un enfoque más amplio. Objetivo para el cuál es fundamental la presentación de problemas contextualizados que precisen de saberes relacionados con el sentido numérico.

En concreto se establece que el concepto de fracción debe desligarse de la idea de parte-todo para darle un sentido más amplio y universal. No se trata de renunciar a este significado, pero sí de presentar el racional como número. Para ello es fundamental comprender que un número racional puede ser además de un operador, el resultado de un reparto, de una medida, una razón.

En este apartado vamos a analizar cómo se realiza el proceso de la enseñanza y aprendizaje de los números fraccionarios en el primer curso de educación secundaria. Para realizar este estudio vamos a analizar los siguientes libros:

- Editorial Santillana. Grence Ruiz y Almodóvar. (2015)
- Editorial Apuntes Marea Verde. Salvador y Garmendia. (2022)
- Editorial Anaya. Colera I. Gaztelu. (2023).

B.1 ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Lo primero que haré será realizar una breve introducción de los tres libros que he escogido para realizar el análisis. Todos son libros de 1ºESO, aunque para enriquecer la comparativa he escogido libros de 3 editoriales distintas y de años diferentes. De esta manera podremos observar las diferencias existentes entre una editorial u otra, y si ha habido una evolución con el transcurso de los años y con las distintas leyes educativas (LOMCE, LOMLOE).

El primer libro de texto pertenece a la editorial de Santillana y fue publicado en el año 2015. Nuestro objeto matemático, los números racionales, aparecen por primera vez en el tema 4, una vez que han sido presentados los números naturales y los enteros. Se introducen directamente a partir de una definición muy poco contextualizada con la

vida cotidiana mediante el cociente de dos números enteros, nombrando ya los conceptos de numerador y denominador sin ninguna contextualización. El único ejemplo contextualizado en la vida real que presentan como introducción al término de la fracción es el desarrollo en la velocidad de obturación en las cámaras fotográficas. Posteriormente incluyen un apartado de interpretación del concepto de fracción, como la parte de la unidad, cociente de dos números y el operador de un número. Más adelante mencionan diversos tipos de fracciones (propias, impropias), así como las operaciones con fracciones pero de una manera muy mecánica y poco intuitiva. Incorporan alguna representación gráfica para entender el concepto de fracción como parte de la unidad.

? VIDA COTIDIANA

La fotografía

En las primeras cámaras fotográficas, para fotografiar un objeto se necesitaba que estuviera más de 30 minutos totalmente quieto.

En las cámaras actuales esto lo regula la velocidad de obturación. Con velocidades superiores a 1/60 segundos podemos conseguir congelar el movimiento de los objetos en movimiento. Sin embargo, con velocidades más lentas, inferiores a 1/60 segundos, conseguimos imágenes movidas.

- Con una velocidad de 1/30, ¿podré congelar el movimiento de un coche que circula por una calle?

1 Fracciones

Una **fracción** es una expresión $\frac{a}{b}$, donde a y b son números naturales llamados **numerador** y **denominador**, respectivamente.

1.1. Interpretación de una fracción

- **Fracción como parte de la unidad.** Su denominador representa el número de partes iguales en que se divide la unidad y su numerador, el número de partes que se toman.
- **Fracción como cociente de dos números.** Para hallar su valor, se divide el numerador entre el denominador.
- **Fracción como operador de un número.** Para calcular su valor, se multiplica el número por el numerador y se divide entre el denominador.

47 Escribe la fracción que representa cada gráfico.

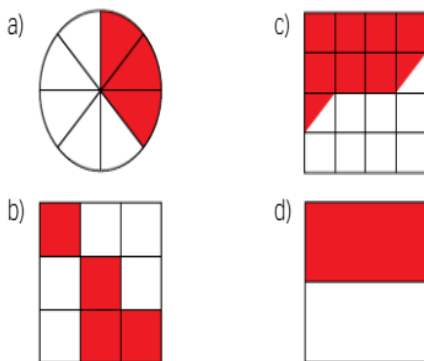
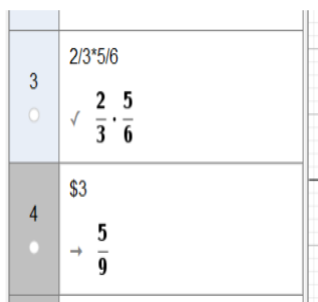


Figura 1. Editorial Santillana, 2015.

El segundo libro a analizar se trata de un ejemplar de 1ºESO de la editorial Marea Verde del año 2022. En este libro introducen las fracciones después de los

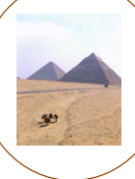
números naturales, enteros y de las potencias. En cuanto a la interpretación de los números fraccionarios presenta ejemplos contextualizados en la vida real del concepto de fracción como una forma de realizar un reparto. Incluso presentan la herramienta Geogebra para resolver determinadas operaciones con fracciones e incluyen una representación en la recta de los números reales de los números racionales. Aportan también algo de historia de las matemáticas con el ejemplo de la utilización de las fracciones por parte de los egipcios. Además encuentro más completa la representación gráfica de las fracciones en este libro. Por último comentar que añaden una interpretación del producto y la división de fracciones, a partir del concepto de producto/división de números naturales, y terminan el tema con la exposición de un resumen/esquema sobre lo abordado a modo de visión general.

Para la multiplicación en Geogebra se utiliza el asterisco: *



¿Sabías que ya los egipcios usaban fracciones?

En el papiro de Ahmes (o de Rhind), de hace casi cuatro mil años, se usaban fracciones. Usaban algunas fracciones como 2/3, pero sobre todo usaban las fracciones unitarias, aquellas en las que el numerador es un 1: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5... Para representar, por ejemplo, 1/5, escribían sobre su número 5 un punto o un círculo: $\overset{\circ}{5}$. Busca en Internet Ahmes o Rhind para conocer más sobre el uso que los egipcios daban a las fracciones.



¿Cómo podemos entender el producto de dos fracciones ambas con numerador igual a uno? Por ejemplo, $1/2 \cdot 1/3$:

Al ser $1/3 = 1 \cdot 1/3$, $1/3$ es UNA porción de algo que se ha dividido en tres partes, de igual manera que $2/3 = 2 \cdot 1/3$ representa DOS porciones de algo que se ha dividido en tres partes. Análogamente, $1/2 \cdot 1/3$ nos apunta hacia la mitad de una porción de algo dividido en tres partes, es decir, una sexta parte, puesto que primero dividimos en tres porciones y luego cada una de ellas en dos:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

En general,

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{n \cdot q}$$



Figura 2. Editorial Marea Verde,2022.

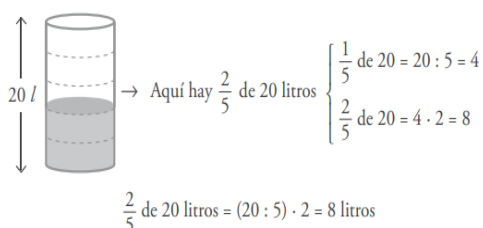
El último libro que vamos a analizar se trata de un libro de la editorial Anaya del año 2023. Introduce las fracciones después de los números naturales, enteros, decimales y las potencias. Comienza el tema presentando la fracción en el antiguo Egipto, a parte

de incluir representaciones gráficas del concepto de fracción. Este libro presenta (al igual que el segundo) problemas con fracciones contextualizadas en la vida cotidiana y le otorga al número fraccionario los conceptos de parte de la unidad, operador y división indicada. Posteriormente, presentan la fracción como el resultado de una división, relacionándola con la unidad de números decimales e incluyendo su representación en la recta real.

Las fracciones son operadores

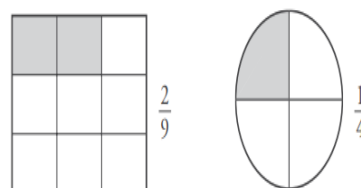
Una fracción es un número que opera a una cantidad y la transforma.

Por ejemplo, si el bidón tiene una capacidad de 20 litros:



Las fracciones expresan partes de la unidad

Un todo se toma como unidad y se divide en porciones iguales. Una fracción indica una determinada cantidad de esas porciones.



8 De una caja de 24 bombones se ha consumido $\frac{1}{6}$.

Observa, por ejemplo, que $\frac{2}{5}$ de unidad equivalen al valor decimal 0,4:



¿Cuántos bombones se han consumido? ¿Cuántos quedan?



Figura 3. Editorial Anaya,2023.

Gracias al análisis de estos libros de texto se puede observar que la forma más común de introducir la fracción es a partir del concepto parte-todo, mediante la presentación de ejemplos en los que se realizan particiones de la unidad, pudiendo incluir también el concepto de fracción como operador y el de cociente de dos números naturales.

B.2 ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

En esta sección analizaremos los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se presentan habitualmente a la hora de tratar el objeto matemático del uso de los números fraccionarios en el primer curso de la educación secundaria.

Se puede observar que en los libros escogidos para este análisis recogen campos de problemas similares, a excepción del ejemplar de Marea Verde (Salvador y Garmendia, 2022).

Los campos de problemas presentados en los ejemplares de este análisis son:

1. Representación gráfica de números fraccionarios.
2. Expresión en lenguaje matemático de la representación gráfica de una fracción.
3. Problemas “contextualizados” para trabajar la fracción como operador de una cantidad.
4. Problemas “contextualizados” para trabajar la fracción como parte de un todo.
5. Comparación de fracciones.
6. Operaciones con fracciones: suma/resta de fracciones, producto/división y operaciones combinadas.

Como principal observación sobre los campos de problemas destacaría que aunque se repitan estos campos en las tres editoriales mencionadas, la de Marea Verde es la única que presenta algún problema en el que se prima más la creatividad del estudiante como podría ser el campo de problemas de ejemplificación de situaciones cotidianas en las que aparezca el concepto de número fraccionario, o la presencia de algún problema contextualizado de la vida cotidiana que no sea de aplicación directa de las técnicas presentadas.

Aún con todo, estos problemas que no son de aplicación directa de las técnicas se limitan a un número muy escaso, o están agrupados en alguna sección particular como es el caso de la editorial Santillana que presenta dos problemas PISA.

A continuación, vamos a enumerar las técnicas que se enseñan habitualmente. Estas técnicas aparecen de distinta manera en los libros que hemos analizado.

1. División en partes iguales de la unidad. (fracción como parte de un todo).
2. Expresión de un número fraccionario (numerador y denominador) a partir de una representación gráfica.
3. Reducción a común denominador.
4. Prioridad en las operaciones con fracciones.
5. La fracción como operador de una cantidad.

6. La fracción como una división indicada.

Para finalizar este apartado estudiaremos las tecnologías que justifican las técnicas.

Observamos que en su mayoría se trata de definiciones o propiedades de los números fraccionarios. En la editorial de Marea Verde se introducen algunas tecnologías a través de ejemplos contextualizados de la vida cotidiana.

1. Definición de los términos de una fracción (numerador y denominador).
2. Suma y resta de fracciones.
3. Propiedades de la suma de fracciones.
4. Fracciones equivalentes.
5. Simplificación de una fracción.
6. Producto y división de fracciones.
7. Propiedades del producto y de la división de fracciones.
8. Orden de prioridad en las operaciones combinadas con fracciones.
9. Paso de fracción a decimal.
10. Fracción de una cantidad.

Para concluir, en algunas ocasiones podemos apreciar que las técnicas van acompañadas de las tecnologías para justificarlas, pero en muchos casos observamos que simplemente se presenta la técnica sin justificación y solamente complementada con ejercicios o problemas de aplicación directa de ella.

También un aspecto a mencionar es que en la editorial de Marea Verde y Santillana trabajan en la misma unidad las operaciones con fracciones mientras que en la de Anaya destinan dos temas, el primero para entender el concepto de fracción y el segundo para trabajar las operaciones con fracciones.

B.3 ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Tras el análisis de los libros de texto observamos la siguiente estructuración presente: en primer lugar se introduce el objeto matemático que se pretende enseñar, en algunas ocasiones con una clara desconexión con la vida cotidiana. Posteriormente se produce la presentación de las técnicas y para reforzar los conceptos enseñados se plantean ejercicios mecánicos de aplicación de las técnicas.

Esta forma de estructurar el contenido en los libros de texto va totalmente en

contra de lo que propone el currículo, ya que según la ORDEN ECD/1172/2022 la enseñanza de las matemáticas debe centrarse en la resolución de problemas a través del razonamiento matemático.

Debido a lo anteriormente expuesto en este apartado analizaremos los problemas, errores y dificultades que los estudiantes encuentran a la hora de trabajar con los números fraccionarios.

Este tipo de presentación de los conceptos puede ocasionar un escaso desarrollo de la creatividad de los alumnos al trabajar con los números fraccionarios, además de una clara desconexión de la identificación de las distintas acepciones de la fracción en problemas contextualizados.

Por otra parte presentamos unas conclusiones extraídas fruto del análisis de la enseñanza de la fracción, en las que el modelo tradicional de presentación de conceptos en los libros de texto pudo originar ciertas concepciones en los futuros maestros.

Según Gairín en su publicación: “Estudiantes para maestros, reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos” los estudiantes para maestros pueden presentar una serie de dificultades sobre la concepción del número fraccionario, consecuencia de su proceso instructivo en el que se prima el significado de la fracción como relación parte-todo, y en el que las expresiones decimales se presentan como entes abstractos, como números no medida.

Dichas características pueden producir que los estudiantes adquieran las concepciones que tienen los maestros sobre el número fraccionario. Exponemos las más relevantes:

- Los estudiantes para maestro tienen un significado casi exclusivo de la fracción como relación parte-todo, además, este significado se asocia a un modelo físico.
- La notación decimal se reconoce exclusivamente con significado numérico, no se asocia a cantidades de magnitud.
- Las relaciones de orden entre fracciones no se justifican en modelos, simplemente se utilizan técnicas de cálculo.
- Las fracciones y las expresiones decimales se conciben como tópicos desconectados.

Además, gracias a que realicé una entrevista con mi tutora del Practicum II y hablé con otros profesores de Matemáticas acerca de las dificultades que los estudiantes

de primero de la ESO encuentran a la hora de trabajar las distintas acepciones del número fraccionario, me permitió sacar las siguientes conclusiones.

Los alumnos por lo general presentan dificultades relacionadas con:

- El reconocimiento del papel de una fracción en un problema contextualizado.
- La distinción entre los distintos algoritmos presentes en las operaciones con fracciones.
- La incapacidad de identificar las operaciones con fracciones a emplear en problemas contextualizados en la vida real.
- El mal uso del “=” en las operaciones con fracciones.

Por último expondré las principales conclusiones que sacamos durante mi período del practicum II, gracias a que impartí la unidad didáctica del uso de los números fraccionarios y durante la evaluación continua de esa unidad observé que:

- Algunos alumnos no eran capaces de reconocer el papel de un número fraccionario en algunos problemas contextualizados de la vida real, debido a la falta de costumbre que tenían de relacionar los conceptos matemáticos estudiados en clase con situaciones propias de la vida cotidiana.
- La distinción entre la manera de efectuar una suma de fracciones y una multiplicación de fracciones la analicé al estudiar unas fichas de ejercicios con fracciones entregadas a la profesora de Matemáticas. En ella observé que los alumnos realizaban el mínimo común múltiplo de los denominadores tanto a la hora de sumar fracciones como de multiplicarlas. Concluí que este hecho se debía a que habían adoptado la técnica que utilizaban para sumar fracciones también para multiplicarlas, debido a que no se les había explicado previamente el por qué se realiza el mínimo común múltiplo para poder sumar fracciones, ni una contextualización o ejemplo del producto de fracciones en una situación más familiar para ellos.
- También presentaban dificultades a la hora de determinar si en un cierto problema tenían que realizar una operación u otra con números fraccionarios. En este punto también interpreté que se debía a la falta de contextualización que tenían a la hora de asociar el número fraccionario

con sus distintas acepciones, como el resultado de un reparto, de una medida o la fracción como operador.

- Por último el mal uso del signo igual en las operaciones combinadas estipulé que se debía a la falta de asimilación del concepto de igualdad. En muchos casos los alumnos lo utilizaban como tecla de calculadora, es decir, para denotar que habían realizado una operación y no precisamente para referirse a que estaban preservando una igualdad entre dos expresiones matemáticas. Este hecho podría deberse a que cómo no habían estudiado aún la unidad didáctica de álgebra, no habían podido interiorizar el significado de una igualdad en matemáticas, y también podría deberse a la forma de trabajar con el signo igual en los cursos anteriores de primaria.

C. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

C.1 ¿Qué conocimientos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Los conocimientos previos que necesitará el estudiante para afrontar el aprendizaje del uso del número fraccionario son:

1. Manejo de los números naturales y enteros.
2. Mínimo común múltiplo de números naturales.
3. Uso de los números decimales y representación en la recta real.
4. Concepto de fracción.
5. Suma de fracciones con igual denominador, y distinto denominador.
6. Multiplicación de fracciones y de números naturales.
7. Conversión de fracciones a números decimales.
8. Identificación de números fraccionarios en contextos cotidianos.

Para realizar un seguimiento de la consecución de estos conceptos iniciales a la unidad didáctica del uso del número fraccionario destinamos parte de la primera sesión para identificar los posibles problemas que tienen algunos estudiantes en el entendimiento de estos conceptos trabajados durante la educación primaria y unidades anteriores en 1 ESO.

C.2 La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Para poder determinar si efectivamente la enseñanza anterior ha propiciado que el alumno adquiriese los conocimientos previos mencionados en el apartado anterior realizaremos una revisión del currículo de primaria en Aragón.

Podemos observar que el currículo en la asignatura de Matemáticas está dividido en los tres ciclos presentes de la educación primaria, y en esos tres ciclos aparecen los conceptos previos mencionados para trabajar nuestra unidad didáctica. El currículo asegura que los conceptos se introducen en el primer ciclo de una manera más manipulativa, para ampliarse en el segundo ciclo con un enfoque más formal y consolidarse en el tercero con problemas contextualizados.

Por otra parte, observamos que los conceptos previos se encuentran dentro del sentido numérico y el de la medida. En el sentido numérico aparece el uso del número natural y entero, la definición de fracción y sus términos (numerador y denominador), mínimo común múltiplo de números naturales, suma y multiplicación de fracciones y la conexión con los números decimales.

En el sentido de la medida se trabaja el concepto de fracción como parte de un todo, el uso de los números decimales y su representación en problemas relacionados con medidas (longitudes, capacidades).

Además en el tercer ciclo de la educación primaria se presentan problemas en contextos cotidianos en los que interviene el número fraccionario como parte de magnitudes o repartos, en sintonía con el enfoque de resolución de problemas que subyace en el currículo.

En conclusión, todos los conceptos previos necesarios que hemos indicado anteriormente están presentes en el currículo de primaria y varios de ellos se trabajan de manera continuada en los tres ciclos. Aspecto por el cual muchos alumnos estarán familiarizados con el uso del número fraccionario. No obstante, realizaremos una sesión inicial para comprobar que estos conceptos estén asimilados por todos los estudiantes, y en caso contrario poder repasar dichos aspectos que no sean comprendidos por el alumno, constituyendo un punto de partida de nuestra unidad didáctica.

C.3 ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Como hemos mencionado anteriormente, destinamos una sesión inicial para analizar si los estudiantes han afianzado los conocimientos previos necesarios para poder realizar nuestra unidad didáctica.

En nuestra primera sesión realizaremos una actividad por grupos que nos servirá como prueba inicial, sin peso en la nota de la asignatura, pero sí con función de evaluación inicial. Gracias a esta actividad podremos analizar las distintas concepciones que tienen los alumnos sobre el uso del número fraccionario.

Esta actividad se realizará en grupos pequeños, formados por unos 3 o 4 estudiantes. Se repartirán una serie de hojas a rellenar por los grupos en las que registran el proceso realizado y las operaciones empleadas.

El título que aparecerá en las hojas será “Organizando una feria gastronómica”.

Los estudiantes forman parte de la organización de una feria gastronómica en la que deben planificar cómo repartir alimentos entre los asistentes, medir ingredientes para recetas y realizar ajustes en función de posibles cambios en las cantidades.

Como actividad inicial se pedirá a la clase que contesten a las siguientes preguntas para realizar una revisión del concepto de fracción como parte de un todo, resultado de un reparto y de una medida.

- Si dividimos un pastel en 6 partes iguales, indica mediante el uso de un número fraccionario la cantidad de pastel que le corresponderá a cada uno.
- Si repartimos 3 pasteles entre 4 personas, ¿cuánto recibe cada uno?
- Si tengo una botella de medio litro y otra de tres cuartos de litro ¿qué botella contiene mayor cantidad de agua?

Dividiremos posteriormente a los estudiantes en equipos de 3-4 personas y cada equipo representará un puesto de comida o bebida. Por ejemplo, presentamos parte de las actividades que presentamos a los distintos grupos:

Puesto de pasteles:

- "Tienes 3 pasteles y necesitas repartirlos entre 8 personas. ¿Qué fracción del pastel recibe cada persona?"
- "Si después llegan 4 personas más, ¿cómo cambia la fracción que recibe cada una?"

Puesto de limonada:

- "Tienes 4 jarras de limonada, cada una con $\frac{3}{4}$ de litro. ¿Cuántos litros de limonada hay en total?"
- "Si cada vaso tiene $\frac{1}{3}$ de litro, ¿cuántos vasos puedes llenar?"

Puesto de fruta:

- "Tienes 5 kg de fruta y quieres hacer 10 bolsas iguales. ¿Cuánto pesa cada bolsa?"
- "Si juntas dos bolsas, ¿qué fracción del total de fruta tendrás?"

Puesto de sopas:

- "Una receta requiere $\frac{2}{3}$ de litro de caldo. Si vas a preparar 3 sopas, ¿cuántos litros necesitas en total?"
- "Si tienes 2 litros de caldo, ¿qué fracción te sobra después de hacer las sopas?"

Estas serían preguntas tipo que tendría cada grupo. Tras un proceso de trabajo en equipo y de reflexión, cada equipo sale a la pizarra a presentar sus soluciones utilizando representaciones gráficas y explicaciones de su razonamiento. Se les puede pedir que representen algún resultado obtenido en forma de fracción dentro de la recta real.

Añadiremos al final de la clase un proceso de reflexión grupal, en el que presentaremos las siguientes preguntas que deberá de contestar cada grupo.

- ¿Cómo interpretas la fracción en cada problema?
- ¿Qué métodos encuentras más útiles para resolverlos?

Para comprobar que cada estudiante cuenta con los conocimientos previos para impartir nuestra unidad didáctica utilizamos los siguientes instrumentos de evaluación:

- Observación directa durante la actividad, en función del grado de colaboración y de las estrategias empleadas.
- Análisis de las soluciones, utilizaremos rúbricas para valorar la precisión de los cálculos, la claridad de las representaciones y la justificación de las respuestas.
- Presentación grupal y reflexión en grupo.

Incluimos un ejemplo de rúbrica:

Criterio	Excelente	Aceptable	Necesita mejorar
Comprensión conceptual	Identifica claramente las fracciones como medida, reparto y parte del todo en todos los ejercicios.	Reconoce la mayoría de los conceptos, pero con errores menores.	Dificultades significativas para identificar los conceptos.
Resolución de problemas	Resuelve correctamente todas las operaciones con fracciones.	Resuelve la mayoría de las operaciones con errores menores.	Errores frecuentes en las operaciones.
Representación	Usa diagramas claros y correctos para justificar las soluciones.	Usa diagramas parcialmente correctos o poco claros.	No utiliza diagramas o estos son incorrectos.
Trabajo en equipo	Participa activamente y colabora en todo momento.	Participa, pero con momentos de menor colaboración	Participación limitada o nula.

Tabla 3. Rúbrica

Las competencias específicas trabajadas son:

CE.M.1: Interpretar, modelizar y resolver problemas contextualizados aplicando estrategias matemáticas.

- Resolver problemas prácticos relacionados con el reparto y las medidas de fracciones.

CE.M.3: Formular y verificar conjeturas para interpretar los resultados.

- Explorar las soluciones y razonar si son válidas.

CE.M.5: Reconocer conexiones entre conceptos matemáticos aplicados a situaciones reales.

- Relacionar las fracciones con situaciones cotidianas como resultado de un reparto y medida.

CE.M.7: Representar conceptos y procedimientos matemáticos.

- Usar representaciones para ilustrar repartos y la recta real para situar una fracción.

CE.M.10: Trabajar en equipo, respetando roles y fomentando la comunicación.

- Resolver problemas de forma cooperativa.

D. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

D.1 ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

El uso del número fraccionario en el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria se relaciona principalmente con los **sentidos numérico, de la medida y socioafectivo**, ya que este objeto matemático resulta esencial para comprender, modelar y resolver situaciones cotidianas.

A continuación detallaremos más los sentidos que tendremos en cuenta a la hora de introducir el uso del número fraccionario.

1. Sentido numérico

El sentido numérico proporciona el marco para comprender las fracciones como una extensión de los números naturales, introduciendo su representación en la recta, operaciones y sus aplicaciones en contextos cotidianos y matemáticos. Esto incluye:

- Representación de magnitudes continuas: El número fraccionario permite expresar cantidades menores que la unidad (por ejemplo, medio litro o un cuarto de una tarta) y mayores, en forma de fracciones impropias (las trabajaremos en problemas de medida y reparto).
- Operaciones básicas: A través de sumas y multiplicaciones, los estudiantes desarrollan estrategias para trabajar con fracciones.
- Relación con otros sistemas numéricos: Las fracciones se conectan con los números decimales y los porcentajes, promoviendo una visión integrada de los números racionales.

Por lo tanto las fracciones se introducen como herramientas para interpretar, representar y resolver problemas numéricos. Por ejemplo, se abordan problemas relacionados con repartos, fomentando una comprensión más profunda de los números racionales.

2. Sentido de la medida

Por otra parte, el número fraccionario está estrechamente vinculado a la capacidad de medir y comparar magnitudes en contextos reales:

- **Fracción como medida:** Se utiliza para expresar longitudes, pesos, volúmenes, etc., que no pueden ser representados por números enteros con exactitud. Ejemplo: "¿Cuánto mide un tercio de un segmento de 8 cm?"
- **Instrumentos de medición:** Podemos utilizar diversos instrumentos de medición, como es el caso de las reglas y las balanzas. En estos instrumentos se producen divisiones de la unidad, fomentando el uso de los números fraccionarios.
- **Resolución de problemas prácticos:** El uso de fracciones en contextos como recetas o mapas (escalas) ayuda a los estudiantes a conectar este concepto con situaciones cotidianas. Por ejemplo, nosotros empezamos con una actividad inicial en la que los alumnos se encontraban en una feria gastronómica y tenían que resolver problemas relacionados con las distintas cantidades que incluían en una receta.

Nuestra intención será que, a través de problemas contextualizados, los estudiantes desarrollen su capacidad para utilizar las fracciones en problemas que estén relacionados con la medición o la estimación de cantidades.

3. Sentido socioafectivo

El sentido socioafectivo está implícito en el aprendizaje del número fraccionario, ya que:

- **Promueve actitudes positivas hacia las matemáticas:** Las fracciones, cuando se trabajan en contextos contextualizados, fomentan una percepción útil y práctica del uso del número fraccionario.

- Desarrolla la reflexión y la resolución colaborativa: Nosotros nos centraremos también en fomentar el trabajo cooperativo, ayudando al estudiante a superar bloqueos iniciales y entendiendo el error como parte del proceso de aprendizaje, prestando especial importancia al desarrollo de un pensamiento crítico.

Por lo que a modo de conclusión determinamos que la introducción escolar del número fraccionario en 1º de ESO responde a las siguientes razones:

1. Extender el concepto de número natural :lo que permitirá a los estudiantes expresar cantidades que no pueden representarse de manera exacta con números enteros.
2. Facilitar la comprensión de medidas y repartos: los alumnos desarrollarán una comprensión de las fracciones en problemas contextualizados relacionados con mediciones y repartos.
3. Promover habilidades matemáticas fundamentales: destacando la modelización de problemas y la resolución de estos mediante el cálculo con fracciones.
4. Fomentar la integración numérica: Relacionando las fracciones con otros conjuntos numéricos, como los números decimales.

D.2 ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

El número fraccionario surge históricamente como una necesidad para resolver problemas relacionados con la medida, el reparto y las proporciones. A lo largo del tiempo este objeto matemático ha evolucionado para adaptarse a las demandas de la sociedad, la ciencia y el comercio. A continuación, expondremos las principales razones de ser del objeto. Hemos relacionado cada razón de ser del objeto con un período histórico en el que se empleó el número fraccionario.

Las principales razones de ser históricas son:

1. La necesidad de expresar partes de un todo

En las civilizaciones antiguas como es el caso de Egipto, alrededor del 2000 a.C., los escribas utilizaban un sistema basado en fracciones con numerador la unidad para resolver ciertos problemas relacionados con el reparto de cosechas y el cálculo de áreas agrícolas. Este sistema quedó registrado en textos como el “*Papiro de Rhind.*” Se

trataba de un sistema algo más complejo de aplicar en ciertos contextos prácticos al solo utilizar fracciones de numerador la unidad, aunque los egipcios desarrollaron técnicas para expresar cualquier fracción con numerador la unidad a partir de la suma de fracciones con esta estructura. En esa época, dentro del contexto de reparto no era necesario generalizar el concepto de fracción. “Si bien la forma de escritura era un obstáculo, tampoco en la práctica matemática el egipcio se planteó generalizar el concepto de fracción rebasando el marco creado por las fracciones unitarias” (Maza Gómez, 2009, p. 142).

2. Una herramienta para la medida

También alrededor del año 2000 a.C en Mesopotamia, los babilonios desarrollaron un sistema numérico sexagesimal, que utilizaba fracciones para representar partes de un todo, especialmente en contextos astronómicos. Gracias a este desarrollo, pudieron dividir el tiempo en horas, minutos y segundos, así como los ángulos en fracciones más precisas, sentando las bases de cálculos que aún usamos en la actualidad.

Incluimos una cita de Otto Neugebauer, en “*The Exact Sciences in Antiquity*” en la que destaca que "el uso de fracciones por los babilonios fue esencial para el desarrollo de la astronomía antigua" (Neugebauer, 1957).

3. Resolución de problemas comerciales

En Grecia y Roma las fracciones comenzaron a utilizarse en el comercio para dividir pesos, volúmenes y monedas. Los griegos introdujeron la fracción como una relación entre dos números enteros, base para el concepto moderno de cociente.

4. Desarrollo de sistemas matemáticos

Remontándonos a la Edad Media, en concreto al mundo islámico, matemáticos como Al-Juarismi y Al-Kashi desarrollaron métodos de empleo de las fracciones, relacionándolas con el sistema decimal presente en cálculos para la astronomía y el comercio. Este avance en el sistema decimal basado en los números indo-arábigos fue transmitido a Europa a través de textos como “el *Liber Abaci*” de Fibonacci (1202).

Fibonacci introduce el uso práctico de fracciones en cálculos de interés compuesto y proporciones: "Una fracción representa la relación entre dos cantidades; en el comercio, esto permite dividir bienes y establecer equivalencias" (*"Liber Abaci"*, Fibonacci 1202).

5. Adaptación a necesidades científicas

En el período histórico del Renacimiento y en la Edad Moderna gracias al auge de la ciencia y la tecnología, las fracciones adquieren un papel crucial en la descripción de fenómenos físicos, cálculos geométricos y avances en mecánica y astronomía. Por ejemplo, Kepler y Galileo emplearon las fracciones en sus cálculos para describir movimientos planetarios y leyes físicas.

6. Relación con los números decimales

El posterior desarrollo de los números decimales en el siglo XVI por Simon Stevin (*La Disme*, 1585) permitió introducir otra representación de las fracciones, empleada para ciertos cálculos científicos. Aun así, las fracciones continuaron siendo fundamentales en contextos donde la precisión exacta es fundamental.

En conclusión, determinamos que el número fraccionario responde a la necesidad humana de representar magnitudes continuas y establecer divisiones equitativas. Siendo indispensable en la evolución de campos como la medición, el comercio, la ciencia y la tecnología.

Para respaldar nuestra idea exponemos esta cita de Carl Boyer:

"Las fracciones, como forma de representar relaciones entre cantidades, han sido el puente entre los números naturales y el mundo real desde las civilizaciones más antiguas" (Carl Boyer, *"A History of Mathematics"*, 1991).

Una vez expuestas las razones de ser históricas y las razones que introduciremos en el aula vamos a analizar la relación que existe entre ambas.

Podemos notar que tanto las razones históricas como las razones que introduciremos en el aula del número fraccionario guardan una estrecha relación, ya que ambas se fundamentan en la necesidad de resolver problemas prácticos de la vida real y extender los conceptos matemáticos para adaptarlos a posibles demandas, como el ejemplo presentado de elaboración de recetas en la feria gastronómica.

A continuación, iremos una a una observando las similitudes presentes entre las razones de ser históricas y las presentadas en clase.

1. Fracción como parte de un todo

Presentamos como razón histórica el uso de las fracciones por parte de civilizaciones antiguas, como Egipto y Mesopotamia, que empleaban fracciones para expresar divisiones de tierras, cosechas o bienes, donde la totalidad se dividía en partes iguales.

Mientras que en el currículo escolar, este mismo concepto se introduce como una herramienta para que los estudiantes comprendan la fracción como una división del todo, útil para medir y repartir. Este enfoque se presentará a partir de situaciones cotidianas, como dividir una pizza, un muro en distintos colores, o terrenos agrícolas.

Observamos por lo tanto que ambas perspectivas coinciden al considerar que la fracción permite modelar situaciones reales en las que la totalidad debe dividirse en partes iguales.

2. Fracción como medida

El uso de fracciones en Mesopotamia y la Grecia clásica se vinculó estrechamente con la medición de magnitudes continuas, como longitudes, áreas o volúmenes, para las cuales los números enteros no permitían modelar con exactitud dichas situaciones.

Análogamente en el aula la fracción como medida se utiliza para enseñar a los estudiantes cómo expresar cantidades que no pueden representarse mediante el uso de números enteros, como $\frac{1}{3}$ de litro o $\frac{1}{4}$ de metro (divisiones de la unidad). Esto fomenta la comprensión de las magnitudes continuas y su importancia en la vida cotidiana.

3. Fracción como resultado de un reparto

Hemos podido comprobar la importancia que tuvo el modelo de reparto igualitario en el comercio y la economía desde las primeras civilizaciones. Por ejemplo, empleaban una representación numérica para asignar partes iguales o equitativas en procesos como dividir recursos, bienes o alimentos entre personas.

Este mismo modelo se usa en educación para introducir el concepto de fracción como resultado de un reparto, facilitando su comprensión a través de situaciones prácticas como repartir tantas tartas entre un número determinado de personas y el concepto de socialización de repartos.

Esta coincidencia radica en que la necesidad de representar repartos es atemporal, estableciendo la fracción como cociente como una solución eficaz para expresar divisiones.

4. Extensión del concepto numérico

Presentamos en el apartado anterior el trabajo de los matemáticos islámicos en la formalización de las fracciones como números racionales, extendiendo el conjunto de los números naturales para cubrir relaciones entre cantidades y resolver ecuaciones.

Por otra parte en el currículo escolar, las fracciones se presentan como una extensión de los números naturales, estableciendo conexiones con otros sistemas numéricos, como los decimales y porcentajes, y ampliando la comprensión numérica.

Esta necesidad histórica de desarrollar herramientas matemáticas más avanzadas para resolver problemas comerciales se refleja en la enseñanza de las fracciones como un puente hacia conceptos más avanzados, como la ampliación de los conjuntos numéricos anteriormente estudiados (naturales, enteros).

5. Aplicaciones prácticas en la vida cotidiana

A lo largo de la historia, las fracciones han sido fundamentales para actividades cotidianas como la agricultura, la construcción y el comercio. Desde los egipcios hasta los renacentistas, se emplearon para resolver problemas reales.

Por este motivo en el aula, las fracciones las presentaremos en contextos prácticos para que los estudiantes vean su utilidad, como ajustar recetas, medir longitudes o calcular partes de un presupuesto, fomentando una visión positiva hacia las matemáticas.

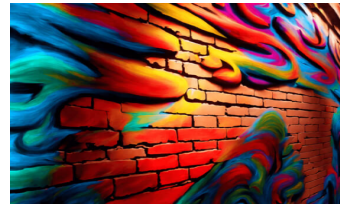
Por lo que una vez analizadas una por una, podemos observar que efectivamente las razones de ser introducidas en el aula del número fraccionario coinciden con las razones de ser históricas.

D.3 Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

En esta sección presentaremos varios problemas constituidos en las razones de ser expuestas del uso del número fraccionario.

1. Creando un mural

(Fracción como parte de un todo)



Problema:

Un grupo de estudiantes está diseñando un mural dividido en 12 secciones iguales. Cada sección representa una fracción del mural y debe ser pintada de un color distinto según ciertas reglas:

1. Un tercio del mural será verde.
2. La mitad de lo que queda será azul.
3. El resto se dividirá equitativamente entre rojo y amarillo.

Pregunta:

¿Qué cantidad hemos pintado de cada color? ¿Cuál es el color que predomina en el muro?

Representa gráficamente cómo quedará el mural.

Este problema requiere dividir el todo en fracciones, trabajar con proporciones sucesivas y razonar sobre cómo los colores intervienen en el diseño global, además de realizar un proceso de comparación de fracciones (a través de una representación gráfica o analizando las relaciones entre las distintas fracciones).

2. El club de aventuras

(Fracción como medida y operador)

Problema:

Un club organiza una expedición y tiene 9 litros de agua repartidos en 3 cantimploras iguales. Los miembros van empleando las cantimploras hasta la mitad del camino, momento en el que comprueban las cantimploras y obtienen que:



- Una cantimplora está llena.
- La segunda tiene $\frac{2}{3}$ de su capacidad.
- La tercera está a $\frac{1}{6}$ de su capacidad.

Preguntas:

1. ¿Cuánto agua hay en total en las cantimploras?
2. Si un miembro del club bebe $\frac{1}{4}$ de lo que queda, ¿con qué cantidad de agua contarían?
3. ¿Qué estrategia usarías para repartir el agua restante entre las tres cantimploras por igual?

Introducimos el problema para la acepción de fracción en un problema de medida, estableciendo en el último apartado un problema de reparto del agua restante.

3. El tesoro de la isla

(Fracción como reparto y relación)



Problema:

Un grupo de exploradores encuentra un cofre del tesoro con 120 monedas. Deciden repartirlas así:

- El explorador jefe se queda con $\frac{1}{2}$ del total.
- Los 4 exploradores restantes comparten lo que queda equitativamente.

Preguntas:

1. ¿Cuántas monedas obtiene el jefe?
2. ¿Cuántas monedas recibe cada uno de los demás exploradores?
3. Si se suman dos exploradores más, ¿cómo cambiaría el reparto?

Este problema constituye una situación de reparto en la que vamos añadiendo cambios en el número de personas para reflexionar cómo alteran las cantidades recibidas.

D.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología que utilizaremos para trabajar el número fraccionario en el aula estará basada en el **aprendizaje a través de la resolución de problemas**. Mediante este enfoque nos alejamos de la manera tradicional de trabajar el uso de los números fraccionarios. Buscamos fomentar la creatividad y un proceso de reflexión previo a la resolución de problemas, para que mediante el cual los alumnos interioricen y descubran los conceptos implicados en el uso del número fraccionario.

Trabajaremos a partir de problemas que impliquen una reflexión profunda por parte del estudiante, invitándolos a analizar diversas alternativas antes de decidir un camino a seguir. Por lo que será fundamental que los alumnos diseñen un plan para abordar el problema, mediante los conocimientos que ya poseen y explorando nuevas conexiones. Desechamos la opción de presentar por problemas ejercicios mecánicos basados en la aplicación de técnicas directas, si no que buscamos presentar actividades que produzcan un desafío inicial en el pensamiento del alumno.

El objetivo es que los problemas presentados sirvan como un punto de partida para el aprendizaje significativo y el desarrollo de la creatividad, en lugar de una simple aplicación de reglas ya establecidas.

Los problemas que proponemos estarán contextualizados para lograr una visión

positiva y útil de las matemáticas. En lugar de introducir los conceptos a través de explicaciones teóricas, metodología propia de la mayoría de libros de texto, nosotros buscamos que los estudiantes descubran los contenidos matemáticos resolviendo problemas que les permitan asentar dichos conceptos. Finalmente, realizaremos en conjunto un proceso de institucionalización de los conceptos que han surgido en el desarrollo de la actividad.

Por otra parte, fomentaremos el trabajo colaborativo, por lo que se formarán grupos pequeños de trabajo, lo que promoverá el intercambio de ideas, la comunicación, la colaboración y una actitud más positiva acerca del error como parte del proceso educativo.

Gracias a la observación directa y a la elección por parte del docente de la intervención de los miembros del grupo, se garantiza que cada estudiante participe activamente y se sienta responsable de su contribución al equipo.

El debate dentro de los grupos será una parte esencial para que los estudiantes compartan sus ideas y sus razonamientos estableciendo puntos en común.

Respecto a nuestro papel como docente, nuestro principal objetivo será guiar a los alumnos en su propio proceso de aprendizaje, no limitándose a ser un simple transmisor de conocimientos. Para lograr dicho objetivo, adquirirá especial importancia la formulación de preguntas abiertas que fomenten la reflexión por parte del alumnado, además de realizar un proceso de feedback incentivando a los estudiantes a que analicen las estrategias adoptadas y los resultados obtenidos.

Además, será fundamental una observación y evaluación continua sobre el trabajo grupal e individual de los alumnos. Esto nos permitirá ajustar los problemas presentados en clase y la forma de abordarlos en función del desarrollo de la sesión.

En cuanto al uso del libro durante nuestra presentación de la unidad didáctica, entenderemos éste como una herramienta complementaria y no como un eje central en el aprendizaje. Trabajaremos a su vez con presentaciones más interactivas y que incluyan ciertas representaciones gráficas que ayuden al estudiante en la comprensión de ciertos conceptos o problemas presentados, y sobre todo que incentiven un proceso de razonamiento. Nos alejamos del enfoque presentado en los libros de texto, ya que por

lo general suelen incluir las siguiente estructura: presentación teórica de los conceptos a aprender, acompañados de ejemplos más o menos contextualizados que establecen la base previa para trabajar ejercicios y por último la resolución de problemas de aplicación directa de las técnicas. Consideramos que este proceso limita la creatividad y autonomía por parte del estudiante y por eso optamos por el aprendizaje a través de la resolución de problemas, surgiendo éste de la experiencia directa y no de un proceso de memorización de conceptos.

Por ello, las actividades estarán diseñadas de manera que los estudiantes interactúen directamente con los conceptos a través de problemas que promuevan la exploración de diversas estrategias.

Respecto a los problemas que trabajaremos en clase, nos centraremos en la presentación de problemas de suelo bajo y techo alto, que permitirán que todos los estudiantes puedan comprender la tarea y trabajar en ella, además de que favorecen un proceso de profundización para los estudiantes que deseen explorar conceptos más complejos implicados en estos problemas.

Este enfoque garantiza que ningún estudiante quede excluido y que cada uno pueda progresar en función de sus habilidades y ritmo de aprendizaje.

Por último, respecto a la evaluación, realizaremos una **evaluación formativa**, centrándonos en el proceso seguido para resolver un problema más que en el resultado obtenido.

Ya hemos mencionado anteriormente que utilizaremos técnicas como la observación directa, además de analizar las soluciones y representaciones gráficas presentadas por los distintos grupos. A su vez, se incluye un apartado final de autoevaluación y reflexión sobre lo aprendido en el que los estudiantes podrán compartir un análisis sobre los conocimientos adquiridos y la estrategia que han utilizado como grupo para realizar la actividad.

La metodología propuesta tiene como objetivo que los estudiantes no solo aprendan el uso del número fraccionario, sino que desarrollen competencias esenciales como:

- El empleo de un pensamiento crítico.

- El trabajo en equipo.
- La resolución creativa de problemas (pudiendo aplicar varias metodologías).
- Habilidades de comunicación y representación matemática.

E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS

E.1 Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Atendiendo a la clasificación de los campos de problemas expuesta en el apartado A.3 incluimos en esta sección problemas relacionados con cada subapartado presente en el campo de problemas.

Problema tipo CP.1

Relacionando fracciones con distintas representaciones:

En este problema proporcionaremos a los alumnos el siguiente cuadrado mediante el que tendrán que emparejar las distintas formas de representar un mismo número fraccionario.

Posteriormente, se les pedirá que realicen libremente otra representación distinta contextualizada de los números fraccionarios que aparecen en la actividad.

Introducimos este problema para que los alumnos descubran que un mismo número fraccionario se puede representar de distintas maneras y que pueden aparecer diversas representaciones de ese número en la vida cotidiana, aspecto que fomenta una visión positiva de las matemáticas.

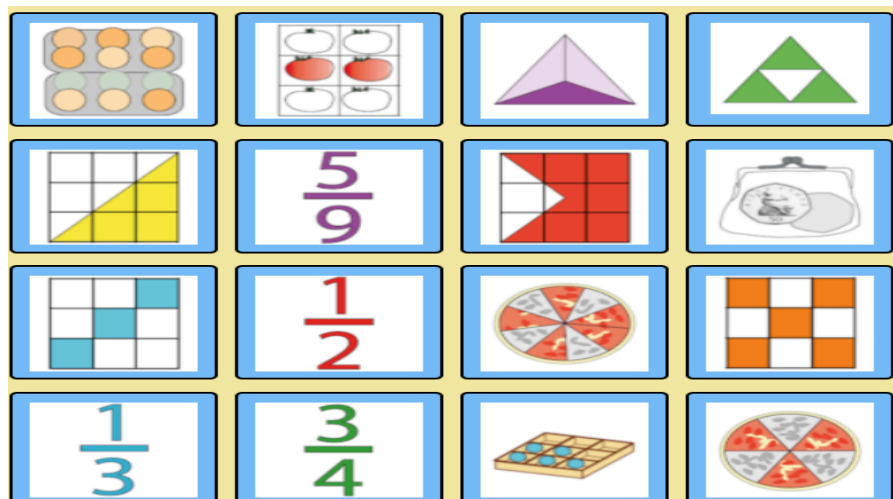


Figura 4. Problema extraído de Nrich.

Además, trabajaremos la representación de la fracción mediante actividades up and down, como se especifica en el currículo.

Empleamos este tipo de actividades para desligar el concepto de fracción de la idea de parte-todo.



Figura 5. Problema extraído actividades up and down, Domenech.

Debido a nuestro propósito de incorporar distintas concepciones sobre el número fraccionario presentaremos también ejercicios relacionados con la manera de medir que empleaban los egipcios, conectando el concepto de fracción con la medida y con una de las principales razones de ser históricas del número fraccionario:

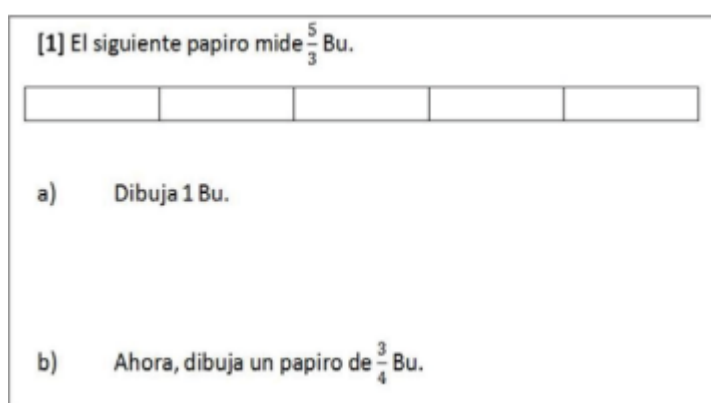


Figura 6. Problema extraído actividades up and down, Domenech.

Problema tipo CP2:

Se les entregará a los alumnos este gran cuadrado en una cartulina para que así puedan recortar los cuadrados pequeños y a partir de una serie de reglas formar otro

cuadrado grande.

Las reglas de unión son las siguientes:

- Solo se pueden unir cuadrados mediante fracciones equivalentes, es decir, todos los cuadrados pequeños presentan una serie de fracciones u operaciones con fracciones y para poder unir dos de ellos tendrán que tener en sus lados colindantes dos fracciones equivalentes.

De esta forma, estaremos trabajando de manera interactiva y manipulativa los conceptos de fracciones equivalentes, simplificación de fracciones y operaciones con fracciones.

Además realizaremos una pregunta extra para que los alumnos reflexionen de forma más profunda sobre el problema. La cuestión es:

¿Cómo creaste el puzzle? ¿Había distintas formas de hacerlo? ¿Cuáles fueron las primeras piezas que colocaste?

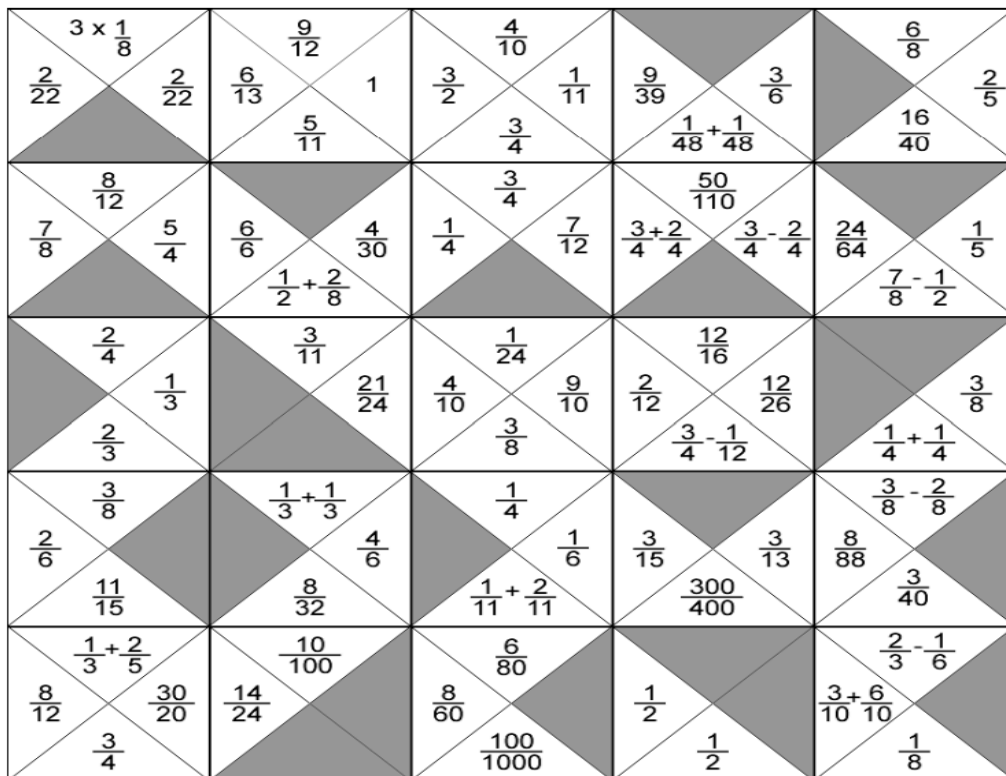


Figura 7. Problema extraído de Nrich.

Problemas tipo CP3:

Este tipo de problemas los trabajaremos a partir de ciertas preguntas abiertas o contextos amplios para que los alumnos se apoyen y puedan crear sus propias situaciones contextualizadas en las que se involucra el concepto de número fraccionario.

Posibles contextos para que los alumnos creen su propia situación de forma más detallada son:

- Feria gastronómica o concurso de cocina. De esta manera los alumnos deberán establecer fracciones para referirse a las cantidades utilizadas en la receta y trabajar el concepto de fracción como medida, reparto y operador.
- Fiesta de cumpleaños. Mediante este contexto los alumnos podrán ejemplificar el concepto de fracción como reparto.
- Las rebajas de navidad. Así trabajamos el concepto de fracción como operador y los porcentajes.

Estas son una serie de situaciones contextualizadas mediante las cuales los alumnos pueden abordar el empleo de las fracciones en situaciones cotidianas. Durante esta tarea ayudaremos al alumno en ese proceso de desarrollo de la situación a través de preguntas abiertas para que ellos mismos saquen conclusiones que les ayuden a avanzar en esta tarea.

Otro posible contexto a la hora de configurar una situación cotidiana en la que se empleen las fracciones será a través de ciertas operaciones con fracciones ya establecidas, es decir, incluimos una suma/resta o producto/división de fracciones y se les pedirá a los alumnos que diseñen una situación cotidiana que se pueda resolver a través de la realización de esa operación.

Problemas de tipo CP4 y CP5:

Presentaremos varios problemas contextualizados potenciando el entendimiento del papel de la fracción como reparto, parte de un todo, medida o porcentaje en situaciones de la vida cotidiana.

Por ejemplo posibles problemas a presentar en el aula serían:

problema 1: “El mejor pastel”

Con este problema trabajaremos el concepto de fracción como parte-todo y como operador de una cantidad o de medida.

El contexto que proporcionaremos a los alumnos será el siguiente:

Estás organizando una fiesta sorpresa y decides hornear un pastel especial para el cumpleaños de un amigo.

Cómo diseñarías el pastel en función de los sabores que quieras incluir en él (por ejemplo, chocolate, vainilla, fresa). Usa fracciones para mostrar las proporciones de cada sabor. No tienes porqué incluir la misma proporción de cada sabor. Representa gráficamente las proporciones de cada sabor empleadas para formar el pastel.

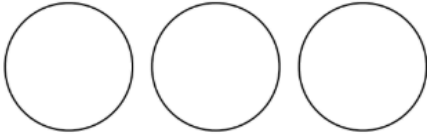
Pregunta extra: Si el pastel tiene un volumen de 5 litros, ¿qué cantidad de cada sabor necesitas? ¿Cómo cambiarían las fracciones presentes si decides añadir un sabor nuevo?

Problema 2: “ Problemas de reparto”

Problema 2.1:

- a) *Se reparten, en partes iguales, 3 tortillas entre 4 personas. Indica la cantidad de tortilla que recibe cada una de ellas. Realiza el reparto utilizando diversas técnicas.*
- b) *Se reparten, en partes iguales, 2 tortillas entre 5 personas. Indica la cantidad de tortilla que recibe cada una de ellas. Realiza el reparto utilizando diversas técnicas.*
- c) *Se reparten, en partes iguales, 5 tortillas entre 3 personas. Indica la cantidad de tortilla que recibe cada una de ellas. Realiza el reparto utilizando diversas técnicas.*

Reparto a)

Forma gráfica	Formas habladas	Formas simbólicas
	1 _____	1 _____
	2 _____	2 _____
	3 _____	3 _____

Reparto b)

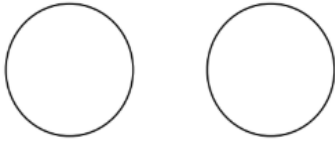
Forma gráfica	Formas habladas	Formas simbólicas
	1 _____	1 _____
	2 _____	2 _____
	3 _____	3 _____

Figura 8. Problema extraído de los apuntes de Didáctica de la Aritmética II.

Preguntas de reflexión: ¿Qué significa que dos repartos sean iguales? Explica justificadamente si repartir 2 pizzas entre 3 personas es lo mismo que repartir 6 entre 9 personas.

Problema 2.2: “Socializar repartos”

¿Qué significado le atribuyes a la fracción a/b ?

Si tenemos la fracción a/b y c/d , cómo podrías explicar el significado de la fracción $(a+c)/(b+d)$?

Pista: explicación de una fracción a través de un reparto, se trata de socializar repartos.

Problema 3: “El jardín de Silvia”

De medida.

Silvia tiene un jardín rectangular. Ella va a dividir su jardín en diferentes áreas para poder cultivar flores:

- Un tercio del jardín está plantado con tulipanes.

- Un cuarto está ocupado por rosas.

- La parte sobrante está destinada a girasoles.

1. ¿Qué fracción del jardín está destinada a los girasoles?

2. Si el área total del jardín es de 48 m^2 , ¿cuántos metros cuadrados ocupa cada tipo de flor?

3. (Pregunta extra) :Si Silvia quiere reducir el espacio de los tulipanes en $1/6$ del jardín, y emplear el área restante del jardín para plantar las rosas, girasoles y plantas aromáticas, teniendo en cuenta que Silvia quiere que rosas y girasoles tengan el doble de área restante que las plantas aromáticas ¿ cómo cambiarían las fracciones destinadas a cada tipo de planta?

Problema 4: “El problema de la herencia”

Problema de reparto presente en el libro: el hombre que calculaba.

Les presentaremos la siguiente situación a los alumnos:

Tres hermanos discuten por la forma más justa de repartirse la herencia que les dejó su padre. Él tenía 35 camellos y pretendía dejarle al mayor de los tres hermanos la mitad, al mediano la tercera parte y a el hermano más joven la novena parte. Los hermanos siguiendo las premisas de su padre proceden a realizar el reparto, pero ninguno queda contento con lo que le corresponde. ¿ Por qué?

De repente, llega un hombre y propone la siguiente idea:

Añadirá también su camello al reparto, por lo que contarán con 36 camellos para repartir. Al hermano mayor entonces le corresponderá _ camellos y quedará satisfecho, el mediano recibirá _ camellos y estará contento con el reparto y por último al más joven le asignan _ camellos sintiéndose por su parte también beneficiado.

Lo más curioso es que sobran 2 camellos, por lo tanto el hombre que les ayudó en el reparto recibe un camello extra por haber realizado un reparto en el que los tres hermanos se sienten beneficiados respecto al reparto inicial. ¿ Podrías explicar por qué los hermanos quedan contentos de esta forma y además al hombre que realiza el reparto le pueden dar un camello extra? ¿ Qué estaba sucediendo con el reparto inicial y cómo lo soluciona el hombre que propone este nuevo reparto? ¿Hay algún aspecto que los hermanos nunca tuvieron en cuenta respecto a la forma escogida por su padre de repartir la herencia? ¿ Existe algún tipo de relación numérica entre 36, 9, 2 y 3? Es decir, es casualidad que el hombre para resolver este problema de reparto decidiera repartir un camello más?

Problema 5: “Las rebajas en el corte inglés”

Durante el mes de rebajas en una tienda de ropa, los descuentos cambian cada semana, y algunos artículos tienen descuentos acumulables. Esta es la información sobre tres productos que interesan a Laura:

1. Un abrigo cuesta originalmente 80 €, y tiene un descuento inicial del 25%. Además, si compras el abrigo un martes, te hacen un 10% adicional sobre el precio ya rebajado.
2. Unos vaqueros tienen un precio original de 60 €, pero la tienda ofrece un descuento especial del 60% si los compras junto con cualquier otro artículo.

3. Unos zapatos cuestan 100 € con un descuento inicial del 20%, y si pagas con tarjeta de fidelidad, te hacen un 5% adicional sobre el precio final (el precio al que se le aplica la primera rebaja).

I) ¿Cuál sería el precio final de cada artículo, considerando los descuentos acumulados?

II) Si Laura dispone de 150 €, ¿qué combinación de artículos podría comprar? ¿Le sobraría dinero?

Preguntas extra:

I) Diseña una estrategia para que Laura aproveche al máximo su presupuesto y consiga la mayor cantidad de productos posibles.

II) Si los descuentos acumulables del abrigo y los zapatos fueran al revés (primero el menor descuento y después el mayor), ¿ el precio final sería el mismo? Justifica tu respuesta.

Problemas tipo CP:4.2:

Introduciremos varias progresiones de fracciones para que los alumnos descubran cómo se obtiene un término de la serie a partir de los anteriores. Como actividad de mayor profundización se les pedirá que generalicen la fórmula para hallar cualquier término a partir de los anteriores, configurando este problema uno de suelo bajo-techo alto.

Ejemplos:(i) Halla el término faltante de las series de fracciones siguientes.

(ii) ¿ podrías encontrar una relación entre términos que te permita hallar cualquiera de la serie?

Pista: para el apartado (ii) considera la opción de utilizar operaciones de fracciones entre los términos anteriores para hallar el siguiente.

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, _, \frac{1}{9}$.
2. $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, _, \frac{5}{2}$.
3. $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{11}{12}, \frac{14}{12}, _$.
4. $\frac{5}{7}, \frac{3}{2}, \frac{15}{14}, _$.

E.2 ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

No consideramos que se necesiten emplear modificaciones de la técnica inicial. Nuestro objetivo principal es la consecución de un pensamiento crítico y el desarrollo de la creatividad a través de la resolución de problemas que fomenten un proceso de razonamiento más profundo. Nos alejamos con este enfoque de la manera tradicional de presentar esta unidad didáctica, presente en algunos libros de texto analizados. Buscamos que los alumnos adquieran una serie de conceptos matemáticos a través de enfrentarse a problemas contextualizados, por lo que no incluimos “problemas” de aplicación directa de las técnicas.

Cabe destacar, que entendemos por problema una situación que requiere ser resuelta e implique un desafío que tenga que ser abordado a través de un proceso de reflexión previo. Por lo tanto asociamos al término problema aquella tarea que requiere que el alumno ponga en juego sus conocimientos y habilidades para encontrar una solución.

Por lo que, en principio no consideramos necesario realizar ninguna modificación inicial de la técnica, si no que a través de la observación directa en el proceso de resolución de los problemas, podremos aclarar algún concepto específico, en caso de ser necesario.

E.3 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología que empleamos para la consecución de un aprendizaje significativo es el aprendizaje a través de la resolución de problemas, centrándonos especialmente en fomentar el desarrollo de un trabajo cooperativo y de un pensamiento crítico por parte del alumno. Por ello, lo habitual será la realización de estas actividades en grupos pequeños, prestando especial importancia al proceso seguido para realizar el problema y a su representación gráfica. Además al tratarse de problemas más abiertos realizaremos una actividad de reflexión final, en el que participarán los distintos grupos, extrayendo conclusiones sobre lo aprendido así como realizando una institucionalización de los conceptos empleados.

F. SOBRE LAS TÉCNICAS

F.1 Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

Recordamos que las técnicas empleadas en esta unidad didáctica las expusimos en el apartado A.3 de este trabajo.

A continuación, exponemos una serie de ejercicios para que los alumnos trabajen las distintas técnicas.

Ejercicios asociados a T1:

Presentaremos una serie de ejercicios para que los alumnos adquieran los conceptos de representación gráfica de una fracción como resultado de un reparto, parte-todo, medida o porcentaje.

Un ejercicio para que relacionen el concepto de fracción con el del número decimal, el porcentaje y la representación como parte de un todo, sería el siguiente:

Clasifica por colores las siguientes representaciones, otorgando el mismo color a aquellas que representen la misma cantidad:


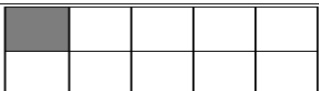



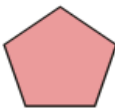
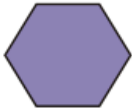





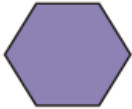
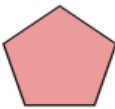

$\frac{1}{2}$	0.75	30%
10%	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$
25%	0.3	
	0.5	
$\frac{9}{10}$	70%	0.9
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{100}$	0.8
80%	0.7	0.6
20%	$\frac{3}{5}$	0.01

Figura 9. Relación fracción, porcentajes y concepto parte-todo.

También incluimos este ejercicio extraído de la Editorial Marea Verde, para que trabajen la representación gráfica de una fracción, estableciendo divisiones de la unidad:

Copia en tu cuaderno y divide adecuadamente cada una de las siguientes figuras para poder destacar, en cada caso, la fracción indicada:

a) $\frac{1}{2}$	b) $\frac{3}{4}$	c) $\frac{2}{5}$	d) $\frac{3}{6}$
			
e) $\frac{7}{7}$	f) $\frac{1}{4}$	g) $\frac{2}{3}$	h) $\frac{3}{4}$
			
i) $\frac{4}{9}$	j) $\frac{1}{4}$	k) $\frac{7}{10}$	l) $\frac{5}{8}$
			

Señala diferentes acciones que obliguen a repartir, o subdividir, cierto objeto, ente o actividad.

Encuentra situaciones de la vida cotidiana en las que aparezcan fracciones.

Figura 10. Actividad extraída de editorial Marea Verde, 2022.

Se les pedirá a su vez que realicen representaciones gráficas de los problemas contextualizados presentados en clase, así que esta técnica la trabajaremos con distintos tipos de ejercicios y con ciertos problemas en los que interviene la fracción como resultado de un reparto, parte-todo, medida y porcentaje.

Ejercicios asociados a T2 y T4:

Presentaremos varios tipos de ejercicios para trabajar la comparación de fracciones:

Tipo 1:

Ejercicios contextualizados en los que se tenga que realizar una comparación de fracciones. Por ejemplo:

Pablo y Marta están leyendo el mismo libro y quieren comprobar quién ha leído más. Pablo asegura haber leído las tres cuartas partes del libro, mientras que Marta dice llevar leídas $\frac{7}{12}$ del libro. ¿Quién ha leído más?

Si el libro tiene 228 páginas, ¿cuántas páginas les quedan por leer a ambos?

Tipo 2:

Comparación de fracciones con representación gráfica.

Compara los siguientes tipos de fracciones (de manera gráfica y también a través de la expresión como número fraccionario)

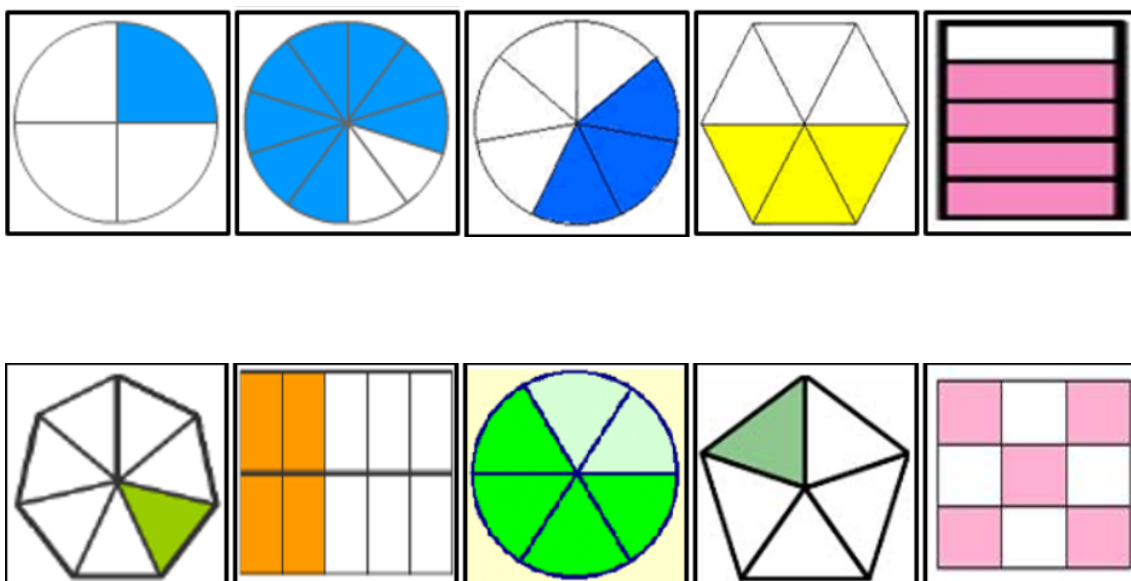


Figura 11. Representación gráfica de fracciones.

También emplearemos la recta para establecer comparaciones entre números fraccionarios, adquiriendo el concepto de racional como un conjunto numérico que amplía el de los naturales y es idóneo para representar magnitudes continuas.

Además se realizarán comparaciones también atendiendo al numerador y denominador de las fracciones que aparezcan.

Para trabajar las técnicas **3,5,6,7** presentaremos una serie de ejercicios contextualizados en la vida real en los que se empleen las distintas acepciones ligadas al número fraccionario. Constituirán ejercicios para trabajar inicialmente las técnicas como base previa a los problemas contextualizados que presentaremos.

Nuestra intención será presentar los conceptos a través de la resolución de actividades contextualizadas en la vida real.

Ejercicios para trabajar la suma de fracciones:

Rafa y Juan decidieron ahorrar la misma cantidad de dinero (60 €) para comprar unos libros que pudieran leer los dos. Finalmente acordaron que Rafa debía de poner $\frac{2}{5}$ partes de sus ahorros mientras que Juan pondría $\frac{2}{3}$ para comprar el material. Si los libros valen 55 €, ¿les llegará con lo que han puesto? ¿Quién ha contribuido más para comprar los libros?

Ejercicios contextualizados para trabajar la multiplicación de fracciones:

Un campo de fútbol está cubierto por césped en $\frac{4}{5}$ de su área. Si de esa área, $\frac{3}{4}$ se riega con aspersores automáticos, ¿qué fracción del campo total está regado automáticamente?

Juan prepara una tarta para que coma su familia. La primera en llegar es su hermana Marta, que come la mitad de la tarta. Su madre decide comer $\frac{1}{3}$ de lo que queda para que puedan comer a partes iguales Juan y su padre. ¿Cuánto come cada uno?

Ejercicios para trabajar la división de fracciones:

Julia tiene $\frac{11}{12}$ de metro de cinta y necesita cortar trozos de $\frac{1}{3}$ de metro para decorar tarjetas. ¿Cuántos trozos puede cortar?

Un proyecto requiere $\frac{7}{8}$ de hora para completarse. Si una persona solo puede trabajar en intervalos de $\frac{1}{6}$ de hora. ¿Cuántos intervalos se necesitan para completar el proyecto?

F.2 ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Ya respondido en el apartado F.1

F.3 Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Si, como se puede observar en anteriores apartados las técnicas presentadas van en relación con los campos de problemas establecidos en esta unidad.

Por otra parte, en algunas tareas será necesaria la aplicación de varias técnicas, ya que nos centramos en exponer problemas que incentiven un proceso reflexivo para su resolución y en los cuáles el alumno puede barajar distintas formas de tratar el problema, no limitándose a la presentación de ejercicios de aplicación directa de las técnicas.

F.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología adoptada es a través de la resolución de problemas, presentaremos diversos tipos de problemas en el aula con el objetivo de que mediante su resolución se vayan trabajando de manera implícita ciertos conceptos que queremos incluir en las sesiones y cuyo proceso de institucionalización se llevará a cabo al final de la clase, guiado por el profesor con la participación de la clase.

Los conceptos trabajados en el aula se incluirán posteriormente en la plataforma utilizada (Teams o Google Classroom) para que los alumnos puedan revisarlos siempre que quieran y trabajarlos con las tareas para realizar fuera del aula.

G. SOBRE LAS TECNOLOGÍAS

G.1 ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

Justificamos las técnicas a partir de las tecnologías expuestas en el apartado A.3.

G.2 ¿ Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Nuestra intención es que mediante la implementación de los distintos campos de problemas y técnicas los estudiantes asuman la tarea de justificar las técnicas en el proceso de resolución de dichas actividades. Además, cuentan con el docente como guía en este proceso, por otra parte al final de la clase se incluye un apartado de reflexión final sobre lo aprendido, en el que se justifican las técnicas en grupo, con la supervisión del profesor.

G.3 Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Los momentos de institucionalización serán posteriores a la realización de los problemas, este proceso surge gracias a haberse enfrentado previamente a los problemas y haber desarrollado ciertas estrategias para resolverlos. Tratamos de involucrar al

alumnado en la institucionalización como consecuencia de su propio proceso de aprendizaje, se busca llegar a través de una reflexión grupal a la justificación de las técnicas utilizadas en la resolución de los problemas propuestos, contando siempre con la guía por parte del docente. Estableciendo un intercambio de ideas y un debate.

G.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología a seguir en la implementación en el aula de los distintos tipos de actividades será la siguiente:

Comenzaremos la clase realizando una serie de preguntas que sirvan como introducción de la presentación del concepto que queremos trabajar. Incentivamos a los alumnos con ello a realizar un proceso de pensamiento previo relacionado con las actividades que vamos a trabajar en el aula.

Posteriormente, entregaremos una serie de problemas abiertos para que los alumnos puedan trabajar una serie de técnicas a través de la resolución de problemas. Estas técnicas irán descubriéndose progresivamente conforme vayan enfrentando los problemas. Además implementamos tareas ricas y abiertas que fomenten la aparición de distintas respuestas y técnicas donde emerjan oportunidades de aprendizaje.

En el proceso de resolución de los problemas iremos observando los procedimientos empleados por los distintos grupos y guiándolos a través de la elaboración de preguntas abiertas, para que una vez que hayan sido resueltos se lleve a cabo un proceso de institucionalización de las técnicas utilizadas, en el que los alumnos vayan explicando el su resolución e incluyendo representaciones gráficas que respalden el razonamiento. El profesor podrá realizar preguntas a determinados miembros del grupo, con el objetivo de promover una mayor reflexión.

Además se incluyen preguntas relacionadas con lo aprendido en la sesión que inviten a una reflexión individual que complementa la grupal.

Por otra parte, para realizar una correcta gestión en el aula de los momentos de institucionalización, nos basaremos en las 5 actuaciones clave para la gestión de intervenciones en el aula, como vimos en la asignatura de Diseño Curricular e Instruccional de las Matemáticas:

1. Anticipar probables respuestas de estudiantes a tareas matemáticas. El profesor debe prever todas las técnicas, correctas o incorrectas, que pueden usarse para resolver la tarea y cómo se relacionan con los contenidos a aprender.
2. Monitorizar las respuestas reales de los estudiantes a las tareas. El docente presta atención a las diferentes estrategias que se están empleando y las apunta en la pizarra.
3. Seleccionar a estudiantes particulares para que presenten su trabajo matemático durante la discusión de toda la clase.
4. Secuenciar las respuestas de los estudiantes en un orden específico. Es importante ordenarlas adecuadamente para favorecer la aparición de oportunidades de aprendizaje y lograr sus metas matemáticas para el debate.
5. Conectar las diferentes respuestas de los estudiantes y vincularlas con las ideas matemáticas clave. El profesor puede ayudar a sus estudiantes a reflexionar sobre las consecuencias de la aplicación de distintas estrategias a la gama de problemas que pueden resolverse.

H. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

Según el currículum aragonés, se establecen 4 sesiones de 50 minutos semanales de la asignatura de matemáticas. Por lo que al impartir la unidad didáctica en 11 sesiones diferenciadas destinamos 2 semanas y media para poder explicar el uso del número fraccionario, además de una sesión de corrección para que los alumnos tengan un feedback de su prueba escrita, promoviendo la concepción del error como una parte más en el proceso educativo.

H.1 Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

Planeamos emplear 10 sesiones para introducir en el aula la unidad didáctica del uso del número fraccionario. Entre esas sesiones, destinamos la primera para realizar una prueba diagnóstica y verificar si se alcanzaron los objetivos previstos en la enseñanza anterior y una última en la que los estudiantes completarán una prueba escrita configurando una parte más de la evaluación continua, mediante la cual podremos comprobar si se han alcanzado los objetivos de aprendizaje establecidos en esta unidad didáctica. Incorporamos una sesión extra (sesión 11) para que los alumnos

puedan, a través de un feedback, reconocer los criterios de evaluación establecidos en la prueba escrita.

Incluimos una tabla en la que especificamos los campos de problemas trabajados durante las sesiones destinadas al trabajo de esta unidad didáctica.

Sesión	Contenido	Campo de problemas	Problemas y ejercicios trabajados
1	Sesión inicial	Actividad apartado C.3	La feria gastronómica
2	Representación gráfica de la fracción (ejemplos vida cotidiana y porcentajes)	C.P.1	Relacionando fracciones, relación con porcentajes
3	Representación gráfica de la fracción (sentido de la medida)	C.P.1	Actividades up and down, actividades relacionadas con la medida de los egipcios (Bu)
4	Fracciones equivalentes	C.P.2	Formación de un gran cuadrado, a partir de unas reglas de unión
5	Inención de problemas a partir de una operación o contexto en los que intervenga el concepto de fracción	C.P.3	Problemas a partir suma/resta de fracciones, o un contexto
6	Problemas contextualizados (I)	C.P.4.1	suma, resta de fracciones
7	Problemas contextualizados (II)	C.P.4.2	producto y división de fracciones
8	Problemas contextualizados (III)	C.P.5	problemas trabajo concepto de fracción como medida, reparto, parte-todo y

			porcentajes
9	Scape room	C.P.1, C.P.2, C.P.4, C.P.5	Revisión de los conceptos aprendidos
10	Prueba escrita	C.P.1, C.P.2, C.P.3, C.P.4, C.P.5	Series de fracciones, comparación, creación de situaciones contextualizadas, problemas de medida y de reparto.
11	Corrección prueba escrita		Proceso de feedback

Tabla 4. Secuencia didáctica y cronograma

A continuación detallaremos cada una de las sesiones especificadas en la tabla, así como las actividades trabajadas en clase, la forma en la que las introduciremos y los objetivos educativos que pretendemos que los alumnos adquieran a lo largo de las distintas sesiones.

Sesión 1:

La sesión 1 constituirá la manera de comprobar que los alumnos han alcanzado los objetivos previos establecidos en el currículo de primaria de Aragón (Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio) y especificados en el apartado C.1.

Lo primero que haremos será realizar una comprobación, a través de unas preguntas previas, sobre la concepción que tienen los estudiantes de las fracciones, trabajando la fracción como resultado de una medida, reparto y el concepto de parte-todo. Una vez habiendo presentado y debatido sobre estas preguntas iniciales pasamos a la actividad central de esta sesión.

Para ello dividiremos a los alumnos en pequeños grupos de unos 3-4 integrantes. Presentaremos inicialmente la situación descrita en la actividad “La feria gastronómica”, por lo que cada grupo representará un puesto con una función dentro de esta feria. Existen distintos puestos, dependiendo del número de grupos establecido, como pueden ser: el puesto de pasteles, el de fruta, limonada, etc.

En este contexto surge de manera natural el empleo del número fraccionario, trabajando una situación contextualizada con fracciones en las que tendremos que resolver preguntas relacionadas con medidas de cantidades, repartos, etc.

Finalmente los grupos expondrán sus propuestas a las distintas preguntas planteadas, acompañadas de alguna representación gráfica que respalde su razonamiento. Terminaremos la clase con una reflexión grupal sobre el papel de la fracción en esta situación y cada estudiante deberá de contestar a unas preguntas de manera individual a modo de reflexión personal.

Esta sesión constituirá una prueba inicial sobre los conocimientos previos del alumno, valorando tanto el trabajo en grupo, la exposición de sus propuestas incluyendo la representación gráfica, como la reflexión grupal y la individual que nos llevaremos a casa para poder observar la concepción que tienen los estudiantes sobre el término de fracción.

Las preguntas que se incluyen en el apartado de reflexión individual, para que los alumnos detallen sus propias concepciones sobre la fracción son:

1. ¿Qué distintos significados podríamos atribuirle a la fracción $\frac{2}{3}$? ¿Cómo describirías una situación cotidiana en la que tuvieras que emplear dicho término?
2. ¿En qué situaciones del día a día crees que se usan las fracciones? ¿Puedes ejemplificar varias situaciones distintas en las que se empleen las fracciones?
3. ¿Qué te viene a la mente cuando escuchas el término "fracción"? ¿Un número, una figura, una acción...?
4. ¿Es una fracción siempre una parte más pequeña que el todo? ¿Podrías pensar en un ejemplo donde esto no sea cierto?
5. ¿Crees que una fracción como $\frac{3}{2}$ puede tener sentido en un problema real? ¿Cómo la interpretarías?

Sesión 2:

En esta sesión nos centraremos en la representación gráfica de fracciones. Una vez realizada la actividad inicial en la que incluimos un apartado de representación gráfica de las propuestas realizadas, trabajaremos las distintas formas en las que se puede representar una fracción con ejemplos de la vida cotidiana.

Para ello entregamos a todo alumno la cartulina mencionada en el apartado E.1 de campos de problemas (figura 4) en la que aparecen distintas representaciones de una fracción:

Se les pedirá a los alumnos que rodeen del mismo color aquellas formas de representar la misma cantidad. Por último animamos a los alumnos a que representen gráficamente de manera distinta las siguientes fracciones: $1/2$, $3/4$, $5/3$. Para la representación de estas fracciones pueden utilizar ejemplos presentes en la vida cotidiana.

En esta sesión también presentaremos otro ejercicio para que podamos introducir la relación entre fracción y porcentaje, para ello trabajaremos con porcentajes que aparecen de manera frecuente en situaciones cotidianas (divisiones de la hora, cantidades en bidones,etc.) y que nos permitirán realizar un proceso de institucionalización del término al final de la actividad. Entregaremos a los alumnos una ficha que incluya la actividad presentada en el apartado de técnicas (figura 9).

Mandaremos como tarea la realización de dos actividades relacionadas con la representación gráfica de fracciones, apartado técnicas F.1 (figuras 10 y 11), para que así los alumnos puedan profundizar más en este concepto. Además dichas actividades configuran una pequeña introducción para una tarea de mayor profundización que trataremos en la siguiente sesión.

Sesión 3:

Comenzaremos la sesión con una puesta en común de las actividades que mandamos como tarea, pudiendo comprobar el grado de asimilación de la sesión anterior.

La actividad central será la presentación de las actividades up and down (Domenech,2019) para desligar el concepto de fracción de la idea de parte-todo.

Trabajaremos en grupos dichas actividades mencionadas en el apartado E.1 de campos de problemas, (figura 5).

Explicaremos al final de la clase el empleo de las fracciones en el antiguo Egipto y presentaremos una actividad como trabajo para casa, relacionada con la forma de medición que empleaban los egipcios (apartado E.1, figura 6).

Sesión 4:

Gracias al trabajo de la anterior sesión introdujimos alguna pregunta en el apartado de reflexión final sobre la relación entre las fracciones $\frac{7}{5}$ y $\frac{14}{10}$. Además de colgar como material un ejercicio en el que se debía de realizar una comparación entre dos amigos que habían leído las $\frac{3}{4}$ partes y $\frac{6}{8}$ partes de un libro presentando indirectamente el concepto de fracciones equivalentes, lo que nos permite destinar la sesión 4 a:

-realizar en conjunto una pequeña introducción sobre el término de fracciones equivalentes.

-Abordar la actividad principal, la formación de un gran cuadrado a través de cuadrados más pequeños que pueden ser unidos juntando los lados que contengan fracciones equivalentes. (Figura 7).

Esta actividad manipulativa la llevaremos a la práctica en grupos de 4 estudiantes. Los grupos tendrán que explicar al final de la clase qué estrategia siguieron para formar el cuadrado y se les preguntará si existen más formas de obtener ese gran cuadrado cambiando su estructura y qué estrategias utilizaron en el inicio de la confección del gran cuadrado.

Con esta actividad abordaremos el concepto de fracciones equivalentes, además de trabajar la simplificación, la adicción y sustracción de fracciones.

Sesión 5:

Tras haber tratado en clase la representación gráfica de fracción como parte-todo, en problemas de medida, reparto y su relación con los porcentajes, en esta clase propondremos encontrar situaciones contextualizadas en las que el uso de la fracción permite encontrar la solución al problema.

A partir de un contexto dado, como puede ser el ya trabajado en la sesión 1, una fiesta de cumpleaños, un campeonato deportivo, etc. Se pretende que los alumnos divididos en grupos creen un problema contextualizado en el que a través del concepto de fracción resuelvan la situación planteada inicialmente.

En este caso, nuestro papel será ir guiando a los alumnos en su proceso de invención de la situación, además de realizar algunas preguntas relacionadas con el problema creado que les permitan reflexionar de manera más profunda.

También se les pedirá que creen un problema a partir de una suma o resta de fracciones, que se resuelva realizando dicha operación.

Por último se les animará a que piensen para la siguiente sesión un posible contexto de la vida cotidiana en el que intervenga la multiplicación/ división de fracciones.

Todos los problemas inventados deberán de ir acompañados de una representación gráfica a modo de resolución de dicha situación.

Sesión 6:

Iniciaremos la clase con un debate sobre la pregunta final de la sesión anterior. De esta manera expondremos una serie de problemas contextualizados relacionados con áreas, repartos, de medida, etc. en los que intervenga el producto/división de fracciones.

Por último, presentaremos unos problemas en los que se trabaje la suma, resta, producto y división de fracciones. Los alumnos dispondrán de un tiempo para realizarlos en clase.

Algunos de estos problemas mencionados son los incluidos en el apartado D.3 como los titulados : “El tesoro de la isla”, “El club de aventuras” y “Creando un mural”, constituidos en algunas de las razones de ser históricas del número fraccionario.

Se entregará como tarea series de fracciones en las que los alumnos deberán identificar la relación entre sus términos. (progresiones expuestas en el C.P 4.2 del apartado E.1)

Sesiones 7 y 8:

Sesión 7:

Iniciamos la clase con la puesta en común de los problemas contextualizados de la sesión anterior, también abordaremos el ejercicio de las series de fracciones realizando las siguientes preguntas a modo de debate sobre la actividad:

-¿ Qué relación existe entre los términos de la serie?

-¿Podrías generalizar dicha relación para hallar cualquier término a través de los anteriores?¿ Cómo lo escribirías?

Sesión 8:

Se les entregará una ficha con problemas contextualizados que trabajen las distintas acepciones de la fracción para que los resuelvan por parejas de dos.

En dicha ficha aparecerán problemas como los mencionados en el apartado E.1 campos de problemas : “El mejor pastel”, “Problemas de reparto”, “ El jardín de silvia” , “ El problema de la herencia”, “ Rebajas en el corte inglés”.

Cómo incluimos varias situaciones en los que intervenga la fracción en problemas de medida, reparto, como parte-todo y porcentajes, destinamos dos sesiones (7 y 8) para que los estudiantes vayan resolviendolos y poder poner en común las conclusiones obtenidas.

Sesión 9: Scape room

Adjunto la descripción realizada de la sesión que realicé en mi período del practicum II, en el que tuve la oportunidad de impartir las unidades didácticas de operaciones con fracciones y proporcionalidad.

Incluyo también como ejemplo de posible scape room el que realizamos en dicha sesión. Lo incorporó para mostrar cómo podría ser presentada esta actividad en el aula, pudiendo modificar las tareas presentes en función de los contenidos que se quieran trabajar.

El objetivo de esta sesión es la realización de un repaso de los conceptos trabajados, a partir de una situación que fomente la participación y el interés del alumno, de forma que los estudiantes trabajen por equipos los conceptos presentados en clase mientras superan un scape room.

Extraído de mi practicum II:

Para esta última sesión opté por realizar un scape room, para poder trabajar todo lo visto anteriormente y potenciar esa visión de las matemáticas como un todo integrado. Por lo que adapté el scape room y las pruebas a un contexto que les resultase familiar y entretenido a los estudiantes como es el mundo de Harry Potter. Diseñe una serie de pruebas para que por grupos tuviesen que hallar un código que les permitiese escapar de la prisión de Azkaban. Los noté especialmente participativos y predispuestos a realizar las actividades y trabajar en grupo. Supongo que el motivo principal fue que se introdujo una actividad distinta a lo que están acostumbrados a realizar en clase,

aspecto que llamó su atención y les envolvió en el objetivo de completar la actividad.

Adjunto el enlace para visitar el escape room :
<https://view.genially.com/663cda0c44a98f0014e4f059/interactive-content-escape-room-harry-potter-matematicas-1o-eso>

Sesión 10: prueba escrita.

En el siguiente apartado detallamos la prueba escrita que presentaremos en clase.

Sesión 11: Revisión prueba escrita.

En la siguiente sesión realizaremos una revisión grupal de la prueba escrita, además cada alumno contará con un feedback en función de sus respuestas.

Tenemos en cuenta que para que el feedback en este contexto sea efectivo es necesario que se cumplan una serie de condiciones. Se ha demostrado que produce efectos positivos en la mejora de rendimiento y motivación de los estudiantes cuando en él solo se incluyen comentarios y no calificaciones. Lee (2017) sugiere que los comentarios estén centrados en los objetivos de aprendizaje o en aspectos de la tarea, pero no en el propio estudiante, si no que hagan referencia al aprendizaje que se ha debido realizar y que se eviten los elogios. Del mismo modo, señala la importancia de darlo en un momento adecuado para que pueda ser empleado por el estudiante en la mejora de su aprendizaje.

La estructura que incluiremos en nuestro feedback consta de tres partes: un primer párrafo sobre lo solicitado por la tarea o problema en relación con los objetivos de aprendizaje y los criterios de logro establecidos; un comentario posterior que describa la producción del estudiante y que indique dónde se encuentra respecto a esos objetivos y finalmente, una tercera parte en la que se especifique al estudiante posibles caminos para mejorar y de qué manera puede llegar a la meta, generalmente en forma de cuestión que el estudiante comprenda y deba contestar. No incluiremos en el comentario la solución a la tarea, aunque en ocasiones, para facilitar la comprensión de la cuestión lanzada, la acompañaremos de posibles ejemplos concretos o casos particulares (Santos 2011).

De esta manera facilitamos la asimilación del error como una parte más del proceso de aprendizaje del alumno, fomentando una visión más positiva de éste.

I. Sobre la evaluación

I.1 Diseña una prueba escrita que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

1. (i) Escribe el término que falta de las series de fracciones:

Nota: Para hallar los siguientes términos de la serie deberás explorar la posibilidad de que se obtengan a partir de operaciones con fracciones.

- $1/2$, $1/4$, $_$, $1/8$, $1/10$.
- $2/3$, $5/4$, $23/12$, $_$, $61/12$.
- $3/5$, $5/3$, 1 , $5/3$, $5/3$, $25/9$, $_$.

ii) ¿podrías obtener una generalización para hallar cualquier término a partir de los anteriores? Expresa dicha relación presente en la serie.

2. En una tienda de discos tienen la quinta parte de los discos de música clásica, $2/3$ sobre música moderna y el resto relacionados con música infantil. ¿De qué tipo de música hay más discos?

Se valora la realización de una representación gráfica.

3. Actividad up and down.

[9] La siguiente barra representa una longitud de $\frac{3}{4} km$.



a) Haz la representación gráfica de una carrera en la que hay que recorrer $\frac{9}{4} km$. Píntala en rojo.

b) Haz la representación gráfica de una carrera en la que hay que recorrer $\frac{5}{2} km$. Píntala en azul.

c) Haz la representación gráfica de una carrera en la que hay que recorrer $\frac{11}{8} km$. Píntala en negro.

Figura 12. Actividades up and down, Domenech.

4. Inventa un problema contextualizado en la vida real que pueda resolverse a través de la división de dos fracciones (con denominador distinto de 1 ambas) y resuélvelo.

5. “El reparto de la pizza”

Tres amigos compraron una pizza y tienen que dividirla. Juan quiere un tercio de la pizza, Ana comerá un cuarto, y Pedro solo quiere la sexta parte. Cuando hacen el reparto, se dan cuenta de que les sobra una porción de pizza.

i) ¿Qué ha podido suceder?

ii) ¿Cómo podrían redistribuir la pizza para que no sobrase ninguna porción y Pedro comiese por lo menos la mitad que Juan?

Pista: puedes modificar la proporción de pizza que comerán inicialmente, pero no puede sobrar ninguna porción de pizza y Pedro tiene que comer por lo menos la mitad de lo que va a comer Juan, teniendo en cuenta que Ana tiene que comer pizza también, es decir Ana no se puede quedar sin comer.

1.2 ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretende evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

En este apartado exponemos las competencias específicas que se pretenden evaluar además de los criterios de evaluación asociados a estas competencias presentes en la evaluación de la prueba.

- **CE.M.1.** Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.

1.1. Interpretar problemas matemáticos organizando los datos dados, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.

1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.

- **CE.M.2.** Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e

idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.

2.1. Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.

- **CE.M.3.** Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.

3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.

3.2 Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema.

- **CE.M.4.** Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.

4.1. Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional.

- **CE.M.5.** Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.

5.1. Reconocer y usar las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas formando un todo coherente.

5.2. Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias

- **CE.M.6.** Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.

6.1 Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir

- **CE.M.7.** Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.

7.1 Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.

7.2 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información.

- **CE.M.8.** Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.

8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor

- **CE.M.9.** Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.

9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos.

9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.

Además la **C.E.M.10** la hemos trabajado en el transcurso de las distintas sesiones al incluir el trabajo cooperativo en distintos grupos.

I.3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Ejercicio 1:

(i) $1/6 \cdot 38/12 = 19/6$. $125/27$.

(ii) Lo más interesante del ejercicio es que el alumno pueda escribir de forma matemática las relaciones que observa en las tres series, aceptando también una buena explicación de la relación entre términos, aunque no utilice parte de la notación.

1 serie: Se valorará que el alumno sea capaz de reconocer que el término general se obtiene a partir de la fracción de numerador: 1 y denominador: $2 * \text{la posición que ocupa}$. Transcrito a lenguaje matemático: $a_n = 1/(2*n)$ siendo n un número natural.

2 serie: Se pretende que el alumno reconozca la presencia de una suma entre los dos términos anteriores para obtener el siguiente término. Es decir, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

3 serie: Se pretende que el alumno reconozca el empleo de un producto entre los dos términos anteriores para obtener el siguiente término. Es decir, $a_n = a_{n-1} * a_{n-2}$.

Ejercicio 2:

Introducimos este ejercicio para que el alumnado pueda realizar una comparación de fracciones a través de un problema contextualizado en la vida cotidiana.

Una respuesta correcta por parte del alumno debería de tener la siguiente estructura:

1/5 discos sobre música clásica

2/3 música moderna

$1 - (1/5 + 2/3) = 2/15$ música infantil.

Para realizar la comparación se admiten los siguientes procesos:

- Comparación mediante una representación gráfica de las tres fracciones.
- Comparación mediante la recta numérica.
- Comparación mediante reducción a común denominador.
- Comparación mediante numerador y denominador de las tres fracciones. ($2/3 > 2/15$ por el denominador y $2/3 > 1/5$ numerador más grande y denominador más pequeño). Resultado: los discos de música moderna son los predominantes en la tienda.

Ejercicio 3:

Incluimos este ejercicio para que los alumnos trabajen la representación gráfica de un número fraccionario a través de la identificación de partes equitativas que configuren el

número representado, potenciando la asimilación del concepto de fracción como medida de una magnitud.

Algunas respuestas correctas por parte de los estudiantes:

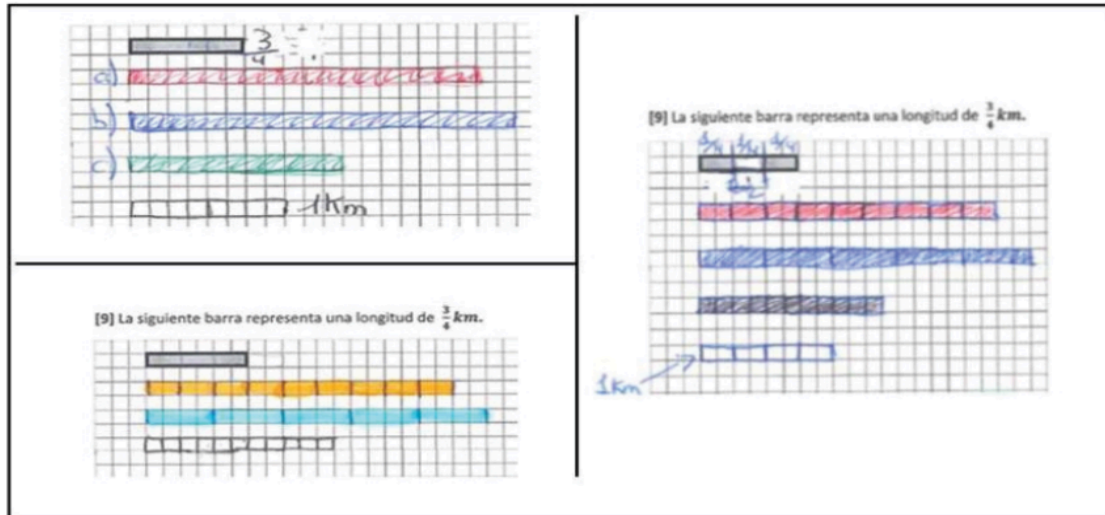


Figura 13. Actividades up and down, Domenech.

Ejercicio 4:

Este ejercicio se trata de una actividad de respuesta más libre, dando lugar al desarrollo de la creatividad. Se espera que los alumnos introduzcan distintas situaciones relacionadas con problemas de medida (áreas, volúmenes, etc), problemas en los que intervenga la razón entre dos cantidades, como algunos de los presentados durante las sesiones destinadas a esta unidad.

Se pide que una vez habiendo establecido la situación contextualizada en la vida cotidiana, resuelvan dicho problema a través de una división de fracciones con denominador distinto de 1.

Ejercicio 5:

Pretendemos que los alumnos sean capaces de reconocer en su razonamiento del problema el hecho de que las tres fracciones presentadas no configuran la totalidad de la pizza.

Juan come $1/2$, Ana $1/4$ y Pedro $1/6$.

$1/2 + 1/4 + 1/6 = 11/12$. Por lo que sobra $1/12$ de pizza.

Se valora la realización de una representación gráfica para poder explicar esta situación.

En cuanto a posibles soluciones a la siguiente pregunta admitimos todo tipo de solución que cumpla los requisitos de que no sobre ningún trozo, coman los tres y Pedro coma la mitad por lo menos que Juan.

Una posible solución esperada por parte del alumno es: Juan $1/2$, Ana $1/4$ y Pedro $1/4$.

I.4 ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Para realizar nuestra calificación determinaremos una serie de porcentajes:

La prueba escrita supondrá un 40% del total de la calificación, mientras que la entrega de actividades seleccionadas para realizar fuera del aula supone un 30% y por último el trabajo en clase constituye el 30% restante.

Para evaluar el trabajo en clase nos centraremos en las conclusiones grupales e individuales presentadas y en el grado de implicación en los proyectos grupales.

La asignatura se considerará superada en el caso de que la suma de estas distintas puntuaciones obtenidas, una vez aplicados sus distintos pesos, sea superior a una calificación de 5 sobre 10. Para poder realizar la suma de estas tres calificaciones será obligatorio haber obtenido al menos una calificación de 4 sobre 10 en la prueba escrita.

La prueba escrita consta de 5 preguntas de valor 2 puntos cada una y para evaluarlas nos basaremos en el modelo de tercios elaborado por Gairín, Muñoz y Oller (2012).

El modelo de tercios fue elaborado para establecer un marco para la calificación de exámenes de matemáticas que reduzca el grado de subjetividad propio del docente.

En este modelo se establece que:

- El conjunto de todos los errores que comete un alumno al realizar tareas auxiliares generales no podrá penalizarse con un valor superior a $1/3$ de la puntuación asignada al problema, porque el conjunto de estas tareas no debe ser determinante al valorar la comprensión de los contenidos específicos contemplados en los currículos oficiales.
- Los errores cometidos en las tareas auxiliares específicas podrán penalizarse con un máximo de $2/3$ de la calificación asignada a la respuesta correcta, porque el

objetivo fundamental de la calificación son los contenidos específicos y no las tareas auxiliares específicas. Es más, en este límite de penalización han de contabilizarse tanto los errores en las tareas auxiliares específicas como en las tareas auxiliares generales.

- En este modelo los errores localizados en los contenidos específicos, tanto de conceptos como de procedimientos, pueden penalizarse hasta con el 100% de la puntuación total, porque entendemos que este tipo de contenidos constituye el objetivo principal de la calificación de los alumnos. En el caso de que en la resolución de un problema estén implicados dos o más contenidos específicos, deberían asignarse puntuaciones independientes a cada uno de ellos. Además, el corrector, teniendo en cuenta la importancia de estos errores determinará si continúa con el proceso de calificación o si lo da por concluido.

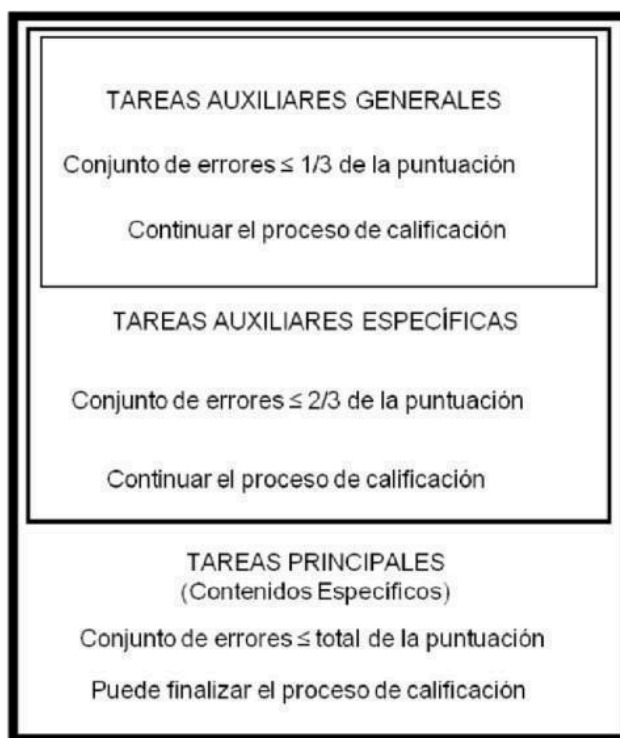


Figura 14. Modelo de tercios

Figura extraída de Gairín, J.M., Muñoz, J.M. & Oller, A.M. (2012). *Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas*

Según este criterio, calificamos las preguntas de la siguiente forma:

Preguntas	Errores en tareas auxiliares generales	Errores en tareas auxiliares específicas	Errores en tareas principales
Pregunta 1. i)	Fallos en cuentas,	Incorrecta	No reconocimiento

	suma, resta, no simplificación de fracciones	aplicación de la metodología en la suma/resta, producto/ división de fracciones	de las operaciones aplicadas entre términos
Pregunta 1. ii)	La no utilización de lenguaje matemático	Falta de claridad en las explicaciones de las relaciones entre términos	No reconocer las relaciones entre los términos
Pregunta 2	Errores en las operaciones con fracciones	La falta de representación gráfica que sustente el proceso seguido	El empleo de una estrategia errónea a la hora de obtener la fracción destinada a los discos de música clásica y su comparación.
Pregunta 3 a,b,c	Fallos numéricos durante el proceso, debido a errores de cuentas	La determinación de relaciones incorrectas entre la fracción obtenida y la pedida	La falta de reconocimiento de relaciones entre unas representaciones y otras.
Pregunta 4	Fallos de cuentas en la resolución del problema	Errores en el enunciado del problema que dificulten su resolución utilizando la división de dos fracciones.	La falta de relación entre el problema pedido y el planteado.
Pregunta 5 i, ii)	Fallos de cuentas en la resolución del problema	Falta de claridad o de empleo de lenguaje matemático en las explicaciones de los dos apartados	Una incorrecta explicación en las respuestas al problema, debido a una mala interpretación de lo solicitado.

Tabla 5. Criterios de calificación según el modelo de tercios

BIBLIOGRAFÍA

Domenech, A., & Martínez-Juste, S. (2019). Actividades de razonamiento "up and down" para trabajar las fracciones en 1.º de ESO. *Boletín de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas*.

Beltrán-Pellicer, P., & Martínez-Juste, S. (2021). *Enseñar a través de la resolución de problemas*. *Suma*, 98, 11-21.

Cid, E. y Muñoz, J.M. *Apuntes de diseño instruccional de las matemáticas. Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico*. Universidad de Zaragoza.

Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón

ORDEN ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria (BOA 11/08/2022).

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2011). *Thinking mathematically*. Pearson Educación.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. & Oller, A.M. (2012). *Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas*.

Didáctica de la Aritmética II. Grado Maestro de Educación Primaria

Gairín Sallán, J. M. (2004). Estudiantes para maestros : reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos. *Contextos Educativos. Revista de Educación*, 0(6), 235. <https://doi.org/10.18172/con.538>

Oller-Marcén, A. M. (2020). ARCE SÁNCHEZ, M.; CONEJO GARROTE, L.; MUÑOZ ESCOLANO, J.M. (2019). Aprendizaje y enseñanza de las

matemáticas.

Tahan, M. (2016). *El hombre que calculaba*. Pampia Grupo Editor.

Las fracciones unitarias en la matemática del Antiguo Egipto. En: AA.VV. (eds.), *Epistemología e Historia de la Ciencia. Selección de trabajos de las XXIII Jornadas*. Córdoba: FFyH-UNC, pp. 165-175

Grence Ruiz y Almodóvar. (2015). *Matemáticas 1º ESO*. Apuntes Santillana

Garmendia, A., y Salvador, A. (2022). *Matemáticas 1º ESO*. Apuntes Marea Verde.

Colera, J. y Gatzelu, I. (2022). *Matemáticas 1º ESO*. Anaya.