



Universidad
Zaragoza

Formulación geométrica de la mecánica cuántica
sobre espacios métricos generales

Trabajo de fin de máster
Máster en Física del Universo



Autor
Miguel Martínez Martínez

Director
Jesús Clemente Gallardo

21 de noviembre de 2024

Resumen

En este trabajo construiremos la formulación geométrica de un sistema cuántico en un contexto de relatividad general, algo que no es frecuente en la literatura. El objetivo fundamental es definir una versión simplificada para mecánica cuántica de la construcción que se ha desarrollado en los artículos [1], [2] y [3] para la formulación de una teoría cuántica de campos en una métrica arbitraria. El modelo construido en este trabajo puede servir como punto de partida para ampliarlo a situaciones mucho más complejas.

En el capítulo 1, partiremos de un sistema clásico en un espacio-tiempo \mathcal{M} de 4 dimensiones con una métrica $g_{\mu\nu}$. Suponiendo que este espacio-tiempo es globalmente hiperbólico, podemos definir una dirección de tiempo privilegiada y realizar una foliación compuesta de hojas tridimensionales Σ_s parametrizadas por el tiempo $s \in \mathbb{R}$. Cada hoja tendrá una métrica inducida $h_{ij}(s)$.

En el capítulo 2 construiremos, mediante un proceso de cuantización, una secuencia de espacios de Hilbert \mathcal{H}_s dependientes del tiempo s a partir de cada hoja Σ_s . Para ello, consideraremos cada fibrado cotangente $T^*\Sigma_s$ y les dotaremos de una estructura simpléctica ω . Sobre cada fibrado cotangente, construiremos un fibrado de línea complejo L_s y las secciones de ese fibrado que además son de cuadrado integrable generarán nuestro espacio de Hilbert de precuantización $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_s}$, que tiene el doble de grados de libertad de los que necesitamos.

Para restringir esos grados de libertad, se realizará el proceso de polarización holomorfa. Construiremos en $T^*\Sigma_s$ una métrica de Sasaki $h^T(s)$ y una estructura compleja $J(s)$, lo que le otorga una estructura de Kähler (J, h^T, ω) . Cada espacio de Hilbert de cuantización \mathcal{H}_s será generado por las secciones holomorfas de $T^*\Sigma_s$.

En este proceso habremos considerado varias elecciones arbitrarias que añaden grados de libertad al sistema, las cuales vamos a codificar en la variedad \mathcal{R} , donde cada elección de parámetros será un vector $R(s) \in \mathcal{R}$. Añadiremos la dependencia de R a los espacios de Hilbert, de manera que $\mathcal{H}_R = \mathcal{H}_s$.

De esta manera, habremos obtenido un fibrado \mathcal{E} sobre el espacio de parámetros \mathcal{R} cuyas fibras son los diferentes espacios de Hilbert \mathcal{H}_R . Un estado del sistema será una sección σ_ψ definida sobre todo el fibrado \mathcal{E} . Para poder relacionar puntos de los diferentes espacios de Hilbert, construiremos una conexión cuántica, que definirá una dirección horizontal y vertical en el fibrado.

En el capítulo 3 adaptaremos nuestra construcción para poder estudiar la evolución de un sistema con espacios de Hilbert dependientes del tiempo según se desarrolla en [4]. Estableceremos una ecuación covariante de Schrödinger. En el caso de que no haya dinámica cuántica en el sistema, una sección se mantiene horizontal, aunque su representación en cada espacio de Hilbert \mathcal{H}_R cambiará por el efecto de la métrica. Si hay dinámica cuántica, se añadirá una componente vertical a la sección, de manera que un estado irá evolucionando por acción de la métrica y de la interacción cuántica.

Índice general

1. Descripción 3+1 del espacio-tiempo	1
1.1. El espacio-tiempo y su métrica en la relatividad general	1
1.2. Foliación del espacio-tiempo	2
1.3. Geometría de las hojas	3
1.3.1. Métricas inducidas	4
1.3.2. Curvatura extrínseca	5
1.4. Evolución temporal	5
2. Cuantización geométrica	7
2.1. Sistemas clásicos	7
2.2. Cuantización geométrica	10
2.2.1. Precuantización	10
2.2.2. Polarización	13
2.3. Secuencia de espacios de Hilbert	19
3. Evolución temporal en una secuencia de espacios de Hilbert	21
3.1. Fibrado sobre un espacio de parámetros	22
3.2. Conexión cuántica	23
3.3. Ecuación de Schrödinger covariante	24
4. Conclusiones	27
Bibliografía	29
Anexo	31

Capítulo 1

Descripción 3+1 del espacio-tiempo

Con el objetivo de poder estudiar los efectos de la métrica del espacio-tiempo en sistemas cuánticos, debemos acordar una definición del espacio-tiempo de manera que preserve algunas características del modelo de la relatividad general y a la vez permita estudiar mecánica cuántica. En particular, una de las dificultades para combinar las dos teorías surge de la diferencia de rol que se le da al tiempo. En mecánica cuántica, el tiempo actúa como un parámetro independiente a través del cual los estados evolucionan, mientras que en la relatividad general el tiempo es una variable que depende del sistema de referencia y los objetos físicos son curvas en el espacio-tiempo (no hay una evolución temporal).

En esta sección ofreceremos una descripción del espacio-tiempo como una foliación de hojas espaciales que siguen una dirección de tiempo determinada (descripción 3+1 del espacio-tiempo). Los cambios en la métrica en cuatro dimensiones $g_{\mu\nu}$ se codificarán en cada hoja como deformaciones en la dirección normal (*lapse*) y en las tres direcciones tangenciales (*shift*) de una métrica tridimensional h_{ij} . Como cada hoja es un espacio tridimensional con una dirección establecida de tiempo, podremos estudiar un sistema cuántico y su evolución de una hoja a otra.

1.1. El espacio-tiempo y su métrica en la relatividad general

En la teoría de la relatividad general, el espacio-tiempo \mathcal{M} se modela como una variedad diferencial de cuatro dimensiones cuyos puntos (llamados *eventos*) contienen información de una dirección temporal y tres direcciones espaciales. Utilizaremos las coordenadas X^μ para indicar una posición en el espacio-tiempo. En el caso general, no existe una

dirección privilegiada de tiempo y el orden temporal de los eventos depende del sistema de referencia del observador.

La gravedad se describe como un fenómeno asociado a la curvatura del espacio-tiempo \mathcal{M} , causada por la distribución de masa y energía. La geometría del espacio-tiempo viene caracterizada por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, una forma bilineal (tensor $(0, 2)$) simétrica que permite medir distancias y ángulos en el espacio-tiempo, de manera similar al producto escalar de vectores en el espacio tridimensional.

Una diferencia importante con respecto al producto escalar de vectores en tres dimensiones es que en este caso no es definido positivo y esa condición se sustituye por la condición más débil de que sea no degenerado. Por tanto, el producto escalar de un vector consigo mismo no es necesariamente positivo. Se dice que el vector v^μ es de *tipo tiempo* si $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu < 0$, de *tipo espacio* si $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu > 0$ y de *tipo nulo* o *tipo luz* si $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0$.

1.2. Foliación del espacio-tiempo

Para poder estudiar sistemas cuánticos en un espacio-tiempo con una métrica dada $g_{\mu\nu}$, vamos a descomponer el espacio-tiempo de cuatro dimensiones en una foliación de espacios tridimensionales que siguen una dirección de tiempo determinada.

Antes de realizar esta construcción, es necesario que consideremos que el espacio-tiempo es *globalmente hiperbólico*¹, es decir, admite una hipersuperficie de tipo espacio Σ (*superficie de Cauchy*) tal que cualquier curva no cerrada de tipo tiempo o de tipo nulo corta a Σ solamente una vez. Esto confiere a \mathcal{M} una topología equivalente a $\mathbb{R} \times \Sigma$.

Por otro lado, si describimos el tiempo como una función arbitraria $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau(X^\mu) = s$, podemos dividir el espacio-tiempo en hipersuperficies de nivel $\Sigma_s = \{s\} \times \Sigma$ de tipo espacio cuyo vector normal $n_\mu = \frac{\partial \tau}{\partial X^\mu}$ es siempre de tipo tiempo. El parámetro s servirá como coordenada temporal en nuestra construcción, etiquetando las superficies de nivel. Por la hiperbolicidad global de \mathcal{M} , las hipersuperficies son disjuntas, es decir, sean $s, s' \in \mathbb{R}$, entonces $\Sigma_s \cap \Sigma_{s'} = \emptyset$.

¹Para más información acerca de las posibles jerarquías causales del espacio-tiempo, entre las cuales la hiperbolicidad global es la más estricta, se puede consultar [5].

Esto permite describir el espacio-tiempo como una *foliación* de hojas espaciales Σ_s , es decir,

$$\mathcal{M} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \Sigma_s.$$

Para poder visualizarlo de una manera sencilla, podemos imaginarnos un espacio-tiempo de 2+1 dimensiones, eliminando una de las dimensiones espaciales. De esta manera, un espacio-tiempo de 3 dimensiones podría descomponerse en hojas bidimensionales apiladas en la dirección temporal. En el caso más sencillo, en el cual el espacio-tiempo está equipado con la métrica de Minkowski, podríamos imaginarnos la foliación como un taco de folios planos. En el caso general, el taco de folios tiene una curvatura, de manera que cada folio está arrugado (figura 1.1) y esa arruga provoca otra arruga de manera continua y diferenciable en la siguiente hoja sin dejar huecos.

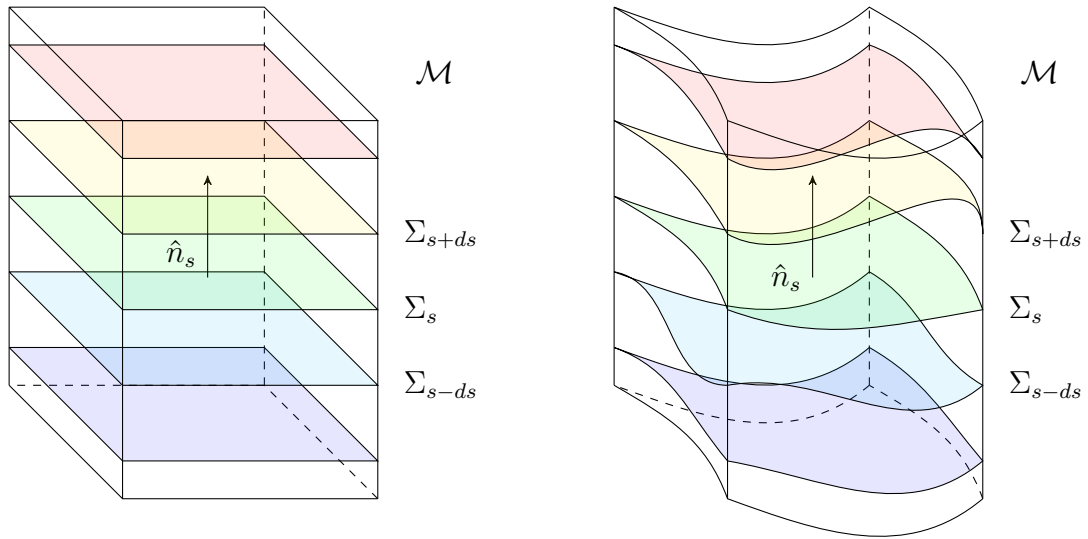


Figura 1.1: Foliación de un espacio-tiempo globalmente hiperbólico con la métrica de Minkowski (izquierda) o una métrica general (derecha).

1.3. Geometría de las hojas

La métrica del espacio-tiempo \mathcal{M} determinará las propiedades geométricas de las hojas. Por una parte, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ inducirá una métrica espacial $h_{ij}(x, s)$ diferente en cada hoja Σ_s . Por otra parte, la métrica de cada hoja dará lugar a una derivada covariante y a una curvatura extrínseca.

1.3.1. Métricas inducidas

En primer lugar, denotemos como X^μ las coordenadas en \mathcal{M} y como x^i las coordenadas en la hipersuperficie de referencia Σ . Ambas están relacionadas por las ecuaciones paramétricas de la hipersuperficie, $X^\mu = X^\mu(x^i, s)$. Consideremos también el encaje de la hipersuperficie de referencia en la variedad, $\varepsilon_s : \Sigma \rightarrow \Sigma_s \subset \mathcal{M}$.

El *pullback* de este encaje, ε_s^* , lleva los tensores (0,2) de \mathcal{M} a los tensores (0,2) de Σ_s . De esta manera, la métrica lorentziana g de \mathcal{M} induce una métrica riemanniana tridimensional $h_s = \varepsilon_s^*g$ en cada hoja Σ_s (figura 1.2).

Sea un punto $p \in \Sigma$ y X, Y dos vectores definidos en el espacio tangente $T_p\Sigma$, entonces la relación de las métricas para un s determinado viene dada por:

$$h(X, Y) = \varepsilon_s^*g|_p(X, Y) = g|_{\varepsilon_s(p)}(\varepsilon_{s*}|_p(X), \varepsilon_{s*}|_p(Y)).$$

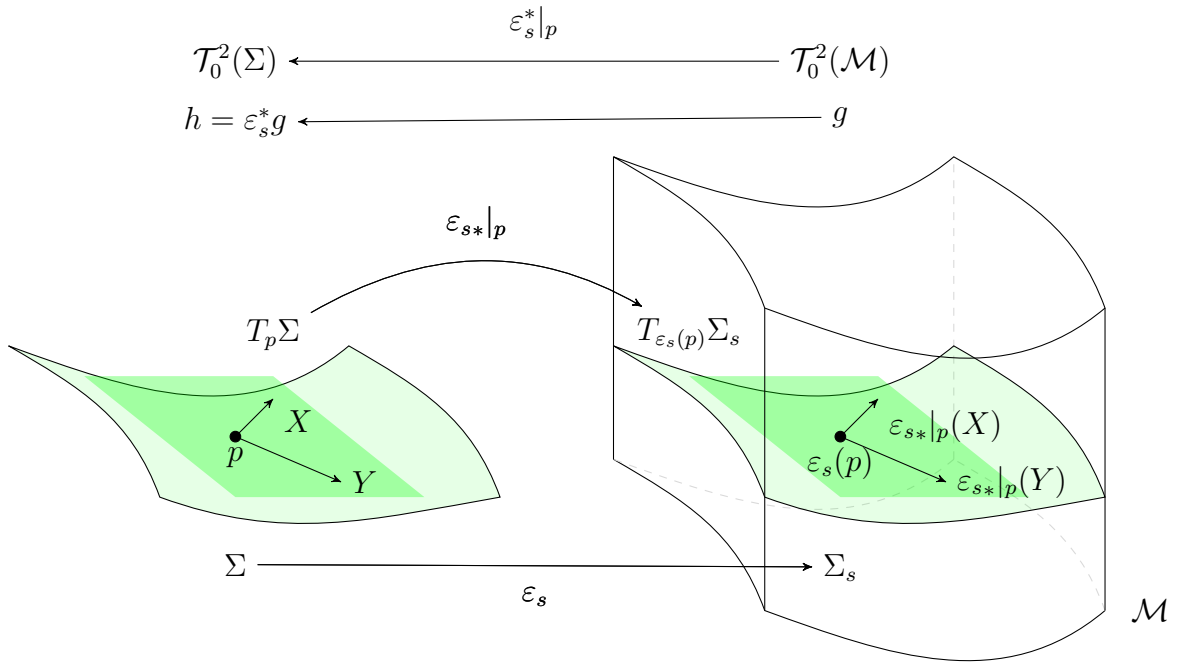


Figura 1.2: *Pullback* ε_s^* del encaje ε . El valor del producto escalar (h) de dos vectores en Σ coincide con el valor del producto escalar (g) del *pushforward* de los vectores en Σ_s .

Expresando la métrica h_{ij} en coordenadas:

$$h_{ij}(x, s) = g_{\mu\nu}(X^\alpha(x, s)) \frac{\partial X^\mu(x, s)}{\partial x^i} \frac{\partial X^\nu(x, s)}{\partial x^j}. \quad (1.1)$$

Por tanto, podemos entender que el espacio-tiempo \mathcal{M} está descompuesto en una foliación cuyas hojas Σ_s son hipersuperficies de tipo espacio con un tensor métrico h_{ij}

inducido por la métrica $g_{\mu\nu}$. Como las hojas son hipersuperficies de tipo espacio, la métrica h_{ij} inducida en ellas será definida positiva.

1.3.2. Curvatura extrínseca

A partir de la primera forma fundamental de una hipersuperficie (la métrica h_{ij}), podemos calcular la segunda forma fundamental K_{ij} , que es la variación de h_{ij} a lo largo de la dirección normal a la hipersuperficie:

$$K_{ij}(x, s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\hat{n}_s} h_{ij}(x, s),$$

donde $\mathcal{L}_{\hat{n}_s}$ indica la derivada de Lie con respecto al campo vectorial normal \hat{n}_s . De la misma manera que $g_{\mu\nu}$ define una derivada covariante ∇_μ en \mathcal{M} , la métrica h_{ij} define una derivada covariante D_i en Σ_s :

$$D_\beta V_\alpha = h_\beta^i h_\alpha^j \nabla_i X_j, \quad \forall V \in \mathcal{M} \text{ tales que } V_\alpha n^\alpha = 0.$$

1.4. Evolución temporal

La *evolución temporal* de un sistema se puede entender como un campo vectorial E que corresponde al cambio de una hipersuperficie a otra infinitesimalmente contigua. Utilizando las ecuaciones paramétricas, este campo se define como:

$$E = \frac{dX^\mu(x, s)}{ds}.$$

Consideremos las direcciones normal y tangenciales a la hipersuperficie Σ_s :

$$n_s^\mu = g^{\mu\nu} \frac{\partial \tau}{\partial X^\nu}, \quad t_i^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^i}.$$

Si proyectamos E en esas direcciones a través del producto escalar definido por $g_{\mu\nu}$, podemos identificar la magnitud del cambio de la hipersuperficie en cada dirección. Esta magnitud viene dada por la función *lapse* N y el vector *shift* N^i :

$$\begin{aligned} N(x, s) &= g_{\mu\nu} \frac{dX^\mu(x, s)}{ds} n^\nu(x, s), \\ N^i(x, s) &= g_{\mu\nu} \frac{dX^\mu(x, s)}{ds} t_j^\nu(x, s) h^{ij}(x, s). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Si utilizamos estas coordenadas, podemos expresar la evolución temporal E en función de *lapse* y *shift*:

$$E|_{\Sigma_s} = N \hat{n}^\mu + N^i \hat{t}^\mu. \tag{1.3}$$

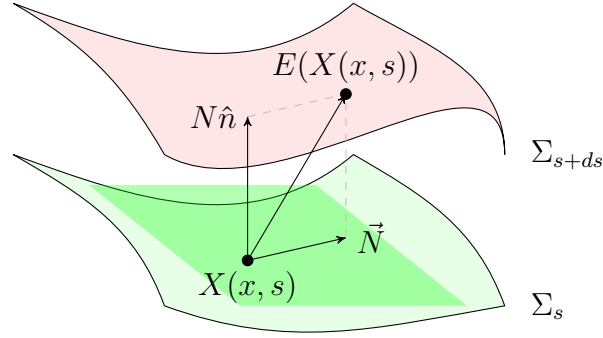


Figura 1.3: Visualización geométrica de la función *lapse* y el vector *shift*.

Si consideramos una superficie de Cauchy con condiciones iniciales $\Sigma_0 = \varepsilon_0(\Sigma) \subset \mathcal{M}$ y su evolución temporal E , entonces podemos generar toda la foliación (equivalente al espacio-tiempo \mathcal{M}) considerando su flujo α_E^s , de manera que $\Sigma_s = \alpha_E^s \Sigma_0$. Entonces E caracteriza la foliación y relaciona los diferentes encajes mediante $\alpha_E^s \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_s$.

Como E está definido unívocamente por la función *lapse* y el vector *shift* en todo el espacio-tiempo, la elección de estos parámetros equivale a la elección de una foliación.

Capítulo 2

Cuantización geométrica

Cuando se construye una teoría cuántica a partir de una teoría clásica, se desarrolla un proceso que toma el nombre de *cuantización*. Este proceso establece una relación entre los observables clásicos y unos operadores cuánticos asociados que satisfacen unas propiedades determinadas. La *cuantización geométrica* parte del espacio de fases clásico $(q(s), p(s))$ de un sistema físico, donde s es el tiempo, y construye una teoría cuántica de ese sistema a través de las herramientas de geometría diferencial, que tendrá que satisfacer una serie de condiciones de cuantización.

2.1. Sistemas clásicos

Desde el momento en que hemos sustituido el espacio-tiempo \mathcal{M} de cuatro dimensiones por la foliación, los efectos relativistas han sido codificados en la métrica de cada hoja tridimensional Σ_s . Por tanto, un sistema físico de 3 grados de libertad en cada hoja se puede describir como un sistema hamiltoniano clásico no relativista. Un sistema clásico se puede describir como un fibrado cotangente, que es un caso de variedad simpléctica.

Situémonos en una hoja Σ_s de la foliación. En cada punto $P \in \Sigma_s$ podemos definir el espacio tangente $T_P \Sigma_s$. El dual de este espacio es el *espacio cotangente* $T_P^* \Sigma_s = (T_P \Sigma_s)^*$. La unión para todos los puntos da, respectivamente, el *fibrado tangente* y el *fibrado cotangente*:

$$T\Sigma_s = \bigcup_{P \in \Sigma_s} T_P \Sigma_s, \quad T^*\Sigma_s = \bigcup_{P \in \Sigma_s} T_P^* \Sigma_s.$$

El fibrado cotangente $T^*\Sigma_s$ representa las posibles posiciones y momentos del sistema, es decir, es el *espacio de fases* (la explicación detallada se da en el apéndice A.1).

Denotemos como $\mathfrak{X}(T^*\Sigma_s)$ al conjunto de campos vectoriales del espacio de fases $T^*\Sigma_s$. Una *forma simpléctica* es una 2-forma $\omega: \mathfrak{X}(T^*\Sigma_s) \times \mathfrak{X}(T^*\Sigma_s) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(T^*\Sigma_s)$ bilineal, antisimétrica y no degenerada. Una variedad diferenciable equipada con una forma simpléctica se denomina *variedad simpléctica*.

Por ser el espacio de fases un fibrado cotangente $T^*\Sigma_s$, existe una 1-forma canónica (*1-forma de Liouville*) definida en coordenadas locales como $\theta = p_k dq^k$. Aplicando la derivada exterior a θ , obtenemos la *2-forma de Poincaré*:

$$\omega = -d\theta = -dp_k \wedge dq^k = dq^k \wedge dp_k.$$

La 2-forma ω obtenida de esta manera es bilineal, antisimétrica, no degenerada y cerrada ($d\omega = 0$). Por tanto, es una forma simpléctica y dota a $T^*\Sigma_s$ de una estructura de variedad simpléctica $(T^*\Sigma_s, \omega)$.

La 1-forma θ también recibe el nombre de *potencial simpléctico*. Si le sumamos la 1-forma cerrada df (donde $f \in C^\infty(T^*\Sigma_s)$), se trata de un potencial diferente, pero produce la misma forma simpléctica ω :

$$-d(\theta + df) = -d\theta - d(df) = -d\theta = \omega. \quad (2.1)$$

Este potencial $\theta + df$ es tan válido como θ . Esto es un caso de lo que se denomina *libertad gauge*. Si elegimos una f determinada, se dice que es una *elección de gauge* o *fijación de gauge*.

Como estamos en una hoja Σ_s tridimensional, el *volumen simpléctico* es la siguiente¹ 6-forma:

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \omega \wedge \omega \wedge \omega = \\ &= \left(\sum_{k=1}^3 dq^k \wedge dp_k \right)^{\wedge 3} = \\ &= \frac{1}{3!} (dq^1 \wedge dp_1 + dq^2 \wedge dp_2 + dq^3 \wedge dp_3)^{\otimes 3} = \\ &= \frac{6}{3!} (dq^1 \wedge dp_1 \wedge dq^2 \wedge dp_2 \wedge dq^3 \wedge dp_3) = \\ &= dq^1 \wedge dp_1 \wedge dq^2 \wedge dp_2 \wedge dq^3 \wedge dp_3. \end{aligned}$$

¹Recordemos que $x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x$. La anticonmutatividad del producto \wedge hace que se anulen dos a dos los términos que dependen a la vez de q^j y p_k con $j \neq k$. Además, al elevar un producto \wedge a una potencia n , obtenemos $2n$ términos que son productos \otimes . A su vez, cada producto \otimes de 2 factores tiene 6 posibilidades diferentes (ya que $j, k \in \{1, 2, 3\}$). Si tenemos en cuenta todo esto, podemos desarrollar el producto hasta llegar al resultado que se indica.

El *espacio de observables* representa las posibles magnitudes físicas y corresponderá con el conjunto de las funciones reales definidas en el espacio de fases. En nuestro caso, será el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables $\mathcal{C}^\infty(T^*\Sigma_s)$. La forma simpléctica ω hará que a cada función $f \in \mathcal{C}^\infty(T^*\Sigma_s)$ le corresponda un *campo vectorial hamiltoniano* X_f definido de manera implícita como

$$df + \omega(X_f, \cdot) = 0.$$

En coordenadas locales, el campo X_f está expresado como

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k}. \quad (2.2)$$

En particular, los campos vectoriales generados por los observables *posición* q^k y *momento* p_k son:

$$X_{q^k} = -\frac{\partial}{\partial p_k}, \quad X_{p_k} = \frac{\partial}{\partial q^k}. \quad (2.3)$$

El *paréntesis de Poisson* $\{\cdot, \cdot\}$ de dos funciones $f, g \in \mathcal{C}^\infty(T^*\Sigma_s)$ está definido como:

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g).$$

Otras definiciones equivalentes son $\{f, g\} = X_f(g) = dg(X_f)$. El paréntesis de Poisson se puede expresar en coordenadas locales como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q^k} - \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k}.$$

El paréntesis de Poisson cumple la propiedad anticonmutativa ($\{f, g\} = -\{g, f\}$), la identidad de Jacobi ($\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$) y actúa como una derivación del producto asociativo ($\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$), por lo que dota al espacio de estados clásicos de una estructura de *álgebra de Poisson*.

Esta estructura simpléctica y los conceptos que hemos definido después serán necesarios en el proceso de cuantización. En particular, el paréntesis de Poisson tendrá importancia a la hora de considerar la dinámica del sistema.

2.2. Cuantización geométrica

Una *cuantización* es un proceso que construye un modelo físico cuántico a partir de un modelo físico clásico. No hay una única manera de realizar esta construcción. En particular, la *cuantización geométrica* aprovecha la caracterización como variedad simpléctica de un modelo clásico para construir ese modelo cuántico.

Este método se realiza en dos etapas: precuantización y polarización. La *precuantización* construye un espacio de Hilbert de precuantización formado por secciones de un fibrado que tienen cuadrado integrable en el espacio de fases. En ese espacio de Hilbert se pueden construir operadores que satisfacen relaciones de conmutación que corresponden exactamente con las relaciones establecidas por el paréntesis de Poisson en el modelo clásico. Sin embargo, este espacio es demasiado grande para que sirva para modelizar un problema cuántico real, por lo que se restringen las secciones mediante un proceso denominado *polarización*, obteniendo el espacio de Hilbert final.

2.2.1. Precuantización

Como el espacio de estados en mecánica cuántica es complejo, nos interesa cuantizar funciones complejas sobre la variedad simpléctica. Por tanto, vamos a asignar un espacio de números complejos a cada punto del espacio de fases $T^*\Sigma_s$.

Esto se hará creando un *fibrado de línea complejo*² L_s , que es una variedad equipada con la proyección $\pi_s: L_s \rightarrow T^*\Sigma_s$ tal que $L_{(q,p)} = \pi_s^{-1}(q,p) \cong \mathbb{C}$ para cualquier punto (q,p) . El espacio de fases $T^*\Sigma_s$ actúa como *base del fibrado* y la variedad L_s es localmente isomorfa al producto cartesiano de la base por un grupo de Lie, que en el caso de un fibrado de línea complejo es $U(1)$. Una *trivialización local* ϕ_i en un abierto U_i del fibrado de línea L_s es una aplicación $\phi_i: U_i \subset L_s \rightarrow T^*\Sigma_s \times U(1)$.

Una *sección* σ del fibrado es una aplicación $\sigma: T^*\Sigma_s \rightarrow L_s$ tal que $\pi_s(\sigma(q,p)) = (q,p)$. Cada sección asigna a cada punto de la variedad un único número complejo (ver figura 2.1). La *sección unidad* está definida como $\mathbf{u}(q,p) = \phi^{-1}((q,p), 1)$. Considerando el espacio de secciones $\Gamma(L_s)$ como un espacio vectorial (de dimensión 1), la sección unidad forma por sí misma una base. Por tanto, cualquier sección se puede expresar de la forma $\sigma_\psi = \psi\mathbf{u}$, donde $\psi: T^*\Sigma_s \rightarrow \mathbb{C}$ se interpreta físicamente como una *función de onda*.

²Esto se puede hacer porque cumple la condición de integralidad de Weil. Para una variedad que es un fibrado cotangente con forma simpléctica canónica $\omega = dq^k \wedge dp_k$, como es nuestro caso, entonces $\int_S \omega = \oint_{\partial S} \theta = 0$, donde S es una superficie cerrada (y por tanto $\partial S = 0$). Como $\omega = -d(p \cdot dq)$ es globalmente exacta, la integral se anula.

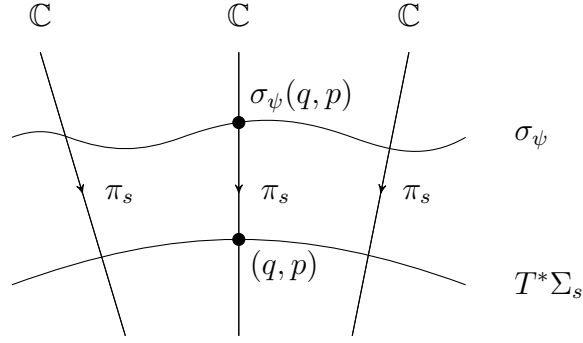


Figura 2.1: La sección σ_ψ tomando valores en el fibrado de línea L_s sobre $T^*\Sigma_s$.

Para construir el *espacio de Hilbert de precuantización* \mathcal{H}_{P_s} necesitamos tener un producto interno hermítico. Este producto será una integral respecto al *volumen simpléctico*, que se define a partir de la forma simpléctica como $\frac{\omega^n}{(2\pi\hbar)^n}$. Por tanto, el producto hermítico de dos secciones $\sigma_\psi, \sigma_\varphi \in \Gamma(L_s)$ en nuestra variedad será:

$$\langle \sigma_\psi, \sigma_\varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{T^*\Sigma_s} (\sigma_\psi, \sigma_\varphi) \omega^3. \quad (2.4)$$

La sección unidad \mathbf{u} se interpreta como el *estado de vacío*. Si la elegimos de manera que $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) := 1$, entonces para dos secciones arbitrarias $\sigma_\psi, \sigma_\varphi \in \Gamma(L_s)$ se tiene que el producto de secciones es igual al producto de funciones de onda, es decir, $(\sigma_\psi, \sigma_\varphi) = \bar{\psi}\varphi$. Por tanto, la ecuación 2.4 queda:

$$\langle \sigma_\psi, \sigma_\varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{T^*\Sigma_s} \bar{\psi}\varphi \omega^3. \quad (2.5)$$

El producto hermítico nos permite definir una norma:

$$\|\sigma_\psi\|^2 = \langle \sigma_\psi, \sigma_\psi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{T^*\Sigma_s} |\psi|^2 \omega^3.$$

El *espacio de Hilbert de precuantización* \mathcal{H}_{P_s} será la completación del espacio de secciones de cuadrado integrable:

$$\mathcal{H}_{P_s} = \overline{\{\sigma_\psi \in \Gamma(L_s) \mid \|\sigma_\psi\| < \infty\}}.$$

No podemos tomar derivadas parciales de secciones, ya que hay muchas trivializaciones locales posibles. Por eso necesitaremos los conceptos de conexión y derivada covariante.

Una *conexión* es una aplicación $\nabla: \mathfrak{X}(T^*\Sigma_s) \times \Gamma(L_s) \rightarrow \Gamma(L_s)$ que asocia a cada campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(T^*\Sigma_s)$ y a cada sección $\sigma \in \Gamma(L_s)$ otra sección $\nabla_X \sigma$ que cumple las siguientes propiedades:

- $\nabla_X(a\sigma + b\sigma') = a\nabla_X\sigma + b\nabla_X\sigma', \quad a, b \in \mathbb{C},$
- $\nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(T^*\Sigma),$
- $\nabla_X(f\sigma) = X(f)\sigma + f\nabla_X\sigma, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(T^*\Sigma).$

La *derivada covariante* en la dirección X es el operador ∇_X asociado a la conexión ∇ y actúa sobre las secciones.

La *forma de curvatura* Ω de la conexión es

$$\Omega(X, Y) = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}). \quad (2.6)$$

Una de las condiciones para que una variedad simpléctica sea precuantizable es que la forma de curvatura Ω sea proporcional a la forma simpléctica ω . Vamos a establecer $\Omega = \frac{i\omega}{\hbar}$.

Si calculamos la derivada covariante de la sección unidad \mathbf{u} , obtenemos una 1-forma de conexión Θ que vamos a relacionar con el potencial simpléctico θ :

$$\nabla_X\mathbf{u} := \Theta(X)\mathbf{u} = \frac{i}{\hbar}\theta(X)\mathbf{u}. \quad (2.7)$$

Recordemos que el potencial simpléctico tenía una libertad *gauge*, ya que θ y $\theta + df$ producían la misma forma simpléctica ω (ecuación 2.1). Vamos a dejar fijo un potencial simpléctico θ y vamos a trasladar su ambigüedad a la sección unidad \mathbf{u} . De esta manera, en vez de tener $\theta + df$ variable y \mathbf{u} fija, vamos a considerar θ fija y la sección unitaria dependerá de una fase: $\mathbf{u}e^{\frac{i}{\hbar}f}$. Entonces la ecuación 2.7 queda:

$$\begin{aligned} \nabla_X(\mathbf{u}e^{\frac{i}{\hbar}f}) &= X\left(\frac{i}{\hbar}f\right)e^{\frac{i}{\hbar}f}\mathbf{u} + e^{\frac{i}{\hbar}f}\nabla_X\mathbf{u} = \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}f}\left(\frac{i}{\hbar}df(X)\mathbf{u} + \nabla_X\mathbf{u}\right) = \\ &= \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}f}(\theta(X) + df(X))\mathbf{u} = \\ &= \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}f}(\theta + df)(X)\mathbf{u} = \\ &= \frac{i}{\hbar}\tilde{\theta}(X)\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Por tanto, si aplicamos las propiedades de la conexión mencionadas anteriormente, la derivada covariante de una sección $\sigma_\psi = \psi\mathbf{u}e^{\frac{i}{\hbar}f} \in \Gamma(L_s)$ es

$$\begin{aligned} \nabla_X(\psi\mathbf{u}e^{\frac{i}{\hbar}f}) &= \nabla_X(\psi\bar{\mathbf{u}}) = \\ &= X(\psi)\bar{\mathbf{u}} + \psi\nabla_X\bar{\mathbf{u}} = \\ &= d\psi(X)\bar{\mathbf{u}} + \frac{i}{\hbar}\psi\bar{\theta}(X)\bar{\mathbf{u}} = \\ &= \left(d\psi + \frac{i}{\hbar}\psi\bar{\theta}\right)(X)\bar{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ya tenemos las herramientas necesarias para describir los operadores. Dado un observable clásico, podemos definir su operador asociado mediante la *precuantización*:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \mathcal{C}^\infty(T^*\Sigma_s) &\rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{P}_s} \\ f &\mapsto \hat{f} = -i\hbar\nabla_{X_f} + f. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Hay varias razones por las que esta no es una cuantización completa. Por ejemplo, cada estado depende del doble de grados de libertad que en el espacio de configuraciones. Es decir, el espacio de Hilbert de precuantización está formado por funciones que dependen de $2n$ variables (6 en nuestro caso), mientras que las funciones del espacio de Hilbert de cuantización deberían depender de n variables (es decir, 3). Otra razón es la siguiente: si calculamos la precuantización de los observables *posición* y *momento*³, tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{q}^k &= -i\hbar\nabla_{X_{q^k}} + q^k = & \hat{p}_k &= -i\hbar\nabla_{X_{p_k}} + p_k = \\ &= -i\hbar\left(X_{q^k} - \frac{i}{\hbar}\theta(X_{q^k})\right) + q^k = & &= -i\hbar\left(X_{p_k} - \frac{i}{\hbar}\theta(X_{p_k})\right) + p_k = \\ &= -i\hbar\left(-\frac{\partial}{\partial p_k} - 0\right) + q^k = & &= -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{i}{\hbar}p_k\right) + p_k = \\ &= i\hbar\frac{\partial}{\partial p_k} + q^k. & &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial q^k}. \end{aligned}$$

En mecánica cuántica se espera que \hat{q} sea multiplicativo, pero en nuestra precuantización tiene además un término derivativo. Si hacemos que las secciones σ_ψ solamente dependan de q^k , entonces tendremos 3 grados de libertad y además $\hat{q}^k = q^k$, por lo que obtendríamos una cuantización. De esto se encargará la *polarización*.

2.2.2. Polarización

Debemos restringir el espacio de Hilbert de precuantización $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_s}$ de manera que tenga el mismo número de grados de libertad que el espacio de configuraciones Σ_s , es decir, 3 grados de libertad. Con esto obtendremos un espacio de Hilbert de cuantización \mathcal{H}_s en el que podremos modelar sistemas cuánticos. Para restringir el espacio de Hilbert de precuantización, vamos a añadir una estructura denominada *polarización*, que determinará unas direcciones privilegiadas y exigiremos que los estados cuánticos sean constantes (respecto a la derivada covariante) a lo largo de esas direcciones.

Una *distribución* de dimensión k en $T^*\Sigma_s$ es un subfibrado $D \subset T(T^*\Sigma_s)$ tal que cada fibra es un subespacio de dimensión k del espacio tangente en cada punto $T_{(q,p)}(T^*\Sigma_s)$ y que es diferenciable en cada punto $(q,p) \in T^*\Sigma_s$. Esto es lo mismo que la envolvente lineal de la asignación de k campos vectoriales (de dimensión 1) en un punto.

³Recordemos que en la ecuación 2.3 calculamos los campos hamiltonianos X_{q^k} y X_{p_k} .

Una distribución se dice *involutiva* sin el conmutador de dos campos vectoriales es cerrado. Es decir, sea $D \subset T(T^*\Sigma_s)$ una distribución, entonces D es involutiva si

$$[X, Y]|_{(q,p)} \in D_{(q,p)}, \quad \forall X, Y \in D_{(q,p)} \subset T_{(q,p)}(T^*\Sigma_s).$$

De acuerdo al *teorema de Frobenius*, una distribución es involutiva si y solo si es integrable, es decir, si existe una subvariedad (*variedad integral*) cuyo fibrado tangente sea la propia distribución. El *teorema de Frobenius global* dice que existe una partición de la variedad en variedades integrales de manera que forman una foliación [6, capítulo 19].

En la sección A.2 del anexo se discuten las ideas y limitaciones que tiene el primer tipo de polarización, la polarización real. En el caso que estamos desarrollando en este trabajo, tiene sentido aplicar la polarización holomorfa, ya que nos va a permitir introducir la métrica heredada del espacio-tiempo en la construcción del espacio de Hilbert. Los diferentes tipos de polarización están detallados en [7] y [8, capítulos 9 y 10].

A continuación desarrollaremos varios conceptos para llegar a realizar la polarización holomorfa. Primero describiremos la polarización compleja, ya que la polarización holomorfa es un caso particular de ella y vamos a obtener unas condiciones generales que debe de cumplir nuestra polarización. Después necesitaremos una estructura compleja, pero va a venir determinada por la forma simpléctica y la métrica (las tres forman una *estructura de Kähler*). Por tanto, antes deberemos obtener la métrica del espacio cotangente $T^*\Sigma_s$ a partir de la métrica $h_{ij}(s)$ de la hoja espacial Σ_s .

Polarización compleja

La *complejización* del espacio de fases $T^*\Sigma_s$ es

$$(T^*\Sigma_s)^C := T^*\Sigma_s \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong T^*\Sigma_s \oplus iT^*\Sigma_s.$$

La forma simpléctica ω se puede ampliar a $\omega^C: (T^*\Sigma_s)^C \times (T^*\Sigma_s)^C \rightarrow \mathbb{C}$, por lo que volvemos a tener una variedad simpléctica $((T^*\Sigma_s)^C, \omega^C)$.

Un subespacio lineal complejo $D \subset (T^*\Sigma_s)^C$ es un *subespacio lagrangiano complejo* si cumple la propiedad lagrangiana:

$$\omega(Z, W) = 0, \quad Z, W \in D,$$

y si es maximalmente isotrópico, es decir, si $Q \subset (T^*\Sigma_s)^C$ cumple la propiedad lagrangiana y $D \subset Q$, entonces $D = Q$.

Una *polarización compleja* P sobre $T^*\Sigma_s$ es una distribución de $T(T^*\Sigma_s)^C$ tal que:

- Es un subespacio lagrangiano complejo: $\omega(Z, W) = 0$, $Z, W \in P$.
- Es involutiva: $[Z, W] \in P$, $Z, W \in P$.
- La dimensión de $P_{(q,p)} \cap \bar{P}_{(q,p)}$ es constante para todo punto (q, p) , donde $\bar{P}_{(q,p)} = \{\bar{z} \mid z \in P_{(q,p)}\}$. Esta dimensión indica el número de direcciones reales en P .

La métrica riemanniana del fibrado cotangente

El siguiente paso es construir una métrica a partir de la métrica $h_{ij}(s)$ de Σ_s que definimos en la ecuación 1.1. La *métrica de Sasaki* [9] es una manera natural de crear una métrica riemanniana en un fibrado tangente de una variedad a partir de la métrica de la variedad. Vamos a desarrollar una idea similar, pero en este caso para el fibrado cotangente $T^*\Sigma_s$.

Consideremos la proyección del fibrado cotangente en la variedad, $\pi: T^*\Sigma_s \rightarrow \Sigma_s$. El *fibrado vertical* de $T^*\Sigma_s$, denotado por $V(T^*\Sigma_s)$ es la unión de todos los *subespacios verticales* $V_{(q,p)}(T^*\Sigma_s)$, que están formados por los elementos de $T_{(q,p)}(T^*\Sigma_s)$ que son tangentes a la fibra $\pi^{-1}(q)$. Un *subespacio horizontal* es un subespacio $H_{(q,p)}(T^*\Sigma_s) \subset T_{(q,p)}(T^*\Sigma_s)$ tal que $T_{(q,p)}(T^*\Sigma_s) = V_{(q,p)}(T^*\Sigma_s) \oplus H_{(q,p)}(T^*\Sigma_s)$. Los subespacios horizontales no son únicos, simplemente tienen que ser transversales a cada subespacio vertical.

Como $T^*\Sigma_s$ es una variedad riemanniana, podemos considerar la *conexión de Levi-Civita* ∇ , que es la conexión libre de torsión del fibrado tangente $T(T^*\Sigma_s)$. Entonces ∇ nos permite definir un subespacio horizontal especial que está compuesto por las direcciones que son anuladas por la conexión: $\nabla_\gamma V = 0$, donde γ es una curva diferenciable sobre Σ_s y V es un campo vectorial que pasa por ella. El *fibrado horizontal* $H(T^*\Sigma_s)$ es la unión de todos los subespacios horizontales.

Entonces hemos obtenido una descomposición de suma directa de $T(T^*\Sigma_s)$:

$$T(T^*\Sigma_s) = V(T^*\Sigma_s) \oplus H(T^*\Sigma_s).$$

La *métrica de Sasaki* h^{T^*} se puede definir considerando que $V(T^*\Sigma_s)$ y $H(T^*\Sigma_s)$ son ortogonales y que la métrica es la suma directa de los *pull-backs* de cada parte:

$$h^{T^*}(s) := \pi^*h(s) \oplus \pi^*h(s). \quad (2.10)$$

Esto nos daría una matriz 6×6 por bloques,

$$\mathbf{H} = \left(\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline 0 & h \end{array} \right).$$

El *levantamiento horizontal* de un campo $X = X^k \frac{\partial}{\partial q^k} \in T\Sigma_s$ es el campo $X^H \in H(T^*\Sigma)$ dado por

$$X^H = X^k \frac{\partial}{\partial q^k} - X^i \Gamma_{ij}^k p_j \frac{\partial}{\partial p_k},$$

donde Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel (los coeficientes de ∇).

El *levantamiento vertical* de una 1-forma $\alpha = \alpha_k dq^k \in T^*\Sigma_s$ es el campo $\alpha^V \in V(T^*\Sigma_s)$ dado por

$$\alpha^V = \alpha_k \frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Una descripción más detallada de los levantamientos horizontales y verticales de otros objetos tensoriales se puede encontrar en [10].

La métrica de Sasaki actuaría de la siguiente manera sobre los levantamientos horizontales y verticales:

$$h^T(X^H, Y^H) = \pi^*(h(X, Y)), \quad h^T(\alpha^V, \beta^V) = \pi^*(h^{-1}(\alpha, \beta)), \quad h^T(\alpha^V, X^H) = 0.$$

Estructura de Kähler

Una *estructura de Kähler* en la variedad $T^*\Sigma_s$ relaciona la métrica riemanniana h^{T^*} con la estructura simpléctica ω a través de una estructura compleja J . Podemos ver una definición detallada de la estructura de Kähler en el caso más general y algunas aplicaciones en [11].

En primer lugar, ya hemos visto que la estructura simpléctica de $T^*\Sigma_s$ viene dada por la forma simpléctica ω . Esta forma simpléctica es la misma para todas las estructuras derivadas a partir de cada hoja Σ_s . Sin embargo, los otros elementos (métrica y estructura compleja) van a ser diferentes en cada hoja.

Contamos con la métrica de Sasaki $h^{T^*}(s)$ como métrica riemanniana de $T^*\Sigma_s$ (definida en la ecuación 2.10 a partir de la métrica h de Σ_s). La métrica y la forma simpléctica componen el siguiente producto escalar en $T^*\Sigma_s$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_s := h^{T^*}(s) + i\omega.$$

Vamos a asignar a cada punto de $T(T^*\Sigma_s)$ una *estructura compleja* J , que será un campo tensorial (1,1) cuyo cuadrado es la identidad negativa: $J \circ J = J^2 = -I$. Hay infinitas posibilidades de elección de esta estructura compleja, pero para formar una estructura de Kähler necesitamos que sea compatible con la hermiticidad del producto escalar. Entonces J debe satisfacer

$$h^{T^*}(X, Y) = \omega(JX, Y), \quad \forall X, Y \in T(T^*\Sigma_s). \quad (2.11)$$

De esta manera, hemos dotado a $T^*\Sigma_s$ de una estructura de Kähler (J, h^{T^*}, ω) . Cada hoja Σ_s origina una estructura de Kähler diferente⁴ y, por tanto, al final del proceso de polarización obtendremos espacios de Hilbert \mathcal{H}_s distintos a partir de cada una.

Polarización holomorfa

Podemos descomponer el espacio tangente $T(T^*\Sigma_s)$ en dos mitades:

$$T(T^*\Sigma_s) = T^+(T^*\Sigma_s) \oplus T^-(T^*\Sigma_s),$$

determinadas por los valores propios $\pm i$ de J :

$$T^\pm(T^*\Sigma_s) = \{Z \in T(T^*\Sigma_s) \mid JZ = \pm iZ\}.$$

Consideremos $z_k \in T^+(T^*\Sigma_s)$ y $\bar{z}_k \in T^-(T^*\Sigma_s)$ de manera que $\frac{\partial}{\partial z_k}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ generan bases de $T^+(T^*\Sigma_s)$ y $T^-(T^*\Sigma_s)$ respectivamente. Vamos a definir la polarización P como

$$P = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right\}.$$

Sean $V, W \in P \subset T(T^*\Sigma_s)^C$ tales que

$$V = v^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, \quad W = w^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}.$$

Comprobamos que esta polarización es involutiva:

$$\begin{aligned} [V, W] &= v^j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \left(w^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) - w^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \left(v^j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) = \\ &= \left(v^j \frac{\partial w^k}{\partial \bar{z}_j} - w^k \frac{\partial v^j}{\partial \bar{z}_j} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \in P. \end{aligned}$$

En cada subespacio $T^\pm(T^*\Sigma_s)$ se puede encontrar una *carta de Darboux* de manera que podemos definir $z_k = p_k + iq^k$. Entonces,

$$\begin{aligned} dz_k \wedge d\bar{z}_k &= d(p_k + iq^k) \wedge d(p_k - iq^k) = \\ &= i dq^k \wedge dp_k - i dp_k \wedge dq^k = \\ &= 2i dq^k \wedge dp_k = \\ &= 2i\omega. \end{aligned}$$

Entonces podemos expresar la forma simpléctica ω según las nuevas coordenadas:

$$\omega = \frac{1}{2i} dz_k \wedge d\bar{z}_k = -\frac{1}{2i} d\bar{z}_k \wedge dz_k.$$

⁴Esto se debe a que la métrica $h_{ij}(s)$ de las hojas Σ_s es diferente para cada $s \in \mathbb{R}$. Entonces, la estructura compleja también dependerá de s .

Por tanto, P cumple la propiedad lagrangiana:

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) = 0.$$

Entonces P es un caso particular de polarización compleja que se denomina *polarización holomorfa*. Vamos a ver que precisamente está formado por las secciones σ_ψ donde ψ es una función holomorfa.

El potencial de Kähler \mathcal{K} es

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \bar{z}_k z_k,$$

de manera que podemos expresar la forma simpléctica y el potencial simpléctico en función de \mathcal{K} :

$$\omega = \frac{1}{2i} dz_k \wedge d\bar{z}_k = -i\partial\bar{\partial}\mathcal{K}, \quad (2.12)$$

$$\theta = -\frac{1}{2i} \bar{z}_k dz_k = -i\partial\mathcal{K}. \quad (2.13)$$

Podemos ver que θ está adaptado a P , es decir, $\theta(X) = 0, \forall X \in P$. La derivada covariante a lo largo de los campos de P es, por tanto, una derivada parcial con respecto a \bar{z}_k . Las secciones polarizadas $\sigma_\psi = \psi \mathbf{u}$ son las funciones holomorfas en $(T^*\Sigma_s)^C$:

$$\nabla_X(\sigma_\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_k} = 0,$$

lo que implica que $\psi(z, \bar{z}) = \psi(z)$ es holomorfa⁵.

Consideremos el *gauge* determinado por un nuevo potencial simpléctico θ_0 definido como

$$\theta_0 = \theta + \frac{i}{2} d\mathcal{K}.$$

Bajo la elección de *gauge* $\theta' = \theta + df$, teníamos que $\psi' = e^{if/\hbar}\psi$. Por tanto, las secciones polarizadas en el *gauge* θ_0 son:

$$\phi_0(z, \bar{z}) = \phi(z) \exp\left(-\frac{|z|^2}{4\hbar}\right).$$

El *espacio de Hilbert de cuantización* \mathcal{H}_s será el espacio de secciones polarizadas con producto interno finito:

$$\langle \sigma_\phi, \sigma_{\phi'} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{(T^*\Sigma_s)^C} (\phi, \phi') \exp\left(-\frac{|z|^2}{4\hbar}\right) \omega^3.$$

⁵Recordemos que la conjugación no es una función holomorfa.

Bajo las coordenadas z_k, \bar{z}_k , el campo vectorial hamiltoniano de una función f es

$$X_f = 2i \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right).$$

En particular, tenemos

$$X_{z_k} = -2i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, \quad X_{\bar{z}_k} = 2i \frac{\partial}{\partial z_k}, \quad X_{z\bar{z}} = 2i \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right).$$

La condición de que un observable real $f(z, \bar{z})$ preserve la polarización P es $[X_f, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}] = 0$, o bien una de estas dos opciones:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial z} f = c_{jk} \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial z} f = 0.$$

La primera ecuación implica que f contiene un término $c_{jk} z^j \bar{z}^k$ y la segunda implica que f no es cuadrática en z_k ni \bar{z}_k (podría ser constante o lineal). Uniendo todo esto e imponiendo que $f \in \mathbb{R}$, entonces la fórmula general es

$$f(z, \bar{z}) = f_0 + w_k z_k + \bar{w}_k \bar{z}_k + c_{jk} z_j \bar{z}_k,$$

con $f_0 \in \mathbb{R}$ y $c_{jk} = \bar{c}_{kj}$. De esta manera, y a diferencia de la polarización real (consultar sección A.2 del anexo), la polarización holomorfa nos permite cuantizar sin ambigüedad polinomios cuadráticos en momentos, que son los casos más habituales.

2.3. Secuencia de espacios de Hilbert

Una *cuantización* de nuestra variedad simpléctica $(T^*\Sigma_s, \omega)$ es una aplicación $\mathcal{C}_s: \mathcal{C}^\infty(T^*\Sigma_s) \rightarrow \mathcal{H}_s$ que surge al combinar una precuantización de $T^*\Sigma_s$ junto con una elección de polarización $P \subset T(T^*\Sigma_s)$. El espacio de Hilbert \mathcal{H}_s del sistema estará formado por las secciones de L_s que son de cuadrado integrable y están polarizadas con respecto a P .

Para poder cuantizar un sistema clásico sobre el espacio-tiempo de 4 dimensiones, hemos llegado a una foliación de espacios de Hilbert \mathcal{H}_s . Hemos seguido tres pasos: realizar una foliación del espacio-tiempo \mathcal{M} en hojas espaciales Σ_s , a continuación hemos calculado el fibrado cotangente $T^*\Sigma_s$ de cada hoja y finalmente hemos cuantizado cada uno para obtener los espacios de Hilbert \mathcal{H}_s (ver figura 2.2).

La foliación de espacios de Hilbert \mathcal{H}_s es un fibrado \mathcal{E} sobre el tiempo $s \in \mathbb{R}$ y los estados ya no tienen sentido como funciones en cada espacio de Hilbert, sino que serán secciones $\sigma_\psi(s)$ sobre todo el fibrado.

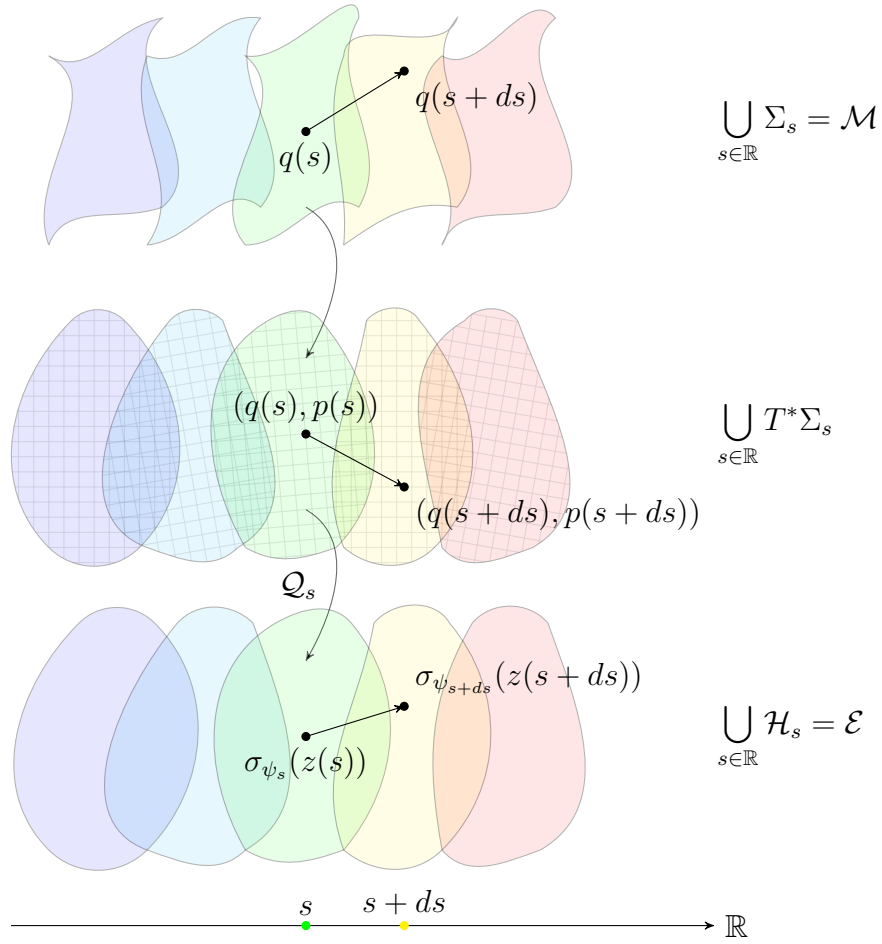


Figura 2.2: Secuencia de hojas Σ_s , de espacios cotangentes $T^* \Sigma_s$ y de espacios de Hilbert \mathcal{H}_s sobre la base de tiempo \mathbb{R} parametrizada por s .

En contraposición con los modelos cuánticos habituales, la dinámica ya no vendrá dada por una curva en el espacio de Hilbert, sino que tendrá que abarcar todo el espacio de secciones. Para ello, necesitaremos construir una conexión cuántica que otorgue sentido a la dinámica entre espacios de Hilbert diferentes.

En la siguiente sección obtendremos una ecuación de Schrödinger covariante que describa la evolución de las secciones.

Capítulo 3

Evolución temporal en una secuencia de espacios de Hilbert

Hasta ahora hemos conseguido describir un espacio-tiempo clásico en 4 dimensiones \mathcal{M} como una foliación de espacios clásicos en 3 dimensiones Σ_s , a partir de cada cual se ha obtenido por un proceso de cuantización una familia $\{\mathcal{H}_s\}$ de espacios de Hilbert indexada por $s \in \mathbb{R}$. Ahora queremos describir un sistema cuántico que evoluciona a través de esos espacios de Hilbert \mathcal{H}_s dependientes del tiempo s . Consideraremos un fibrado

$$\mathcal{E} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}_s$$

sobre \mathbb{R} (más adelante lo redefiniremos de manera que sea sobre un espacio más amplio de parámetros \mathcal{R}) cuyas fibras son los espacios de Hilbert \mathcal{H}_s .

Una consecuencia importante de trabajar sobre un fibrado de espacios de Hilbert es que los estados cuánticos ya no van a ser funciones en cada espacio de Hilbert, sino que serán secciones definidas en todo el fibrado \mathcal{E} .

Para estudiar la evolución de un sistema en este fibrado \mathcal{E} , vamos a adaptar el desarrollo que se realiza en [4] a las particularidades de nuestro sistema. Este desarrollo está pensado originalmente para espacios de Hilbert de dimensión finita, pero nosotros vamos a considerar que nuestros espacios de Hilbert \mathcal{H}_s son de dimensión infinita y *normalmente separables*, lo que quiere decir que para cada uno existe una base ortonormal numerable. Esto facilita la extrapolación del caso de dimensión finita al caso de dimensión infinita.

3.1. Fibrado sobre un espacio de parámetros

Recordemos que los espacios de Hilbert \mathcal{H}_s dependen del tiempo s a través de la dependencia temporal de la métrica y la estructura compleja. Además de la dependencia del tiempo, la elección de estos espacios de Hilbert puede depender de más elementos. Por ejemplo, nosotros hemos decidido utilizar la definición de la métrica de Sasaki h^T (ecuación 2.10) para la métrica de $T^*\Sigma_s$, pero hay infinitas métricas posibles. A su vez, hemos elegido una estructura compleja J de manera que sea compatible con la métrica h^T y la forma simpléctica ω (ver la relación dada en la ecuación 2.11), pero también hay infinitas posibilidades si no hemos fijado una métrica previamente (si fijo una métrica, la estructura compleja queda determinada, y viceversa). Estos parámetros añaden grados de libertad al sistema y vamos a incorporar sus dependencias.

Vamos a denotar el conjunto de estos parámetros como $R(s) = \{R^1, \dots, R^d\}$. Podemos entender que R es un vector que vive en un espacio de parámetros \mathcal{R} . Este espacio es una variedad diferenciable (es decir, de una fibra \mathcal{H}_s a otra, estos parámetros cambian de manera suave) y podemos considerar una carta local \mathcal{O}_α donde (R^1, \dots, R^d) son las coordenadas de R . De aquí en adelante, vamos a suponer que todo se puede definir globalmente (por ejemplo, sería el caso en el que el espacio de parámetros \mathcal{R} admita un atlas de una sola carta). El estudio riguroso de la caracterización global para más de una carta se podría considerar en futuros trabajos (en [4] se realiza este estudio para espacios de Hilbert de dimensión finita, pero el paso a dimensión infinita se debe hacer de manera cautelosa).

Consideremos que vamos a estudiar el sistema entre los tiempos s_1 y s_2 . Sea una curva $\mathcal{C}: [s_1, s_2] \rightarrow \mathcal{R}$, entonces las coordenadas del segmento de $\mathcal{C}(s)$ que cae dentro de \mathcal{O}_α las podemos denotar por $R(s)$. Esta relación nos permite trasladar localmente la dependencia temporal a la dependencia de los parámetros, es decir, $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{R(s)}$.

De la misma manera que antes contábamos con la secuencia de espacios de Hilbert entendida como un fibrado sobre \mathbb{R} , con \mathcal{H}_s siendo las fibras; ahora vamos a considerar un fibrado \mathcal{E} sobre \mathcal{R} con una proyección $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}$, cuyas fibras son $\mathcal{H}_{R(s)} = \pi^{-1}(R(s))$. Como cada fibra $\mathcal{H}_{R(s)}$ tiene un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{R(s)}$, entonces \mathcal{E} tiene una estructura hermítica fibrada y, por tanto, queremos construir una conexión \mathcal{A} compatible con ella. La conexión va a permitir definir, en cada punto del fibrado $p \in \mathcal{E}$, un conjunto de direcciones X_p^H que complementen a las direcciones verticales X_p^V que son tangentes a la fibra, y están canónicamente definidas por la relación $\pi_{*p}(X_p^V) = 0$, donde $\pi_{*p}: T_p\mathcal{E} \rightarrow T_{\pi(p)}\mathcal{R}$ es la diferencial de la proyección canónica del fibrado. La conexión quedará representada por una 1-forma de conexión \mathbf{A} definida sobre \mathcal{E} o por una trivialización local sobre \mathcal{R}

que permitirá escribir la parte horizontal de un vector X definido sobre \mathcal{E} (o sobre \mathcal{R} si empleamos la versión local) definida como $X^H = X - A(X)$ [12, capítulo 10]. En [4] se construye esa conexión para el caso de que el espacio de Hilbert sea de dimensión finita. En lo que sigue supondremos que una construcción análoga puede adaptarse para el caso de espacios de Hilbert separables, aunque en futuros trabajos se deberá probar la existencia de esta conexión con rigor.

3.2. Conexión cuántica

A la hora de definir la dinámica de un estado $\sigma_\psi(R(s))$ a través del fibrado \mathcal{E} , esperaríamos poder definir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma_\psi(R(s + \varepsilon)) - \sigma_\psi(R(s))}{\varepsilon}, \quad (3.1)$$

pero no es posible, ya que $\sigma_\psi(R(s)) \in \mathcal{H}_{R(s)}$ y $\sigma_\psi(R(s + \varepsilon)) \in \mathcal{H}_{R(s+\varepsilon)}$ pertenecen a dos espacios vectoriales diferentes y no tiene sentido restarlos. Para poder relacionarlos, tendremos que definir una conexión y una derivada covariante asociada a ella.

Consideremos una base ortonormal $\{\sigma_\psi^k(R)\}$ de \mathcal{H}_R . Es una base infinita, pero numerable, ya que cada \mathcal{H}_R es separable. Esto define un conjunto de secciones locales $\sigma_\psi^k: \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathcal{E}$ que describen localmente la sección global $\sigma_\psi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}$, de manera que

$$\sigma_\psi(R(s)) = \sum_{k_1}^{\infty} \Psi_{k_1}(R(s)) \sigma_{\psi}^{k_1}(R(s)), \quad (3.2)$$

donde $\Psi_k: \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ son las componentes de σ_ψ en la base $\{\sigma_\psi^k\}$.

Consideremos que un vector $\sigma_\psi(R(s)) \in \mathcal{H}_{R(s)}$ va a ser conectado con uno de la siguiente fibra:

$$\sigma_\psi(R(s + ds)) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(s + ds) \sigma_\psi^k(R(s + ds)) \in \mathcal{H}_{R(s+ds)},$$

donde, si queremos que la sección defina una dirección horizontal del fibrado, deberá satisfacer:

$$\Psi_k(s + ds) = \Psi_k(R(s)) - i \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{a=1}^d A_{akl}(R(s)) dR^a(s) \Psi_l(R(s)), \quad (3.3)$$

y $A_{akl}: \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones diferenciables. Si nos fijamos bien en la ecuación 3.3, hemos expresado la dependencia de los coeficientes $\Psi_k(s + ds)$ con s , es decir, estas coordenadas determinan el transporte paralelo de $\sigma_\psi((R(s + ds))$ a la fibra \mathcal{H}_s .

Esta relación se ha hecho a partir de la *conexión cuántica* \mathcal{A} , que interviene a través de las funciones A_{akl} . La 1-forma de conexión local en \mathcal{E} viene dada por la 1-forma de

matrices \mathbf{A} , cuyas componentes son las siguientes matrices de 1-formas:

$$A_{kl} = \sum_{a=1}^d A_{akl}(R) dR^a.$$

Vamos a reordenar la ecuación 3.3 y a derivarla con respecto al tiempo s . El transporte paralelo de un vector $\sigma_\psi(s_0) \in \mathcal{H}_{R(s_0)}$ a lo largo de un segmento de la curva \mathcal{C} que pasa por \mathcal{O}_α está determinado por las componentes $\Psi_k(s)$ de la solución $\sigma_\psi(s)$ del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} i \frac{d}{ds} \Psi_k(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{a=1}^d \dot{R}^a A_{akl}(R(s)) \Psi_l(s), \\ \Psi_k(s_0) = \Psi_k(R(s_0)). \end{cases} \quad (3.4)$$

Definimos la derivada covariante temporal \mathbf{D}_s a partir de la conexión \mathcal{A} como el siguiente operador matricial:

$$\mathbf{D}_s = \frac{d}{ds} + i \sum_{a=1}^d \dot{R}^a(s) \mathbf{A}_a(R(s)), \quad (3.5)$$

donde \mathbf{A}_a son las matrices cuyas componentes son $(\mathbf{A}_a)_{kl} = A_{akl}$.

Entonces la ecuación 3.4 queda, en términos del vector $\Psi(s)$:

$$\mathbf{D}_s \Psi(s) = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

Las secciones σ_ψ que cumplan esta ecuación 3.6 definirán localmente la dirección horizontal de las secciones del fibrado. Si una sección tiene una derivada covariante distinta de cero, entonces se dice que tiene componente vertical no nula.

3.3. Ecuación de Schrödinger covariante

Además de nuestro fibrado \mathcal{E} sobre \mathcal{R} , cuyas fibras son los espacios de Hilbert \mathcal{H}_R (podemos considerarlo un fibrado de estados), también podemos definir otro fibrado vectorial real $\mathbf{u}(\mathcal{E})$ sobre \mathcal{R} cuyas fibras son los espacios vectoriales reales $u(\mathcal{H}_R)$ de los operadores autoadjuntos que actúan sobre \mathcal{H}_R (es decir, las fibras son la parte autoadjunta de las C^* -álgebras correspondientes, por lo que podríamos interpretarlo como un fibrado de observables).

Vamos a construir una extensión de la mecánica cuántica en la cual sustituiremos los roles del espacio de Hilbert y el operador hamiltoniano por un fibrado vectorial hermítico \mathcal{E} (equipado con una conexión compatible \mathcal{A}) y una sección global \mathfrak{h}_E del

fibrado vectorial real $\mathbf{u}(\mathcal{E})$. Como hemos indicado previamente, supondremos que la conexión está bien definida de manera global sobre el espacio de parámetros \mathcal{R} y que, en consecuencia, podemos considerar la existencia de una derivación covariante globalmente definida. Esto sucederá, por ejemplo, para aquellos casos en los que el espacio de parámetros admita un atlas con una sola carta. Como se ha indicado, el estudio riguroso de estos problemas de existencia en casos generales se considerarán en futuros trabajos.

Enunciaremos los siguientes postulados sobre nuestro modelo extendido:

1. Un sistema cuántico \mathcal{S} se describe mediante una terna $(\mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathfrak{h}_E)$, donde:
 - \mathcal{E} es un fibrado vectorial hermítico con fibras $\mathcal{E}_s \cong \mathcal{H}_R$ sobre el espacio de parámetros \mathcal{R} y equipado con una conexión \mathcal{A} compatible con una métrica,
 - $\mathcal{C}: [s_1, s_2] \rightarrow \mathcal{R}$ es una curva diferenciable en la variedad \mathcal{R} ,
 - $\mathfrak{h}_E: \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{u}(\mathcal{E})$ es una sección global del fibrado vectorial real $\mathbf{u}(\mathcal{E})$.
2. Sea $s \in [s_1, s_2]$ un tiempo arbitrario. Entonces los estados del sistema \mathcal{S} en el tiempo s son las secciones $\sigma_\psi(s)$ de \mathcal{E} . Los observables del sistema son las secciones globales de $\mathbf{u}(\mathcal{E})$.

Para realizar la medida de un observable $\mathfrak{D}: \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{u}(\mathcal{E})$ en el tiempo s para un estado puro dado por $\sigma_\psi(s) \in \mathcal{H}_{R(s)}$, se evalúa \mathfrak{D} en $R(s)$ y se obtiene el operador autoadjunto $\mathfrak{D}_{R(s)} = \mathfrak{D}(R(s))$ que actúa en $\mathcal{H}_{R(s)}$. Entonces se utiliza el axioma de proyección de Von Neumann para predecir el resultado de la medida (se calcula la probabilidad de obtener los diferentes resultados, que son los valores propios de $\mathfrak{D}_{R(s)}$, y su valor esperado e incertidumbre). Nótese que toda noción de probabilidad está definida fibra a fibra, para cada valor de s .

3. La dinámica del sistema \mathcal{S} se describe mediante el levantamiento $\sigma_\psi: [s_1, s_2] \rightarrow \mathcal{E}$ de la curva $\mathcal{C}: [s_1, s_2] \rightarrow \mathcal{R}$ a \mathcal{E} que está determinado por la ecuación covariante de Schrödinger

$$i\hbar D_s \sigma_\psi(s) = \mathfrak{h}_E(\mathcal{C}(s)) \sigma_\psi(s). \quad (3.7)$$

Si nos fijamos bien en esta ecuación, a la izquierda está la contribución horizontal de la evolución y a la derecha está la parte vertical.

En el caso en que no haya dinámica cuántica, $\mathfrak{h}_E = 0$ y por tanto $D_s \sigma_\psi = 0$. En ese caso, σ_ψ es una sección horizontal y no evoluciona, pero la representación de la sección en cada fibra será distinta por la acción de la conexión.

En la formulación habitual de la mecánica cuántica, la evolución de un sistema viene dada por una curva en el espacio de Hilbert. En nuestro caso, la evolución de un sistema será una curva en el espacio de secciones $\Gamma(\mathcal{E})$.

Recordemos la definición en la ecuación 3.5 de la derivada covariante asociada a la conexión cuántica, \mathbf{D}_s . Entonces, podemos sustituir la expresión en coordenadas dada por la ecuación 3.2 en la ecuación 3.7 y obtenemos la ecuación de Schrödinger covariante en forma vectorial:

$$i\mathbf{D}_s \Psi(s) = \mathbf{H}_E(R(s))\Psi(s). \quad (3.8)$$

donde $\mathbf{H}_E(R)$ es la matriz con entradas

$$H_E(R)_{mn} = \langle \sigma_\psi^m(R), \mathfrak{h}_E(R)\sigma_\psi^n(R) \rangle_R.$$

Con esto hemos conseguido, al menos formalmente, nuestro objetivo. Hemos desarrollado un formalismo para la definición de sistemas cuánticos definidos sobre un espacio tiempo globalmente hiperbólico proporcionando un marco cinemático articulado sobre un fibrado de sistemas clásicos construidos sobre los fibrados cotangentes a las hojas espaciales de la foliación del espacio-tiempo, y un mecanismo de cuantización que asigna un espacio de Hilbert a cada uno de ellos.

Capítulo 4

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos desarrollado un modelo de física cuántica que considera los efectos de la métrica del espacio-tiempo y los codifica en forma de un fibrado de espacios de Hilbert dependientes del tiempo. Es importante darse cuenta de que en este modelo, los estados ya no son funciones que pertenecen a un espacio de Hilbert, sino secciones definidas en todo el fibrado. De la misma manera, la evolución temporal no será una curva en el espacio de Hilbert, sino una curva en el espacio de secciones del fibrado.

La figura 2.2 es clave para entender cómo se ha hecho este proceso: primero partimos de un espacio-tiempo \mathcal{M} que dividimos en una foliación de hojas espaciales Σ_s parametrizadas por el tiempo s . Después obtenemos el fibrado cotangente $T^*\Sigma_s$ de cada hoja y lo cuantizamos para construir cada espacio de Hilbert \mathcal{H}_s . Entonces definimos la dinámica sobre ese fibrado de espacios de Hilbert dependientes del tiempo s .

El objetivo de este trabajo era obtener una versión simplificada de los modelos desarrollados en los artículos [1], [2] y [3]. Esta versión simplificada cuenta con algunas limitaciones y puntos que quedan por desarrollar, que comentaré a continuación, pero puede servir como base para trabajos más profundos sobre el tema.

Personalmente, este trabajo me ha servido para aplicar y afianzar el conocimiento adquirido en el máster de Física en el Universo, especialmente el de las asignaturas de Relatividad General y Métodos Matemáticos (los métodos geométricos: geometría diferencial, análisis tensorial, álgebras de Lie y sus aplicaciones en la física). Como soy graduado en Matemáticas y no había estudiado antes Física Cuántica en profundidad, también me ha servido para aprender mucho acerca de este tema, y me ha servido para ver cómo se aplican muchas herramientas matemáticas que ya conocía por mis estudios anteriores. Además, la geometría diferencial es mi área preferida de las matemáticas

y también he podido ampliar mi conocimiento con respecto a lo que estudié en la carrera.

En cuanto a las limitaciones del modelo propuesto en este trabajo y los puntos que se pueden mejorar en el futuro, habría que destacar que el desarrollo expuesto en [4] está pensado para espacios de Hilbert de dimensión finita, y en nuestro caso lo hemos aplicado a dimensión infinita considerando que los espacios de Hilbert son separables (es decir, admiten bases numerables). Esta consideración no siempre es cierta (por ejemplo, en teoría cuántica de campos) y habría que hacer un estudio más exhaustivo de la existencia de la conexión cuántica y la transición entre diferentes cartas en el espacio de parámetros.

También se debería completar creando un ejemplo mínimo para ilustrar la aplicación de este modelo. Por ejemplo, un sistema interesante, pero lo suficientemente simple, podría ser la cuantización de un oscilador armónico donde la masa y la frecuencia dependen del tiempo.

Bibliografía

- [1] Alonso, José Luis, Bouthelier Madre, Carlos, Clemente Gallardo, Jesús y Martínez Crespo, David: *Hybrid geometrodynamics: a Hamiltonian description of classical gravity coupled to quantum matter*. Classical and Quantum Gravity, 41(10):105004, 2024. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ad3459>.
- [2] Alonso, José Luis, Bouthelier Madre, Carlos, Clemente Gallardo, Jesús y Martínez Crespo, David: *Geometric flavors of Quantum Field theory on a Cauchy hypersurface. Part I: Gaussian analysis and other mathematical aspects*. Journal of Geometry and Physics, 203:105264, 2024. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0393044024001657>.
- [3] Alonso, José Luis, Bouthelier Madre, Carlos, Clemente Gallardo, Jesús y Martínez Crespo, David: *Geometric flavours of quantum field theory on a Cauchy hypersurface. Part II: Methods of quantization and evolution*. Journal of Geometry and Physics, 203:105265, 2024. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0393044024001669>.
- [4] Mostafazadeh, Ali: *Energy observable for a quantum system with a dynamical Hilbert space and a global geometric extension of quantum theory*. Phys. Rev. D, 98:046022, 2018. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.046022>.
- [5] Minguzzi, Ettore y Sánchez Caja, Miguel: *The causal hierarchy of spacetimes*, 2008. <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0609119>.
- [6] Lee, John M.: *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, 2013.
- [7] Carosso, Andrea: *Geometric Quantization*, 2018. <https://arxiv.org/abs/1801.02307>.
- [8] Woodhouse, Nicholas M. J.: *Geometric Quantization*. Oxford University Press, 1997.

- [9] Sasaki, Shigeo: *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds*. Tohoku Mathematical Journal, 10(3):338–354, 1958. <https://doi.org/10.2748/tmj/1178244668>.
- [10] Altunbaş, Murat: *Horizontal Lift Metric on the Tangent Bundle of a Weyl Manifold*. Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics, páginas 895–901, 2021.
- [11] Clemente Gallardo, Jesús: *The Geometrical Formulation of Quantum Mechanics*. Rev. Real Academia de Ciencias, Zaragoza, 2012.
- [12] Nakahara, Mikio: *Geometry, topology and physics*. Graduate student series in physics. Hilger, Bristol, 1990.

Anexo

Apéndice A

A.1. El espacio de fases es un fibrado cotangente

Sea M una variedad. Denotemos el espacio tangente en $q \in M$ como T_qM . Los elementos del espacio tangente tienen la forma $v = \sum_j v^j \frac{\partial}{\partial q^j}$. La unión de todos los espacios tangentes de M da lugar al fibrado tangente:

$$TM = \bigcup_{q \in M} T_qM.$$

El espacio cotangente en $q \in M$, denotado por T_q^*M , es el espacio dual del espacio tangente, es decir, $T_q^*M = (T_qM)^*$. Los elementos del espacio cotangente son las aplicaciones lineales (o 1-formas) $\alpha: T_qM \rightarrow \mathbb{R}$. Las 1-formas dq^j forman una base de T_q^*M . La unión de todos los espacios cotangentes de M da lugar al fibrado cotangente:

$$T^*M = \bigcup_{q \in M} T_q^*M.$$

Dada una función lagrangiana $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ del sistema, podemos particularizarla para el punto q :

$$\begin{aligned} L_q: T_qM &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto L(v). \end{aligned}$$

Asignamos a un punto del espacio tangente T_qM una 1-forma $T_qM \rightarrow \mathbb{R}$ (que hemos visto que forman el espacio cotangente T_q^*M).

$$\begin{aligned} DL_q: T_qM &\rightarrow T_q^*M \\ \sum_j v^j \frac{\partial}{\partial q^j} &\mapsto \sum_j \frac{\partial L}{\partial v^j} dq^j. \end{aligned}$$

Si interpretamos esta aplicación como la derivada parcial de L en la dirección de la velocidad \dot{q} , entonces tenemos que $p = p_j dq^j \in T_q^*M$. (Recordemos que los momentos

generalizados en mecánica lagrangiana se definen como los coeficientes de la 1-forma anterior, es decir: $p_j := \frac{\partial L}{\partial v^j}$).

Existe una proyección natural del fibrado cotangente al espacio de configuraciones:

$$\begin{aligned}\pi: T^*M &\rightarrow Q \\ (q, p) &\mapsto q.\end{aligned}$$

La fibra $\pi^{-1}(q)$ es el espacio de momentos de q . El fibrado cotangente T^*M representa las posibles posiciones y momentos del sistema, es decir, es el *espacio de fases*.

A.2. Polarización real

Una *polarización real* en $T^*\Sigma_s$ es una foliación (una distribución involutiva) $D \subset T(T^*\Sigma_s)$ que es *maximalmente isotrópica*, es decir, $\forall (q, p) \in T^*\Sigma_s$ se cumple la *propiedad lagrangiana*:

$$\omega(X, Y) = 0, \quad X, Y \in D_{(q,p)},$$

y no existe un subespacio de $T_{(q,p)}(T^*\Sigma_s)$ más grande que contenga a $D_{(q,p)}$ que cumpla esa propiedad.

Consideremos las funciones f constantes a lo largo de D , que satisfacen $X(f) = 0$, $\forall X \in D$. Como los estados en nuestro espacio de Hilbert de precuantización $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_s}$ son secciones del fibrado de línea L_s , entonces consideramos secciones que sean constantes de acuerdo a la derivada covariante, es decir, $\sigma \in \Gamma(T^*\Sigma_s)$ tales que

$$\nabla_X \sigma = 0, \quad \forall X \in D.$$

Los operadores cuánticos \hat{f} que actúen sobre este nuevo espacio deberán preservar la polarización:

$$\nabla_X \sigma_\varphi = 0 \Rightarrow \nabla_X (\hat{f} \sigma_\varphi) = 0.$$

Recordemos la definición de la precuantización en la ecuación 2.9. Como \hat{f} es lineal en ∇_{X_f} , entonces necesitamos que se cumpla la relación de conmutación $\nabla_X \nabla_{X_f} = \nabla_{X_f} \nabla_X$, pero en la ecuación 2.6 podemos ver que esto solo ocurre si ω y $\nabla_{[X, X_f]}$ son nulas. Por tanto, para que \hat{f} conserve la polarización D , se necesita que $[X, X_f] \in D$.

Si escogemos las funciones de onda que dependen únicamente de la posición $\psi = \psi(q)$, entonces

$$X(\psi) = 0, \quad \forall X = X_k \frac{\partial}{\partial p_k}.$$

La envolvente lineal de los vectores de la base $\frac{\partial}{\partial p_k}$ en el punto (q, p) forma un subespacio que cumple la propiedad lagrangiana, ya que

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_j}, \frac{\partial}{\partial p_k}\right) = 0, \quad j \neq k.$$

El conjunto de estos subespacios se denomina *polarización vertical* y vamos a denotarlo como P . El potencial simpléctico $\theta = p_k dq^k$ hace que $\theta(X) = 0, \forall X \in P$. Un potencial que cumple esta propiedad se dice *adaptado* a P . Aplicando esta condición a la ecuación 2.8,

$$\nabla_X(\psi \mathbf{u}) = d\psi(X)\mathbf{u},$$

y la derivada covariante se convierte en una derivada direccional según el campo X (si $X = X_{q^k}$ o $X = X_{p_k}$, la derivada covariante se convierte en una derivada parcial).

Si hacemos esto, debemos modificar también la medida para integrar solamente respecto de q^k , ya que la integración respecto de los momentos p_k va a ser divergente. Esto se hace mediante la cuantización *half-form*. Se puede encontrar un desarrollo completo de esta cuantización en [7] y [8, capítulo 10].

La polarización real es muy restrictiva. Por ejemplo, recordemos el campo vectorial asociado a una función f , dado por la ecuación 2.2, e impongamos la condición $X_f \in P$. Entonces:

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Sea $X = X_k \frac{\partial}{\partial p_k} \in P$, entonces:

$$[X, X_f] = XX_f - X_fX = X_j \left(\frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial p_j} \right).$$

La condición $[X, X_f] \in P$ se traduce en que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_k} = 0,$$

es decir, f es, como mucho, de grado 1 en p_k :

$$f(q, p) = g(q) + h^k(q)p_k.$$

En muchas situaciones se da el caso de que el hamiltoniano h depende de p^2 , por lo que sería una función que no preserva esta polarización. Para realizar una polarización menos restrictiva, podemos considerar la polarización compleja.