Trabajo Fin de Máster

Enseñanza de la geometría plana en 1º ESO

Teaching of plane geometry in the first year of secondary education

Autor

Antonio Brotons Montañés

Director

Oscar Carrión Lostal

Facultad de Educación

2024

Índice

1. Definición del objeto matemático a enseñar

El objeto matemático en el que se va a centrar la propuesta didáctica es el conjunto de las nociones de longitud y área en los polígonos y la construcción de figuras en el contexto de aprendizaje de la geometría plana en 1º ESO.

En el marco del currículo actual de Matemáticas para 1º ESO (ORDEN 1172) lo que se busca es desarrollar el sentido espacial, necesario para comprender y apreciar los aspectos geométricos de nuestro entorno, representando y registrando las distintas formas y figuras, identificando sus propiedades, para después poder utilizarlas para establecer relaciones. Con el sentido espacial, se busca que los alumnos sean capaces de entender el espacio, sus elementos, sus fenómenos (movimientos, transformaciones...) y así poder utilizar la geometría para modelizar la realidad y sus problemas. Además, también entra el juego el sentido de la medida, que permite analizar el espacio mediante su cuantificación. Durante este desarrollo, los alumnos, además de fortalecer su capacidad deductiva, algo común en todos los campos de la matemática, también deberán trabajar la manipulación, visualización y transformación como vías para llegar a las respuestas que conformen su saber en geometría.

La concreción de los campos de problemas (CP) que abordará la propuesta se ha definido en cuatro categorías relacionadas con parte de los saberes expuestos en el currículo, que a su vez se dividen en hasta tres subcategorías, según el material y los métodos que vayan a utilizarse: papiroflexia, geoplanos (y equivalentes) o software de geometría dinámica. Así, los CP quedan definidos de la siguiente manera:

- CP1: Deducción guiada de fórmulas de área
    - CP1P: con papiroflexia
- CP2: Cálculo y deducción de áreas
    - CP2G: con geoplanos
    - CP2S: con software de geometría dinámica
- CP3: Cálculo y deducción de longitudes
    - CP3G: con geoplanos
- CP4: Construcción de figuras
    - CP4P: con papiroflexia
    - CP4G: con geoplanos
    - CP4S: con software de geometría dinámica

Las técnicas (T) se han definido como técnicas generales, utilizadas para la resolución de problemas de un mismo CP independientemente del material usado, y como técnicas específicas de cada subcategoría de CP. Además, algunas de las T tienen subcategorías en función del objeto sobre el que son aplicadas.

- Técnicas generales

    - T1: Operaciones con números reales
    - T2: Expresión algebraica
    - T3: Descomposición polígonos más simples
    - T4: Identificación
        - T4a: de polígonos y sus propiedades
        - T4b: de longitudes
        - T4c: de ángulos
    - T5: Aplicación de fórmulas
        - T5a: Fórmulas de área
        - T5b: Teorema de Pitágoras
        - T5c: Número π
    - T6: Recomposición de polígonos
    - T7: Medida directa de longitud
- Técnicas específicas
    - TP1: Plegado de rectas con una posición y orientación determinada
    - TP2: Transporte mediante plegado
        - TP2a: de segmentos
        - TP2b: de ángulos
    - TG1: Unión de puntos de una trama cuadrada
    - TG2: Conteo
        - TG2a: de elementos
        - TG2b: de configuraciones
    - TS1: Trazado digital
    - TS2: Desplazamiento de puntos
    - TS3: Medida de longitudes y áreas
    - TS4: Generación mediante parámetros

Por último, se concretan las tecnologías (TL) (y las definiciones que, aunque también forman parte de las tecnologías, dada su frecuencia se denotan aparte) que justifican el uso de las T en cada CP. La definición de un cierto objeto también supone el conocimiento de sus propiedades y las de sus elementos.

- Definiciones (D):
    - D1: Definición de perpendicularidad y paralelismo
    - D2: Definición de unidad de área
    - D3: Definición de trama cuadrada
    - D4: Definición de circunferencia
    - D5: Definición de triángulo rectángulo
    - D6: Definición de unidad de longitud
- Tecnologías (TL):
    - TL1: Construcción en actividad previa
    - TL2: Generalización

- TL3: Clasificación y propiedades de polígonos
- TL4: Simetría de reflexión
- TL5: Polígonos equivalentes
- TL6: Función de las herramientas de software

La relación entre los CP, las T, las D y las TL quedan descritas por la Tabla 1. Las T, D y TL relacionadas con un CP específico son las relacionadas con el CP general en el que se incluye además de las que se relacionan específicamente (Ejemplo: en CP3G se utilizan T1, T2, T3, T5b, TG2a, que se justifican mediante D3, D5, D6 y TL1).

<table>
<tr><th colspan="3">General</th><th colspan="3">Específico</th></tr>
<tr><th>CP</th><th>Técnicas</th><th>Tecnologías</th><th>CP</th><th>Técnicas</th><th>Tecnologías</th></tr>
<tr><td>CP1</td><td>T2, T4, T6</td><td>D1, D5, D4, TL2, TL3, TL5</td><td>CP1P</td><td>TP1, TP2</td><td>TL4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CP2</td><td rowspan="2">T1, T3, T5a</td><td rowspan="2">D2, D4, D5, D6, TL1</td><td>CP2G</td><td>TG1, TG2a</td><td>D3</td></tr>
<tr><td>CP2S</td><td>TS1, TS2, TS3</td><td>TL6</td></tr>
<tr><td>CP3</td><td>T1, T2, T3, T5b, T5c, T7</td><td>D5, D6, TL1</td><td>CP3G</td><td>TG2a</td><td>D3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">CP4</td><td rowspan="3">T4</td><td rowspan="3">D1, D4, TL3</td><td>CP4P</td><td>TP1, TP2</td><td>TL4</td></tr>
<tr><td>CP4G</td><td>TG1, TG2</td><td>D3</td></tr>
<tr><td>CP4S</td><td>TS1, TS2, TS4</td><td>TL6</td></tr>
</table>

Tabla 1: Relación de campos de problemas (CP), técnicas (T), definiciones (D) y tecnologías (TL)

Por último, considero necesario explicar en que consisten los materiales manipulativos que se han nombrado y justificar su uso en el aprendizaje de la geometría.

- <u>Papiroflexia</u>

En esta propuesta, consistirá en el doblado de una figura inicial de papel (no necesariamente un cuadrado) con el objetivo de trazar los segmentos necesarios que delimiten una cierta figura final o lugares por los que recortar para después unir las partes de otra manera. Para realizar construcciones geométricas con papiroflexia, hay que ir construyendo poco a poco los elementos más simples que conforman la construcción final, haciendo que la propia construcción en progreso sea la herramienta que se utiliza para progresar y obtener el resultado deseado. De esta manera, el alumno aprende a identificar los elementos que tiene y aprovecharlos mediante simetrías, traslaciones y rotaciones para construir los elementos que necesita.

- <u>Geoplano</u>

Los geoplanos son unas placas planas con clavos o puntas (que pueden ser de diversos materiales) que conforman una red o trama (cuadrada, isométrica, radial). Se utilizan gomas que se estiran alrededor de los clavos, de tal manera que la goma en tensión conforme un polígono que tenga como vértices los clavos que la tensan. De esta manera, moviendo la goma pueden construirse variedad de polígonos con vértices en los puntos de la trama. Realmente, una hoja con la trama impresa (que en el caso de la trama cuadrada podría tratarse de un folio cuadriculado típico) podría ofrecer una función parecida, y aunque las mismas actividades que se pueden plantear para un geoplano se podrían plantear para una trama impresa, se perdería ese dinamismo que permite el movimiento de las gomas. Una alternativa que no supone desventaja frente al geoplano es la del uso de una trama en software de geometría dinámica, que puede emular a la perfección el comportamiento de todos los tipos de geoplano en caso de que no se disponga de este material. Por lo tanto, aunque a partir de ahora sólo nos referiremos al geoplano, en realidad nos referimos también a cualquiera de las alternativas comentadas.

Las ventajas del geoplano, además de su dinamismo, es la de la cuantización del espacio: todas las construcciones están limitadas a que sus vértices sean uno de los puntos de la trama, por lo que las longitudes y las áreas pueden calcularse o deducirse a partir del conteo de unidades de longitud y unidades de área. Habrá casos sencillos en los que tanto las longitudes como las áreas correspondan exactamente con celdas de la trama (por ejemplo, al calcular el perímetro y el área de un rectángulo en la trama cuadrada). Sin embargo, habrá otros casos en los que no existirá una correspondencia exacta, por lo que los alumnos tendrán que ingeniárselas para encontrar relaciones con longitudes y áreas que sí correspondan a un número natural de unidades de longitud y área. De esta manera, en vez de utilizar la medida directa y la aplicación de una fórmula, los alumnos deben utilizar su razonamiento geométrico.

- <u>Software de geometría dinámica</u>

El software de geometría dinámica pone las herramientas computacionales al servicio del aprendizaje matemático del alumno. En esta propuesta, utilizaremos el programa gratuito y de código abierto GeoGebra, y haremos uso de sus funciones relacionadas con geometría.

La función más relevante de un programa de este tipo, que lo define como software de geometría dinámica, es la función de arrastre (Rubio-Pizzorno, 2017). Es decir, a partir de una construcción geométrica inicial, como puede ser una serie de puntos, rectas o figuras, algo que podría hacerse en otros programas, en GeoGebra podemos, además, mover o cambiar estos elementos de diversas formas (por ejemplo, mover el vértice de un polígono), mientras el programa calcula en el momento cómo se transforma la construcción al modificar dichos elementos. De esta manera, los alumnos pueden experimentar con distintas construcciones y transformaciones, obteniendo una retroalimentación instantánea de los cambios y desplazamientos que hagan.

Además de esta función, GeoGebra también permite realizar construcciones geométricas básicas mediante las instrucciones adecuadas (por ejemplo, trazar una perpendicular dada una recta y un punto por el que la cruce), generarlas según unos parámetros, o calcular numéricamente distancias, ángulos y áreas. De esta manera, se pueden realizar construcciones y comprobaciones geométricas de forma mucho más cómoda, rápida y precisa que dibujando sobre el papel, y todo ello sin perder en razonamiento geométrico, pues el alumno sigue teniendo que saber cómo dar las instrucciones adecuadamente para conseguir la construcción que necesita.

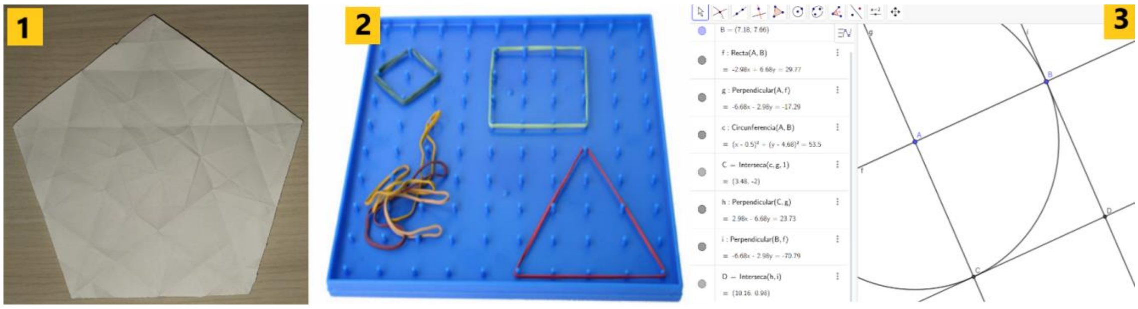


Figura 1: 1) Pentágono regular obtenido mediante papiroflexia. 2) Ejemplo de geoplano de plástico. 3) Ejemplo de construcción geométrica (cuadrado) en GeoGebra.

El uso de dichos materiales debe comprenderse desde una perspectiva de contraste con los libros de texto, que suelen ser el material en el que los profesores basan su enseñanza usualmente.

Posibilitar que los alumnos puedan utilizar un material manipulativo para construir su conocimiento matemático permite que se den procesos improbables con el carácter estático del libro de texto, esta clase de materiales permiten encontrar soluciones mediante una experimentación dinámica que responde inmediatamente a lo que el alumno intenta, ayudando a que descubra y comprenda las relaciones que existen entre los elementos geométricos que está manipulando. Son herramientas dinámicas que permiten a los alumnos crear modelos sin necesidad de formalidad matemática.

Además, el trabajar con distintos materiales es una forma de atención a la diversidad, pues es posible que para algunos alumnos les resulte excesivamente complicada la comprensión de un concepto a través del uso de un material en concreto. Ampliando el abanico de opciones se reduce el riesgo de que un alumno no pueda aprovechar ninguno de los materiales con los que se planea trabajar, además de permitir distintas aproximaciones a un mismo problema, lo que favorece su comprensión.

Estas son sólo algunas de las razones de ser de los recursos manipulativos en matemáticas descritas por Sánchez (1995), considerando que son suficientes como para justificar su uso en esta propuesta.

2. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Análisis de libros de texto

Para conocer mejor la situación actual de la educación matemática es conveniente estudiar los contenidos y las propuestas metodológicas que ofrecen los libros de texto para las matemáticas escolares. Es indiscutible que los libros de texto han sido y siguen siendo una herramienta popularmente utilizada por el profesorado para ejercer su enseñanza en matemáticas, tal y como confirman Fan et al. (2013), por lo que saber más acerca de este elemento resulta una necesidad si se pretende entender el estado actual de la enseñanza-aprendizaje. Con este fin, he dispuesto de tres libros de matemáticas para 1º ESO de las siguientes editoriales:

- 1. Editorial SM (Vizmanos, 1997)
- 2. Editorial Santillana (Álvarez, 2007)
- 3. Editorial Marfil (Botella, 2007)

Puede que parezca absurdo estudiar el estado actual de la enseñanza-aprendizaje analizando libros de tal antigüedad, pero estudios como el de Rodríguez-Muñiz et. al (2020) muestran que habitualmente los libros de texto no evolucionan con el currículo, y si lo hacen es de manera superficial y estética, manteniendo prácticamente intacta la propuesta metodológica. Por lo tanto, aunque los libros que se van a analizar sean antiguos, es muy posible que las ediciones actuales compartan la gran mayoría de la propuesta educativa.

Este análisis se va a enfocar en tres cuestiones acerca del tratamiento del objeto matemático en cada uno de los libros.

¿Cómo se justifica la introducción del objeto matemático?

En el libro de SM (Vizmanos, 1997), los temas se introducen con una imagen y un texto breve. Cuando se introducen las figuras geométricas y sus elementos, se dice que muchos objetos de la vida real contienen estas formas, y que el se humano las ha admirado a pesar de su simplicidad. Más adelante, cuando se introduce el cálculo de áreas, se pone de ejemplo el trabajo de un albañil, que se pregunta si antes de ponerse a alicatar, sabría cuántos azulejos necesita. Al final de los temas se dedica una página a “las matemáticas en el mundo”, en el que se relacionan las figuras geométricas con el arte y los ángulos con el diseño de barcos anti-radar. En este caso, la justificación con la que se introduce la geometría es un conjunto de ejemplos de su presencia en nuestro mundo, y su utilidad para resolver ciertos problemas cotidianos.

En el libro de Santillana (Álvarez, 2007) las páginas dedicadas a introducir los temas no se centran en justificar la introducción de los contenidos, si no que cuentan una anécdota histórica relacionada que no ahonda demasiado en las posibles motivaciones tras su introducción. Lo más parecido que podemos encontrar a una razón por la que aprender geometría son una serie de problemas situados al final de los temas, en una sección llamada "En la vida cotidiana". Estos problemas están señalados como de dificultad 3 por el propio libro (utilizando la típica notación de 1, 2 o 3 puntos según la dificultad), y son prácticamente los únicos que tienen un contexto externo a las matemáticas. Por ejemplo, se propone un problema relacionado con el diseño de la caja de un reloj de péndulo, otro problema en el que hay que calcular la cantidad de pintura necesaria para pintar las paredes de una habitación con ventanas de distintas formas. Entonces, en resumen, en la propuesta de este libro no hay una justificación explicita para la introducción de la geometría, si no que viene implícita mediante el contexto de algunos de los problemas.

Por último, hay que decir que el libro de Marfil (Botella, 2007) se diferencia bastante de los dos anteriores en este aspecto. En este libro se dedican los siguientes párrafos para introducir el aprendizaje de la geometría plana:

> *"¿Cuándo nacieron las matemáticas? Quizá cuando el ser humano empezó a contar, quizá cuando empezó a diseñar algunas estrategias para cazar... No lo sabemos, pero sin duda observó lo que tenía a su alrededor con el fin de subsistir y hacer más fácil su existencia; ello le llevó a realizar pequeños descubrimientos que supusieron avances enormes en la historia como, por ejemplo: la rueda.*
>
> *¿Cómo se inventó la rueda? Seguramente nació de la observación del entorno y las propiedades de los cuerpos redondos que existen en la naturaleza, lo que llevó a idear posibles aplicaciones del hecho de "ser redondo".*
>
> *Queremos que observes bien los cuerpos que te rodean, que intentes descubrir qué propiedades cumplen y que acostumbres tu mente a relacionar unas con otras para ir descubriendo otras nuevas."*

Este fragmento supone una reflexión acerca del origen y la razón de ser de la geometría, algo de lo que se habla en un próximo apartado del trabajo, y también supone una declaración de intenciones acerca del aprendizaje de esta rama de las matemáticas, que veo bastante acertada. Además, hay un tema entero dedicado a la representación del mundo en el plano (proyecciones, mapas...) que está totalmente contextualizado en el mundo real, lo que consolida todavía más la idea de que la geometría está muy presente en el mundo que nos rodea.

<u>¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías aparecen?</u>

Para abordar esta cuestión, se va a recoger la presencia de los CP, T y TL (y D) concretados en la Tabla 1 en cada uno de los libros, atendiendo al tipo de problemas que aparecen y a las técnicas que se espera que el alumno utilice, dado el contexto de cada actividad. Puesto que es frecuente encontrar problemas ya resueltos como teoría (sobre todo los dedicados a construir tecnologías), se indicarán en cursiva aquellos CP y T que aparezcan mayoritariamente de esta manera. Por otro lado, se indicarán con un asterisco (*) aquellos CP, T y TL (y D) que, aunque estrictamente estén presentes, sea de forma muy esporádica y por lo tanto sea improbable que se lleven al aula.

En la Tabla 2 puede verse un resumen del libro de SM (Vizmanos, 1997):

Editorial SM (1997)					
General			Específico		
CP	Técnicas	Tecnologías	CP	Técnicas	Tecnologías
CP1	*T2*, T4, *T6*	D1, D4, TL2, TL3, TL5			
CP2	T1, T3, T5a	D2, D4, D6	*CP2G**	*TG2a**	*D3**
CP3	T1, T3, T5b, T5c, T7	D6			
CP4	T4	D1, D4, TL3			

Tabla 2: Campos de problemas, técnicas y tecnologías presentes en el libro de la editorial SM (1997)

En este libro, aunque pueden encontrarse los mismos CP generales incluidos en nuestra propuesta, no hay menciones a ninguno de los materiales manipulativos que vamos a utilizar, lo que era de esperar. Además, el CP1 (y algunas de las T relacionadas), al tratarse de actividades constructivistas, no aparece como problemas o ejercicios para el lector, si no que el proceso de resolución queda detallado en la teoría, privando al alumno de la oportunidad del descubrimiento. A continuación, se van a comentar algunos ejemplos de los CP, T y TL (y D) que aparecen en este libro.

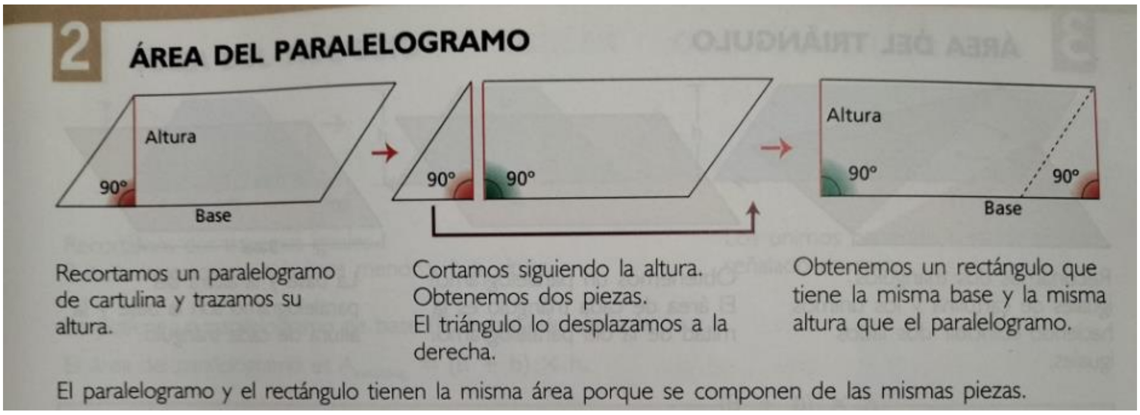


Figura 2: Ejemplo de CP1 (deducción del área del paralelogramo) en el libro de SM (1997)

En la Figura 2 se ve un ejemplo de CP1 en el que se utiliza la recomposición de un paralelogramo en un rectángulo para justificar su fórmula del área, pero como se indica en la Tabla 2, esto no se propone como actividad para el alumno, si no que aparece como teoría. Ocurre lo mismo con el área del triángulo, del trapecio y de los polígonos regulares.

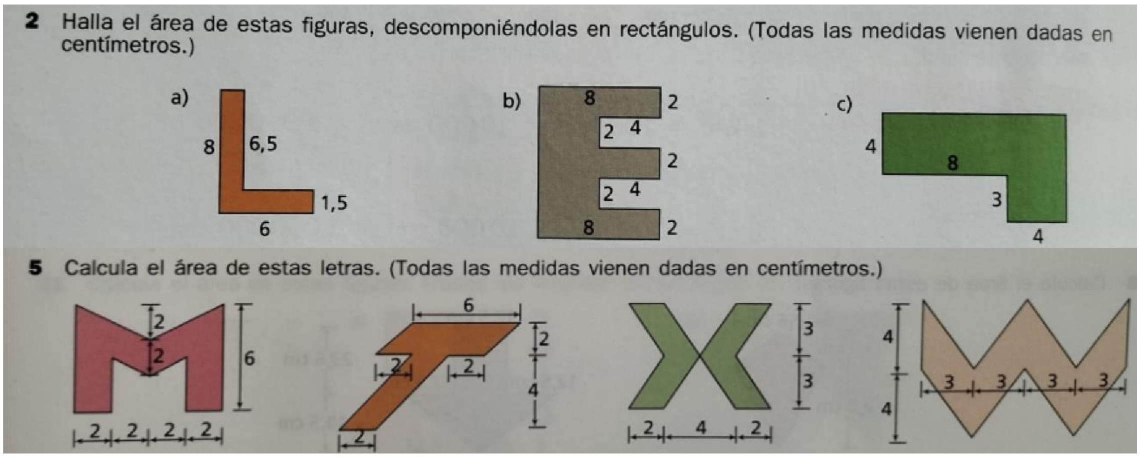


Figura 3: Ejemplo de CP2 (cálculo de áreas divisibles en rectángulos y paralelogramos) en el libro de SM (1997)

Después de que se exponga la fórmula del área de cada uno de los polígonos mencionados, hay una serie de ejercicios como los de la Figura 3, que son un ejemplo del CP2 en el que el alumno debe dividir los polígonos que aparecen en la imagen en polígonos simples (rectángulos en el primer caso y paralelogramos en el segundo). Estos ejercicios aparecen siempre después de que se enseñe cada fórmula del área: es decir, tras la fórmula del rectángulo, ejercicios de descomponer en rectángulos; tras la fórmula del paralelogramo, ejercicios de descomponer en paralelogramos... Por lo tanto, los ejercicios no dan pie a utilizar una variedad de técnicas, si no que se centran en que el alumno divida las figuras en unos polígonos en específico y en que aplique la fórmula que acaba de ver.

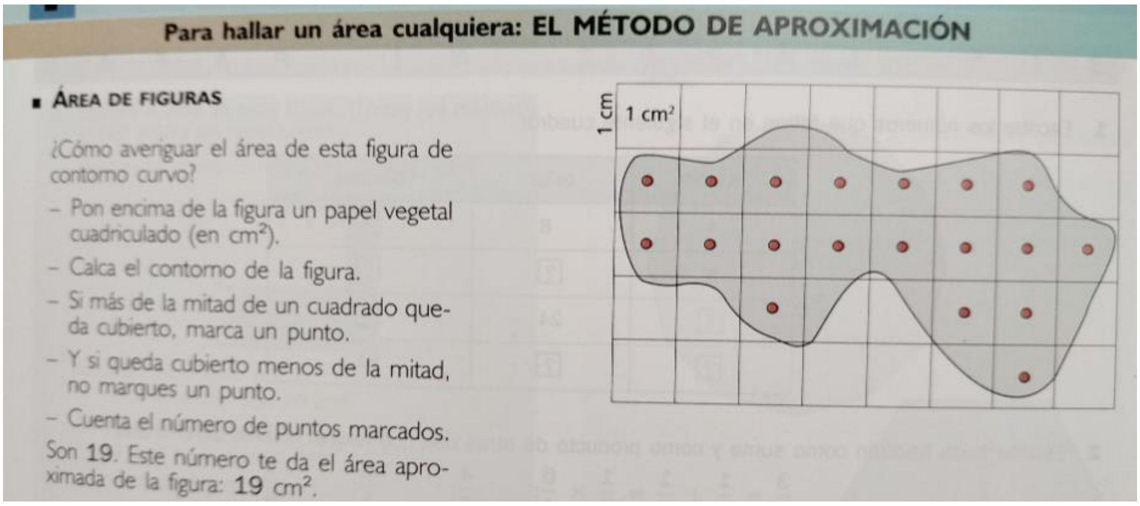
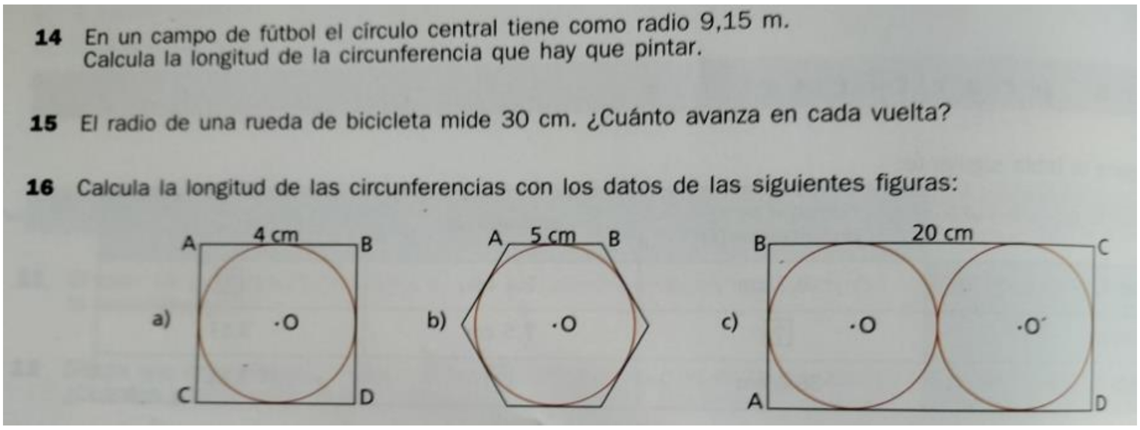


Figura 4: Ejemplo de CP2G (cálculo de áreas amorfas sobre una trama cuadrada) en el libro de SM (1997)

El único ejemplo de uso de una trama cuadrada en este libro es el que se muestra en la Figura 4, en el que vemos que se utiliza para estimar el área de una figura plana amorfa cualquiera, utilizando una técnica de conteo, que será frecuente en nuestra propuesta didáctica. Sin embargo, al explicarse todo el método, se vuelve a perder la oportunidad de que los alumnos razonen y lleguen a sus propias estrategias para resolver el problema, estableciendo sus propios criterios que, aunque probablemente sean parecidos a los que propone el texto, al pensarlos por ellos mismos será más fácil que entiendan su justificación.

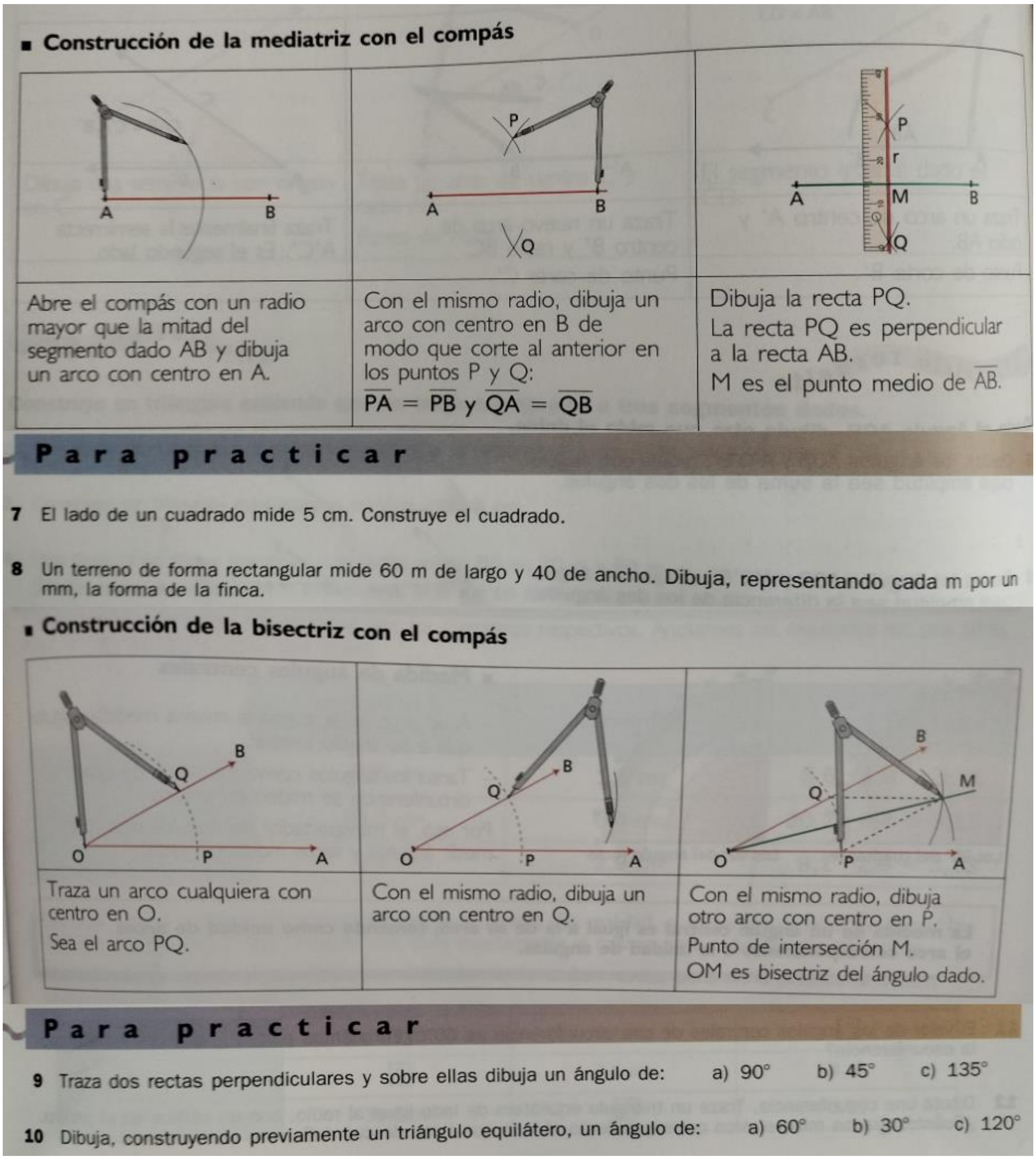

14 En un campo de fútbol el círculo central tiene como radio 9,15 m. Calcula la longitud de la circunferencia que hay que pintar.

15 El radio de una rueda de bicicleta mide 30 cm. ¿Cuánto avanza en cada vuelta?

16 Calcula la longitud de las circunferencias con los datos de las siguientes figuras:

Figura 5: Ejemplo de CP3 (cálculo de circunferencias) en el libro de SM (1997)

En la Figura 5 vemos un ejemplo de CP3, tratándose de ejercicios de cálculo de circunferencias. Aunque los dos primeros son bastante sencillos, en el último es necesaria un poco de deducción de longitudes de los polígonos en los que se han inscrito las circunferencias. En este libro no se introduce el Teorema de Pitágoras, por lo que las actividades relacionadas con deducción de longitudes solo van acerca de circunferencias, o la suma y resta de longitudes paralelas.



■ **Construcción de la mediatriz con el compás**

Abre el compás con un radio mayor que la mitad del segmento dado AB y dibuja un arco con centro en A.	Con el mismo radio, dibuja un arco con centro en B de modo que corte al anterior en los puntos P y Q: $\overline{PA} = \overline{PB}$ y $\overline{QA} = \overline{QB}$	Dibuja la recta PQ. La recta PQ es perpendicular a la recta AB. M es el punto medio de $\overline{AB}$.

P a r a p r a c t i c a r

7 El lado de un cuadrado mide 5 cm. Construye el cuadrado.

8 Un terreno de forma rectangular mide 60 m de largo y 40 de ancho. Dibuja, representando cada m por un mm, la forma de la finca.

■ **Construcción de la bisectriz con el compás**

Traza un arco cualquiera con centro en O. Sea el arco PQ.	Con el mismo radio, dibuja un arco con centro en Q.	Con el mismo radio, dibuja otro arco con centro en P. Punto de intersección M. OM es bisectriz del ángulo dado.

P a r a p r a c t i c a r

9 Traza dos rectas perpendiculares y sobre ellas dibuja un ángulo de: a) 90° b) 45° c) 135°

10 Dibuja, construyendo previamente un triángulo equilátero, un ángulo de: a) 60° b) 30° c) 120°

Figura 6: Ejemplo de C4 (construcción de rectas y figuras) en el libro de SM (1997)

Por último, en la Figura 6 se muestran los apartados de teoría que explican como trazar la mediatriz de dos puntos y la bisectriz de un ángulo. Tras explicar como se hace la mediatriz (o una recta perpendicular), los ejercicios piden que el alumno construya figuras con ángulos rectos. Tras explicar como se hace la bisectriz, los ejercicios piden que el alumno construya ángulos, a partir de un ángulo recto y a partir de un triángulo equilátero. Aunque los alumnos ya no se las tienen que ingeniar para hacer perpendiculares y bisectrices, si que tienen que saber cuándo usar cada construcción para resolver la tarea. Además, para la última, tendrán que averiguar cómo duplicar el ángulo (aunque también podría resolverse de otra manera). Estos serían ejemplos de actividades dentro de CP4.

En la Tabla 3 puede verse un resumen del libro de Santillana (Álvarez, 2007):

Editorial Santillana (2007)					
General			Específico		
CP	Técnicas	Tecnologías	CP	Técnicas	Tecnologías
CP1	*T2*, T4, *T6*	D1, D5, D4, TL2, TL3, TL5			
CP2	T1, T3, T5a	D2, D4, D5, D6, TL1	CP2G*	TG2a*	
CP3	T1, *T2*, T3, T5b, T5c	D5, D6,	CP3G*		
CP4	T4	D1, D4, TL3	CP4G*	TG1*, TG2*	D3*

Tabla 3: Campos de problemas, técnicas y tecnologías presentes en el libro de la editorial Santillana (2007)

Con este libro ocurre algo parecido que con el anterior: mismos CP generales, pero ausencia de CP específicos, excepto alguna excepción. También nos encontramos con que el CP1 vuelve a incluirse exclusivamente como teoría de una forma similar a la que aparecen en la Figura 2. Como en el caso anterior, se van a mostrar algunos de ejemplos.

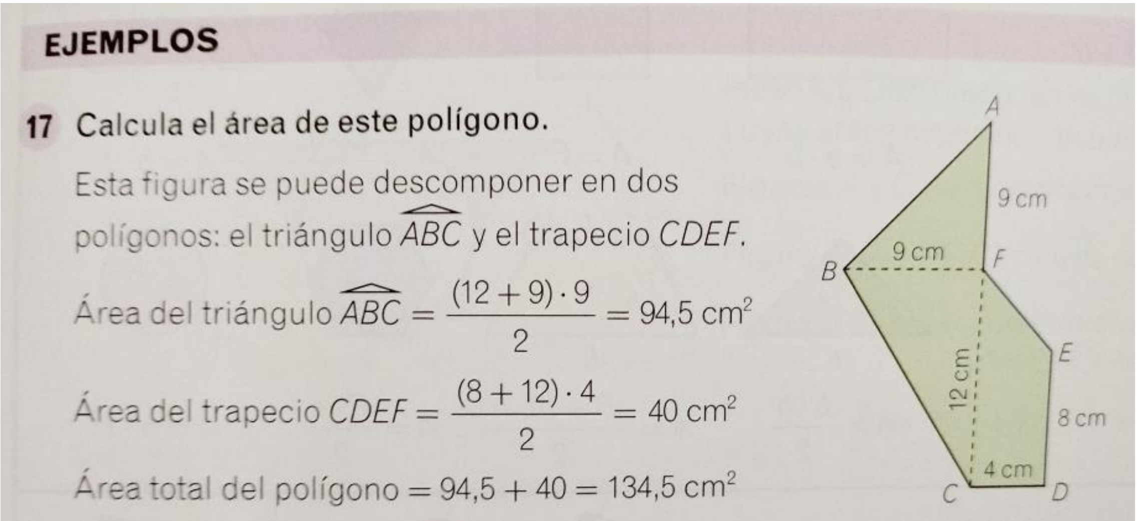


Figura 7: Ejemplo de CP2 (cálculo de área de un polígono irregular) en el libro de Santillana (2007)

En la Figura 7 podemos ver un ejemplo de ejercicio resuelto perteneciente a CP2, en el que se divide un polígono irregular dos triángulos y un trapecio, ya que son figuras de las que se ha dado la fórmula del área en los apartados de teoría. Los ejercicios para el lector son similares a este, esperándose que el alumno repita la técnica ejemplificada.

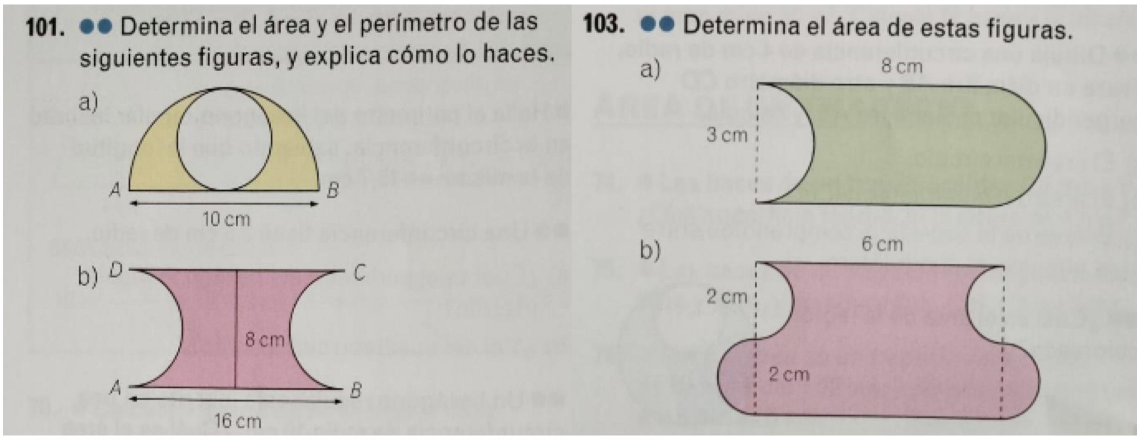


Figura 8: Ejemplo de CP2 (cálculo de áreas de figuras con sectores circulares) en el libro de Santillana (2007)

En la Figura 8 se muestran ejercicios, también de CP2, que en este caso incluyen figuras curvas (con sectores circulares). En el primer ejercicio, el alumno tiene que identificar las forma de los "huecos", para restárselas a la figura "sin huecos", y en el segundo tendría que usar la recomposición para darse cuenta de que las figuras son equivalentes al rectángulo delimitado por las líneas discontinuas.

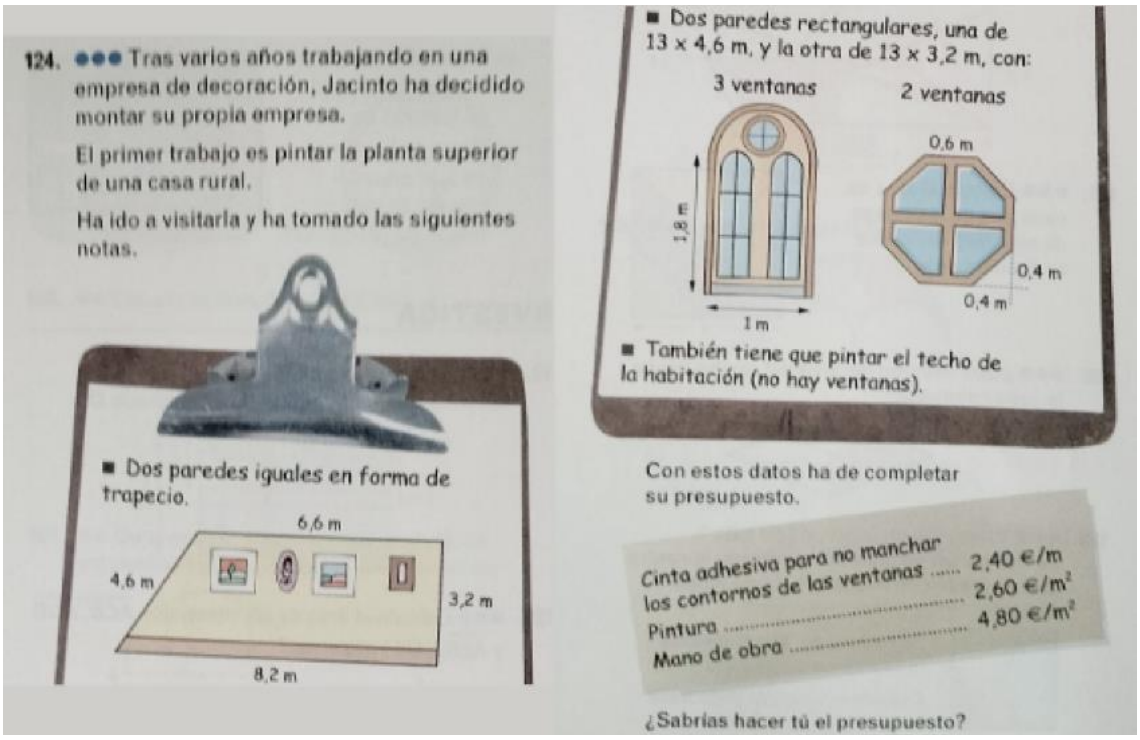


Figura 9: Ejemplo de CP2 y CP3 (cálculo de longitudes y áreas contextualizado) en el libro de Santillana (2007)

El único ejemplo de lo que podría llamarse problema es el que aparece en la Figura 9. Trata de una situación con un contexto cotidiano, que es el de hacer un presupuesto para pintar una habitación, algo que puede favorecer que los alumnos vean el aprendizaje de matemáticas como algo útil. Ya se ha comentado que los ejercicios de este libro no son muy complejos, y que por lo general solo requieren la repetición de una técnica que se acaba de exponer. En este caso, afortunadamente, los alumnos tendrían que organizarse y razonar más, para saber qué longitudes y áreas tienen que calcular, que fórmulas necesitan, y como tienen que combinarlas, lo que ya es bastante en comparación a otras actividades.

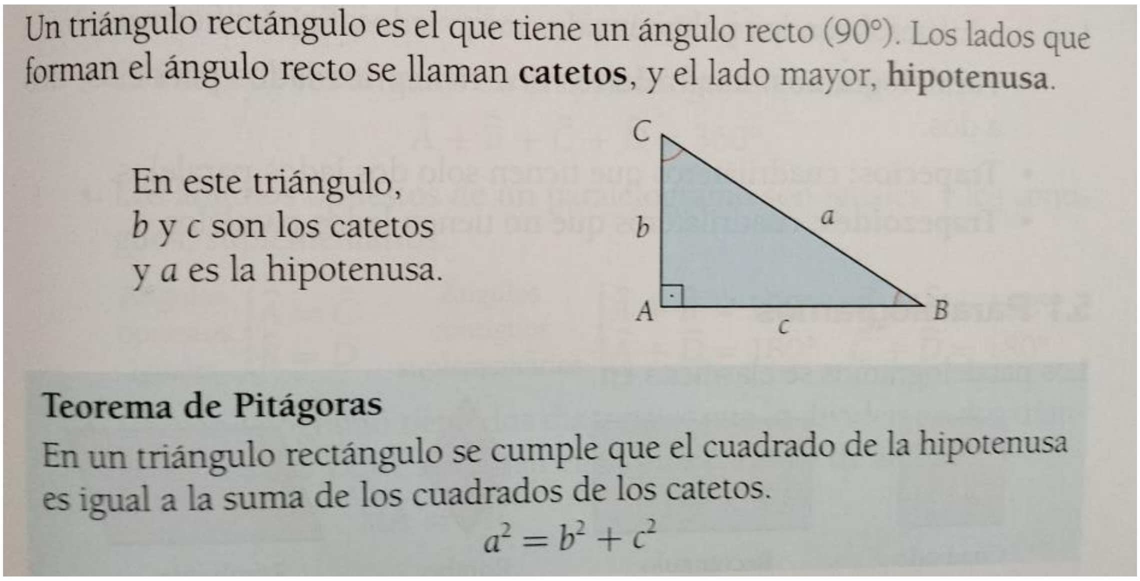


Figura 10: Ejemplo de presentación de T5b (Teorema de Pitágoras) sin justificar en el libro de Santillana (2007)

A diferencia del anterior, este libro si que tiene ejercicios que involucran el uso del Teorema de Pitágoras (T5b). Sin embargo, no se da ninguna justificación de por qué el teorema es cierto, tratándose de otra fórmula más que aplicar.

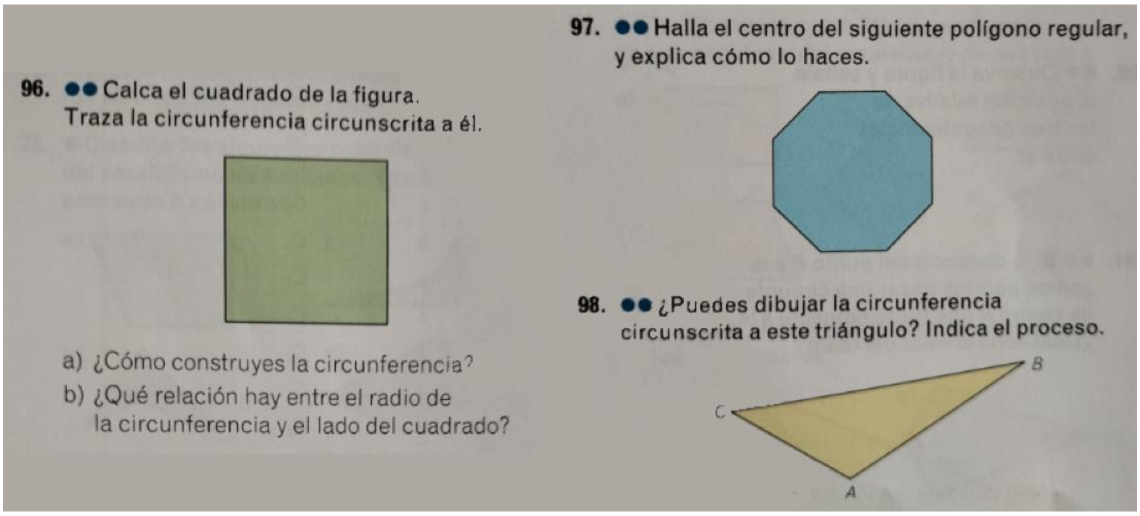
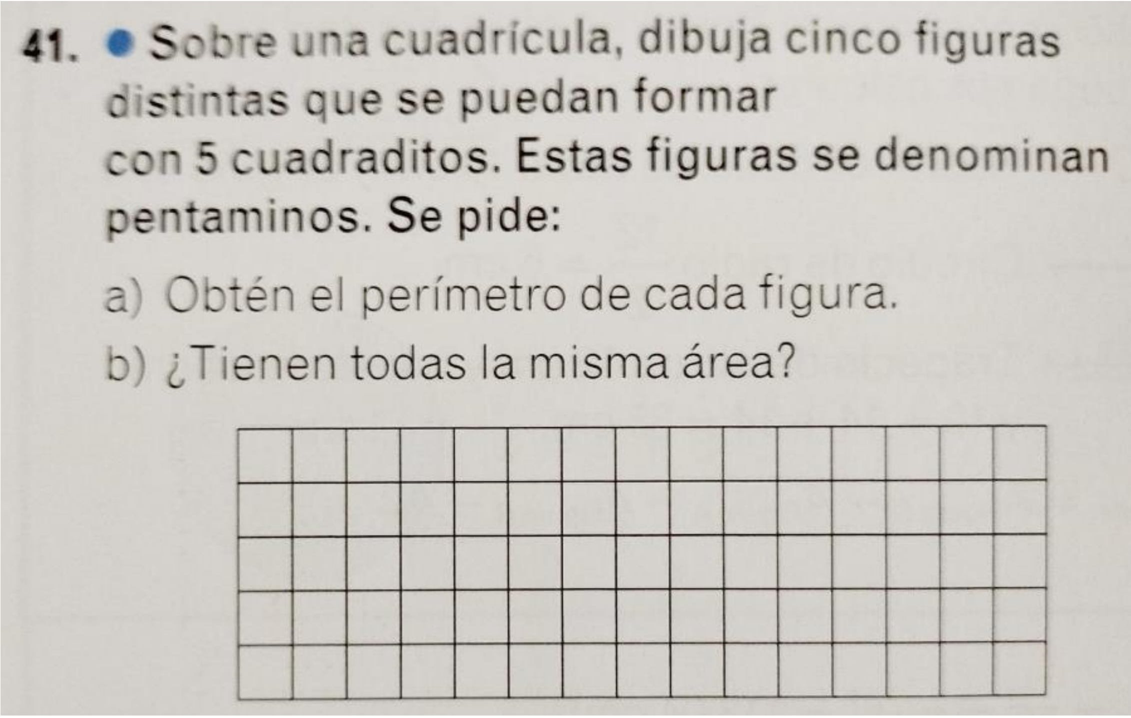


Figura 11: Ejemplo de CP4 (construcción de puntos, rectas y figuras) en el libro de Santillana (2007)

Entrando ya en los ejercicios de CP4, podemos encontrarnos con algunos como los de la Figura 11. En este caso, están relacionados con la construcción de la circunferencia circunscrita, cuyo centro pueden encontrar aprovechándose de los ejes de simetría de los polígonos regulares en el caso de los dos primeros. En el último, al ser un triángulo escaleno, no hay ejes de simetría, por lo que tendrán que utilizar las mediatrices de los vértices (aunque en la teoría se explica exactamente como hacerlo, por lo que, de nuevo, tan sólo se pide reproducir una técnica expuesta previamente).

En el primer ejercicio, para hallar la relación entre radio de la circunferencia y lado del cuadrado, será necesario el Teorema de Pitágoras, por lo que también pertenece a CP3.



41. Sobre una cuadrícula, dibuja cinco figuras distintas que se puedan formar con 5 cuadraditos. Estas figuras se denominan pentaminos. Se pide:

a) Obtén el perímetro de cada figura.

b) ¿Tienen todas la misma área?

Figura 12: Ejemplo de un problema incluido en CP2G, CP3G y CP4G en el libro de Santillana (2007)

Por último, se muestra en la Figura 12 uno de los dos ejercicios que hay en el libro que involucran una trama cuadrada. En este caso, se trata de dibujar poliminós (pentaminós, concretamente), obtener sus perímetros (mediante conteo) y darse cuenta de que todos deben tener la misma área, al ser fijo el número de cuadrados (unidades de área) que usar. Esta actividad podría ser interesante si se añadiesen más preguntas acerca de la relación entre área y perímetro (para reflexionar sobre los poliminós que maximizan el área o minimizan el perímetro) además de proponer el uso de diferente cantidad de cuadraditos. Aunque el ejercicio se realiza sobre una trama cuadrada, no se aprovechan todas las posibilidades que da este material, posibilidades las cuales quedan bien ejemplificadas en el siguiente libro.

En la Tabla 4 puede verse un resumen del libro de Marfil (Botella, 2007):

Editorial Marfil (2007)					
General			Específico		
CP	Técnicas	Tecnologías	CP	Técnicas	Tecnologías
CP1	T2, T4, T6	D1, D5, D4, TL2, TL3, TL5			
CP2	T1, T3	D2, D4, D5, D6, TL1	CP2G	TG1, TG2a	D3
CP3	T1, T2, T3	D5, D6, TL1	CP3G	TG2a	D3
CP4	T4	D1, D4, TL3	CP4G	TG1, TG2	D3

Tabla 4: Campos de problemas, técnicas y tecnologías presentes en el libro de Marfil (2007)

Con tan sólo ver la tabla ya se pueden observar diferencias con los libros anteriores. Por lo general, este libro tiene un acercamiento constructivista, y aunque sí que hay páginas dedicadas a consolidar la teoría, siempre se encuentran después de actividades dedicadas a intentar construir dicha teoría. También queda patente que el geoplano juega un papel muy importante en la propuesta didáctica de geometría en este libro. A continuación, se presentan algunas de las actividades que ofrece este libro.

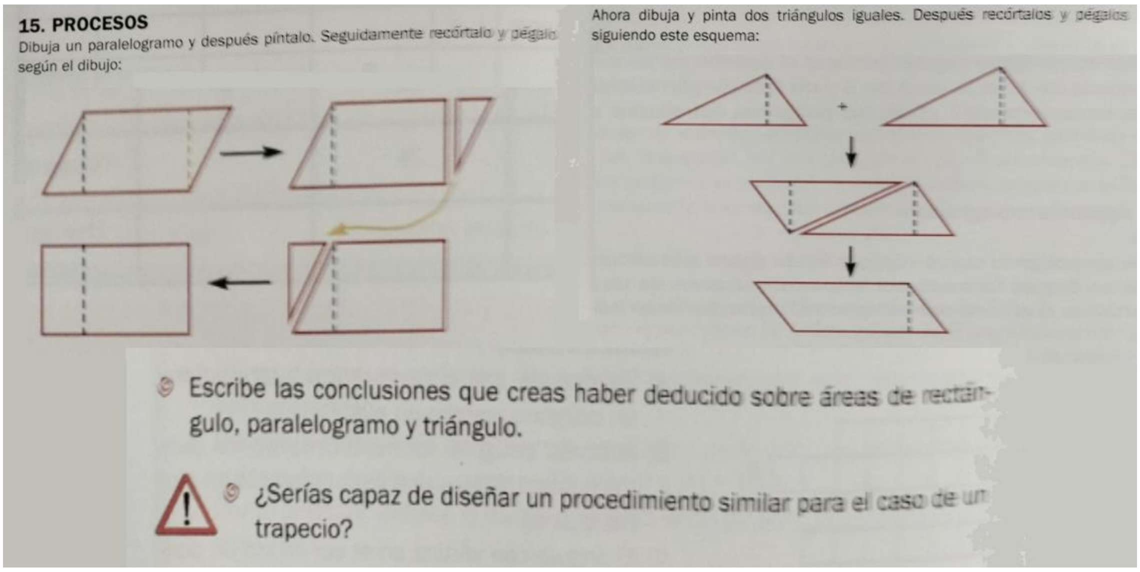
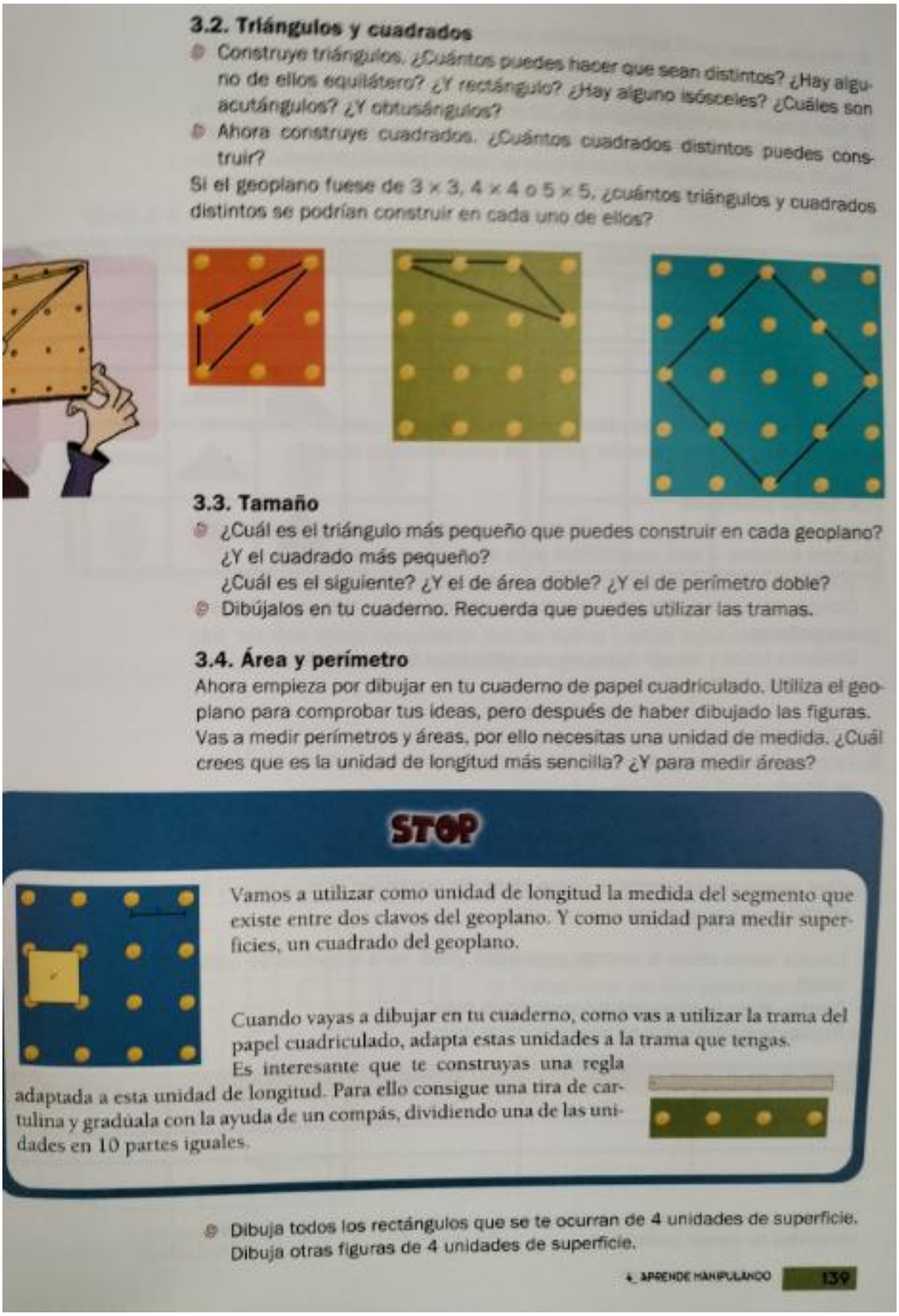


Figura 13: Ejemplo de CP1 (área del paralelogramo, triángulo y trapecio) en el libro de Marfil (2007)

En la Figura 13 volvemos a ver la recomposición del paralelogramo en rectángulo, y también la del triángulo en paralelogramo. Sin embargo, aquí no se da ninguna fórmula, si no que se pide a los alumnos que saquen las conclusiones de dicho proceso y, además, como tarea avanzada (indicada con el signo de exclamación), intentar un proceso similar para deducir el área del trapecio. Esta actividad es un claro ejemplo del acercamiento constructivista que se había mencionado.



3.2. Triángulos y cuadrados

- Construye triángulos. ¿Cuántos puedes hacer que sean distintos? ¿Hay alguno de ellos equilátero? ¿Y rectángulo? ¿Hay alguno isósceles? ¿Cuáles son acutángulos? ¿Y obtusángulos?
- Ahora construye cuadrados. ¿Cuántos cuadrados distintos puedes construir?

Si el geoplano fuese de 3 × 3, 4 × 4 o 5 × 5, ¿cuántos triángulos y cuadrados distintos se podrían construir en cada uno de ellos?

3.3. Tamaño

- ¿Cuál es el triángulo más pequeño que puedes construir en cada geoplano? ¿Y el cuadrado más pequeño?
  ¿Cuál es el siguiente? ¿Y el de área doble? ¿Y el de perímetro doble?
- Dibújalos en tu cuaderno. Recuerda que puedes utilizar las tramas.

3.4. Área y perímetro

Ahora empieza por dibujar en tu cuaderno de papel cuadriculado. Utiliza el geoplano para comprobar tus ideas, pero después de haber dibujado las figuras. Vas a medir perímetros y áreas, por ello necesitas una unidad de medida. ¿Cuál crees que es la unidad de longitud más sencilla? ¿Y para medir áreas?

STOP

Vamos a utilizar como unidad de longitud la medida del segmento que existe entre dos clavos del geoplano. Y como unidad para medir superficies, un cuadrado del geoplano.

Cuando vayas a dibujar en tu cuaderno, como vas a utilizar la trama del papel cuadriculado, adapta estas unidades a la trama que tengas.

Es interesante que te construyas una regla adaptada a esta unidad de longitud. Para ello consigue una tira de cartulina y gradúala con la ayuda de un compás, dividiendo una de las unidades en 10 partes iguales.

- Dibuja todos los rectángulos que se te ocurran de 4 unidades de superficie. Dibuja otras figuras de 4 unidades de superficie.

4. APRENDE MANIPULANDO 139

Figura 14: Ejemplo de CP2G, CP3G y CP4G (actividades diversas con geoplano) en el libro de Marfil (2007)

En la Figura 14 se muestra una serie de actividades para realizar con geoplano. La mayoría tratan de construir varios triángulos y cuadriláteros, para luego responder preguntas sobre su clasificación o sus áreas y perímetros, o para intentar construir todos los que quepan en una parte reducida de la trama. Por lo tanto, además de contar unidades de área y de longitud, los alumnos también tendrán que contar cuántas figuras distintas pueden hacer, y esta situación puede dar lugar a debate, por ejemplo: "¿Qué hace a dos figuras diferentes?", "Si dos figuras tienen los mismos ángulos y lados, pero tienen distinta orientación, ¿las consideramos iguales?"

También cabe destacar la pequeña sección señalada como "STOP", dedicada a dar información acerca de las unidades de medida, que puede servir para uniformizar el criterio de medida del alumnado.

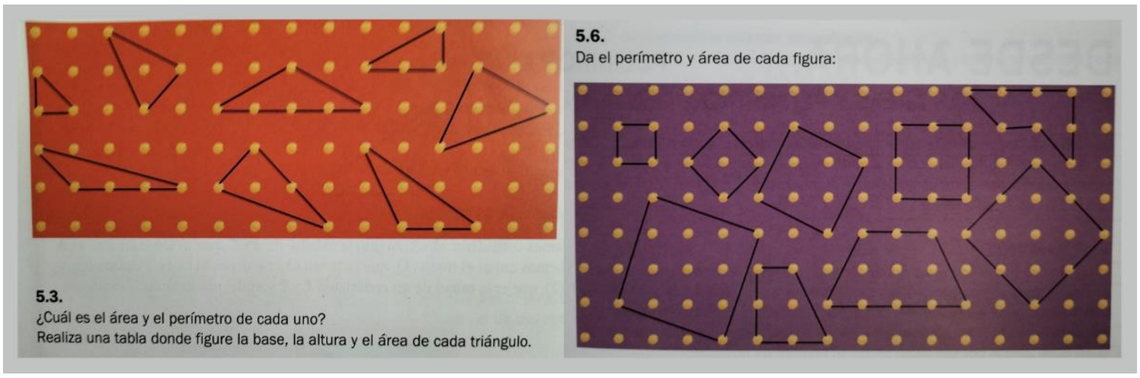


Figura 15: Ejemplo de CP2G y CP3G (calcular perímetros y áreas de triángulos y cuadriláteros en un geoplano) en el libro de Marfil (2007)

En la Figura 15 podemos ver más ejemplos de ejercicios de cálculo de áreas y perímetros. Hay que decir que a esta altura del libro todavía no se han visto fórmulas (la actividad de la Figura 13 es posterior), por lo que el alumno se tiene que valer de otras estrategias, aprovechándose de la cuantización del geoplano. Aunque las áreas siempre se pueden hallar de manera exacta, con los perímetros no ocurre lo mismo. En algunos casos los lados coinciden con las direcciones de la trama o pueden deducirse por el área (cuadrados), pero hay muchas distancias que tendrían que calcularse por el Teorema de Pitágoras. Sin embargo, en el libro no se menciona el teorema, por lo que se pide que estas distancias se aproximen mediante una estimación. Encontrar una forma adecuada de hacer esta estimación también puede tratarse como un problema a resolver por el alumnado.

<u>¿Qué efectos puede esperarse que tengan los distintos tratamientos de la geometría plana en el aprendizaje del alumnado?</u>

Todos los libros cubren la mayoría de los campos de problemas y las técnicas generales que se asocian a los saberes elegidos para la elaboración de la situación de aprendizaje, y también justifican la mayoría de las técnicas. Sin embargo, hay diferencias claras entre unas propuestas y otras que es necesario comentar.

Como se ha visto, las propuestas de SM (Vizmanos, 1997) y Santillana (Álvarez, 2007) constan de la estructura típica que siguen las editoriales más populares en la actualidad: primero se expone un fragmento de teoría, después se proponen una pequeña serie de ejercicios para comprobar que se ha entendido la teoría o en todo caso, se sabe replicar una técnica ejemplificada, y así sucesivamente, hasta que se llega al final del tema, donde hay un gran compendio de ejercicios y problemas para repasar todos los contenidos del tema.

En el currículo de Matemáticas 1º ESO (ORDEN 1172) se recomienda encarecidamente que el aprendizaje sea a través de la resolución de problemas, lo que significa dar un enfoque constructivista a las actividades. Es decir, en vez de seguir la estructura clásica consistente en enseñar conceptos y nociones de manera expositiva, para luego utilizarlos en la resolución de las actividades, lo que se pretende es que el alumno extraiga la teoría al intentar resolver los problemas que se fundamentan en ella.

Este acercamiento se parece más a la propuesta de Marfil (Botella, 2007), en el que las actividades consisten en una serie de instrucciones para el lector, que a priori el alumno puede seguir, pero no sabe a dónde lo van a llevar, dejando después un espacio para comprender las soluciones a las que se han llegado y la teoría que puede extraerse de ellas. Además, a diferencia de los otros dos libros, en este tienen una gran presencia los materiales manipulativos, lo que favorece el aprendizaje en geometría (Sánchez, 1995).

Por lo tanto, aunque un alumno puede adquirir los conocimientos necesarios relacionados con el objeto de la propuesta en cualquiera de los tres libros, la propuesta de Marfil (Botella, 2007) es mucho más enriquecedora, permitiendo que el aprendizaje del alumnado no consista solo en el conocimiento de los contenidos si no en la adquisición de competencia matemática.

Entrevista con una docente en ejercicio

Durante el Prácticum II tuve la oportunidad de entrevistar a la docente que ejerció como mi tutora de prácticas acerca del estado de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en 1º ESO (ya que ella impartía matemáticas en dicho curso). Aunque la intención inicial era centrarse en las dificultades del aprendizaje de la geometría plana, ya que es el concepto matemático que se aborda en este trabajo, lo cierto es que no supo decirme mucho al respecto, centrándose sobre todo en comentar las dificultades actuales de la enseñanza-aprendizaje en general. Las dificultades que nombró y que cabe destacar son las siguientes:

- Las nuevas generaciones entran a la secundaria con menos nivel
- Hay alumnos que no agradecen formas diferentes de dar clase
- Los libros de texto no motivan al alumnado
- Las nuevas formas de consumir contenido audiovisual en internet han afectado negativamente a la capacidad de comprensión y concentración de

los alumnos, lo que complica mucho aprender a través de la resolución de problemas
- Organizar grupos de trabajo óptimos y conseguir evaluar en grupo de manera justa

Además de estas dificultades que reconoce la docente, yo identifico los siguientes errores y obstáculos a partir de lo comentado en la entrevista y de mi experiencia con ella en general

- Al haber tenido una experiencia personal de aprendizaje positiva con la enseñanza tradicional, esta se sigue perpetuando, impidiendo la implementación de los avances en didáctica de las matemáticas
- La educación actual conlleva una serie de problemas generales graves que absorben la atención del docente, impidiendo que puedan centrarse en problemas relacionados con la enseñanza-aprendizaje de conceptos concretos
- No se utilizan los recursos adecuados para atender a la diversidad (sobre todo en el caso de adaptaciones curriculares significativas)

En conclusión, mi entrevista con la docente, aunque ha sido fructífera en otros aspectos, no me ha servido para conocer mejor el estado concreto de la enseñanza-aprendizaje de la geometría plana en 1º ESO, principalmente por el hecho de que no resulta una preocupación prioritaria en comparación con las relacionadas con la educación en general.

La transcripción íntegra de la entrevista, realizada mediante la transcripción de audio por Turboscribe AI y corregida manualmente para que coincida exactamente con el audio, puede encontrarse en el ANEXO

3. Conocimientos previos del alumno

Enseñanza anterior

Para que los alumnos comprendan adecuadamente los nuevos conceptos sobre geometría que van a introducirse en la propuesta, deben conocer con anterioridad los conceptos previos en los que se fundamentan. Entre estos conceptos, vamos a encontrar aquellos relacionados con la propia geometría que se supone que han sido aprendidos en cursos anteriores, pero también conocimientos acerca de otros campos de la matemática que sean transversales y que conviene que se hayan atendido previamente en el mismo curso.

Saberes previos relacionados con geometría

En cuanto a saberes relacionados con geometría, lo ideal sería que los alumnos ya estuviesen familiarizados con los siguientes conceptos:

- Clasificación de rectas según su orientación relativa (secantes, paralelas, perpendiculares)
- Clasificación de ángulos según su amplitud (agudo, recto, obtuso, total)
- Definiciones de polígono y circunferencia
- Clasificación de triángulos y cuadriláteros
- Clasificaciones de polígonos (regularidad, concavidad...)
- Traslaciones, rotaciones y semejanza.
- Simetría axial

La experiencia inmediatamente anterior que los alumnos habrán tenido con el aprendizaje en geometría será, muy probablemente, la asignatura de Matemáticas de 6º de Primaria, por lo que los conocimientos que se esperan del alumno deberían corresponderse con los objetivos de dicha asignatura en cuanto a la geometría. En el currículo de Matemáticas de Tercer Ciclo de Primaria (ORDEN 1112), podemos encontrar los siguientes saberes en los que se fundamentan los saberes involucrados en la propuesta didáctica que va a diseñarse:

Sentido de la medida:

- Uso de instrumentos de medida de longitudes y ángulos
- Estimación de medidas de longitud, área y ángulos por comparación
- Evaluación de la validez de estimaciones

Sentido espacial:

- Técnicas de construcción de formas geométricas por composición y descomposición, mediante materiales manipulables, instrumentos de dibujo y aplicaciones informáticas.

- Vocabulario geométrico: descripción verbal de los elementos y las propiedades de formas geométricas.
- Propiedades de formas geométricas: exploración mediante materiales manipulables (geoplanos) y herramientas digitales (programas de geometría dinámica).
- Transformaciones mediante giros, traslaciones y simetrías: identificación de figuras transformadas, generación a partir de patrones iniciales y predicción del resultado.
- Semejanza: identificación de figuras semejantes, generación a partir de patrones iniciales y predicción del resultado.
- Estrategias para el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.
- Elaboración de conjeturas sobre propiedades geométricas utilizando instrumentos de dibujo (compás, transportador de ángulos, etc.) y programas de geometría dinámica

Como puede verse, estos saberes cubren los conceptos que necesitamos que nuestros alumnos conozcan con anterioridad para que nuestra propuesta didáctica sea accesible, por lo que, si los objetivos del aprendizaje se han cumplido en el curso anterior, se podría decir que la enseñanza a propiciado el aprendizaje necesario.

Saberes transversales previos útiles para la propuesta didáctica

Para definir estos saberes, hay que fijarse en los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías que conforman nuestra propuesta, e identificar aquellos saberes involucrados que no son únicamente propios de la geometría, o dicho con la terminología presente en el currículo, que se encuentran fuera del sentido espacial y el sentido de la medida. Estos saberes (que no figuran como tal en el currículo) son los siguientes:

- Operaciones con números racionales
- Representación de relaciones entre cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas
- Operaciones con expresiones algebraicas (despejar, simplificar...)

Para estar seguros de que nuestros alumnos están familiarizados con estos saberes, será conveniente que el aprendizaje de estos se realice en un momento del curso previo a la introducción de nuestra propuesta didáctica, de tal manera que sepamos con certeza que han adquirido dichas habilidades.

Evaluación inicial

Como ya se ha mencionado, se supone que los saberes transversales previos necesarios ya se han adquirido durante el curso de 1º ESO. Sin embargo, aunque se podría confiar en que la enseñanza en 6º de Primaria ha servido para que nuestros alumnos hayan aprendido todos los saberes relacionados con geometría necesarios, esta enseñanza no ha sido brindada por el docente que introduce la propuesta de la que trata este trabajo, por lo que es necesario disponer de un instrumento para comprobar los conocimientos y habilidades del alumnado. Este instrumento serán actividades de evaluación inicial.

Dado que los saberes a los que nos referimos están relacionados, sobre todo, con clasificaciones de elementos en el plano, así como la observación de relaciones entre dichos elementos, la evaluación inicial consistirá en un juego en grupos en el que los alumnos tengan que demostrar su conocimiento acerca de dichos saberes, para después responder a una serie de preguntas relacionadas con el juego, y que así el docente tenga una producción tangible que analizar para hacer las consideraciones oportunas acerca del nivel de los alumnos y de la adecuación de la propuesta didáctica.

Cabe indicar, además, que según el currículo (ORDEN 1172), los alumnos que entran a la educación secundaria se encuentran en el segundo nivel de razonamiento de Van Hiele (Jaime, 1998), lo que significa que ya saben reconocer los elementos geométricos por sus propiedades, aunque de momento no reconozcan las relaciones entre estas propiedades (lo que se consideraría tercer nivel). Esta actividad, como se verá a continuación, consiste justamente en lo que se espera de un alumno en el segundo nivel de razonamiento, por lo que es ideal para comprobar que nuestros alumnos se encuentran en dicho nivel.

<u>Actividad de Evaluación Inicial: ¿Cuál es cuál?</u>

<u>Parte 1: El juego</u>

La primera parte de la actividad consistirá en varias partidas de una versión del juego "*¿Quién es quién?*", pero en vez de adivinar personas, los alumnos tendrán que adivinar objetos geométricos.

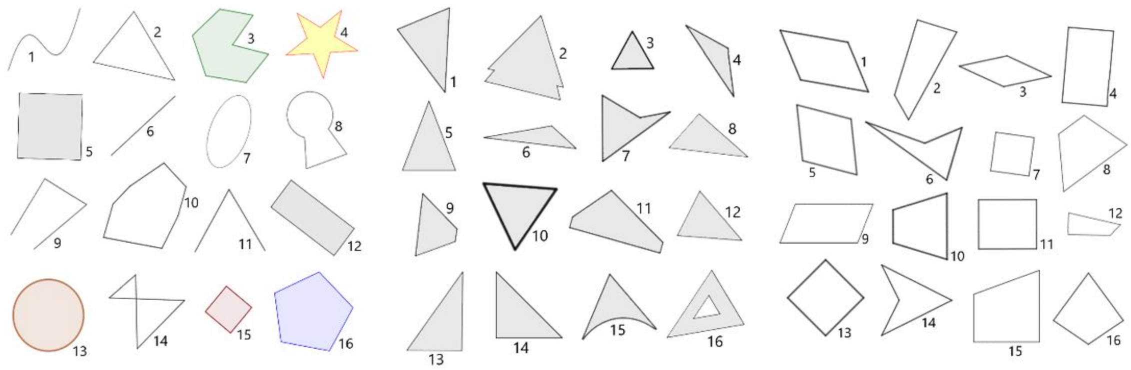


Figura 16: Tableros del "¿Cuál es cuál?" (1, 2 y 3 respectivamente)

Para ello, los alumnos se dispondrán en parejas y se turnarán: en cada turno, uno de ellos escogerá aleatoriamente un número que indicará el objeto del tablero que su compañero tendrá que adivinar, haciéndole preguntas de "sí o no". El Tablero 1 será el de la izquierda en la Figura 16, y será el primero en darse a los alumnos. Cuando el docente considere que ya se han jugado suficientes turnos, entregará el Tablero 2, y cuando ocurra lo mismo con dicho tablero, se pasará al Tablero 3 (centro y derecha de la Figura 16, respectivamente).

Se pedirá a los alumnos que apunten en sus cuadernos, para cada turno, las preguntas que se hacen y las respuestas, incluyendo el número correcto cuando se averigüe, indicando el tablero con el que se estaba jugando.

Tras el juego, los alumnos habrán tenido la oportunidad de observar todas las figuras y de fijarse en algunas de sus propiedades, además de haber escrito un registro de sus partidas en el que podrán basarse para responder a las preguntas que les esperan en la siguiente parte de la actividad.

Parte 2: Las preguntas

En esta parte, los alumnos tendrán que responder individualmente a una serie de preguntas acerca de las figuras que aparecen en los tableros:

1. ¿Qué elementos del Tablero 1 contienen segmentos perpendiculares? ¿Cuál es el nombre del ángulo que forman y cuántos grados tiene?

2. ¿Qué elementos del Tablero 1 son polígonos? ¿Cómo lo sabes?

3. De los polígonos del Tablero 1, ¿cuáles son regulares? ¿Por qué?

4. ¿Qué elementos del Tablero 1 son circunferencias? ¿Cómo lo sabes?

5. En el Tablero 1, ¿qué elementos son simétricos? Dibuja sus ejes de simetría sobre el tablero.

6. En el Tablero 2, ¿qué figuras no son triángulos? ¿En qué te has fijado para descartarlas?

7. Fijándote ahora en los triángulos, ¿de qué tipos hay? ¿cuáles son de cada tipo?

8. En el Tablero 3, ¿qué figuras no son cuadriláteros? ¿En qué te has fijado para descartarlas?

9. En el Tablero 3, ¿qué figuras son semejantes entre sí?

10. Fijándote ahora en los cuadriláteros, ¿de qué tipos hay? ¿cuáles son de cada tipo?

Como es evidente, las preguntas están enfocadas para averiguar el grado en el que los alumnos están familiarizados con los conceptos que conforman los saberes previos relacionados con geometría que se habían mencionado anteriormente. En concreto, cada pregunta se centra en los siguientes conceptos:

1. Perpendicularidad, ángulos rectos

2. Definición de polígono

3. Clasificación de polígonos (regularidad, concavidad)

4. Definición de circunferencia

5. Simetría axial

6. Definición de triángulo

7. Clasificación de triángulos. Clasificación de ángulos.

8. Definición de cuadrilátero

9. Traslaciones, rotaciones y semejanza

10. Clasificación de cuadriláteros

Es importante indicar a los alumnos que la participación en esta actividad va a ser evaluada, y que lo importante no es que respondan correctamente a todo si no que demuestren todo lo que saben, que piensen su respuesta e intenten responder a todas las preguntas de manera justificada, aunque no estén seguros de que lo vayan a hacer correctamente. En cualquier momento pueden preguntar al docente si tienen dudas, y este les puede aclarar las preguntas, reformulándolas de otra manera, o incluso puede dar algún ejemplo de respuesta si lo considera oportuno.

La actividad se calificará como nota de participación (ver apartado "9. Evaluación"). La nota será sobre 1, valiendo cada pregunta 1/10. Se considerará que la respuesta puntúa siempre que exista y sea evidente que es un intento genuino de responder a la pregunta, no puntuará en caso contrario. Es decir, si la respuesta es del estilo "no sé", o no está justificada, no puntuará.

El docente, además de calcular esta calificación, deberá contar cuántos alumnos han respondido cada pregunta, y de los que la hayan respondido (respuesta que puntúe), cuántos lo han hecho correctamente, cuántos lo han hecho excepcionalmente (han respondido mejor de lo esperado), y cuántos lo han hecho incorrectamente pero genuinamente (por ejemplo: confundiendo terminología, alguna mala elección de figuras...). En base a estas cantidades, el docente puede saber qué conceptos ya están claros y cuáles necesitan afianzarse, y así adaptar como se llevan al aula las actividades de la propuesta didáctica.

4. Razones de ser del objeto matemático

Como se ha comentado en el análisis de libros del apartado "2. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático", la razón de ser para introducir la geometría en las matemáticas escolares es la tener la capacidad de analizar y entender las propiedades de los objetos que hay en nuestro entorno, ya que muchos se asemejan a figuras que podemos modelizar mediante la propia geometría. Poder utilizar las matemáticas para modelizar la realidad nos permite deducir y predecir resultados, lo que puede ser útil tanto en la vida cotidiana como en el ámbito profesional.

Si nos preguntamos cuál es el origen de la geometría y si el sentido de su aparición es el mismo que el que mantiene ahora, el libro de la editorial Marfil (Botella, 2007) ya nos daba una pista, poniendo como ejemplo la invención de la rueda y el concepto de "redondez". Sánchez (2012) pone ejemplos más concretos del uso primigenio de la geometría. Comenta que se piensa que los egipcios fueron los primeros geómetras al tener que medir superficies de tierra de cultivo en las orillas del río Nilo para el cobro de impuestos, además de destacar que ya eran capaces de trazar ángulos rectos con cuerdas tensadas mediante la terna pitagórica 3, 4 y 5. Aunque lo cierto es que, para hacer las construcciones que hicieron, es seguro que debían saber geometría.

Sin embargo, la geometría no se desarrolló únicamente por su utilidad cotidiana, si no que, como ahora, también se desarrollaba por curiosidad, por saber más acerca de esta disciplina y de los problemas que surgen al profundizar en ella. Un caso conocido, perteneciente a los problemas clásicos de la Antigua Grecia, es el problema de la duplicación del cubo, que consistía en construir un cubo con el doble de volumen que uno dado, lo equivalente a obtener la raíz cúbica de 2 con regla y compás, tarea que acabó por demostrarse que era imposible. Este tipo de geometría, que se conoce como geometría especulativa (en contraposición a la geometría práctica de los egipcios), tiene su máxima expresión en aquella época en el trabajo de Euclides, que da lugar a la geometría euclídea, de la cuál no nos separamos hasta el nivel universitario.

Kline (1959) viene a decir que los elementos geométricos ya existen en el mundo, como los árboles que crecen perpendiculares a la tierra, o las orillas paralelas de un río o los hexágonos en un panal de abejas. Es la evolución del ser humano la que ha permitido dar el paso (los primeros fueron los egipcios) a abstraer estos conceptos, desarrollando la geometría.

Por lo tanto, podemos concluir que, tanto la razón de ser actual como la histórica coinciden: la geometría existe por su utilidad para explicar y conocer mejor el mundo físico que nos rodea.

Problemas constituidos en la razón de ser del objeto matemático

A continuación, se presentan un par de actividades constituidas en la razón de ser del objeto matemático tratado en la propuesta didáctica:

Actividad para justificar el cálculo de áreas: ¿Dónde hay áreas?

La idea detrás de esta actividad es que, después de haber resuelto unos pocos problemas de áreas, los alumnos intenten imaginar en qué situaciones podría ser útil hacer esto.

El docente podrá poner algún ejemplo inicial para animar a los alumnos a pensar los suyos propios. Algunos ejemplos podrían ser:

- La extensión de un campo de cultivo para saber cuánta agua es necesaria para regarlo
- Las dimensiones de un aula para saber cuantas baldosas hacen falta en el suelo.
- El espacio en el recinto de un festival en el campo, para saber cuántas entradas se pueden vender.

El docente o el alumno que haya propuesto algo podrá inventarse la forma de alguna de estas áreas, de manera verosímil, e inscribirla en un geoplano, de tal manera que los alumnos tengan que calcular su área.

Actividad para justificar la construcción de polígonos: ¿Cómo se hace un reloj?

El enunciado, que puede darse escrito a los alumnos, o puede ser el propio docente el que lo recite, sería así:

"Como bien sabéis, un reloj analógico suele consistir en un círculo con las 12 horas marcadas y dos saetas que marcan los minutos y las horas. Actualmente, la mayoría de estos relojes se fabrican en masa de manera automática, pero ¿qué pasaba cuando eran los relojeros artesanos los únicos que hacían estos cachivaches hace cientos de años? ¿Cómo calculaban exactamente como hacer los engranajes para que el reloj funcionase correctamente?

Bueno, realmente esa pregunta es muy complicada, así que a ver si podéis responder a una más sencilla. ¿Cómo sabían lo separados que tenían que estar los números de las horas? A ver, podrían hacerlo a ojo, pero si querían que los 12 números de cada hora estuviesen a la misma distancia exactamente, para que el reloj se viese bonito, ¿cómo podían hacerlo?"

La premisa de esta actividad, aunque no está contextualizada en algo cotidiano como la anterior, sirve para hacer ver a los alumnos que, aunque algunos objetos nos parezcan ordinarios y simples, puede que sean el resultado de hace mucho tiempo alguien resolvió un problema por primera vez. En este caso, este problema es dividir una circunferencia en 12 partes exactamente iguales.

La idea para resolver este problema es construir un dodecágono mediante papiroflexia, utilizando lo aprendido en actividades anteriores. Sin embargo, el docente no dará directamente las instrucciones necesarias para realizarlo, si no que participará en un diálogo con sus alumnos para debatir sobre cómo avanzar en el problema, haciendo preguntas que crea que pueden llevar a los alumnos a la solución.

Una propuesta de la serie de preguntas que podrían hacerse es la siguiente:

- ¿Para qué las horas estén a la misma distancia, cómo hay que dividir el círculo?
- ¿Cuál es el ángulo que habrá entre hora y hora?
- ¿Qué ángulos podemos obtener fácilmente?
- ¿Cómo los obtenemos?
- ¿Cómo podemos obtener el ángulo que queremos a partir de estos?

Posteriormente, la idea sería que se pusieran a trabajar con un trozo de papel cuadrado, e intentasen hacer lo que se ha comentado con toda la clase para obtener el círculo dividido en 12 partes (o el dodecágono).

Esta tarea podría hacerse en conjunto con el departamento de dibujo, y sería una oportunidad para que utilizasen este dodecágono que han construido en un reloj de papel decorado artísticamente.

Actividad para justificar la relación del radio y la circunferencia: El centro de la Tierra

El enunciado, que puede darse escrito a los alumnos, o puede ser el propio docente el que lo recite, sería así:

"¿Sabíais que durante muchos años se pensó que la Tierra era plana? La gente veía un horizonte plano, y claro, ¿quién iba a pensar que la Tierra era redonda? Esto fue así hasta hace unos 500 años, cuando se dio la a vuelta al mundo en barco por primera vez, comprobando que, efectivamente, la Tierra era esférica.

Pero realmente, en el pasado, ya había gente que defendía que la Tierra era una esfera. Hace más de 2000 años, filósofos y matemáticos griegos se habían fijado, por ejemplo, en cómo unas estrellas se veían en unos lugares del mundo y en otros no, o en como la sombra de la Tierra sobre la Luna durante los eclipses era curva.

Hubo uno de estos griegos, llamado Eratóstenes, que no sólo defendió esta postura, si no que además se propuso calcular cuánta distancia había desde la superficie al centro de la Tierra. Para ello, midió la distancia más corta entre dos ciudades en Egipto, Alejandría y Asuán. y haciendo unos cálculos algo complicados que involucraban medir la inclinación de los rayos del sol con sombras, dedujo que las ciudades estaban separadas por un ángulo de 7º 12', tal y como se ve en la imagen:

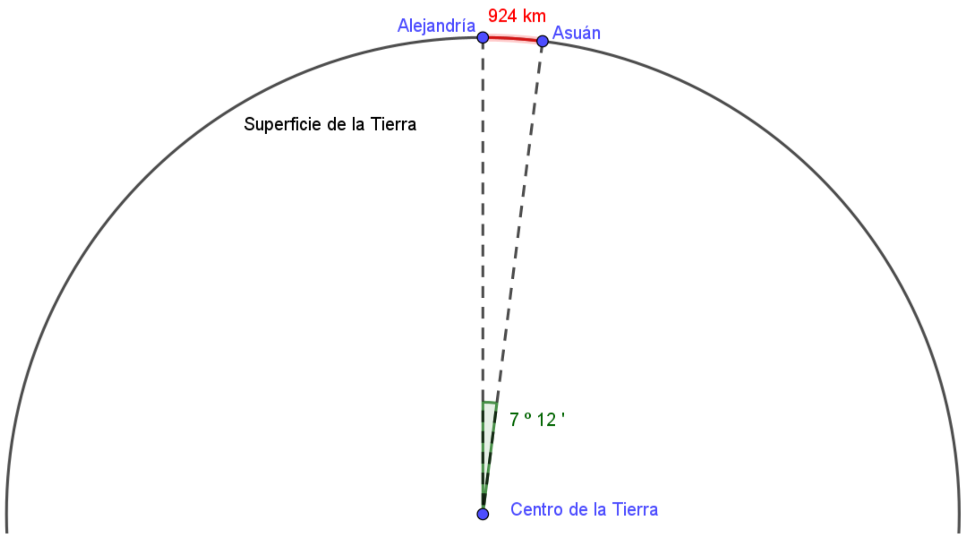


Figura 17: Esquema de las medidas de Eratóstenes

Si la distancia que midió fueron 924 km, ¿sabrías calcular con estos datos cuánto mide la circunferencia de la Tierra? ¿Y su radio?"

El contexto de este problema puede resultar de interés para los alumnos, ya que puede que previamente ya se hayan hecho preguntas como "¿Cómo han medido la Tierra, con lo grande que es?" o "¿Cómo pueden saber cuánta distancia hay al centro de la Tierra sin haberla excavado?". Después de esta actividad, verán que con un poco de ingenio y conociendo las matemáticas adecuadas, es viable que la gente de la antigüedad, con los pocos recursos que tenían en aquellos tiempos, pudieran realizar dichas mediciones.

Para guiar a los alumnos en la resolución, el docente puede hacer las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el ángulo de toda la circunferencia?
- ¿Qué podemos usar que hayamos aprendido a lo largo del curso? (en referencia a la proporcionalidad)
- ¿Cuánta distancia habría medido si estuviesen separadas por 1º?
- ¿Cómo nombre tiene también la distancia al centro de los puntos de una circunferencia?
- ¿Qué relación había entre radio y circunferencia?

5. Campo de problemas

Como se indica en el currículo (ORDEN 1172), basándose en los trabajos de Pólya (1965), Schoenfeld (1985) y Mason (2010), el proceso mismo de resolver un problema es muy valioso para el aprendizaje matemático. Enfrentarse a los obstáculos que ofrece cada problema y averiguar cómo superarlos permite construir el conocimiento matemático de una forma natural (ya que, desde la perspectiva epistemológica, el conocimiento de los objetos matemáticos se generó originalmente a partir de la resolución por primera vez de los problemas que los involucraban) y mejor fundamentada que, por ejemplo, mediante la memorización, tanto de teoría como de técnicas algorítmicas. Por todo ello, el aprendizaje a través de la resolución de problemas va a ser un principio fundamental en la propuesta didáctica presentada en este trabajo.

Concreción de problemas

A continuación, como ya se había adelantado en el apartado "1. Definición del objeto matemático a enseñar", se muestran los distintos campos de problemas (CP) sobre los que se va a trabajar en la propuesta. Se presentan también los problemas pertenecientes a cada CP. En los casos en los que el problema podría englobarse en varios CP, se ha colocado con el que hay más relación.

CP1: Deducción guiada de fórmulas del área

Estos problemas consistirán en hallar la expresión algebraica que da el área de una determinada clase de figura (paralelogramo, triángulo, trapecio, polígono regular y círculo), utilizando papiroflexia.

Problema 9 (CP1P, CP4P)

Dobla un papel para obtener dos paralelogramos idénticos y recórtalos.

Recorta uno de ellos en dos partes de tal manera que puedas juntarlas como un rectángulo y pégalas en tu cuaderno. Pega también el otro paralelogramo.

¿Qué longitudes necesitarías saber para calcular el área del rectángulo? Márcalas con distintos colores y ponles nombre.

¿Dónde se encuentran esas longitudes en el paralelogramo original? Márcalas del mismo color y ponles el mismo nombre que en el rectángulo.

¿Qué relación hay entre el área del paralelogramo y el rectángulo? ¿Qué operación hay que hacer para calcular el área del paralelogramo?

Problema 10 (CP1P, CP4P)

Dobla un papel para obtener dos triángulos idénticos y recórtalos.

Une los dos triángulos de tal manera que formen un paralelogramo y pégalo en tu cuaderno.

¿Qué longitudes necesitarías saber para calcular el área del paralelogramo? Márcalas y ponles nombre.

¿Dónde se encuentran esas longitudes en los triángulos originales? Márcalas y ponles el mismo nombre que en el paralelogramo.

¿Qué relación hay entre el área un triángulo y la del paralelogramo? ¿Qué operación hay que hacer para calcular el área del triángulo? (Puedes intentar explicarte con palabras y después traducirlo a una expresión algebraica)

Problema 11 (CP1P, CP4P)

Dobla un papel para obtener dos trapecios idénticos y recórtalos.

Une los dos trapecios de tal manera que formen un paralelogramo y pégalo en tu cuaderno.

Marca las bases (lados paralelos) de los trapecios, y ponles nombre (el mismo para las que miden lo mismo). Marca y nombra otra longitud que te haga falta para calcular el área del paralelogramo. ¿Cómo la calcularías?

¿Qué relación hay entre el área del paralelogramo y un trapecio? ¿Qué operación hay que hacer para calcular el área del trapecio? (Puedes intentar explicarte con palabras y después traducirlo a una expresión algebraica)

Problema 12 (CP1P, CP4P)

Recorta de la fotocopia los dos pentágonos y los dos hexágonos regulares.

Halla el centro de cada polígono mediante doblado de papel.

Recorta el pentágono en trozos que sean iguales. ¿Qué forma tienen estos trozos? ¿Cuántos trozos son?

Coge uno de ellos y pégalo en tu cuaderno. ¿Qué longitudes necesitarías conocer para calcular el área? Márcalas y ponles nombre.

¿Dónde se encuentran dichas longitudes en el pentágono original? Márcalas y ponles el mismo nombre. Dibuja donde estarían los trozos en el pentágono original

¿Qué relación hay entre el área del trozo y el pentágono? ¿Qué operación hay que hacer para calcular el área del pentágono? (Puedes intentar explicarte con palabras y después traducirlo a una expresión algebraica)

Repite el mismo proceso con el hexágono.

¿Observas algo especial en los trozos del hexágono?

¿Qué diferencia hay entre calcular el área del pentágono y el área del hexágono?

¿Cómo calcularías el perímetro de cada uno?

Escribe como calcularías el área de cualquier polígono regular si conocieras su perímetro y su apotema.

<u>CP2: Cálculo y deducción de áreas</u>

Estos problemas consisten en calcular el área de distintas figuras, utilizando diversidad de técnicas y materiales.

Problema 5 (CP2G) adaptado de Carrión (2017)

En la trama cuadrada, ¿cuál es el cuadrado más pequeño que puedes construir? Toma este cuadrado como tu unidad de área, y su lado como unidad de longitud.

¿Qué le pasa al área del cuadrado si duplicas el tamaño de sus lados? ¿Y si la triplicas? ¿Qué le pasa al área si multiplicas los lados por cualquier número?

Toma un rectángulo (que sea un poco grande). ¿Cómo calculas el área de este rectángulo de la forma más rápida?

Problema 6 (CP2G) adaptado de Carrión (2017)

Céntrate ahora en una región 3x3 de la trama cuadrada: es decir, en una región cuadrada con 9 puntos. Construye todos los triángulos diferentes que caben en esa región, dibújalos en tu cuaderno y calcula su área.

¿Cómo has calculado las áreas? ¿Cuándo consideras que dos triángulos son diferentes?

Problema 7 (CP2G) adaptado de Carrión (2017)

Céntrate ahora en una región 4x4 de la trama cuadrada: es decir, en una región cuadrada con 16 puntos. Construye todos los triángulos diferentes que caben en esa región que no hayan salido en la actividad anterior, dibújalos en tu cuaderno y calcula su área.

Explica que proceso sigues en cada uno para calcularla (si hay alguno que se repite puedes no explicarlo)

Problema 8 (CP2G)

Calculad el área de las siguientes figuras (copiadlas en vuestro cuaderno), y explicad el proceso por el cuál lo habéis hecho:

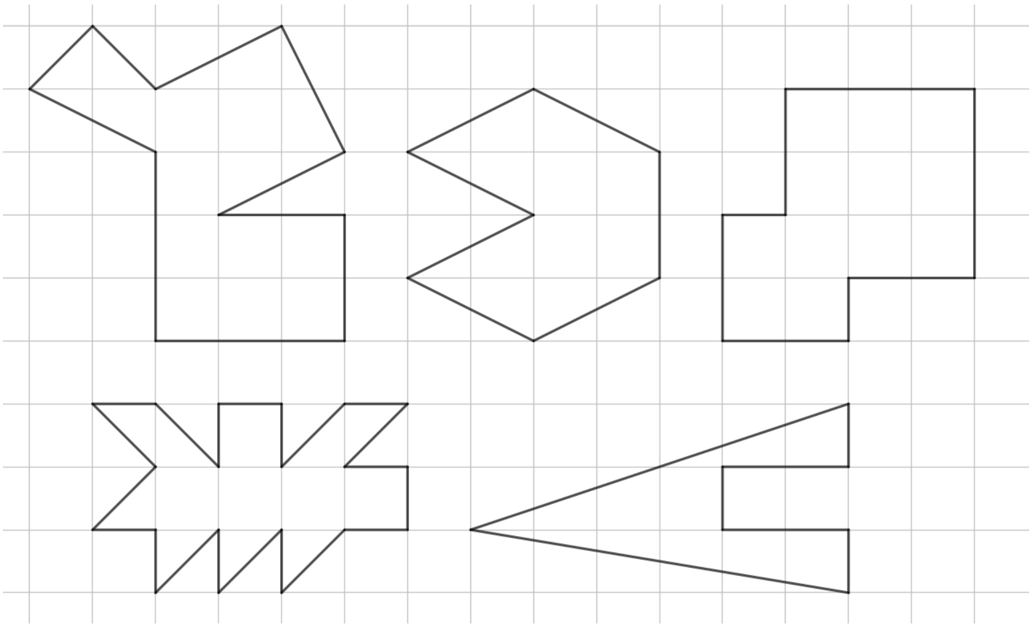


Figura 18: Polígonos utilizados en los problemas 8 y 19

Problema 13 (CP2S, CP4S)

Construye un paralelogramo en GeoGebra con cuatro rectas. Para ello, recuerda lo que cumplen los lados de un paralelogramo. Asegúrate de que, al mover algún punto o alguna recta, la figura no deja de ser un paralelogramo.

Ahora, con la herramienta "Segmento", mide la base y la altura del paralelogramo (necesitarás trazar rectas auxiliares). Asegúrate de que mover los vértices, los segmentos siguen siendo la base y la altura.

Utiliza la fórmula que hallaste en tu cuaderno para calcular el área, y compara el resultado con el calculado por GeoGebra con la herramienta "Polígono" al seleccionar los cuatro vértices del paralelogramo.

Problema 14 (CP2S, CP4S)

Construye un triángulo en GeoGebra con tres rectas.

Ahora, con la herramienta "Segmento", mide la base y la altura (necesitarás rectas auxiliares). Asegúrate de que, al mover los vértices, los segmentos siguen siendo la base y la altura.

Utiliza la fórmula que hallaste en tu cuaderno para calcular el área, y compara el resultado con el calculado por GeoGebra con la herramienta "Polígono" al seleccionar los tres vértices del triángulo.

Problema 15 (CP2S, CP4S)

Construye un trapecio en GeoGebra con cuatro rectas. Para ello, recuerda lo que cumplen los lados de un paralelogramo. Asegúrate de que, al mover algún punto o alguna recta, la figura no deja de ser un trapecio.

Ahora, con la herramienta "Segmento", mide la base mayor, la base menor y la altura (necesitarás rectas auxiliares). Asegúrate de que, al mover los vértices, los segmentos siguen siendo la base mayor, la base menor y la altura.

Utiliza la fórmula que hallaste en tu cuaderno para calcular el área, y compara el resultado con el calculado por GeoGebra con la herramienta "Polígono" al seleccionar los cuatro vértices del trapecio.

Problema 16 (CP1, CP2S, CP4S)

Este archivo de GeoGebra te permite elegir el número de lados de un polígono regular cuya apotema siempre tiene 1 unidad de longitud:

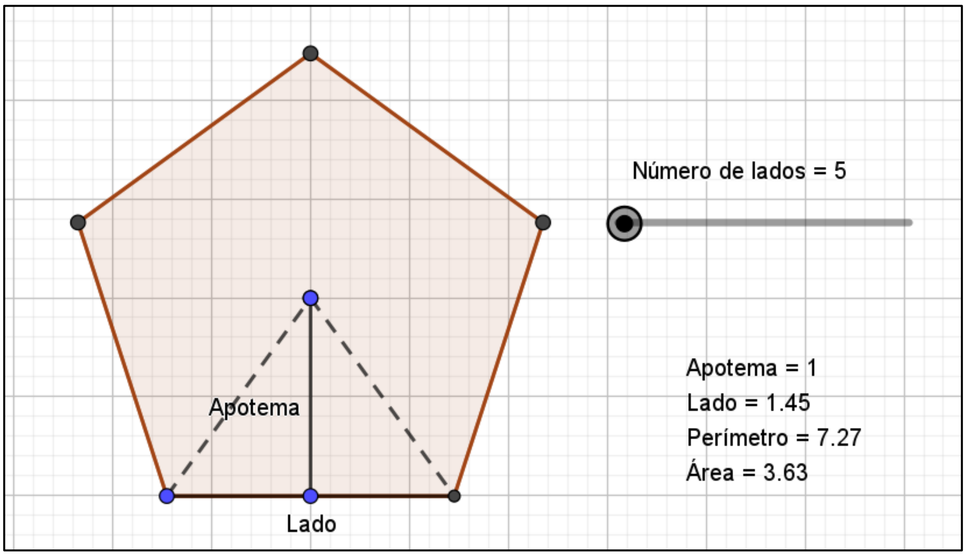


Figura 19: Captura del archivo de GeoGebra utilizado en los problemas 16 y 21

Utiliza las fórmulas que hallaste en tu cuaderno para hallar el perímetro y comprueba que coincide con lo que calcula el programa. Haz lo mismo con el área.

Problema 21 (CP1, CP2S, CP4S)

Ahora, aumenta el número de lados del polígono con el deslizador. ¿En qué figura se va transformando el polígono? ¿Cómo calcularías el perímetro de esta figura?

¿Cómo calcularías el área de esta figura, basándote en cómo se calcula el área del polígono regular a partir de su perímetro?

Comprueba que estás en lo correcto utilizando el área que calcula GeoGebra con un polígono de muchos lados.

<u>CP3: Cálculo y deducción de longitudes</u>

Estos problemas consisten en hallar o estimar longitudes en una trama cuadrada:

Problema 17 (CP3G, CP2G)

Construye un cuadrado que tenga área 2, y otro que tenga área 5. ¿Cómo puedes calcular sus lados? ¿Cuánto miden?

Problema 18 (CP3G, CP2G) adaptado de Carrión (2017)

Céntrate en una región 4x4 de la trama cuadrada: es decir una región cuadrada con 16 puntos. Halla todas las distancias distintas entre puntos de la trama que caben en esa región.

Dibújalas en tu cuaderno y apunta la diferencia de posición horizontal y vertical de los puntos. Ejemplo:

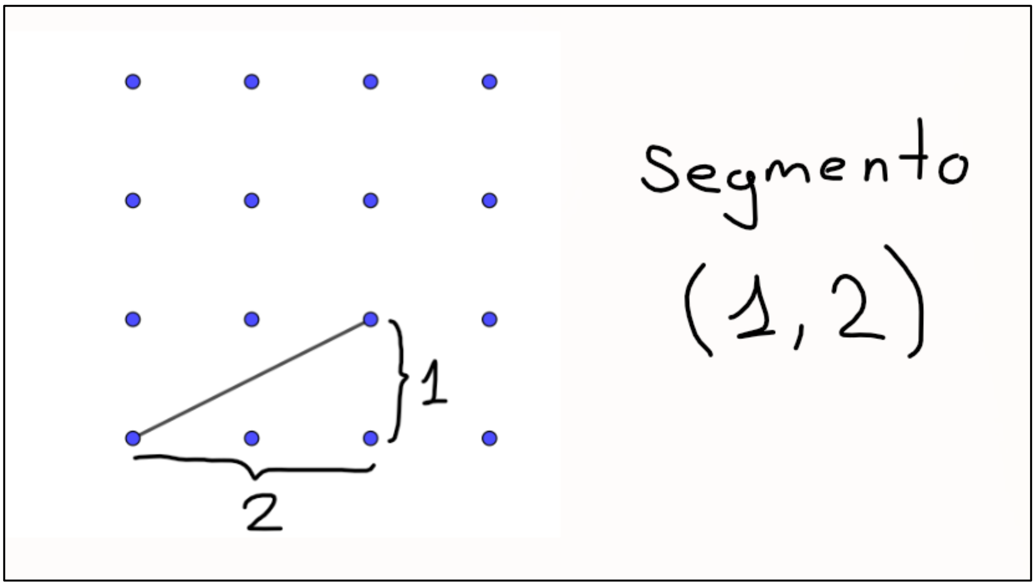


Figura 20: Propuesta de notación de las distancias para el problema 2E

Ordénalas de menor a mayor. ¿De qué distancias sabes el valor sin necesidad de calcular?

¿Se te ocurre alguna manera de calcular las demás? Si es así, calcula todas y comprueba que habías ordenado correctamente las distancias.

¿Observas alguna relación entre los números que dan la diferencia de posición vertical y horizontal y las distancias? ¿Podrías escribir una fórmula?

Problema 19 (CP3G)

Tomad los polígonos del Problema 8 y calculad su perímetro, utilizando el Teorema de Pitágoras que descubrimos en el Problema 18. Detallad el proceso en vuestro cuaderno.

Problema 20 (CP3)

Tomad una cinta de sastre. Tomad uno de los objetos circulares que os facilite el profesor y medid con la cinta de sastre su diámetro y su circunferencia. Id cambiándoos los objetos entre vosotros para tomar medidas de varios objetos.

Con esta información que habéis recopilado, ¿podríais saber cuánto mide el radio de una noria, si se emplean 350 metros de acero para hacer su circunferencia?

CP4: Construcción de figuras

Estos problemas consisten construir figuras del plano utilizando diversas técnicas y materiales, con la intención de que los alumnos se familiaricen con las propiedades de los elementos geométricos involucrados mientras realizan estas construcciones.

Problema 1 (CP4P)

Dobla una hoja de papel por una dirección aleatoria no paralela con los bordes de la hoja. Al desdoblar, verás que has creado una recta, que llamaremos recta "a".

¿Cómo tienes que doblar el papel para hallar una recta "b" perpendicular a la recta "a"? Hazlo.

¿Cómo tienes que doblar el papel para hallar una recta "c" paralela a la recta "a"? Hazlo.

Problema 2 (CP4P)

Toma una hoja de papel y, doblándola dos veces, determina por donde habría que cortar para obtener el cuadrado de papel más grande posible. Haz un boceto del proceso en tu cuaderno, y explícalo.

Problema 3 (CP4P)

Toma un cuadrado de papel y halla el centro del cuadrado doblando el papel como consideres. ¿Observas algo especial en las rectas por las que has doblado el papel?

Dobla por todos los ejes de simetría del cuadrado. ¿Cuántos ejes hay?

Problema 4 (CP4P)

A partir de un cuadrado de papel, intenta construir un octógono regular lo más grande posible, utilizando únicamente el doblado del papel. Dibuja el octógono en tu cuaderno para hacerte una idea de cómo es y que vas a necesitar para hacerlo.

Metodología

Comparando con lo visto en el análisis de libros del apartado "2. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático", es evidente que nuestra propuesta didáctica comparte los mismos campos de problemas con estos libros. Sin embargo, nuestro acercamiento difiere de dichas propuestas (sobre todo de las editoriales SM (Vizmanos, 1997) y Santillana (Álvarez, 2007)) en el sentido en el que todas las técnicas nuevas que aparecen en el contexto de la geometría se desarrollan conforme se solucionan los problemas, intentando que sean los alumnos quienes las hallen, con la adecuada guía del docente. Otra diferencia notable es la total presencia de materiales manipulativos para trabajar. A continuación, se va a dar una propuesta de como llevar estos problemas al aula, basándose en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele (Jaime, 1998): Información (I), Orientación Dirigida (OD), Explicitación (E), Orientación Libre (OL) e Integración (C).

Puesto que a lo largo de la secuencia se van varios materiales manipulativos, lo ideal es que los primeros problemas que se propongan sean aquellos más adecuados para familiarizarse con cada tipo de material.

En primer lugar, empezaremos con los problemas 1, 2 y 3 (OD) que sirven para que los alumnos se familiaricen con las mecánicas básicas del doblado de papel (CP4P), explicando previamente que a continuación vamos a utilizar la papiroflexia para resolver unas tareas (I). Quizás algunos alumnos tengan problemas entendiendo los enunciados, por lo que será más fácil que los estudiantes entiendan el problema si el docente es capaz de reformular las instrucciones o las preguntas cuando sea necesario. Siempre que se solucionen un par de problemas, se pondrá en común cómo se han solucionado (E) para asegurarnos de que todos los alumnos pueden continuar con la secuencia, permitiendo que los alumnos ejemplifiquen las técnicas que han utilizado.

Después, avanzamos con el problema 4 (OL), que pueden resolver con la combinación de las técnicas involucradas y la información obtenida en los problemas anteriores. Finalmente, acabaríamos esta sección de papiroflexia con la actividad "¿Cómo se hace un reloj?" introducida y explicada en el apartado "4. Razones de ser del objeto matemático".

Dejaremos aparcada la papiroflexia de momento, e introduciremos el geoplano para empezar con el cálculo de áreas (CP2G). Presentaremos el uso del geoplano (I) y realizaremos los problemas 5, 6, 7 y 8 (OD), permitiendo de nuevo que, tras algunas de las actividades, los alumnos expongan sus soluciones poniéndolas en común, intentando comprender lo que se ha hecho (E). Para terminar, se realizará una la actividad "¿Dónde hay áreas?" introducida y explicada en el apartado "4. Razones de ser del objeto matemático".

Ahora que los alumnos ya están familiarizados con la papiroflexia y también con las estrategias de cálculo de áreas, es el momento de introducir la deducción de fórmulas del área (CP1P). Pediremos a nuestros alumnos que recuerden cómo trabajaron en sesiones anteriores con el doblado de papel (I), ya que van a tener que construir algunos de los polígonos que aparecieron en la evaluación inicial. Puesto que cada uno de los problemas 9, 10, 11 y 12 (OD) está centrado en una clase de polígono, es recomendable que se pongan en común las características de este polígono antes de empezar a construirlo. Es previsible que estas tareas resulten más complicadas que las anteriores, por lo que la función del docente como guía es más importante si cabe.

Después de haber deducido todas las fórmulas, pasaremos al bloque de trabajo en GeoGebra, compuesto por los problemas 13, 14, 15 y 16 (OL). Lo que se pretende con estas actividades es que nuestros alumnos encuentren analogías con los procesos de construcción con papiroflexia y sepan traducirlos al entorno digital, para lo que previamente habrá que dedicar un tiempo en presentar las herramientas de las que dispone el programa y explicar su funcionamiento (I). Puesto que estas tareas tendrán que resolverse en una sala de ordenadores, el docente puede hacer que los alumnos compartan su pantalla cuando haya que poner soluciones en común (E), apoyando las explicaciones.

Volveremos al geoplano (I), para tratar ahora el tema de longitudes, resolviendo primero los problemas 17 y 18 (OD) que servirán para introducir las técnicas alternativas a lo usual. Después de poner en común estas técnicas (E), se utilizarán los mismos polígonos del problema 8 en el problema 19 (OL).

Finalmente, la secuencia de actividades terminará con todo lo relacionado con la circunferencia. Para ello, se informará (I) a los alumnos del Problema 20 (OD), en el que para llegar a la solución tendrán que deducir primero la relación entre diámetro y perímetro de la circunferencia mediante medidas directas de objetos circulares proporcionados por el docente. Después de tomar las medidas, puede que algunos alumnos no lleguen a la conclusión que se busca, por lo que habrá que hacer un pequeño razonamiento conjunto para llegar a la relación que queremos, de tal manera que finalmente puedan resolver la pregunta que cierra el problema (OL). Para relacionar la proporcionalidad con la longitud de sectores circulares, se utilizará la actividad “El centro de la Tierra”, introducida y explicada en el apartado “4. Razones de ser del objeto matemático”.

El Problema 21 se queda apartado, puesto que debería hacerse con GeoGebra, pero dado el orden de la introducción de los contenidos, no podía agruparse en ese bloque. Por lo tanto, la mejor solución es que el docente lo resuelva en el ordenador del aula para dar por explicada el área del círculo.

Para terminar, hay que hacer alguna consideración general. Todas estas actividades son aptas para realizarse en grupo. El docente tendrá que decidir, según como sea el grupo-clase, si es viable formar grupos, y qué tamaño de grupos es el adecuado. Los problemas de esta propuesta no son fáciles, pero tienen un punto de entrada accesible (suelo bajo, techo alto) para que todos los alumnos puedan empezar la tarea. Si se eligen los grupos adecuadamente, los alumnos que resuelvan los problemas con mayor facilidad podrán ayudar a los que tienen más dificultad desde donde se hayan atascado, favoreciendo un avance mucho más fluido que si toda la carga recae sobre el profesor.

6. Técnicas

Concreción de técnicas

En este apartado se van a detallar las técnicas que se espera que el alumnado utilice para resolver los problemas, y que ya fueron enumeradas en el apartado "1. Definición del objeto matemático a enseñar". Para ello, se va a describir brevemente cada una, y después se va a ejemplificar el uso de aquellas que resulten más interesantes, indicadas con (*):

Técnicas generales

T1: Operaciones con números reales (*)

Cuando sea necesario calcular cantidades, como áreas o longitudes, los alumnos tendrán que operar con números reales.

T2: Expresión algebraica

Para la deducción y expresión de fórmulas, es necesario saber manejar expresiones simbólicas básicas.

T3: Descomposición en polígonos más simples (*)

Para un polígono cuya área no pueda calcularse directamente, puede descomponerse en polígonos más simples cuyas áreas se puedan calcular directamente.

T4: Identificación (*)

Para construir polígonos, es necesario reconocer

- T4a: el polígono que queremos construir y sus propiedades
- T4b: sus longitudes características
- T4c: sus ángulos

A su vez, también es necesario reconocer estos mismos elementos en otros polígonos, de tal manera que se pueda construir el primero a partir de los segundos. La identificación también es útil en combinación con otras técnicas en el cálculo de áreas y longitudes.

T5: Aplicación de fórmulas

-T5a: para calcular el área de polígonos especiales

-T5b: para calcular longitudes diagonales en la trama cuadrada (Teorema de Pitágoras)

-T5c: para calcular perímetros o diámetros de circunferencia (número π)

T6: Recomposición de polígonos

Una forma para encontrar polígonos equivalentes de un polígono dado es dividir en partes el polígono original y reorganizarlas ingeniosamente para obtener un polígono más sencillo, lo que puede servir para calcular o razonar el área de los polígonos.

T7: Medida directa de longitud

En este caso se utilizará únicamente para medir circunferencias antes de presentar la relación entre diámetro y perímetro de la circunferencia.

<u>Técnicas específicas</u>

TP1: Plegado de rectas con una posición y orientación determinada (*)

Para hacer construcciones geométricas con papiroflexia, será necesario poder doblar el papel para crear rectas perpendiculares, paralelas, o simétricas respecto a otra recta

TP2: Transporte mediante plegado (*)

Será necesario saber cómo transportar...

> -TP2a: una longitud de un lugar del papel a otro, lo que también incluye duplicar o dividir a la mitad una longitud
>
> -TP2b: un ángulo de un lugar del papel a otro, lo que también incluye duplicar o bisecar un ángulo

TG1: Unión de puntos en una trama cuadrada

Construir polígonos y longitudes en una trama cuadrada cuyos vértices o extremos siempre correspondan a un punto de la trama

TG2: Conteo (*)

> -TG2a: Se pueden contar elementos que contiene un polígono, como unidades de área, polígonos iguales más simples, tramos del perímetro con la misma longitud...
>
> -TG2b: Se pueden contar configuraciones, como cuántas distancias distintas se pueden encontrar en una región restringida de la trama.

TS1: Trazado digital (*)

Utilizar las herramientas de trazado de rectas y puntos de GeoGebra

TS2: Desplazamiento de puntos (*)

Posibilidad de mover un punto seleccionado, con todas las consecuencias que conlleve sobre los elementos que se han construido a partir de él, y comprobar si los objetos están bien definidos.

TS3: Media de longitudes y áreas

Utilizar las herramientas de medida que ofrece GeoGebra para medir la longitud de segmentos o el área de polígonos.

TS4: Generación mediante parámetros

Utilizar un archivo prediseñado de GeoGebra que permite modificar un polígono modificando un parámetro sobre el que se ha definido (ejemplo en la Figura 19)

Ejemplos de uso

Para ejemplificar las técnicas más interesantes, y que es posible que no se comprendan debidamente sin un ejemplo, se van a utilizar tres actividades diferentes, cada una realizada con un material manipulativo distinto:

Papiroflexia: ¿Cómo se hace un reloj? (CP4P)

El primer paso en esta actividad es darse cuenta de que es necesario construir un dodecágono (T4a). Para ello, hace falta conseguir un ángulo interior de 360/12 = 30º (T4c), que resulta ser el ángulo mitad y también el ángulo complementario de 60º, ángulo presente en un triángulo equilátero (T4c y T4a). Por lo tanto, se puede empezar por construir este ángulo construyendo un triángulo equilátero en un cuadrado de papel.

El triángulo tiene dos características que nos permiten construirlo con facilidad: es simétrico respecto a un eje y sus tres lados miden lo mismo (T4a y T4b). Para aprovechar estos hechos, seguimos el siguiente procedimiento (Figura 21):

- 1: Elegimos un lado como la base del triángulo (en este caso, el inferior), y marcamos el centro del cuadrado doblando dos rectas perpendiculares, paralelas y equidistantes a los lados del cuadrado (TP1)
- 2: Puesto que todos lados del cuadrado valen lo mismo, cualquiera tiene la longitud del lado del triángulo (T4a), por lo que podemos doblar uno de los lados hasta que coincida con la recta vertical, ya que sabemos que ahí estará el vértice por simetría (TP1 y TP2a). Así, el lado del cuadrado descansa sobre la dirección deseada, que puede marcarse volviendo a doblar el papel por esa recta.
- 3: Habiendo marcado dicha recta en color rojo, sabemos que forma 60º con la horizontal y 30º con la vertical (por complementariedad).
- 4: Doblamos por una perpendicular a la dirección en color rojo que pase por el centro del cuadrado (TP1), fijando el centro y rotando el papel hasta que la dirección en color rojo coincida consigo misma, ya que eso significará que al reflejar la dirección no cambia, indicando que la dirección de la recta y la del doblamiento son perpendiculares.
- 5: Vemos que se ha formado un triángulo rectángulo al añadir la recta de color azul, perpendicular a la roja. Sabemos que por el hecho de que una recta que cruza dos paralelas forma el mismo ángulo con ambas, que los ángulos rojos tienen que valer lo mismo (TP2b). El ángulo del centro del

cuadrado es el complementario (por ser un triángulo rectángulo), por lo que ya hemos conseguido tener un ángulo de 30º en el centro del cuadrado.

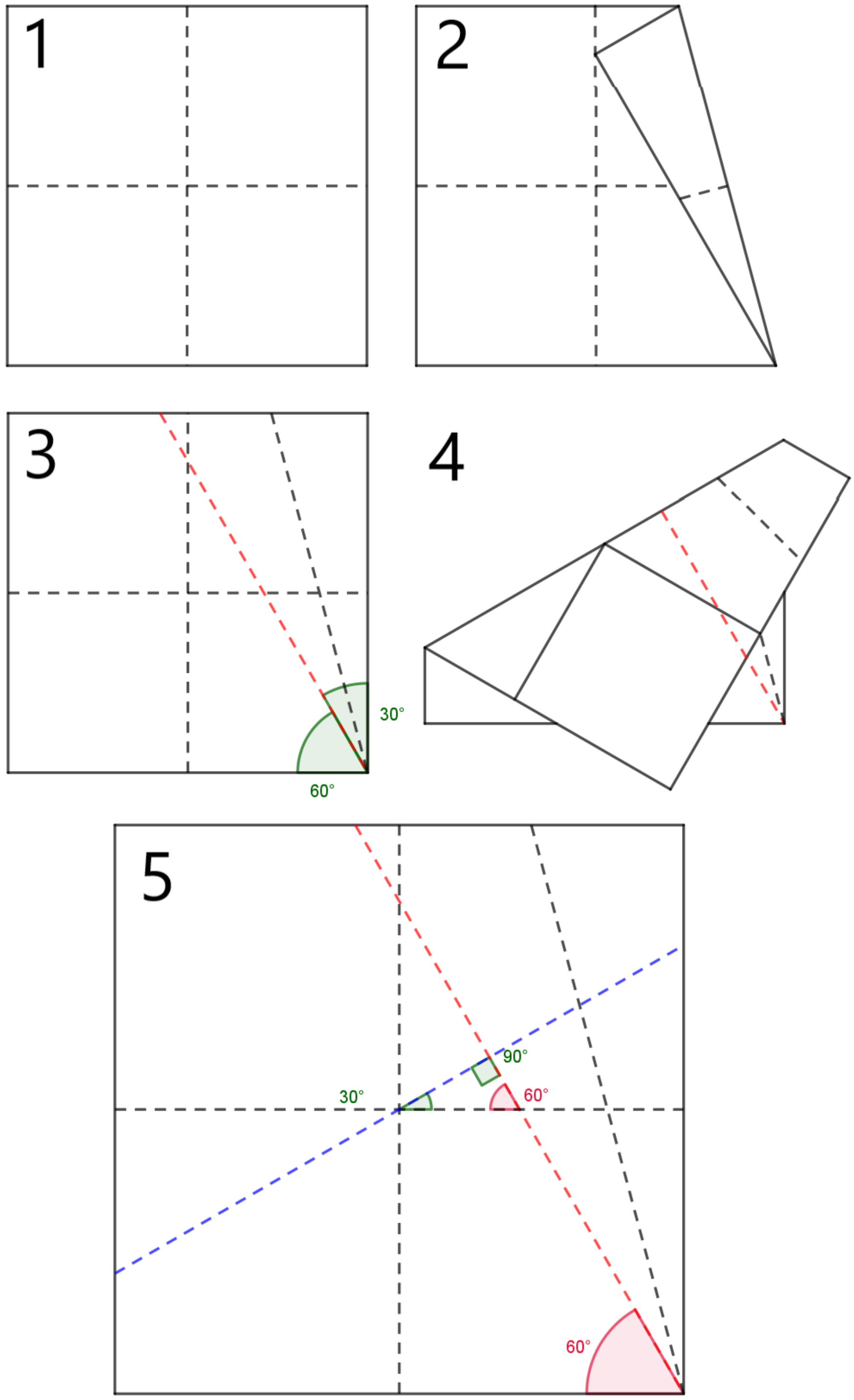


Figura 21: Procedimiento para obtener un ángulo de 30º en el centro de un cuadrado mediante papiroflexia

Esta es tan sólo una de las formas de hacerlo. Por ejemplo, es posible que, para transportar el ángulo, los alumnos vean más sencillo trazar una paralela a la recta roja, para lo que igualmente tendrán que lanzar una perpendicular, pero no que pase por el centro necesariamente, si no que sólo se usaría para hacer la perpendicular de la perpendicular, que es la paralela (esto se habría aprendido en el problema 1). Otra manera consistiría en construir el triángulo equilátero en un cuarto del cuadrado, así podríamos conseguir el ángulo de 30º directamente sobre el centro del cuadrado. Después de obtener un ángulo de 30º es fácil copiarlo hasta tener los 12 ángulos (doblar sucesivamente, reflexiones...).

Otra aproximación distinta pero muy posible es la de construir un hexágono a partir de 6 triángulos equiláteros (solo habría que construir uno en un cuarto del cuadrado, y copiarlo mediante reflexiones) y después doblar el hexágono por sus apotemas para duplicar el número de ángulos interiores. Esta forma, aunque más trabajosa, quizás resulte más intuitiva para los alumnos.

Geoplano: Problema 8 y 19 (CP2G, CP3G)

Estos problemas se centran, respectivamente, en calcular las áreas y los perímetros de los polígonos sobre el geoplano de la Figura 18. A continuación, se explica una posible resolución para el primer polígono (Figura 22):

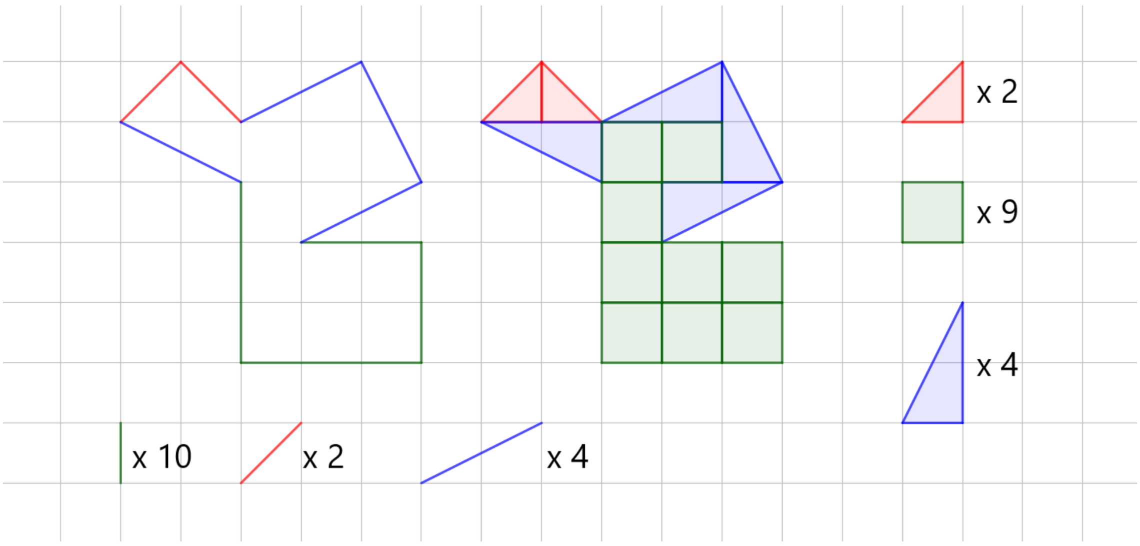


Figura 22: Ejemplo de resolución de los problemas 8 y 19

Para el problema 8, el polígono se divide en tres clases de polígonos más simples diferentes (T3, TG2b). Conociendo el área de estos polígonos, siendo 1/2 u^2 para el triángulo rojo y 1 u^2 para los cuadrados verdes y los triángulos azules (algo que ya se ha razonado en problemas anteriores). Por lo tanto, contando cuántos hay de cada uno (TG2a) y haciendo la siguiente operación (T1) se obtiene el área total:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 4 = 14\, u^2$$

Hay otras formas en las que se podría haber dividido el polígono, por ejemplo, considerando varios cuadrados juntos como un rectángulo. También se podría usar una recomposición de polígonos (T6), aunque quizás no merezca mucho la pena en este caso.

Para el problema 19, se reconocen las longitudes que se han obtenido en los problemas inmediatamente anteriores (TG2b). En este caso, tenemos 10 tramos verdes de valor 1, 2 tramos rojos de valor $\sqrt{2}$ y 4 tramos azules de valor $\sqrt{5}$. Haciendo la siguiente operación (T1) se obtiene el perímetro total:

$$10 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$$

Aunque dejar indicada la operación con raíces podría considerarse correcto, esto también puede ser una oportunidad para realizar una estimación y obtener un valor aproximado, por ejemplo, con un decimal de precisión. Por ejemplo: $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ que está cerca de $\sqrt{9} = 3$. 2,9·2,9 da 8,41; 2,8·2,8 da 7,84. Por lo tanto, 2,8 es el número con un decimal mas cercano a la raíz de 8. Lo mismo pasa con $4\sqrt{5} + \sqrt{80}$, que está muy cerca de $\sqrt{81} = 9$. 8,9·8,9 da 79,21. Por lo tanto, 8,9 es el número con un decimal más cercano a la raíz de 80. Finalmente:

$$10 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{5} \cong 10 + 2{,}8 + 8{,}9 = 21{,}7\ u$$

Hemos resuelto un problema de cálculo de áreas si aplicar fórmulas, fundamentándose en el razonamiento construido en problemas anteriores. Con el perímetro pasa lo mismo, incluso si hace falta usar Pitágoras al haber alguna distancia no estudiada en los problemas anteriores, ya que este teorema se construye previamente.

Software de geometría dinámica (GeoGebra): Problema 13 (CP2S, CP4S)

El problema 13 y los que le siguen sirven para comprobar las fórmulas del área deducidas en los problemas anteriores, y aprovechar de paso para aprender a manejar GeoGebra. En la Figura 23 se presentan dos ejemplos de resolución:

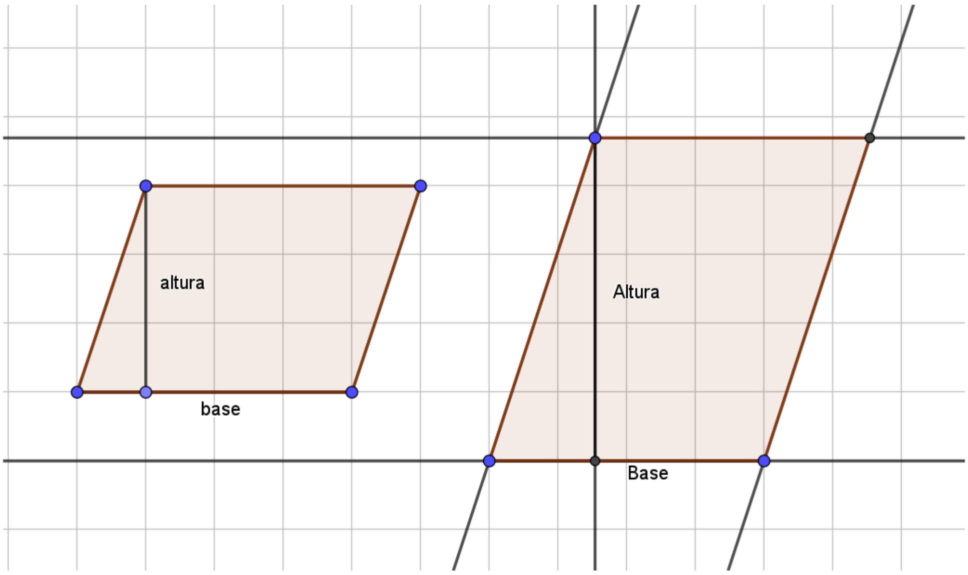


Figura 23: Construcciones de dos paralelogramos en GeoGebra

El paralelogramo de la izquierda se ha trazado uniendo puntos de la cuadrícula, basándose en el aspecto típico del paralelogramo. El de la derecha, se ha construido trazando rectas paralelas, basándose en las propiedades del paralelogramo (TS1). También se han marcado y nombrado con segmentos la altura y la base de cada uno.

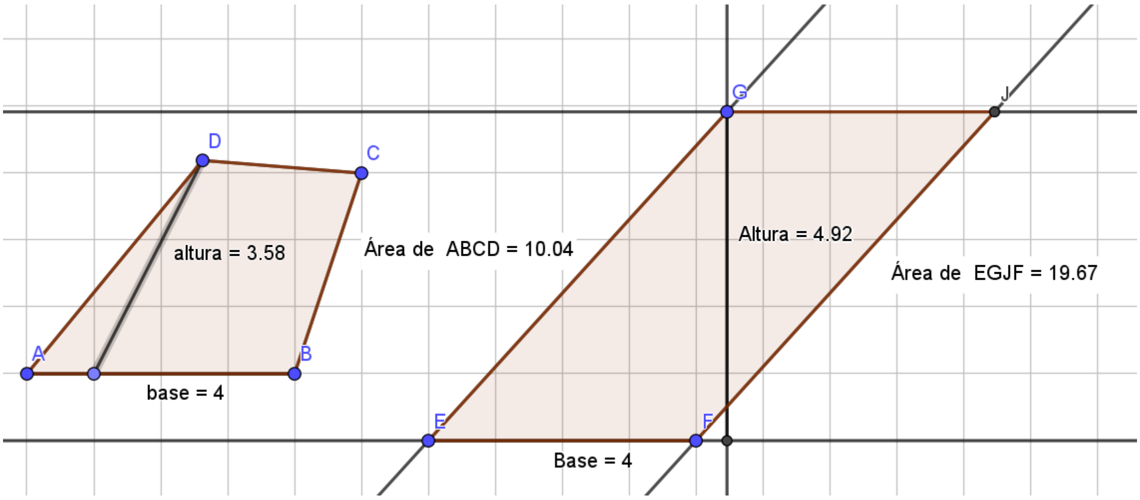


Figura 24: Comparación del desplazamiento de un punto en dos cuadriláteros construidos en GeoGebra

Al mover uno de los puntos (TS2) observamos que el polígono de la izquierda deja de ser paralelogramo, pues se había construido sin forzar el paralelismo. En cambio, en el caso de la derecha, aunque la forma cambia, sigue siendo un paralelogramo. En el caso de la izquierda, el producto de la base por la altura, medidos por el valor del segmento (TS3): 4·3,58 = 15,4 no coincide con el área medida por GeoGebra (TS3) que es 10,04, lo cual es de esperar ya que la altura ya no es perpendicular a la base, y el polígono ya no es un paralelogramo, por lo que la fórmula de base · altura ya no aplica. En el caso de la derecha, todo se ha definido correctamente, y a pesar de haber movido un punto (TS1) el polígono sigue siendo un paralelogramo, la altura y la base se están midiendo correctamente, y por lo tanto el área medida por GeoGebra (TS3) de 19,67 coincide con el producto 4·4,92 = 19,68 (error por aproximación a la centésima).

Metodología

Se ha intentado que cada una de las técnicas tenga su tiempo de introducción, habiendo series de problemas en los que hay que usar las mismas técnicas, de tal manera que, si no se han desarrollado o entendido en los primeros, con ayuda de la explicitación, el intercambio de estrategias entre los alumnos y los consejos del docente, todo el mundo pueda utilizar y comprender las técnicas en los últimos problemas que las involucren.

Por lo tanto, se reitera la intención de que sean los alumnos quienes desarrollan las técnicas, pero, aun así, el docente siempre proveerá del apoyo necesario para aquellos momentos en los que las técnicas no sean lo suficientemente evidentes.

Muchas de las actividades permiten su resolución de formas diferentes, que pueden diferir en las técnicas que se utilizan o en cómo y en qué momento se usan. Por ello, es importante que el docente no se obceque con un solo tipo de solución, si no que prevea las posibles maneras diferentes de resolver una tarea y sepa atender a todos los alumnos sea cual sea el camino que hayan elegido para hacerlo.

Por último, hay que recalcar que lo valioso es que el alumno entienda y sepa utilizar las técnicas correctamente. No es necesario que las memorice, por lo que según las vaya utilizando, se pedirá encarecidamente que describan los procesos en su cuaderno, de tal manera que siempre puedan consultarlas para futuros problemas.

7. Tecnologías que justifican las técnicas

Concreción de tecnologías que justifican las técnicas

Las tecnologías son los fundamentos teóricos en los que se fundamentan las técnicas que utilizamos. Puesto que se ha dado un enfoque constructivista a la propuesta didáctica, de tal manera que los alumnos desarrollen las técnicas a partir de tecnologías, y que a su vez estas técnicas sirvan para resolver problemas que den lugar a nuevas tecnologías, es importante saber en qué circunstancias es necesaria cada tecnología.

A continuación, se enumeran las tecnologías presentadas en el apartado “1. Definición del objeto matemático a enseñar”, explicando qué técnicas se fundamentan en ellas en cada caso:

Definiciones

D1: Definición de perpendicularidad y paralelismo

Dos rectas son paralelas si nunca se cruzan (tienen la misma dirección, forman el mismo ángulo con una tercera recta) y son perpendiculares si forman un ángulo recto. Esta definición puede justificar la identificación de lados paralelos o ángulos rectos en polígonos (T4), es fundamental en la construcción con papiroflexia (TP1 y TP2) y evidentemente en la construcción en GeoGebra (TS1)

D2: Definición de unidad de área

Fundamental para cualquier técnica involucrada en el cálculo de áreas.

D3: Definición de trama cuadrada

Red de puntos, separados por una unidad de longitud horizontal y verticalmente, de tal manera que los puntos son vértices de unidades cuadradas de área. Las técnicas basadas en el geoplano se fundamentan en esto. Primero, se pueden construir polígonos limitados a la trama (TG1), de tal manera que tanto sus áreas como longitudes puedan ser calculadas sin necesidad de medidas directas, utilizando, por ejemplo, el conteo (TG2).

D4: Definición de circunferencia

Lugar geométrico de puntos equidistantes a un centro. La distancia al centro de los puntos se denomina radio, y dos radios opuestos forman el diámetro. El perímetro de la circunferencia vale π por el diámetro. Fundamenta, aunque de manera disimulada, el transporte de segmentos (TP2a). Esta tecnología, a su vez, surge de utilizar (T7) para hallar la relación entre perímetro y diámetro. Evidentemente, el uso de dicha relación (T5c) se justifica en este hecho.

D5: Definición de triángulo rectángulo

Triángulo con un ángulo recto y que, por lo tanto, surge de dividir un rectángulo por una de sus diagonales. Como triángulo que es, el área es la mitad del mínimo rectángulo que lo contiene. Justifica el uso de la descomposición y la recomposición de polígonos para facilitar la deducción o el cálculo de áreas (T3 y T6). En el geoplano, al estar las construcciones restringidas a la trama, los triángulos rectángulos aparecen constantemente, utilizándose en el conteo (TG2)

D6: Definición de unidad de longitud

Fundamental para cualquier cálculo de longitudes.

Tecnologías

TL1: Construcción en actividad previa

Con esta "tecnología" nos referimos a aquellos resultados que se han obtenido como resolución de algún problema. Este es el caso, por ejemplo, del Teorema de Pitágoras (T5b).

TL2: Generalización

Justifica la necesidad de hallar expresiones algebraicas (T2) y fundamenta el uso de fórmulas (T5).

TL3: Clasificación y propiedades de polígonos

Fundamenta la identificación (T4).

TL4: Simetría de reflexión

Fundamental para las técnicas relacionadas con papiroflexia (TP1 y TP2) aunque también podría aparecer en otro contexto

TL5: Polígonos equivalentes

Polígonos con distinto contorno, pero misma área. Justifica la recomposición de polígonos (T6) para la deducción o el cálculo de áreas.

TL6: Función de herramientas de software

Esta tecnología se refiere al conjunto de las funciones de las distintas herramientas de GeoGebra, que justifican su uso. Por ejemplo, para trazar una paralela, se elige la herramienta de recta paralela, y la recta generada es paralela porque esa herramienta sirve para eso. Fundamenta todas las técnicas relacionadas con software (TS1, TS2, TS3, TS4).

Metodología

Las tecnologías que se construyan o amplíen mediante la resolución de problemas se institucionalizarán al finalizar las series de problemas similares que giren en torno a las mismas tecnologías. Esta consolidación ya vendrá apoyada por los momentos de explicitación que se hayan producido durante la realización de los problemas, en los que ha podido ocurrir que los alumnos hayan desarrollado las técnicas autónomamente o el docente haya tenido que intervenir para completar.

El objetivo es que, tras la institucionalización, los alumnos comprendan las técnicas que han utilizado, las tecnologías que las justifican y, sobre todo, las tecnologías que se han descubierto y que serán de utilidad en el futuro. Para ello, los alumnos deberán escribir en su cuaderno las conclusiones finales que se mencionen en el aula, ya sea por parte del docente o por parte de otros compañeros.

Estos momentos también son adecuados para dar retroalimentación, favoreciendo una evaluación formativa que sirva al alumno para comprender sus errores y cómo mejorar (Balbi, 2022). Esta retroalimentación no debe limitarse a dar a conocer los errores, si no que deben darse herramientas para asegurar que el alumno puede superar el obstáculo. Una buena opción es reformular el problema, sabiendo ahora en qué ha fallado, y proponer que lo reintente en casa, volviendo a preguntar en caso de no haber tenido éxito.

8. Secuencia didáctica y cronograma

Para el diseño de la secuencia didáctica, se va a seguir la recomendación del currículo (ORDEN 1172) relativa al saber espacial, que consiste en el uso del modelo de Van Hiele (explicado y justificado por Jaime (1998)) a la hora de diseñar las actividades de aprendizaje en geometría y su ordenación.

Aunque a la hora de diseñar las actividades ha resultado difícil tener en cuenta el modelo en todo momento, se ha intentado que, al ordenar estas actividades, sigan la secuencia de las fases de aprendizaje de Van Hiele: Información (I), Orientación Dirigida (OD), Explicitación (E), Orientación Libre (OL) e Integración (C). Para ello, se han clasificado las distintas actividades en alguna de estas fases y se han colocado en el orden que se ha considerado más lógico. El cronograma queda detallado en la Tabla 5, quedando la secuencia dividida en 12 sesiones de 55 minutos cada una:

Sesión 1	I: Vamos a jugar a un juego para ver lo que sabéis de figuras (5’) Evaluación inicial (50’)
Sesión 2	I: Vamos a trabajar con papiroflexia (5’) OD: Problemas 1, 2 y 3 (20’) + E (5’) OD: Problema 4 (20’) + E (5’)
Sesión 3	I: Seguimos con papiroflexia (5’) OD: Actividad “¿Cómo se hace un reloj?” (35’) C: Técnicas y tecnologías involucradas en CP4 y CP4P (20’)
Sesión 4	I: Vamos a utilizar el geoplano (10’) OD: Problema 5 (10’) + E (5’) OD: Problema 6 y 7 (20’) + E (10’)
Sesión 5	I: Seguimos con geoplano (5’) OD: Problema 8 (25’) + E (10’) OL: Actividad “¿Dónde hay áreas?” (10’) C: Técnicas y tecnologías involucradas en CP2 y CP2G (5’)
Sesión 6	I: Volvemos a la papiroflexia (5’) OD: Problema 9 (10’) + E (5’) OD: Problema 10 y 11 (15’) + E (5’) OD: Problema 12 (15’)

Sesión 7 y 8	I: Seguimos con el Problema 12 OD: Problema 12 (15’) + E (5’) I: Vamos a utilizar GeoGebra (15’) OL: Problemas 13, 14 15 y 16 (50’) C: Técnicas y tecnologías involucradas en CP1 y CP4 (20’)
Sesión 9	I: Volvemos a utilizar el geoplano (5’) OD: Problemas 17 y 18 (25’) + E (5’) OL: Problema 19 (15’) C: Teorema de Pitágoras (5’)
Sesión 10	I: Vamos a estudiar las circunferencias (5’) OD / OL: Problema 20 (10’) + E (10’) OL: Actividad “El centro de la Tierra” (20’) C: Relaciones del perímetro y el área de la circunferencia (Uso del Problema 21) (10’)
Sesión 11	I: Vamos a realizar la prueba de evaluación escrita (5’) Prueba de evaluación escrita (50’)
Sesión 12	I: Vamos a comentar los resultados de la prueba (5’) Retroalimentación de la prueba de evaluación escrita (50’)

Tabla 5: Cronograma de la secuencia didáctica

9. Evaluación

Modo de evaluación

Habrá cuatro modos de evaluación. El primero es la evaluación inicial, de la cual ya se ha hablado en el apartado "3. Conocimientos previos del alumno". El segundo es la evaluación por observación de la participación, que se utilizará sobre todo para los casos en los que sea fácil observar: cuando un alumno intervenga para explicar alguno de sus razonamientos, o cuando haga preguntas interesantes.

El tercer modo de evaluación es por prueba escrita, con preguntas fundamentadas en las técnicas y tecnologías tratadas en la propuesta. Sin embargo, puesto que se permitirá realizar el examen con cuaderno, estas cuestiones serán algo diferentes a las vistas, de tal manera que los alumnos, aunque puedan apoyarse en el material de su cuaderno, necesitarán razonar de todas formas para llegar a la solución.

Después de la prueba escrita, el docente recogerá los cuadernos y analizará las producciones de los alumnos más detenidamente.

Finalmente, queda la evaluación formativa, que, aunque puede tener una pequeña repercusión directa en la calificación, es muy importante para que los alumnos solucionen sus errores y puedan mejorar su desempeño, de tal manera que obtengan evaluaciones favorables a la hora de realizar la prueba escrita y entregar el cuaderno.

Aunque después de evaluar por todos estos medios se calcule una calificación, esta no será comunicada a los alumnos. En cambio, se detallarán los errores que el docente considere que hay que corregir: en la prueba escrita, la retroalimentación será grupal, comentando los errores más frecuentes e intentando corregirlos reformulando los problemas, con la participación del alumnado; en el cuaderno, puesto que será devuelto a los alumnos, el docente puede dejar escrita una retroalimentación formativa, de tal manera que los estudiantes puedan leerla detenidamente en casa y trabajen sus errores, pudiendo devolver el cuaderno corregido en el caso de que el docente considere que merece la pena. Con esto, nos referimos a que el docente no puede volver a corregir todos los cuadernos un número ilimitado de veces, debe reservar estas oportunidades para los alumnos que realmente las necesiten y que puedan aprovecharlas.

Prueba escrita

Para la prueba, puesto que se va a trabajar en algunas preguntas con tramas cuadradas, los alumnos dispondrán de un geoplano, con el fin de que puedan experimentar a la hora de construir polígonos, y sólo plasmar en la hoja de la prueba los polígonos que consideren correctos.

A continuación, se muestran las cuestiones que se presentarán a los alumnos:

1. *Si quieres trazar una recta paralela a otra, pero sólo se te permite trazar rectas perpendiculares, ¿cómo lo haces? ¿Por qué?*
2. *Dibuja un paralelogramo cualquiera y un rombo en la trama cuadrada, y traza sus diagonales. ¿En qué se diferencian?*
3. *Deduce la fórmula para calcular el área de un rombo conociendo la longitud de sus diagonales*
4. *Dibuja cuatro polígonos equivalentes con un área de 21/10 u^2 sobre la trama cuadrada, pero de tal manera que ninguno tenga el mismo perímetro.*
5. *Construye poliminós (polígonos que sólo están formados por cuadrados, sólo tienen ángulos rectos) con 9 u^2 de área, dibuja tres ejemplos que tengan perímetros diferentes, encuentra el que tiene menor perímetro y dibújalo también. ¿Qué dirías que significa esto?*
6. *En la Facultad de Derecho de Razazoga limpian el suelo 3 veces por semana. Este es el plano del edificio, con divisiones cada 10 metros:*

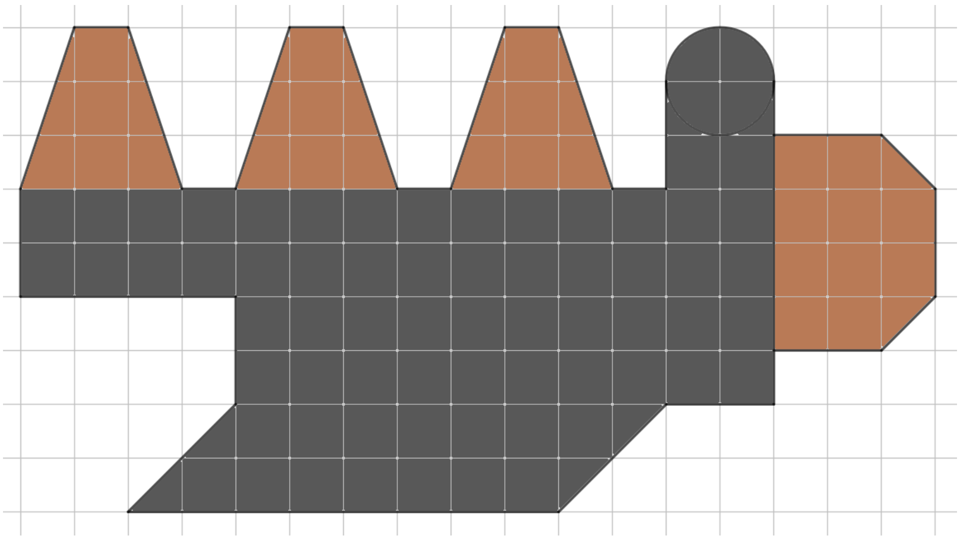


Figura 25: Plano de la Facultad de Derecho de Razagoza, divisiones cada 10 metros

Para el suelo de baldosas (gris), se puede usar un producto de limpieza barato, que sale a 1€ los 100 m^2. Sin embargo, para el suelo de madera (marrón), es necesario utilizar un producto más caro para que no se dañe el suelo, saliendo a 2,7€ los 100 m^2.

¿Cuánto dinero tiene que gastarse la Facultad cada semana en productos de limpieza del suelo?

Ahora, se muestra que conocimientos pretende evaluar, y el peso que tiene en la nota (sobre 6 puntos):

1. **(0,5 p.)** Comprobar que se sabe que trazar una perpendicular de una perpendicular es trazar la paralela. No hay distinción de tareas.
2. **(0,5 p.)** Comprobar que conocen las propiedades del paralelogramo genérico y el rombo, ver que pueden identificar la perpendicularidad. No hay distinción de tareas
3. **(1 p.)** Comprobar que pueden utilizar la recomposición de polígonos para hallar un polígono equivalente, y elaborar una fórmula en base a las distancias que se conocen. Tareas principales: recomponer el rombo en un polígono equivalente (paralelogramo o rectángulo), escribir la fórmula del área. Tareas auxiliares: identificar las diagonales, y mantener esta identificación durante el proceso.
4. **(0.75p.)** Demostrar sus habilidades con el geoplano, sabiendo como construir el área pedida a partir de cuadrados y triángulos rectángulos, y que puedan estimar el perímetro asegurándose de que no sea el mismo. No hay distinción de tareas.
5. **(0.75 p.)** Poder llegar a una conclusión nueva: el cuadrado minimiza el perímetro para una misma área. Tareas principales: Entender la definición dada de poliminó y construir los que se piden, encontrando que el cuadrado es el que tiene menor perímetro. No hay distinción de tareas.
6. **(1.5 p.)** Utilizar todo lo que sepa (conteo, áreas, división en polígonos simples, recomposición...) para calcular un área más compleja. Tareas principales: calcular y argumentar las áreas de los distintos elementos geométricos que componen la figura completa. Tareas auxiliares: operaciones aritméticas.

Criterios de calificación

La unidad didáctica se calificará según el siguiente baremo:

- 20 % Participación
- 30 % Cuaderno
- 50 % Prueba Escrita

La nota de participación constará de un 50 % perteneciente a la evaluación inicial, y otro 50 % perteneciente a la participación durante la unidad didáctica, en momentos de explicitación o consolidación.

La nota de cuaderno se calificará según la completitud y la corrección de las resoluciones de los problemas de clase.

La prueba escrita será corregida según una modificación del modelo de tercios (Gairín, 2012):

- Tareas auxiliares: sólo pueden penalizar hasta 1/3

- Tareas principales: pueden penalizar toda la puntuación

siendo las tareas auxiliares y las tareas principales las detalladas en la descripción de las preguntas, aunque solo aplica a aquellas que tienen una complejidad suficiente como para poder definir distintas tareas.

10. Bibliografía

Artículos, libros, charlas

Álvarez, M.D. et al. (2007). *Matemáticas 1 ESO. Proyecto La Casa del Saber*. Santillana

Balbi, A., Bonilla, M., Otamendi, M. A., Curione, K., & Beltrán-Pellicer, P. (2022) Evaluación Formativa y Educación Matemática: La Perspectiva de Docentes de Matemática en Servicio.

Botella, L.M., Millán, L.M., Pérez, P., Cantó, J, (2007) *Matemáticas 1er Curso de Educación Secundaria Obligatoria.* Marfil

Carrión, O. (2017) *Geoplanos I: cuadrados e isométricos.* Entorno Abierto, Boletín digital SAPM

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *Zdm*, 45, 633-646.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática, XVI*, 261-274

Jaime, A. (1998). ¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría?. *Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática*, 23-43.

Kline, M. (1959). Mathematics and the Physical World. *Nueva York: Dover Publications Inc*

Mason, J., Barton, L. y Stacey, K. (2010). Thinking mathematically (2º ed.). Pearson Education Limited.

Pólya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Corte, Á. y Muñiz-Rodríguez, L. (2020). ¿Evolucionan los libros de texto de matemáticas con los cambios curriculares? Estudio de la regresión y la correlación lineal en la Educación Secundaria en España. *Números*, 103, 65-79.

Rubio-Pizzorno, S., & Montiel, G. (2017). Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría. *P. Perry (ed.), 23*, 143-148.

Sánchez, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 71-92.

Sánchez, J. A. M. (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la Geometría. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas,(3)*, 101-115.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press.

Vizmanos, J.R., Anzola, M. (1997) *Aritmos Matemáticas 1 Secundaria*. SM

Legislación

ORDEN ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria (BOA 11/08/2022)

ORDEN ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón

Páginas web

GeoGebra: https://www.geogebra.org

Turboscribe AI: https://turboscribe.ai/es/

ANEXO

Transcripción de la entrevista a una docente en ejercicio

A continuación, se expone la transcripción literal (revisada por mí) de la grabación de la entrevista. Hay varias oraciones mal escritas o sin sentido aparente, pero es que es así como se dijeron.

Entrevistador: Pues a ver, me gustaría que me empezases hablando por tu trayectoria como docente.

Docente: Vale, pues la verdad que no llevo mucho tiempo porque sólo llevo, a ver, 10 cursos como docente, que tampoco es mucho, ¿no? Bueno, ¿qué te puedo contar? A ver, pues desde que empecé ahora, por ejemplo, yo he notado ya que he bajado el nivel, que cuando empecé como que tenía más ganas de dar cosas, no sé qué, y que ahora pues como que me conformo con menos.

Entrevistador: ¿Y por qué crees que ha sido eso?

Docente: Pues la verdad que no tengo ni idea, pero yo creo que cada vez veo que a los chiquillos les cuesta más y tampoco creo que sea cuestión de suspender a todo el mundo, entonces creo que sin querer voy pidiendo menos. ¿Y qué más te puedo decir desde que empecé ahora? Pues que cuando empecé sí que me veía profesora de matemáticas, pero ahora más que profesora a veces me veo también como psicóloga, socióloga, terapeuta y en última instancia profesora.

Entrevistador: Vale, ¿cómo crees que ha cambiado la educación en matemáticas desde que tú fuiste al instituto? ¿O de qué forma distinta educas tú respecto a tus profesores del instituto?

Docente: Pues si te digo la verdad, yo a veces pienso que me parezco mucho, o que yo explico muy parecido a cómo me explicaron a mí, que eso por una parte a veces pienso que está bien, porque yo tengo muy buen recuerdo de mis profesores de matemáticas en particular, pero a veces pienso, ostras, es que han pasado pues veintitantos años y debería haber evolucionado bastante más, que sí que hago cosas diferentes, pero a veces pienso que me parezco mucho a cómo me enseñaron y que quizás debería haber evolucionado más. No lo sé, porque a veces también pues eso, digo, si a mí aquello me gustó y me funcionó, no hacerlo así igual también es malo. No lo sé, tengo ahí un...

Entrevistador: ¿Un dilema?

Docente: Sí, que no sé qué sería mejor. A la, por ejemplo, GeoGebra en aquella época yo creo que ni existía, por ejemplo. Cosas online yo no recuerdo que nos hicieran ninguna visualización de nada, era todo más clase magistral en aquella época. Y hombre, yo sí que sigo un poco esa línea, pero no es todo el tiempo clase magistral tampoco.

Entrevistador: ¿Qué cosas crees que haces diferente, alguna cosa así que hayas añadido tú?

Docente: Pues el tema de utilizar el ordenador en algún momento, ya sea una hoja Excel o simplemente el hecho de escribir en ordenador y que vean cosas proyectadas, que vean que se puede usar pues eso, una herramienta o buscar un vídeo o lo que sea, esas cositas.

Entrevistador: ¿Y sobre estas clases divulgativas que decís hacer de vez en cuando?

Docente: Sí, que este año no he hecho. Pues mira, que los chiquillos cuando me ven, los del año pasado o los de hace dos años, se acuerdan y dicen, ¡ah, las clases divulgativas aquellas! Pues yo creo que les viene muy bien porque se oxigenan mucho y yo me oxigeno mucho también y aprenden cositas diferentes que en el día a día no da tiempo, pues de tema de historia de las matemáticas y de historia de matemáticos y matemáticas importantes. Por ejemplo, ahora en la evaluación de diagnóstico, una de las preguntas, no he visto muy bien de qué era, pero he visto que estaba dibujado el triángulo de Sierpinski y luego les he preguntado, ¿sabíais lo que era eso? Y no lo sabía ninguno de los que he preguntado. Y digo, yo, ¡ostras! Que es como un objeto muy conocido matemáticamente, muy curioso y que no lo habían reconocido y no sé, me ha chocado. Entonces, estas clases divulgativas sirven un poco para eso, para mostrarles estas cositas que también son interesantes. Lo que pasa es que yo sí que veo que funciona sobre todo con grupos buenos porque como son tan receptivos y están tan deseosos de saber, saber, saber, con estos grupos funciona muy bien. Con los grupos que son muy malos, como por ejemplo los del curso del año pasado y los de este año que tampoco son muy allá. Pues es que como les gusta entretenerse con cualquier cosa, pues no veo yo que la clase divulgativa termine de funcionar ahí. Pero sobre todo para mí me sienta muy bien también, ¿eh? Para ellos y para mí también, que no siempre clase, clase, clase y a veces policía, policía, policía. No, pues también, mira, pues esto lo sé y os lo quiero contar y eso también.

Entrevistador: ¿Crees que eso les ayuda a motivarse? Que se interesen por las mates...

Docente: Yo creo que sí. En el cole de mi hija, cuando nos dieron las notas hace unos años, por la parte de atrás ponía una frase que era que no se trata de llenar el cerebro de conocimientos, sino de encender una chispa. Y yo creo que estoy de acuerdo con esa frase y por eso las clases divulgativas también un poco de no sé cuánto conocimiento tendrás o no en tu cabeza ni cuánto vas a llegar a tener, pero si no tienes la chispa todavía, a ver si te la encienden. Es que claro, con el libro de texto y tal, como enciendes una chispa es muy difícil. Y con las clases divulgativas yo creo que es más fácil.

Entrevistador: Pues vamos a aprovechar que has nombrado el libro de texto y te quería preguntar cómo utilizas el libro de texto en tus clases.

Docente: Hombre, lo uso mucho de apoyo porque claro, básicamente los ejercicios los mando de ahí. Aunque alguna vez busque alguno por internet o tal, me sirve mucho, pues eso. Y sobre todo si a alguien falta al tener el libro, oye, pues, aunque no hayas venido hoy de la página tal, ¿ejercicio cuál? Es como para, has faltado, pero no te pierdes.

Entrevistador: ¿Es como una guía y además un repositorio de ejercicios?

Docente: Eso es, eso es. Una guía para saber más o menos por dónde tengo que ir de teoría. Podría no usarlo, pero me sirve de guía. Y sobre todo para eso, repositorio de ejercicios, como has dicho tú.

Entrevistador: Muy bien. Tenía aquí otra pregunta que aprovechando que yo he intentado hacer así unas sesiones un poco más modernas, ¿qué problemas has visto que pueden surgir sobre todo para las dinámicas de trabajo en grupo? También la resolución a través de problemas, que aunque yo propuse problemas dentro de las matemáticas que no están contextualizados, sí que eran problemas. Por ejemplo: ¿Cómo conocer el área de este polígono sin que nos den la fórmula, no? ¿Tú qué dificultades crees que...?

Docente: Mira, la primera que ya te diste tu cuenta también el primer día o el segundo. Te matas en pensar los grupos, en organizarlo, patatín, patatán. Cuando ya crees que lo tienes todo bien y que han funcionado y no sé qué, al día siguiente van y te faltan dos. Y es como, ¿y ahora qué hago? Porque si ya habías tenido la idea de mantener los grupos durante todas las sesiones, a menos de esta actividad concreta de geometría o de la que sea, ahora me faltan dos. ¿Qué hago ya? A reorganizar, a no sé qué. Anda, y ahora la nota que había puesto, por ejemplo, en el primer grupo, como ahora este grupo, este se ha pasado a este, entonces ahora como que comparto la nota, muy difícil de, quizá de evaluar, ¿no? De saber, anda, pues este es que estuvo dos, lo que te ha pasado también este estuvo dos días, este tres, este un día aquí o un día allá. Ostras. O sea, que la idea es muy buena, pero claro, en la situación ideal de que vienen todos, que no sé qué, que no sé cuántos. Pero nada que haya un mínimo cambio, es como que te, que si no estás preparado te descalabra el planning. Eso con respecto a la organización de los grupos. Eso, que lo veo difícil de evaluar, es que lo veo súper complicado, de verdad. ¿Y qué te iba a decir yo? Ah, y lo de problemas. Es que como yo veo, y no solo yo, estamos de acuerdo mucha gente, que cada vez los alumnos y las alumnas tienen menos comprensión lectora. Es que estaba leyendo una cosa y no entendían. O sea, ya no lo típico que te decía yo, mira, Antonio, no saben mirar si es el dibujo de arriba o el de abajo, que eso también.

Entrevistador: Sí, pero eso fue más falta mía de organización.

Docente: Claro, eso lo organizas y ya está. Pero eran cosas de, “pero ¿y qué tengo que hacer?” “¿Pero lo has leído?” “Sí”, “pues vuélvelo a leer”. O sea, cualquier cosa, que sea sacarlos un poco de, no sé, o que sea más de dos líneas ya, pues eso. Pero bueno, eso es algo que tendremos que trabajar, claro, no solo nosotros, sino en casa también.

Entrevistador: Y si el enunciado fuera oral, si se le propusiera a toda la clase, probablemente, ¿tú crees que mejoraría algo?

Docente: Pues mira, te contesto rápidamente que no. Y te digo porque ahora mismo en la evaluación de diagnóstico, Ana Rosa ha dado unas instrucciones de forma oral súper precisas. O sea, ha dicho dos frases contadas. Y ha habido gente que ha levantado la mano y que ha dicho que no entendía. Y era una chorrada, era hacer esto, no sé qué. ¿Qué estás diciendo? Ostras, no, algo falla. Yo ahora me estoy leyendo un libro, ya te lo dije, de Marian Rojas Estapé, de la psicóloga, esta que me encanta, que es su tercer libro el que ha sacado ahora, que precisamente habla del tema este de la atención, tal. Y hace mucho hincapié en que con el tema de las pantallas estamos perdiendo a las nuevas generaciones, porque los están volviendo totalmente incapaces de saber lo que les estás contando. O sea, no sé, como que no saben interpretar lo que leen y lo que les decimos. Porque están acostumbrados a otro ritmo, a otro tipo de estímulos, tal cual. Y nos estamos cargando las nuevas generaciones. Yo, y cuando a Ana Rosa les he dado una instrucción, que era, pues, en la contraseña hay que añadir una letra, o sea, una cosa súper precisa. Y ha habido gente que no le entendía. Digo, es que aquí pasa algo. Estoy un poco pesimista, ¿verdad?

Entrevistador: Bueno, no pasa nada, si es para eso. Para dar también la visión en, como se dice... En el campo de batalla.

Docente: Sí, sí, sí.

Entrevistador: Y, bueno, la última cosa que me faltaba sobre modernización es lo de la evaluación formativa, que ya lo hemos comentado un poco. Pero, sobre todo, si tú no les ves capaces de, por ejemplo, interpretar el enunciado de un problema aunque se lo digas tú. Yo es verdad que también intenté cuando al día siguiente veía que habían hecho cosas mal y decía, esto, esto me lo habéis hecho mal. Hacedme esto, por favor. Y luego me encontraba con que no habían respondido. Y, claro, la idea de la evaluación formativa es decirle en qué está mal para que se fijen los errores. Ya no tanto en la calificación, sino que en los errores que tiene por mejorar. Entonces, ¿tú ves eso con los alumnos que hay ahora que sea factible o...?

Docente: Ahora mismo yo creo que tenemos que trabajar más para que sea factible. Ahora mismo no termino de ver. Y eso, les das un examen o una prueba y miran la nota y no miran el error. Y lo que dices tú, pero es que aunque miran el error y les expliques en lo que ha fallado, de aquí a 5 minutos ya no se acuerdan. La mayoría, que hay de todo, ¿eh? Pero la gran mayoría, sobre todo los cursos estos, pues esos que no son plurilingües y tal, no lo sé.

Entrevistador: Vale. Pues ahora ya centrándonos más en lo que va a ir mi Trabajo de Fin de Máster, ¿qué dificultades ves en la enseñanza de geometría de primero de la ESO? ¿Cuáles son los errores más frecuentes o qué es lo que más les cuesta? Aunque, vamos, luego en segundo de la ESO, que yo cuando estoy en clase, pues, problemicas de perímetros y tal... también problemas que involucran geometría que se dan primero también les suponen problemas. O sea, me puedes hablar de las dos cosas, de geometría 2D básica.

Docente: Te vuelvo a decir lo mismo, más que dificultades concretas de geometría en dos dimensiones o la que sea, yo les veo en los enunciados de los problemicas. Más que en decirte, "pues mira, se suelen confundir en Pitágoras o las áreas no las saben", no, en los problemicas. Es que es eso, es que es en todas las áreas, en general, más que en algo en concreto de geometría.

Entrevistador: Porque para ti el problema ahora...

Docente: La comprensión lectora y la atención. Sí, sí, pero en general, totalmente.

Entrevistador: Pues la última pregunta, que volvemos así un poco más a lo general. Te quería preguntar si te darías algún consejo cuando, ahora, tú "yo" de "que llevo 10 años trabajando de profesora", ¿le daría algún consejo a la que justo empezaba a ser profesora?

Docente: No sé, ¿qué me diría? A ver, ¿qué me diría? Es que en el fondo, como también te digo, la verdad, como me gusta tanto mi trabajo, a pesar de las cosas que puedo ver que no me gustan, pues es que estoy bien. Entonces, pues le diría igual que, pero es lo que me digo también, es que disfrutara, que disfrutara. Pero es que ya lo hago y yo creo que en aquella época también lo hacía. Es que lo bueno es muy bueno. Y es verdad que lo malo a veces te tira para atrás y-, pero los momentos buenos son tan buenos y luego a mí es que me gusta, que es vocacional totalmente. Entonces, que disfrutara. Y que cuando tuviera momentos malos, pues que recordara por qué estoy aquí, que es por qué quiero y por qué me gusta. Solo eso.

Entrevistador: Pues muy bien.

Docente: Nada de matemáticas, eh. ¿Ves que es todo muy psicológico? Más que de: "No, pues, tendrías que hacerlo..."

Entrevistador: Igual están muy centrados en... y hay otros problemas antes que solucionarían todo más rápido, ¿no?

Docente: Sí, sí, es todo muy psicológico.

Entrevistador: Pues yo creo que ya está. Muchas gracias.

Docente: Gracias a ti.