

Desintegraciones semileptónicas de mesones pesados y el elemento de matriz CKM V_{cb}

Pablo Javier Trujillo Vázquez

July 9, 2024

Contents

1	Introducción	2
2	La matriz CKM y el elemento V_{cb}	2
3	Introducción a la teoría cuántica de campos en el retículo	3
3.1	Fermiones staggered y de Wilson	6
3.2	Mejoras a QCD en el lattice	7
3.3	Simulaciones de Monte Carlo	10
4	Desarrollo teórico del proceso $B \rightarrow D\ell\nu$	12
4.1	Factores de forma	12
4.2	Funciones de correlación a 2 y 3 puntos	14
5	Desarrollo de las simulaciones	17
5.1	Parámetros de las simulaciones	17
5.2	Funciones de correlación a 2 puntos	18
5.2.1	Elección del intervalo de ajuste	19
5.2.2	Entendiendo el proceso que se sigue en las simulaciones	20
5.3	Algunos tests a los resultados obtenidos	22
5.3.1	Distribución del p -value	23
5.3.2	Diferencia entre los resultados para $n_{states} = 2 + 2$ y $n_{states} = 3 + 3$	23
5.3.3	Estabilización de Z_d	24
5.4	Relación de dispersión	25
6	Funciones de correlación a 3 puntos	27
7	Pasos a seguir en el estudio del elemento de matriz V_{cb}	28

1 Introducción

En este trabajo vamos a realizar un cálculo de QCD en el retículo con el objetivo de obtener los factores de forma hadrónicos del proceso de decaimiento $B \rightarrow D\ell\nu$, lo que permite calcular el elemento V_{cb} de la matriz CKM. Para ello se realizan simulaciones de 7 ensembles de configuraciones de campos gauge distintos, en los que el espaciado del retículo varía desde los 0.058 fm hasta los 0.15 fm, probando también distintos ratios de masas del pión (ya que solo modificamos las masas de los quarks ligeros u y d). En el caso de los quarks pesados, que en nuestro trabajo son el c y el b , usamos fermiones de Wilson mejorados con la interpretación de Fermilab y para los ligeros utilizamos fermiones staggered mejorados.

Para el cálculo del elemento V_{cb} hay dos métodos comunes: utilizando los procesos exclusivos $B \rightarrow D\ell\nu$ y $B \rightarrow D^*\ell\nu$ con determinaciones de los factores de forma hadrónicos relevantes estudiando QCD en el retículo [19], o usando la desintegración inclusiva $B \rightarrow X_c\ell\nu$ a cualquier estado final que contenga el quark charm X_c y el formalismo del desarrollo del producto de operadores y quarks pesados para describir los efectos de la interacción fuerte [12]. Existe una tensión de $\approx 3\sigma$ entre las determinaciones inclusiva y exclusiva de V_{cb} , por lo que se necesitan cálculos más precisos de este elemento de matriz para ver si se trata de una discrepancia producida por subestimar los errores sistemáticos tanto teóricos como experimentales o si bien es un caso de nueva física.

Comenzaremos introduciendo la importancia del elemento V_{cb} , continuaremos estudiando conceptos básicos del cálculo de teoría cuántica de campos en el retículo, profundizaremos en el apartado teórico que usaremos para nuestras simulaciones, veremos cómo podemos realizar este estudio en el retículo y terminaremos analizando las funciones de correlación relevantes que nos permitirán calcular los factores de forma h_+ y h_- .

2 La matriz CKM y el elemento V_{cb}

Empezaremos introduciendo la importancia de este trabajo en la física actual. Al trabajar con la interacción de Yukawa con el condensado del Higgs, nos encontramos que cuando el potencial ϕ adquiere un valor esperado en el vacío, el Lagrangiano de dichas interacciones lleva a un término de masa para los quarks. Así, cuando uno trabaja para obtener sus autoestados diagonalizando dicho término de masa, lo que se encuentra es que se produce un acoplo entre las interacciones de las corrientes cargadas W^\pm y los estados físicos de los quarks u_{Lj} y d_{Lj} , o, con otras palabras, se encuentra que la base en la que se diagonaliza el término de masa no es la misma en la que se diagonalizan las interacciones débiles. Dicho acoplo tiene la siguiente forma en el Lagrangiano: [9]

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L, \bar{c}_L, \bar{t}_L) \gamma^\mu W_\mu^+ V_{CKM} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (1)$$

De tal modo, vemos que aparece un elemento V_{CKM} , la cual es la matriz unitaria que nos relaciona ambas bases y que tiene la siguiente forma:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (2)$$

en donde los términos V_{ij} nos dicen cómo se mezclan las diferentes familias, lo que implica que al observar un autoestado de sabor de b , s o d en realidad estemos observando una combinación lineal de autoestados de masa, permitiendo pasar de una familia a otra. En general, una matriz unitaria

$N \times N$ tiene N^2 parámetros reales, de los cuales $2N - 1$ pueden ser absorbidos por los campos de quarks que multiplican los lados derecho e izquierdo de la matriz, mediante una redefinición global de las fases arbitrarias. De los $(N - 1)^2$ parámetros libres restantes, $N(N - 1)/2$ son los ángulos de Euler, comunes tanto a la matriz real (ortogonal) como a la matriz compleja (unitaria), y los otros son fases complejas. Por ello, en $N = 3$ tenemos 4 parámetros libres: 3 denominados los ángulos de mezcla y otro que es una fase compleja, denominada fase de violación CP. La simetría CP es aquella que nos garantiza que bajo transformación de carga y de paridad (o como CPT se conserva, es equivalente a simetría temporal T) los procesos son invariantes. Sin embargo, en 1964 se observó que el mesón K decaía más en $\pi^- e^+ \nu_e$ que $\pi^+ e^- \bar{\nu}_e$, por lo que esta no se respeta en la naturaleza y es esta fase compleja de la matriz CKM la que permite que esto se produzca. Con ello, la forma que tiene esta matriz es:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (3)$$

con $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, donde θ_{ij} es el ángulo de mezcla entre la i -ésima y la j -ésima generación y δ_{13} es el ángulo de fase.

De este modo, el objetivo de los experimentos suele ser obtener los parámetros de esta matriz con la mayor precisión posible y así poder encontrar diferencias entre los resultados de distintas formas de aproximar el problema, lo que permitiría encontrar desviaciones del Modelo Estándar y por ende nuevas rutas de investigación. En nuestro caso, trabajamos con el elemento V_{cb} , el cual juega un papel crucial en el *triángulo de unitariedad*. Como hemos dicho, la matriz CKM ha de ser unitaria para que la probabilidad de transición se conserve, por lo que impone las siguientes condiciones a sus elementos:

$$\begin{aligned} |V_{id}|^2 + |V_{is}|^2 + |V_{ib}|^2 &= 1 \quad \text{para } i = u, c, t \\ V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* &= 0 \\ V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

La tercera de ellas es realmente interesante, ya que permite dibujar un triángulo en el plano complejo cuyos lados tienen longitudes similares a orden $\mathcal{O}(\lambda^3)$ ($\lambda \approx s_{12}$) y por tanto los ángulos tienen amplitudes similares. Esta, además, se puede normalizar dividiendo por $V_{cd}V_{cb}^*$, lo que permite escribir la expresión que define el *triángulo de unitariedad*:

$$1 + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} = 0 \quad (5)$$

Con todo, vemos que nuestro elemento V_{cb} juega un papel fundamental a la hora de normalizar la expresión y por tanto nos sirve como test excelente para encontrar desviaciones de la teoría o los parámetros medidos [6].

3 Introducción a la teoría cuántica de campos en el retículo

Cuando trabajamos con la teoría cuántica de campos, más concretamente con la cromodinámica cuántica (QCD), lo que nos encontramos es una interacción que media entre quarks y gluones, la cual a distancias cortas o altas energías es débil, pero que a medida que la energía aumenta se convierte en una interacción muy fuerte y la teoría de perturbaciones deja de funcionar. Ello hace que surja la necesidad de trabajar con técnicas no perturbativas, entre las que aparece el 'lattice QCD', o QCD en el retículo. Generalmente, lo que se hace es regularizar QCD introduciendo un retículo espacio-temporal, en el que colocamos los quarks en puntos fijos de este y los campos gauge

serán los links que unen las distintas posiciones.

Matemáticamente, esto se traduce a que para definir una teoría de campo en el lattice normalmente la definimos directamente desde la acción del lattice por medio de la integral de camino, imponiendo como condición obvia que cuando hagamos el límite al continuo se reproduzcan los resultados de la teoría en el continuo. Lo que haremos será coger un caso muy simple para poder introducir todos los conceptos del retículo y de la integral de camino sin perder mucho tiempo en detalles que se irán explicando a su debido momento. Empecemos por el correlador de dos puntos en el espacio Euclideo:

$$\langle \mathcal{O}_2(t) \mathcal{O}_1(0) \rangle_T = \frac{1}{Z_T} \text{tr} \left[e^{-(T-t)\hat{H}} \hat{\mathcal{O}}_2 e^{-t\hat{H}} \hat{\mathcal{O}}_1 \right], \quad (6)$$

en donde \mathcal{O}_i son operadores que crean o aniquilan estados del vacío con unos números cuánticos dados y Z_T es el factor de normalización:

$$Z_T = \text{tr} \left[e^{-T\hat{H}} \right] \quad (7)$$

Trabajando en la base de autoestados de $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, podemos evaluar la traza de (7), obteniendo:

$$Z_T = \sum_n \langle n | e^{-T\hat{H}} | n \rangle = \sum_n e^{-TE_n}, \quad (8)$$

y el correlador de los operadores:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_2(t) \mathcal{O}_1(0) \rangle_T &= \frac{1}{Z_T} \sum_{m,n} \langle m | e^{-(T-t)\hat{H}} \hat{\mathcal{O}}_2 | n \rangle \langle n | e^{-t\hat{H}} \hat{\mathcal{O}}_1 | m \rangle \\ &= \frac{1}{Z_T} \sum_{m,n} e^{-(T-t)E_m} \langle m | \hat{\mathcal{O}}_2 | n \rangle e^{-tE_n} \langle n | \hat{\mathcal{O}}_1 | m \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Podemos obtener entre ambas expresiones:

$$\langle \mathcal{O}_2(t) \mathcal{O}_1(0) \rangle_T = \frac{\sum_{m,n} \langle m | \hat{\mathcal{O}}_2 | n \rangle \langle n | \hat{\mathcal{O}}_1 | m \rangle e^{-t\Delta E_n} e^{-(T-t)\Delta E_m}}{1 + e^{-T\Delta E_1} + e^{-T\Delta E_2} + \dots}, \quad (10)$$

donde $\Delta E = E_n - E_0$ es la diferencia de energía entre estados excitados y el fundamental. Para terminar con los correladores, podemos estudiar el límite cuando $T \rightarrow \infty$, y asumiendo que la energía fundamental no es nula, lo que ocurrirá será que el denominador tienda a la unidad y por tanto tengamos:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathcal{O}_2(t) \mathcal{O}_1(0) \rangle_T = \sum_n \langle 0 | \hat{\mathcal{O}}_2 | n \rangle \langle n | \hat{\mathcal{O}}_1 | 0 \rangle e^{-tE_n}. \quad (11)$$

que como veremos más adelante jugará un papel crucial en nuestro trabajo.

Por otra parte, es necesario introducir, aunque sea de forma muy breve, el factor Z que aparece para normalizar el correlador. Si trabajamos en la base canónica de cuantización en la que se impone $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ y $p = -i \frac{d}{dx}$, el factor Z tiene una expresión como la que sigue:

$$Z_T^\epsilon = C^{N_T} \int dx_0 \dots dx_{N_T-1} \exp \left(-\epsilon \sum_{j=0}^{N_T-1} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 + U(x_j) \right) \right), \quad (12)$$

donde imponemos condiciones periódicas $x_{N_t} \equiv x_0$. En (12) encontramos un factor ϵ que aparece a causa de separar el tiempo en trozos más pequeños, y se relaciona con el tiempo Euclideo como $T = \epsilon N_T$, es decir, multiplicar cada fragmento temporal por el número total de fragmentos nos

devuelve el tiempo total. De esta expresión se puede deducir a simple vista lo siguiente:

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} = \dot{x}(t) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{con} \quad t = j\epsilon, \quad (13)$$

$$\epsilon \sum_{j=0}^{N_T-1} \dots = \int_0^T dt \dots + \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{con} \quad T = N_T \epsilon. \quad (14)$$

Y entonces gracias a eso tenemos:

$$\epsilon \sum_{j=0}^{N_T-1} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 + U(x_j) \right) = \int_0^T dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 + U(x(t)) \right) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (15)$$

en donde el lado derecho no es más que la acción Euclídea, que se obtiene de la acción típica S cambiando el tiempo real por imaginario y rotando el contorno de integración, por lo que $S = iS_E$. Con todo, hemos llegado a que el factor de normalización Z no es más que una expresión en la que dividimos el espacio Euclídeo T en una serie de trozos ϵ y que en cada paso temporal lo que hacemos es insertar una variable x_j que integramos de $-\infty$ a ∞ , pero como integramos para todos los posibles valores de x_j y cada conjunto de $\{x_j\}$ se puede interpretar como un camino, lo único que hacemos es evaluar a todos los caminos posibles.

Para continuar con nuestra introducción, una vez hemos visto estos términos principales del trabajo, hemos de ver las expresiones que se obtienen cuando se cuantiza la teoría a partir de aplicar la integral de camino a las distintas variables de los campos clásicos y no por medio de la cuantización canónica. Aquí, veremos lo más importante, sin entrar en detalles al ser un cálculo excesivamente largo para este trabajo. Además, hemos de saber que, todo lo introducido debe respetar que cuando $T \rightarrow \infty$ siempre se debe volver a obtener (11). Las expresiones de los correladores son de la forma:

$$\langle \mathcal{O}_2(t) \mathcal{O}_1(0) \rangle_T = \frac{1}{Z_T} \int \mathcal{D}[\Phi] e^{-S_E[\Phi]} \mathcal{O}_2[\Phi(., nt)] \mathcal{O}_1[\Phi(., 0)] \quad (16)$$

y la función de normalización:

$$Z_T = \int \mathcal{D}[\Phi] e^{-S_E[\Phi]}, \quad \text{con} \quad \mathcal{D}[\Phi] = \prod_{n \in \Lambda} d\Phi(n) \quad (17)$$

siendo este término $\mathcal{D}[\Phi]$ el producto de todas las variables de integración de los distintos campos de los n puntos que existen en el retículo Λ .

En resumen, los pasos a seguir para obtener esto son simples: empezamos sustituyendo el espacio continuo 4D Euclídeo por un retículo de espaciado a , con grados de libertad equivalentes al número de campos que existan; luego cuantizamos la acción Euclídea de modo que cuando tendamos $a \rightarrow 0$ se recupere el resultado del continuo; y por último acabamos sustituyendo los campos clásicos por funcionales mediante la sustitución de dichos campos por las variables clásicas del retículo.

Por último, para concluir con este apartado hemos de irnos a QCD y hablar de los campos de dicha teoría. Como es conocido, estos deben formar parte del grupo $SU(3)$. Si introducimos un fermión en el retículo de forma *naive*, surge el problema de que los términos de la acción de estos que incluyen la derivada discretizada no son invariables gauge. Por ello, es necesario introducir un campo $U_\mu(n)$ con una dirección μ que se transforme como:

$$U_\mu(n) \rightarrow U'_\mu(n) = \Omega(n) U_\mu(n) \Omega(n + \hat{\mu})^\dagger \quad \text{con} \quad \Omega(n) \in SU(3). \quad (18)$$

Estos elementos de matriz están orientados, como es lógico al tener una dirección, y están ligados al link del lattice en la dirección en la que apuntan. Con todo, la importancia de estos campos gauge radica en que cuando trabajemos en QCD serán las variables fundamentales sobre las que realizaremos nuestra integral de camino. Por tanto, en resumen, las expresiones que tendremos de forma genérica al trabajar en QCD:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} \mathcal{O}[U] \quad \text{con} \quad Z = \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]}. \quad (19)$$

y si incluimos fermiones genéricos (hablaremos más en detalle de esto en el próximo punto), el propagador de un mesón formado por dos quarks será:

$$\langle O_T(n) \bar{O}_T(m) \rangle = -\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} \det[D_u] \det[D_d] \times \text{tr} [\Gamma D_u^{-1}(n|m) \Gamma D_d^{-1}(m|n)], \quad (20)$$

$$Z = \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} \det[D_u] \det[D_d]. \quad (21)$$

donde los determinantes y las trazas de los operadores de Dirac para los quarks u y d aparecen como consecuencia de calcular la parte fermiónica del valor esperado del operador, debido a las reglas de integración para variables de Grassmann (nuevamente esto es solo una introducción, todo el desarrollo se puede seguir en el capítulo 6 de [13]).

3.1 Fermiones staggered y de Wilson

Cuando intentamos discretizar la acción de Dirac para describir los fermiones, obtenemos:

$$S_L^{\text{naive}} \rightarrow \frac{1}{2a} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}_n \gamma_\mu U_\mu(n) \psi_{n+\hat{\mu}} - \bar{\psi}_n \gamma_\mu U_\mu(n - \hat{\mu})^\dagger \psi_{n-\hat{\mu}}] + m \sum_n \bar{\psi}_n \psi_n. \quad (22)$$

donde encontramos la diferencia con la acción clásica por el término $\frac{1}{2a}(\psi_{n+\hat{\mu}} - \psi_{n-\hat{\mu}})$, que se corresponde con la derivada definida en el retículo; y con $U_\mu(n)$ y $U_\mu(n - \hat{\mu})^\dagger$, que son los links que nos permiten conectar los distintos vecinos del retículo. A partir de ello, se construye el propagador libre:

$$\frac{1}{a} S(p) = (i\gamma_\mu \sin p_\mu a + ma)^{-1} = \frac{-i\gamma_\mu \sin p_\mu a + ma}{\sum_\mu \sin^2 p_\mu a + m^2 a^2}. \quad (23)$$

Y en este es donde debemos detenernos un poco, sobre todo en el momento 4-dimensional p_μ , el cual va desde $-\pi/a$ hasta π/a . Como es sabido, cuando uno trabaja con teorías cuánticas de campo en el continuo, los modos del fermión están definidos como singularidades en el propagador, siendo 4 que se juntan en el espinor de Dirac. No obstante, en el caso del retículo, estos modos aparecen degenerados, pues los tenemos tanto en $p = (0, 0, 0, 0)$, $ap = (\pi, 0, 0, 0)$, $ap = (0, \pi, 0, 0)$, ..., $ap = (\pi, \pi, \pi, \pi)$. De este modo, cuando a tiende a 0 el propagador es dominado por los lugares donde el denominador es pequeño, pero en el caso del retículo resultan ser 16, es decir, en todas las esquinas de la zona de Brillouin, resultando este ser el problema del *doubling*, es decir, el problema de que aparezcan fermiones que son efectos del lattice y no físicos. Existen muchas propuestas para solucionar este problema, aunque todas interfieren con la simetría quiral, pues atendiendo al teorema de Nielsen–Ninomiya [18], vemos que si tenemos una formulación local, hermitica y con simetría translacional, mantener la simetría quiral siempre va a introducir *doubling*.

Una de estas soluciones son los fermiones de Wilson, los cuales se construyen añadiendo a la acción

del fermión un término de segunda derivada:

$$S^W = r\bar{\psi}D_W\psi = -\frac{r}{2a}\sum_{n,\mu}\bar{\psi}_n(\psi_{n+\hat{\mu}} - 2\psi_n + \psi_{n-\hat{\mu}}) \simeq -\frac{ar}{2}\bar{\psi}D^2\psi, \quad (24)$$

lo que lleva a que el propagador tenga la forma:

$$\frac{1}{a}S(p) = \frac{-i\gamma_\mu \sin(p_\mu a) + ma - r\sum_\mu(\cos(p_\mu a) - 1)}{\sum_\mu \sin^2(p_\mu a) + \left[ma - r\sum_\mu(\cos(p_\mu a) - 1)\right]^2}. \quad (25)$$

El nuevo término no contribuye a $p_\mu = 0$, pero para momentos $p_\mu = \pi/a$ añade una contribución $2/a$. Este término actúa como un término de masa y hace que los *doublers* tengan un término de masa $m+2\ell/a$, donde ℓ es el número de componentes con momento $p_\mu = \pi/a$. Así, esto permite que cuando estudiemos el límite al continuo $a \rightarrow 0$, los *doublers* se hagan muy pesados y se desacoplen de la teoría, con lo que nos quedamos solo con los fermiones físicos. Sin embargo, esta solución, como anticipamos antes, rompe de forma explícita la simetría quiral.

Otra solución bastante óptima es la de trabajar con fermiones *staggered*, que se obtienen a partir de la transformación local $\psi_n \rightarrow \Omega_n \psi'_n$ y $\bar{\psi}_n \rightarrow \bar{\psi}'_n \Omega_n^\dagger$, en donde $\Omega_n = \gamma_0^{n_0} \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3}$. Con todo, usando:

$$\Omega_n^\dagger \gamma_\mu \Omega_{n+\hat{\mu}} = (-1)^{n_0+n_1+\dots+n_{\mu-1}} \equiv \alpha_\mu(n), \quad (26)$$

podemos reconstruir la acción (22) como:

$$S = \frac{1}{2a}\sum_{n,\mu}\bar{\psi}'_n \alpha_\mu(n) [U_\mu(n)\psi'_{n+\hat{\mu}} - U_\mu(n-\hat{\mu})^\dagger \psi'_{n-\hat{\mu}}] + m\sum_n \bar{\psi}'_n \psi'_n. \quad (27)$$

y aunque ψ' sea un espinor de 4 componentes, todas ellas son independientes y actúan de forma idéntica, así que podemos reducir la multiplicidad de nuestros fermiones *naive* simplemente descartando todas menos una componente de Dirac de ψ' . Así, la componente resultante χ_n es el fermión *staggered* con la acción de una componente:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a}\bar{\chi}M(U)\chi \\ &= \frac{1}{2a}\sum_{n,\mu}\bar{\chi}_n \alpha_\mu(n) [U_\mu(n)\chi_{n+\hat{\mu}} - U_\mu(n-\hat{\mu})^\dagger \chi_{n-\hat{\mu}}] + m\sum_n \bar{\chi}_n \chi_n. \end{aligned} \quad (28)$$

Por ende, dependiendo de la dirección espacial en la que nos desplazemos desde nuestro fermión *staggered* tendremos un signo u otro, lo que hará que las funciones de correlación asociadas a estos fermiones sean oscilantes, algo que deberemos tener en cuenta a la hora de realizar las simulaciones y calcular los resultados.

Con todo, nosotros usaremos ambas regularizaciones para los fermiones, los *staggered* para los quarks ligeros y la de Wilson para trabajar con los quarks pesados b y c .

3.2 Mejoras a QCD en el lattice

Como se ha ido viendo, cuando pasamos al retículo hemos de discretizar todos los objetos con los que usualmente se trabaja en el continuo. En el retículo, la escala infrarroja está fijada por el tamaño L del retículo, y fijando $m_\pi L > 4$, con m_π la masa del pión, se consigue que los grados de libertad ligeros, como el propio pión, no sean modificados. Sin embargo, la escala del ultravioleta viene fijada por la mínima resolución del sistema, el espaciado a . Por ello, para poder resolver la propagación de los grados de libertad pesados, como puede ser el quark b , se necesitaría

que su masa estuviese lejos del límite $1/a$, lo que sustituyendo los valores físicos lleva a concluir que se necesitan retículos en los que L/a debe ser mucho mayor que 100 para poder mantener a raya al mismo tiempo los efectos del volumen finito y del espaciado. Para lidiar con ello se utilizan generalmente 2 teorías de campo efectivas: el programa de mejoras de Symanzik y la teoría efectiva de quarks pesados (HQET). Empezaremos estudiando el programa de mejoras de Symanzik, y para entenderlo partamos de la acción efectiva en la forma:

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \left(\mathcal{L}^{(0)}(x) + a\mathcal{L}^{(1)}(x) + a^2\mathcal{L}^{(2)}(x) + \dots \right). \quad (29)$$

en donde a es el espaciado del retículo que sirve para discretizar la expresión, $\mathcal{L}^{(0)}$ es la densidad lagrangiana estándar de QCD y los términos $\mathcal{L}^{(k)}$ con $k \geq 1$ son correcciones que aparecen por los productos de los campos de los quarks y de los gluones. Como es evidente, al tener a dimensiones de longitud, estos términos de correcciones han de tener dimensiones de $\text{longitud}^{-(4+k)}$. La idea, en general, es añadir términos que hagan que los términos de corrección desaparezcan hasta el orden que deseemos. En este caso, nos quedamos a orden $\mathcal{O}(a)$, que es la corrección dominante, por lo que solo necesitamos un término cancele esta. Así, con un poco de esfuerzo (se sale del objetivo de este trabajo, para más detalle véase [13]) este término $\mathcal{L}^{(1)}$ se puede cancelar en la regularización de Wilson para los fermiones escribiendo la acción como:

$$S_I = S_{\text{Wilson}} + c_{sw} a^5 \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \bar{\psi}(n) \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}(n) \psi(n). \quad (30)$$

en donde el coeficiente real c_{sw} es el coeficiente Sheikholeslami–Wohlert y $\hat{F}_{\mu\nu}$ ha de ser la forma discretizada del término correspondiente en $\mathcal{L}^{(1)}$. Este término se escribe en cada punto como una suma de plaquetas, que son los loops cerrados más pequeños que se pueden formar entre distintos puntos del retículo, con origen en dicho punto, formando un trébol, de ahí la denominación de *clover improvement*.

En este trabajo se utiliza el *tadpole improvement*. En teoría de perturbaciones del retículo, un link se puede expandir como:

$$U_\mu(x) = \exp[iagA_\mu(x)] \rightarrow 1 + iagA_\mu(x) - \frac{a^2 g^2 A_\mu(x)^2}{2} + \dots \quad (31)$$

Aquí vamos a detenernos un poco. Como es sabido, en una teoría continua aparecen divergencias UV que hacen necesaria una regularización. Sin embargo, cuando nos vamos al retículo, el propio espaciado a actúa como regularizador porque existe un corte natural en el espaciado del retículo. No obstante, cuando estudiamos los diagramas de Feynmann de la teoría, vemos que ciertas funciones de los vértices tienen una dependencia explícita con a , los cuales son los que hacen que desaparezcan estas divergencias UV, pero que, a su vez, causa que cuando nos vayamos al límite al continuo estos términos dependan también de la constante de acoplo g , haciendo aparecer diagramas de *tadpole*, que son diagramas en los que solo existe una línea externa y que aparecen por la parte de momento alto de los campos gauge. De este modo, como sus contribuciones son muy grandes, se hace necesario eliminarlos, para lo que se añade un factor de *tadpole* que parametriza la parte ultravioleta, es decir, sustituimos el link por su parte infrarroja:

$$U_\mu(x) \rightarrow u_0 \exp[iagA_\mu(x)] \rightarrow u_0 \left[1 + iagA_\mu(x) - \frac{a^2 g^2 A_\mu(x)^2}{2} + \dots \right] \quad (32)$$

de modo que aquí A_μ solo tiene términos IR.

Este término de corrección *tadpole* u_0 depende de los parámetros de la teoría y se puede obtener

mediante simulaciones. Comunmente se define mediante el valor esperado de las plaquetas:

$$u_0 = \left(\frac{1}{N} \langle \text{Tr} U_P \rangle \right)^{1/4}. \quad (33)$$

Con esto, sustituyendo los links por U_μ/u_0 , conseguimos reducir las renormalizaciones del retículo, además de ser un recurso que se utiliza para implementar el programa de mejoras de Symanzik, pues permite redefinir los coeficientes c_{SW} ya calculados por otros $c'_{SW} = c_{SW}/u_0$.

Por otro lado, tenemos el desarrollo que obtenemos gracias a aplicar HQET al retículo. En esto seremos más breves ya que los detalles son más complejos, pero como se puede ver en [11] y [15], una teoría efectiva para hadrones pesados que contenga $N_F - 1$ quark ligeros y un quark pesado con masa m puede ser obtenida realizando un desarrollo en $1/m$ de la acción de QCD en el continuo y de los campos, ya que cuando la masa del quark pesado es muy grande (tendiendo a infinito), se puede considerar que su movimiento es casi estático en comparación con los quarks ligeros, o bien, que los grados de libertad ligeros no pueden cambiar el momento del quark pesado. Así, discretizada para el retículo y realizado el desarrollo en términos de $1/m$, la acción del quark pesado tiene la forma:

$$\begin{aligned} S_{\text{HQET}} &= a^4 \sum_x \left\{ \mathcal{L}_{\text{stat}}(x) + \sum_{\nu=1}^n \mathcal{L}^{(\nu)}(x) \right\}, \\ \mathcal{L}_{\text{stat}}(x) &= \bar{\psi}_h(x) [\nabla_0^* + \delta m] \psi_h(x), \\ \mathcal{L}^{(\nu)}(x) &= \sum_i \omega_i^{(\nu)} \mathcal{L}_i^{(\nu)}(x), \end{aligned} \quad (34)$$

con ∇_μ^* siendo la derivada hacia atrás en el retículo, δm tiene dimensiones de masa y los campos compuestos $\mathcal{L}_i^{(\nu)}$ tienen dimensiones de masa a la $4 + \nu$. Además, para obtener los elementos de matriz que describen las interacciones electrodébiles, es necesario realizar este mismo desarrollo también a la corrientes y a las funciones de correlación (las expresiones nuevamente se pueden ver en [15], no son relevantes para nuestro trabajo). Lo importante es que cuando uno busca el valor esperado de un observable, lo que utiliza es:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int D[\varphi] O[\varphi] e^{-(S_{\text{rel}} + S_{\text{HQET}})}, \quad (35)$$

$$Z = \int D[\varphi] e^{-(S_{\text{rel}} + S_{\text{HQET}})}, \quad (36)$$

Pero aquí hemos de remarcar que el integrando de la teoría efectiva es desarrollado en términos de $1/m$, con las potencias de acuerdo a:

$$\omega_i^{(\nu)} = O\left(\frac{1}{m^\nu}\right), \quad \alpha_i^{(\nu)} = O\left(\frac{1}{m^\nu}\right). \quad (37)$$

con $\alpha_i^{(\nu)}$ siendo el parámetro usado para desarrollar la corriente. Por tanto, se reemplaza en (35) la acción por la expansión:

$$\begin{aligned} \exp\{-(S_{\text{rel}} + S_{\text{HQET}})\} &= \exp\left\{-\left(S_{\text{rel}} + a^4 \sum_x \mathcal{L}_{\text{stat}}(x)\right)\right\} \times \\ &\quad \left\{1 - a^4 \sum_x \mathcal{L}^{(1)}(x) + \frac{1}{2} \left[a^4 \sum_x \mathcal{L}^{(1)}(x)\right]^2 - a^4 \sum_x \mathcal{L}^{(2)}(x) + \dots\right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

lo que nos deja una lectura muy simple, que los observables solo dependen de la expansión $1/m$ cuando existen operadores locales o corrientes en dichos correladores. Así, cuando tomamos el límite al infinito, volvemos a recuperar la acción estática. De tal modo, con esta teoría se logra resolver de alguna manera el problema de que la masa del quark pesado sea mucho mayor que el inverso del espaciado del retículo. Sin embargo, al mezclar operadores de distintas dimensiones en la función de correlación, surge el problema de que los valores los coeficientes de la teoría efectiva han de ser hallados de forma no perturbativa.

Con todo, el procedimiento para mejorar los cálculos que usamos nosotros consiste en intercalar las mejoras del programa de Symanzik con las del HQET. La propiedad más importante de esto es que permite que los coeficientes c_{SW} puedan depender de forma explícita de la masa del quark pesado m_h . De tal forma, la acción relativista de los quarks pesados se interpola mediante términos que no dependen de la masa y términos del límite estático (masa infinita). En esta metodología se utiliza la densidad de la acción *clover* anisótropa:

$$\mathcal{L}_{\text{Fermilab}}(x) = a^4 \bar{\psi}(x) \left(m_0 + \gamma_0 D_0 + \zeta \vec{\gamma} \cdot \vec{D} - \frac{a}{2} D_0^2 - \frac{a}{2} \zeta (\vec{D})^2 + \frac{ia}{4} c_{SW} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \psi(x), \quad (39)$$

donde el parámetro de anisotropía ζ , el coeficiente *clover* c_{SW} y la masa m_0 se ajustan para que se reproduzcan las cantidades espectrales del mesón B (véase [10] y [16]). Además, en la acción de Fermilab presentada en (39), las simetrías de los quarks pesados emergen de forma natural, lo que permite que en la teoría efectiva de los quarks pesados se pueda estudiar de forma más precisa establecer hasta qué energías y momentos se han de realizar los cálculos (*cutoff*) para que la propagación de errores no sea insostenible. [21]

3.3 Simulaciones de Monte Carlo

Si recuperamos las expresiones de (19), es rápido caer en que estos cálculos son imposibles de hacer analíticamente cuando se tienen términos de interacción. Por ello, lo más apropiado es realizar simulaciones de Monte Carlo en el que se sustituye la integral por una media de los observables evaluado en N muestras distintas de las configuraciones de los campos gauge U_N distribuidas con probabilidad $\propto \exp(-S[U_N])$. La suma:

$$\langle \mathcal{O} \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{U_n} \mathcal{O}[U_n] \quad (40)$$

se debe realizar para un número suficiente de configuraciones generadas por el algoritmo de Monte Carlo. De tal modo, una vez generado un conjunto de configuraciones U_i , se puede calcular un observable relacionado con un operador \mathcal{O} como:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{O}[U_n], \quad (41)$$

siendo cada configuración distribuida con un peso acorde a la probabilidad:

$$dP(U) = \frac{e^{-S[U]} \mathcal{D}[U]}{\int \mathcal{D}[U] e^{-S[U]}}. \quad (42)$$

esta forma de generar configuraciones nos asegura que todas vendrán dadas por la distribución $e^{-S(U_N)}$, lo que permite no generar configuraciones con una acción despreciable y hace que el proceso sea mucho más óptimo, lo que se denomina *importance sampling*. Como es obvio, no hay

ordenador capaz de hacer tender N al infinito, por lo que en el caso real lo que obtendremos será un cierto valor central con un error asociado, que es el error que iremos mostrando a lo largo de todos los resultados. Para poder elegir esas configuraciones U_N se utiliza la cadena de Markov. Este procedimiento se basa en buscar una solución a la ecuación que establece que la probabilidad total de transicionar de un estado U a U' es la misma que la probabilidad de salir del estado U' . La solución más simple a esto, y la que se suele utilizar, denominada *balance detallado*, es imponer que la igualdad se cumpla término a término, es decir:

$$T(U'|U)P(U) = T(U|U')P(U'). \quad (43)$$

donde en la igualdad aparece el peso de que el sistema se encuentre en el estado U .

En general, para aplicar esto en el retículo, se aplica el algoritmo de *Metropolis*, el cual es un procedimiento muy sencillo. Primero, partiendo de una configuración gauge, se modifica un link $U_\mu(n)'$ de acuerdo a alguna elección simétrica de la probabilidad T_0 . Cuando modificamos un link, como trabajamos en 4D, estaremos modificando 6 plaquetas, por lo que solo debemos calcular el cambio de la acción en estos para tener el cambio total en el retículo. Para esto se debe realizar el producto de $U_\mu(n)$ con el resto de links que forman la plaqueta, lo que se llama el staple. Así, una vez se calcula la suma de los distintos staples y se tiene la variación de la acción del retículo, tenemos dos opciones: si la variación de $\exp(-\Delta S)$ es mayor que 1, directamente se acepta porque esto nos lleva a una configuración de mínima acción, mientras que si es menor que 1 lo que se hace es generar un número aleatorio r entre 0 y 1 que haga de probabilidad de Boltzman y se compara con la variación de la acción, siendo esta rechazada si $\exp(-\Delta S) \geq r$. Con todo, este procedimiento lo hemos de repetir hasta que nos encontremos en un estado de equilibrio y de mínima acción del retículo, en los que los cambios aceptados apenas modifiquen la acción.

Sin embargo, si recuperamos (20) y (42), vemos que si queremos incluir los fermiones en nuestro cálculo, lo que tendremos es $Z^{-1}e^{-S_G[U]} \det[D_u] \det[D_d]$ como distribución de pesos de los campos gauge. Esto es un cambio no trivial porque modificar un link deja de ser un cambio local al obligar a calcular de nuevo todo el determinante, lo cual resulta un cálculo extremadamente complejo al estar tratando con matrices con $12|\Lambda|$ filas y columnas, con $|\Lambda|$ el número de puntos en el retículo. Cuando se empezó a trabajar en el retículo, se utilizaba principalmente la *aproximación quenched*, que no es más que tomar estos determinantes como la unidad y trabajar con el propagador del mesón sin estos, es decir, construir las cadenas de Markov como se hace con teorías gauge puras. No obstante, en nuestro caso trabajamos en un cálculo *unquenched*, lo que quiere decir que hemos de calcular las contribuciones de los determinantes. Esto hace que para implementar lo mencionado en este punto sea necesario trabajar con métodos algo más complejos que el de *Metropolis*, más concretamente, en el desarrollo de este trabajo se utilizó el denominado *Hybrid Monte Carlo*, el cual combina el ya explicado método de *Metropolis* con otro algoritmo denominado *Molecular Dynamics*. La idea de este se basa en potenciar el algoritmo de *Metropolis*, ya que en este vamos cambiando link a link y esto es muy costoso. Sin embargo, cambiar todos a la vez, como depende del volumen del retículo, haría que la probabilidad de aceptación fuese muy baja, por lo que utilizamos el método *Molecular Dynamics* para que este cambio en los links no sea aleatorio del todo.

En este segundo método, la idea de partida es, basándonos en la analogía entre la integral Gaussiana de los fermiones y los bosones, sustituir los fermiones por *pseudo-fermiones*, que son bosones con el mismo número de grados de libertad, pero que permiten obtener resultados equivalentes a los obtenidos mediante la integral de Grassmann usada para los fermiones pero con la diferencia de que el determinante ahora aparece en el denominador. Con ello, el primer paso es generar el campo de *pseudo-fermiones* $\phi = D\chi$ con χ un campo vectorial complejo distribuido con probabilidad Gaussiana $\exp(-\chi^\dagger \chi)$. Tras esto, para una configuración gauge U_0 se debe generar un momento inicial P_0 , distribuido nuevamente de forma Gaussiana por $\exp(-tr[P^2])$. Para empezar a trabajar,

crearemos un paso inicial de la forma $P_{\frac{1}{2}} = P_0 - \frac{\epsilon}{2}F[U, \phi]$, donde

$$F[U, \phi] = \sum_{i=1}^8 T_i \nabla^{(i)} (S_G[U] + \phi^\dagger (DD^\dagger)^{-1} \phi) \in su(3)$$

es la fuerza motriz, que es un elemento de $su(3)$, y T_i son los generadores del grupo, y luego evolucionaremos el sistema mediante pasos:

$$U_k = \exp \left(i\epsilon P_{k-\frac{1}{2}} \right) U_{k-1}, \quad P_{k+\frac{1}{2}} = P_{k-\frac{1}{2}} - \epsilon F[U, \phi] \Big|_{U_k}. \quad (44)$$

Con ello, conseguimos evolucionar todos los links de una trayectoria de forma sencilla modificando el momento de cada partícula del retículo teniendo en cuenta todas las contribuciones (la pura gauge y la de los fermiones). Tras esto, solo nos queda aplicar un paso de *Metrópolis*, es decir, ver si aceptamos el cambio en la acción que produce la modificación de los links o no, mediante:

$$T_A(P', Q'|P, Q) = \min \left(1, \frac{\exp(-H[P', Q'])}{\exp(-H[P, Q])} \right). \quad (45)$$

Una vez realizado todo esto, ya solo hemos de evaluar los observables en nuestra configuración en el equilibrio y ya podremos ponderarlo con el resto de resultados que obtengamos de la simulación de Monte Carlo y realizar el promedio del observable que queramos estudiar. Evidentemente, todo lo contado es un resumen muy breve de la metodología usada en las simulaciones, si el lector está interesado nuevamente puede revisar [13] para ver un desarrollo con todo tipo de detalles.

4 Desarrollo teórico del proceso $B \rightarrow D\ell\nu$

4.1 Factores de forma

En este trabajo estudiamos el proceso $B \rightarrow D\ell\nu$, en donde la interacción hadrónica está determinada por el elemento de la matriz de transición de la corriente vectorial $\mathcal{V} = \bar{c}\gamma^\mu b$, que se puede descomponer en términos de los factores de forma vectorial y escalar $f_+(q^2)$ y $f_0(q^2)$ de la siguiente manera:

$$\langle D(p_D) | V^\mu | B(p_B) \rangle = f_+(q^2) \left[(p_B + p_D)^\mu - \frac{M_B^2 - M_D^2}{q^2} q^\mu \right] + f_0(q^2) \frac{M_B^2 - M_D^2}{q^2} q^\mu \quad (46)$$

donde p_B y p_D son los momentos del mesón B y D, M_B y M_D sus respectivas masas y $q = p_B - p_D$ es el momento transferido de los mesones a los leptones. Por otra parte, el ratio de decaimiento en la aproximación de que la masa de los leptones (sirve para electrón y el muón) es mucho menor que la de los mesones B y D es:

$$\frac{d\Gamma}{dw} (\bar{B} \rightarrow D(\bar{\nu}\tau)) = |\eta_{EW}|^2 \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 M_B^5}{48\pi^3} (w^2 - 1)^{3/2} r^3 (1+r)^2 \mathcal{G}(w)^2 \quad (47)$$

donde $|\eta_{EW}|^2$ hace cuenta de las correcciones electrodébiles, G_F es la constante de decaimiento débil de Fermi, $|V_{cb}|$ es nuestro elemento de matriz buscado, $w = v \cdot v'$ es el parámetro de recoil, $v = p_B/M_B$ y $v' = p_D/M_D$ son las velocidades de nuestros mesones y $\mathcal{G}(w)$ es la amplitud de desintegración y se relaciona con nuestros factores de forma, más concretamente con f_+ , mediante:

$$f_+(w)^2 = \frac{(1+r)^2}{4r} \mathcal{G}(w)^2 \quad (48)$$

siendo r el cociente entre las masas de los mesones $r = M_D/M_B = 0.354$. Aquí vale la pena hacer un aparte para matizar que en realidad nosotros no calculamos el elemento V_{cb} de forma directa, sino que nuestro objetivo es calcular la amplitud de desintegración, a partir de los factores de forma, y junto a los datos experimentales del ratio de decaimiento diferencial, que se pueden obtener del detector BABAR [2], obtener el elemento V_{cb} a partir de la expresión (47). Por otra parte, existe otra parametrización que es la realmente relevante para nosotros como veremos en siguientes puntos. Esta es mucho más natural dentro de la teoría efectiva de quarks pesados (HQET) y en la 'heavy-light meson chiral perturbation theory':

$$\frac{\langle D(p_D) | V^\mu | B(p_B) \rangle}{\sqrt{M_D M_B}} = h_+(w)(v + v')^\mu + h_-(w)(v - v')^\mu \quad (49)$$

y que evidentemente se pueden relacionar con los factores de forma f_+ y f_0 previamente definidos mediante:

$$f_+(q^2) = \frac{1}{2\sqrt{r}} [(1+r)h_+(w) - (1-r)h_-(w)], \quad (50)$$

$$f_0(q^2) = \sqrt{r} \left[\frac{w+1}{1+r} h_+(w) - \frac{w-1}{1-r} h_-(w) \right], \quad (51)$$

siendo aquí $q^2 = M_D^2 + M_B^2 - 2wM_B M_D$ y $\mathcal{G}(w) = h_+(w) - (\frac{1-r}{1+r})h_-(w)$.

Una vez definido todo lo relativo a los factores de forma que buscamos, debemos ver cómo los podemos relacionar con el retículo. Lo primero es definir la corriente vectorial para la transición de un quark x a uno y :

$$V_{xy}^\mu = \bar{\Psi}_x \gamma^\mu \Psi_y \text{ con } \Psi = (1 + d_1 \gamma \cdot \mathbf{D}_{\text{lat}}) \psi \quad (52)$$

siendo Ψ el campo rotado introducido en ([16]), ψ es el campo del quark pesado en la acción, \mathbf{D}_{lat} es un operador diferencial covariante del vecino más cercano y d_1 es el factor de mejora del *tadpole*, con lo que se consigue que la corriente vectorial esté mejorada a tree-level.

Dicho campo rotado se introduce al intentar desarrollar el formalismo de llevar toda la física de sabor al lattice, siendo dicho desarrollo la introducción de los operadores de dos y cuatro quarks al Hamiltoniano electrodébil, que se puede considerar la primera corrección a QCD. Resumidamente, cuando se intenta desarrollar este formalismo, uno se encuentra que estos operadores introducidos dependen tanto de la masa del quark *bare* am_0 como de la masa física m_q . Cuando ese término $am_0 \gg 1$, lo que tenemos es que $d_1 \approx 1/(2m_q)$, por lo que la contribución de $1 + d_1 \gamma \cdot \mathbf{D}_{\text{lat}}$ se hace esencial para poder tener esa corrección $1/m_q$ a los elementos de matriz de la corriente \mathcal{J}_Γ con la que trabajemos.

Con esto, ahora falta saber la relación que existe entre la corriente del retículo J_{xy}^μ y su equivalente en el continuo \mathcal{J}_{xy}^μ . Para dicha relación se emplean los factores de renormalización:

$$\mathcal{V}_{xy}^\mu \doteq Z_{J_{xy}^\mu} V_{xy}^\mu \quad (53)$$

en donde el \doteq indica que los elementos de matrices son iguales a ambos lados de la igualdad (no confundir esta Z con la que introdujimos al comienzo del trabajo, esta es un factor de renormalización para asegurar que nuestras corrientes tengan los mismos elementos de matriz en el continuo que las corrientes físicas). Sin embargo, estos términos tienen muchas dependencias no perturbativas, por lo que empleamos la técnica denominada *renormalización mayormente no perturbativa-mNPR*, lo que nos permite eliminar dichas dependencias de los factores de renormalización y que consiste en definir una serie de *ratios* entre las distintas corrientes de la forma:

$$\rho_{V^\mu}^2 = \frac{Z_{V_{cb}^\mu} Z_{V_{bc}^\mu}}{Z_{V_{cc}^4} Z_{V_{bb}^4}}. \quad (54)$$

La utilidad del mNPR radica en el hecho de que al tomar los ratios apropiados de los correladores a tres puntos se logra que las contribuciones no perturbativas a la renormalización de las corrientes se cancelen, pues están todas recogidas en la diagonal de los factores de renormalización $Z_{xx}^{V^4}$. Además, trabajar con estos ratios nos permite reducir las fluctuaciones estadísticas típicas de trabajar con los correladores.

Así, para poder calcular los factores de forma h_+ y h_- para cualquier valor del parámetro de recoil necesitamos tanto los elementos de matriz de las corrientes vectoriales espaciales como temporales V^4 y \mathbf{V} . Para ello, lo que hacemos es establecer nuestro sistema de referencia de modo que tengamos al mesón B en reposo y que sea el mesón D el que se mueva, llevando un momento \mathbf{p} y del cual depende el recoil anteriormente definido w . El primero de los ratios que definiremos será el único doble ratio que tenemos y que a su vez es el único en el que solo trabajamos para momento nulo:

$$R_+ = \frac{\langle D(0)|V_{cb}^4|B(0)\rangle\langle B(0)|V_{bc}^4|D(0)\rangle}{\langle D(0)|V_{cc}^4|D(0)\rangle\langle B(0)|V_{bb}^4|B(0)\rangle} \quad (55)$$

y luego los ratios simples:

$$Q_+(\mathbf{p}) \equiv \frac{\langle D(\mathbf{p})|V^4|B(0)\rangle}{\langle D(0)|V^4|B(0)\rangle}, \quad (56)$$

$$\mathbf{R}_-(\mathbf{p}) \equiv \frac{\langle D(\mathbf{p})|\mathbf{V}|B(0)\rangle}{\langle D(\mathbf{p})|V^4|B(0)\rangle}, \quad (57)$$

$$\mathbf{x}_f(\mathbf{p}) \equiv \frac{\langle D(\mathbf{p})|\mathbf{V}|D(0)\rangle}{\langle D(\mathbf{p})|V^4|D(0)\rangle}. \quad (58)$$

donde vemos que $Q_+(\mathbf{p})$ es el ratio que relaciona los elementos de matriz a recoil nulo y no nulo y que $\mathbf{x}_f(\mathbf{p})$ relaciona tanto en numerador como en denominador el estado de momento nulo con un estado de momento no nulo. Asimismo, este último ratio nos permite escribir la relación a partir de la cual podemos obtener el parámetro de recoil:

$$w = \frac{1 + x_f^2}{1 - x_f^2} \quad (59)$$

y a partir de todo esto, se pueden obtener los factores de forma:

$$h_+(w(\mathbf{p})) = \sqrt{\mathcal{R}_+} Q_+(\mathbf{p}) [1 - \mathcal{R}_-(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_f(\mathbf{p})], \quad (60)$$

$$h_-(w(\mathbf{p})) = \sqrt{\mathcal{R}_+} Q_+(\mathbf{p}) \left[1 - \frac{\mathcal{R}_-(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_f(\mathbf{p})}{\mathbf{x}_f(\mathbf{p})^2} \right], \quad (61)$$

4.2 Funciones de correlación a 2 y 3 puntos

Para poder calcular los factores de forma introducidos en el punto anterior, es necesario calcular los correladores a 2 y 3 puntos. Lo que haremos será usar operadores de interpolación $\mathcal{O}_{X_a}(\mathbf{p}, t)$ de momento espacial \mathbf{p} y tiempo t con $X \in \{B, D\}$ y $a \in \{1S, d\}$, siendo estos últimos los posibles smearing.

Aquí vamos a hacer un pequeño inciso para explicar el concepto de smearing. El objetivo de este procedimiento es aumentar el solapamiento de nuestro operador con el estado que realmente queremos construir en el retículo, eliminando en la medida de lo posible otros estados irrelevantes que poseen los mismos números cuánticos. Para ello, lo que se hace es superponer en un punto \mathbf{n}_0

los distintos campos que se encontraban en un punto del entorno cercano \mathbf{n}_i mediante:

$$\psi_k^{(f')}(\mathbf{n}_0, n_t)_{\alpha_0} \equiv \sum_{n_2} S_k^{(n_0, \alpha_0, a_0)}(\mathbf{n}_2)_{\alpha_2}^* \psi^{(f')}(\mathbf{n}_2, n_t)_{\alpha_2}, \quad (62)$$

$$\bar{\psi}_i^{(f)}(\mathbf{n}_0, n_t)_{\alpha_1} \equiv \sum_{n_1} S_i^{(n_0, \alpha_0, a_0)}(\mathbf{n}_1)_{\alpha_1} \bar{\psi}^{(f)}(\mathbf{n}_1, n_t)_{\alpha_1}. \quad (63)$$

En este trabajo utilizaremos dos posibles smearing, que aparecerán en el operador $\mathcal{O}_{X_a}(\mathbf{p}, t)$ como una función S [3]. El smearing d simplemente representa una función delta en la fuente, mientras que el smearing $1S$ será la función $S(x, y)$, que representa una fuente con smearing (en el gauge de Coulomb):

$$S(x, y) = \delta_{x_4 y_4} S(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (64)$$

en donde $S(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ es la solución 1S del potencial de Richardson para los sistemas del quarkonium [20] y que se obtiene escalando la función de onda radial de Richardson a unidades del retículo, interpolándola a los puntos del retículo y posteriormente utilizándola como fuente espacial para los propagadores de los quark pesados. En realidad, usaremos 3 posibles combinaciones de los smearing: 1S-1S, 1S-d y d-d, representando cada uno de ellos el smearing en el *source* y en el *sink*. Con todo, los correladores entonces se pueden expresar en términos de los elementos de matriz de los operadores como:

$$C^{2pt, X_a \rightarrow X_b}(\mathbf{p}, t) = \langle \mathcal{O}_{X_b}^\dagger(\mathbf{p}, 0) \mathcal{O}_{X_a}(\mathbf{p}, t) \rangle, \quad (65)$$

$$C_\mu^{3pt, X_a \rightarrow Y_b}(\mathbf{p}, t) = \langle \mathcal{O}_{Y_b}^\dagger(-\mathbf{p}, 0) V^\mu(\mathbf{p}, t) \mathcal{O}_{X_a}(0, T) \rangle. \quad (66)$$

en donde T es la separación temporal entre los mesones B y D . Y estos operadores se pueden expresar con la forma:

$$\sqrt{\frac{Z_{X,n}}{2E_n}} = \langle 0 | \mathcal{O}_X | n \rangle \quad (67)$$

Por lo que sustituyendo en la expresiones de los correladores podemos obtener:

$$C^{2pt, X_a \rightarrow X_b}(\mathbf{p}, t) = \sum_n s_n(t) \frac{\sqrt{Z_{X_a,n}(\mathbf{p}) Z_{X_b,n}(\mathbf{p})}}{2E_n(\mathbf{p})} [\exp(-E_n(\mathbf{p})t) + \exp(-E_n(\mathbf{p})(N_t - t))] \quad (68)$$

en donde hay tanto términos no oscilantes con $s_n(t) = 1$ o fermiones staggered de paridad opuesta que son términos oscilantes $s_n(t) = -(-1)^t$, debido a lo visto para hallar la acción (28), N_t es el tamaño del lattice temporal y $Z_{X_a,n}$ es el factor de solapamiento. Este tipo de fit se denomina N+N, pues indica cuántos estados oscilantes y no oscilantes se añaden al fit. En nuestro trabajo estudiaremos los casos 2+2 y 3+3.

Y por otro lado, la función de correlación a 3 puntos:

$$\begin{aligned} C_\mu^{3pt, X_a \rightarrow Y_b}(\mathbf{p}, t) &= \sum_{n,m} s_n(t) s_m(T-t) \sqrt{Z_{Y_b,n}(\mathbf{p})} \frac{e^{-E_n(\mathbf{p})t}}{\sqrt{2E_n(\mathbf{p})}} \langle Y_b, n(\mathbf{p}) | V^\mu | X_a, m(\mathbf{0}) \rangle \\ &\times \frac{e^{-M_m(T-t)}}{\sqrt{2M_m}} \sqrt{Z_{X_a,m}(\mathbf{0})}, \end{aligned} \quad (69)$$

Para entender un poco la motivación de los pasos que tomaremos en el desarrollo, vamos a quedarnos con la forma funcional de este correlador a 3 puntos (69):

$$C^{X \rightarrow Y}(0, t, T) = \sum_{k=0} \sum_{\ell=0} (-1)^{kt} (-1)^{\ell(T-t)} A_{k\ell} e^{-m_X^{(k)} t} e^{-m_Y^{(\ell)} (T-t)}. \quad (70)$$

En esta expresión es fácil ver que cuando k y ℓ son impares, por cada rebanada temporal que avancemos los estados excitados cambiarán de signo, y aunque estén suprimidas de forma exponencial, los compañeros de paridad de nuestros mesones ligeros no son mucho más pesados que en el estado fundamental, por lo que estas oscilaciones pueden ser realmente significativas en las distancias *source-sink* típicas en las que trabajaremos y hemos de tratar de corregirlas. Para ello, vamos a desarrollar la ecuación (70):

$$\begin{aligned} C^{X \rightarrow Y}(0, t, T) &= A_{00}^{X \rightarrow Y} e^{-m_X t - m_Y (T-t)} + (-1)^{T-t} A_{01}^{X \rightarrow Y} e^{-m_X t - m'_Y (T-t)} \\ &\quad + (-1)^t A_{10}^{X \rightarrow Y} e^{-m'_X t - m_Y (T-t)} + (-1)^T A_{11}^{X \rightarrow Y} e^{-m'_X t - m'_Y (T-t)} + \dots \\ &= A_{00}^{X \rightarrow Y} e^{-m_X t - m_Y (T-t)} [1 + c^{X \rightarrow Y}(0, t, T) + \dots], \end{aligned}$$

en donde hemos sacado en la última línea el estado fundamental y la dependencia exponencial y hemos definido:

$$\begin{aligned} c^{X \rightarrow Y}(0, t, T) &\equiv \frac{A_{01}^{X \rightarrow Y}}{A_{00}^{X \rightarrow Y}} (-1)^{T-t} e^{-\Delta m_Y (T-t)} + \frac{A_{10}^{X \rightarrow Y}}{A_{00}^{X \rightarrow Y}} (-1)^t e^{-\Delta m_X t} \\ &\quad + \frac{A_{11}^{X \rightarrow Y}}{A_{00}^{X \rightarrow Y}} (-1)^T e^{-\Delta m_X t - \Delta m_Y (T-t)}, \end{aligned}$$

y $\Delta m_{X,Y} = m'_{X,Y} - m_{X,Y}$ es la diferencia entre las masas del estado de paridad deseada de menor energía y el estado de paridad incorrecta de menor energía. Nótese que tanto el primer como el segundo término cambian de signo a medida que el operador varía a lo largo del tiempo, mientras que el tercero solo cambia de signo cuando se modifica la distancia temporal T *source-sink*. Por ende, al no ser visible de forma clara su variación con t en los resultados que obtengamos, este será el término que buscaremos suprimir. Para ello, realizaremos una media del tipo:

$$\overline{C}^{X \rightarrow Y}(0, t, T) \equiv \frac{1}{2} C^{X \rightarrow Y}(0, t, T) + \frac{1}{4} C^{X \rightarrow Y}(0, t, T+1) + \frac{1}{4} C^{X \rightarrow Y}(0, t+1, T+1). \quad (71)$$

que, como se puede ver en [8], actúa de forma equivalente a un *smoothing* que reduce la amplitud de los estados oscilantes.

Con todo, podemos ya estudiar la forma de los distintos ratios, empezando por R_+

$$R_+ = \frac{\langle D(0) | V_{cb}^4 | B(0) \rangle \langle B(0) | V_{bc}^4 | D(0) \rangle}{\langle D(0) | V_{cc}^4 | D(0) \rangle \langle B(0) | V_{bb}^4 | B(0) \rangle} = \frac{\langle \mathcal{O}_D(0) | V_{cb}^4 | \mathcal{O}_B(0) \rangle \langle \mathcal{O}_B(0) | V_{bc}^4 | \mathcal{O}_D(0) \rangle}{\langle \mathcal{O}_D(0) | V_{cc}^4 | \mathcal{O}_D(0) \rangle \langle \mathcal{O}_B(0) | V_{bb}^4 | \mathcal{O}_B(0) \rangle} \quad (72)$$

donde V_{xy}^μ tienen la forma vista en (52). Esto lo podemos sustituir por la expresión de las funciones de correlación a 3 puntos vista en (69), obteniendo:

$$R_{+,b}(t, T) = \frac{C_4^{3pt, B, 1S \rightarrow Db}(0, t, T) C_4^{3pt, Db \rightarrow B, 1S}(0, t, T)}{C_4^{3pt, Db \rightarrow Db}(0, t, T) C_4^{3pt, B, 1S \rightarrow B, 1S}(0, t, T)}. \quad (73)$$

Aquí ya podemos detenernos un poco, pues podemos ver que la expresión a la que llegamos del tiempo de inserción t , del tiempo de *sink* T y del operador de interpolación del mesón D denotado por b , aunque estas dependencias, al surgir de los estados oscilantes podemos suprimirlas mediante la media obtenida en (71):

$$\overline{R}_{+,b}(t, T) \equiv \frac{1}{2} R_{+,b}(t, T) + \frac{1}{4} R_{+,b}(t, T+1) + \frac{1}{4} R_{+,b}(t+1, T+1). \quad (74)$$

por lo que podemos expresar todo como $R_{+,b}(t, T) \rightarrow R_+$ ya que para t y $T-t$ grandes las contribuciones de los estados excitados son despreciables.

Con todo, en general las contribuciones dominantes vienen del primer estado excitado de los mesones B y D , las cuales para t y $T - t$ grandes decaen como $\exp[-\Delta M t]$ y $\exp[-\Delta M(T - t)]$, con ΔM siendo la diferencia de masa entre el primer estado excitado (no oscilante) y el estado fundamental de los mesones con los que trabajamos ($M = B, D$). De tal forma, como ambas son pequeñas, para poder hacer un fit al ratio usaremos la siguiente aproximación:

$$R_{+,b}(t, T) \approx R_+ + A_{R_{+,b}} \exp(-\Delta M_D t) + B_{R_{+,b}} \exp[-\Delta M_B(T - t)] + C_{R_{+,b}} \exp(-\Delta M_B t) + D_{R_{+,b}} \exp[-\Delta M_D(T - t)] \exp(\Delta M_B t) \quad (75)$$

Por último, es importante notar que $\Delta_M \approx \Delta_B$, por lo que para el fit nos quedaremos solo con R_+ , $A_{R_{+,b}}$ y $B_{R_{+,b}}$.

Con todo, por no llenar el documento de cálculos enormes sin relevancia, pues el procedimiento es el mismo al explicado en las anteriores líneas, concluiré este punto añadiendo las formas de las expresiones con las trabajaremos a lo largo de las simulaciones y del análisis posterior.

Para Q_+ nos encontramos que el ratio tendrá la forma:

$$Q_{+,b}(\mathbf{p}, t, T) \equiv \frac{C_4^{3pt,B,1S \rightarrow Db}(\mathbf{p}, t, T)}{C_4^{3pt,B,1S \rightarrow Db}(0, t, T)} \frac{E_D Z_{Db}(0)}{M_D Z_{Db}(\mathbf{p})} e^{(E_D - M_D)t}. \quad (76)$$

y para su correspondiente fit:

$$Q_{+,b}(\mathbf{p}, t, T) \approx Q_+(\mathbf{p}) \exp(\delta m t) + A_{Q_{+,b}}(\mathbf{p}) \exp(-\Delta E_D t) + B_{Q_{+,b}}(\mathbf{p}) \exp(-\Delta M_D t) + C_{Q_{+,b}}(\mathbf{p}) \exp[-\Delta M_B(T - t)]. \quad (77)$$

En este ratio aparece un factor δm que desaparece cuando el factor exponencial de (76) cancela la dependencia temporal en las funciones de correlación de 3 puntos.

Luego para R_- tenemos:

$$R_{-,b}^i(\mathbf{p}, t, T) = \frac{C_i^{3pt,B,1S \rightarrow Db}(\mathbf{p}, t, T)}{C_4^{3pt,B,1S \rightarrow Db}(\mathbf{p}, t, T)} \quad (78)$$

y su correspondiente expresión a la que ajustar:

$$R_{-,b}(\mathbf{p}, t, T) \approx R_-(\mathbf{p}) + A_{R_{-,b}}(\mathbf{p}) \exp(-\Delta E_D t) + B_{R_{-,b}}(\mathbf{p}) \exp[-\Delta M_B(T - t)]. \quad (79)$$

Y por último como es lógico, para \mathbf{x}_f tendremos la misma expresión que para \mathbf{R}_- pero cambiando Δ_B por Δ_D :

$$x_{f,b}^i(\mathbf{p}, t, T) = \frac{C_i^{3pt,Db \rightarrow Db}(\mathbf{p}, t, T)}{C_4^{3pt,Db \rightarrow Db}(\mathbf{p}, t, T)}, \quad (80)$$

y la relación a la que tendremos que realizar el fit:

$$\mathbf{x}_{f,b}(\mathbf{p}, t, T) \approx \mathbf{x}_f(\mathbf{p}) + \mathbf{A}_{R_{-,b}}(\mathbf{p}) \exp(-\Delta E_D t) + \mathbf{B}_{R_{-,b}}(\mathbf{p}) \exp[-\Delta M_B(T - t)]. \quad (81)$$

5 Desarrollo de las simulaciones

5.1 Parámetros de las simulaciones

Se han utilizado 7 ensembles de configuracions gauge distintas de 2+1+1 sabores de sea-quarks HISQ-generados por la colaboración MILC. Entre estos tenemos espaciados del retículo de $a = 0.057\text{fm}$, $a = 0.088\text{fm}$, $a = 0.12\text{fm}$ y $a = 0.15\text{fm}$ y distintos ratios de la masa del sea-quark ligero y sea-quark strange \hat{m}'/\hat{m}_s' , siendo todos los datos de los distintos ensembles recogidos en la tabla 1. A su vez, para cada ensemble realizamos simulaciones para distintos momentos en unidades

de $2\pi/L$, que son 6 para los ensembles Coarse-1, Coarse-2 y Coarse-Phys: (0,0,0), (1,0,0), (2,0,0), (3,0,0), (1,1,0) y (2,1,1); y 8 para los otros 4 ensembles, añadiendo a los anteriores el (4,0,0) y el (2,2,2). Mencionar que los momentos más grandes son los que tienen mayores errores estadísticos. Para generar las funciones de correlación a 3 puntos, lo que hacemos es fijar un tiempo de sink T entre los mesones B y D, y lo que vamos variando es la inserción t de la corriente vectorial.

	$a(\text{fm})$	\hat{m}'/\hat{m}_s'	Lattice size ($V \times T$)	Configs	u_0
MediumCoarse	0.15	0.0024/0.0673	$32^3 \times 48$	3630	0.8203
Coarse-1	0.12	0.0051/0.0507	$32^3 \times 64$	1000	0.8350
Coarse-2	0.12	0.0102/0.0509	$24^3 \times 64$	1053	0.8350
Coarse-Phys	0.12	0.0525/0.6382	$48^3 \times 64$	986	0.8350
Fine-1	0.088	0.0036/0.0363	$48^3 \times 96$	1017	0.8527
Fine-Phys	0.088	0.0012/0.0363	$64^3 \times 96$	1535	0.8527
SuperFine	0.057	0.0008/0.0220	$96^3 \times 192$	1027	0.8711

Table 1: Parámetros de los ensembles de los campos gauge del retículo. Las columnas de izquierda a derecha representan el espacio del retículo, la masa bare de los sea-quarks en unidades del retículo, las dimensiones del retículo en unidades de este, el número de configuraciones de cada ensemble y el factor de mejora de *tadpole* u_0 .

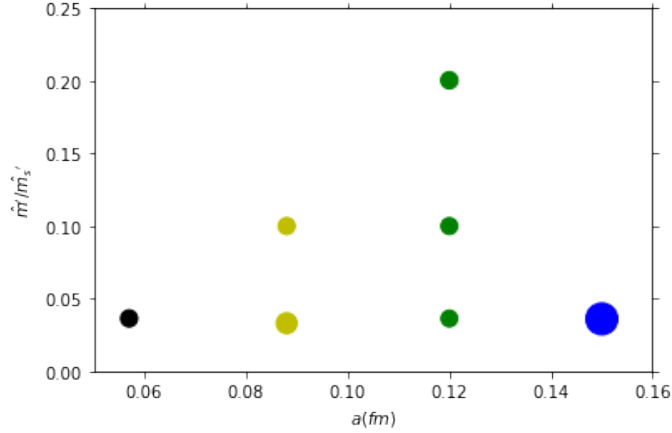


Figure 1: Rango de espaciados para los distintos retículos y masas de quarks ligeros usados. El área de cada punto es proporcional al número de configuraciones del ensemble usado. Los cuatro ensembles que forman una línea en el gráfico con el valor de \hat{m}'/\hat{m}_s' más bajo representan la masa física del pión.

5.2 Funciones de correlación a 2 puntos

La importancia de las funciones de correlación a 2 puntos es que nos permiten obtener tanto las energías de los distintos estados como los factores de solapamiento Z para los diferentes smearing, que son fundamentales para poder obtener los factores de forma, como vimos en las expresiones de los ratios. Por ello, los correladores a 2 puntos nos servirán para obtener el valor central de los priores que usemos al estudiar las funciones a 3 puntos. Asimismo, en este punto evaluaremos si los resultados obtenidos en la simulación son razonables.

5.2.1 Elección del intervalo de ajuste

Lo primero que haremos será elegir el rango de valores en el que vamos a trabajar. Para extraer el estado fundamental y los factores de overlap a partir de las funciones de correlación a dos puntos, debemos ajustar los datos de dichas funciones de correlación a un cierto *ansatz* que derivaremos más adelante. Es importante elegir bien el rango de tiempos del ajuste; en particular, los ajustes dependen de manera muy crítica del valor mínimo del tiempo, no tanto del máximo, donde los errores en los puntos son muy altos. El tiempo se mide en unidades del retículo, es decir, dividido del espaciado entre puntos a , por lo que cambiará según el ensemble que usemos, pues como ya se mencionó la principal diferencia entre ensembles es el tamaño de dicho parámetro. Sin embargo, idealmente deberíamos encontrar que este tiempo en unidades físicas coincida aproximadamente, en cierto intervalo, para todo ensemble, por lo que agruparemos los resultados en tablas de tiempo del retículo y tiempo físico. El objetivo de esto es encontrar el valor a partir del cuál los resultados obtenidos comienzan a tener sentido, por lo que solo debemos realizar una ajuste para distintos tiempos mínimos, medir el valor de la energía en el nivel fundamental con su respectivo error y realizar una gráfica que enfrente ambos parámetros, lo que nos permitirá obtener el tiempo mínimo adecuado simplemente observando a partir de qué momento el valor de la energía se estabiliza. Así, los resultados se muestran en las tablas 2 y 3, amén del gráfico de la curva de estabilización para los ensembles de espaciados más extremos, que pueden visualizarse en las figuras 2 y 3. Con todo, viendo que para todos los ensembles tenemos que a partir de los 0.90fm (asumiremos algo de error en el ensemble MediumCoarse para tener un rango de puntos más amplio y que los ajustes sean más efectivos) y 0.45fm para 2+2 y 3+3 estados respectivamente se estabiliza la energía, tomaremos un tiempo mínimo próximo a este valor para todo nuestro estudio. La principal motivación de este paso es que con un tiempo mínimo similar para todos los ensembles se consiguen reducir los errores sistemáticos al tomar el límite al continuo.

t_{min}	nstates=2+2	nstates=3+3
Medium-Coarse	7 ~ 8	3 ~ 4
Coarse-1	7 ~ 8	2
Coarse-2	7 ~ 8	2
Coarse-Phys	8 ~ 9	2
Fine-1	8 ~ 9	5 ~ 6
Fine-Phys	9 ~ 10	5 ~ 6
SuperFine	11 ~ 12	6 ~ 7

Table 2: Tiempo mínimo en unidades del retículo para los distintos ensembles y números de estados para el momento 000.

t_{min}	nstates=2+2	nstates=3+3
Medium-Coarse	1.05 ~ 1.20 fm	0.45 ~ 0.60 fm
Coarse-1	0.84 ~ 0.96 fm	0.24 fm
Coarse-2	0.84 ~ 0.96 fm	0.24 fm
Coarse-Phys	0.96 ~ 1.08 fm	0.24 fm
Fine-1	0.70 ~ 0.79 fm	0.44 ~ 0.53 fm
Fine-Phys	0.79 ~ 0.88 fm	0.44 ~ 0.53 fm
SuperFine	0.51 ~ 0.57 fm	0.28 ~ 0.34 fm

Table 3: Tiempo mínimo en unidades físicas para los distintos ensembles y números de estados para el momento 000.

Por otro lado, también es necesario sacar el tiempo máximo que utilizaremos para cada ensemble. En esta ocasión el criterio a tomar para cortar el ajuste es más sencillo. Para entenderlo, debemos volver a recordar que trabajamos con simulaciones de Monte Carlo, por lo que hay una alta probabilidad de que los observables obtenidos en distintos pasos estén correlacionados. Nuestros ajustes tienen en cuenta las correlaciones entre los datos, y para ello calculamos la matriz de covarianza completa. Si incluimos en nuestro conjunto de datos puntos con errores muy grandes, la determinación de las correlaciones será pobre, y la matriz de covarianza puede fácilmente desarrollar patologías que dificulten los ajustes, por lo que nos quedaremos hasta el tiempo a partir del cual el error en los correladores represente un 30% del valor central. Con todo, juntando los requisitos para establecer los dos extremos, los rangos de tiempo a usar serán los mostrados en la tabla (4).

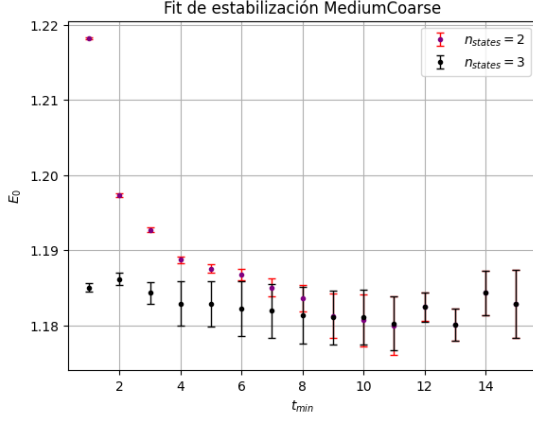


Figure 2: Fit de estabilización para el ensemble MediumCoarse.

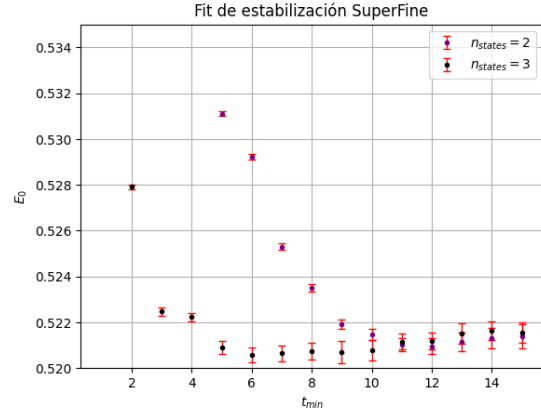


Figure 3: Fit de estabilización para el ensemble SuperFine.

	MediumCoarse	Coarse-1	Coarse-2	Coarse-Phys	Fine-1	Fine-Phys	SuperFine
$nstates = 2 + 2$	6-16	8-19	8-15	8-25	11-27	15-27	13-41
$nstates = 3 + 3$	3-16	4-19	4-15	4-25	5-27	5-27	9-41

Table 4: Rangos de tiempo para los distintos ensembles.

5.2.2 Entendiendo el proceso que se sigue en las simulaciones

Una vez tenemos ya el rango temporal en el que vamos a trabajar, debemos ajustar los correladores con los que vamos a trabajar. Lo primero es recordar que los correladores a dos puntos van a tener una forma:

$$C(n_t) \equiv \langle \tilde{O}(0, n_t) \bar{O}(0, 0) \rangle = \sum_k \langle 0 | \hat{O} | k \rangle \langle k | \hat{O}^\dagger | 0 \rangle e^{-n_t E_k}. \quad (82)$$

es decir, una suma de exponenciales que dependen de los distintos niveles de energía, que a la vez dependen del lattice, pues si este tiene un volumen finito como es obvio los niveles de energía serán discretos. Por esta dependencia exponencial, la contribución de los estados de más alta energía dependen del time slice n_t que cojamos, pues cuando estos sean más grandes dominarán los estados más próximos al fundamental, mientras que a medida que n_t se haga más pequeño encontraremos una mezcla de estados de baja y alta energía, por lo que la ecuación (82) será de la forma:

$$C(n_t) = A_0 e^{-n_t E_0} + A_1 e^{-n_t E_1} \dots \quad (83)$$

Para analizar las consecuencias de esto, nos quedaremos a nivel fundamental y usaremos un ejemplo del Gattringer-Lang [13] con la imagen 4. Cuando estudiamos la propagación de mesones a nivel fundamental lo que encontramos es que el correlador tiene una dependencia cosh o sinh con n_t :

$$A_0 e^{-n_t E_0} \pm A_0 e^{-(N_T - n_t) E_0} = \begin{cases} 2A_0 e^{-N_T E_0/2} \cosh((N_T/2 - n_t) E_0) \\ 2A_0 e^{-N_T E_0/2} \sinh((N_T/2 - n_t) E_0) \end{cases}. \quad (84)$$

Con esto, debemos evaluar en qué rango de n_t podemos descartar las contribuciones de las exponenciales no dominantes, por lo que definimos una masa efectiva m_{eff}

$$m_{eff} \left(n_t + \frac{1}{2} \right) = \ln \frac{C(n_t)}{C(n_t + 1)}. \quad (85)$$

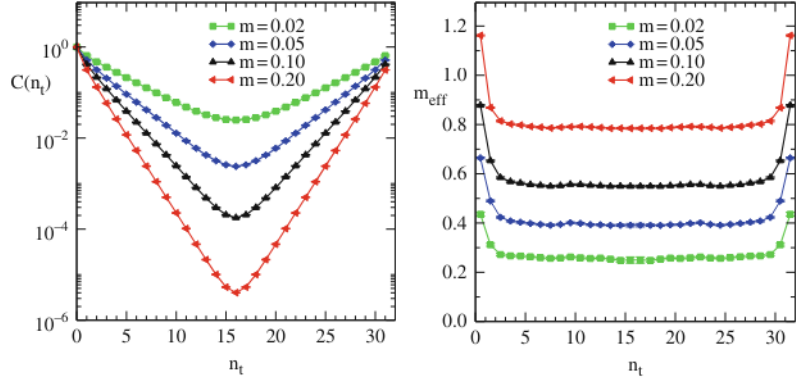


Figure 4: Resultado de una simulación de Monte Carlo en una red de $16^3 \times 32$ con un espaciado del retículo $a \approx 0.15 fm$. Lado izquierdo: gráfico logarítmico de la función de correlación del pión; lado derecho: gráfico de masa efectiva (en unidades del retículo). Los diferentes conjuntos corresponden a distintos valores de la masa del quark en unidades del retículo.[13]

Y entonces, cuando tengamos el correlador $C(n_t)$ dominado por los niveles fundamentales, podremos establecer un valor constante para la masa efectiva y que cumpla la relación de dispersión de la energía a momento nulo $m_{eff} = E_0$. Así, como se ve en el lado derecho de 4, esta masa se hace constante en un intervalo temporal $n_t \in (4, 28)$, por lo que deberíamos quedarnos con este. Este hecho nos permite llevarlo a nuestro código, pues en él, tras fijar el intervalo temporal que vamos a utilizar, fijamos un intervalo temporal efectivo basándonos en el razonamiento explicado en este punto, pues ponderando los datos obtenidos de la simulación pudimos establecer un intervalo en el que se encontraba la masa efectiva y así incluir en el ajuste únicamente los puntos que estuviesen en torno a esa zona de valores de m_{eff} . En la figura 5 se muestra un ejemplo de ello (también el factor Z efectivo pero no es relevante para nuestro estudio) y en la tabla 5 el rango de tiempos efectivos tomados.

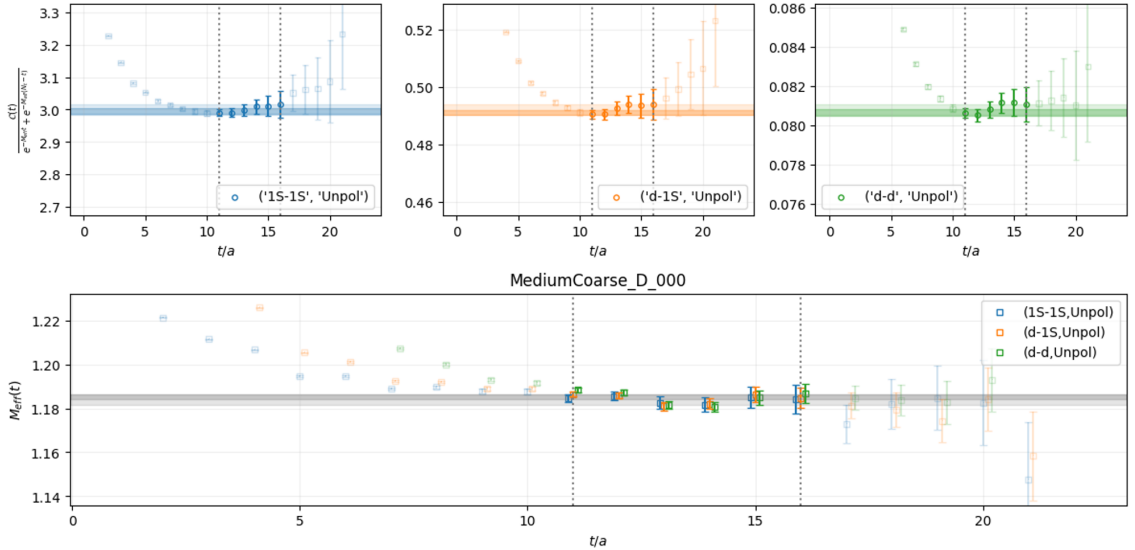


Figure 5: Factor de solapamiento Z efectivo para cada smearing en la parte superior y masa efectiva en el gráfico inferior para el ensemble MediumCoarse para el momento $(0,0,0)$.

Una vez tenemos un rango efectivo de tiempos y una primera estimación de la masa efectiva y por tanto del estado fundamental de la energía, haremos un estudio más detallado a partir de este

	Coarse-1	Coarse-2	Coarse-Phys	MediumCoarse	Fine-1	Fine-Phys	SuperFine
nstates=2+2	10-18	11-15	9-19	11-16	15-23	14-21	25-41
nstates=3+3	10-18	9-15	10-19	11-16	15-23	14-21	25-41

Table 5: Rangos de tiempo efectivos tomados para 2+2 y 3+3 estados en cada ensemble a partir del método explicado para la masa efectiva.

valor. Para ello, seguiremos un proceso en el que buscamos unos valores que minimicen el χ^2 dentro de un parámetro de tiempos $n_{min} < n_t$ y $n_t < n_{max}$, es decir, buscamos minimizar:

$$\chi^2 = \sum_{n_t, n'_t = n_{min}}^{n_{max}} (C(n_t) - f(n_t)) w(n_t, n'_t) (C(n'_t) - f(n'_t)), \quad (86)$$

con $f(t)$ una función que tiene tanto el coeficiente A_0 que acompaña a la energía fundamental como el valor de esta E_0 :

$$f(t) = A_0 e^{-E_0 n_t} \quad (87)$$

El peso w que aparece en el ξ_2 idealmente debería ser igual al inverso de la matriz de covarianza, es decir $w(n_t, n'_t) = Cov^{-1}(n_t, n'_t)$, sin embargo, como es lógico, cuando uno realiza simulaciones de Monte Carlo solo obtiene una estimación a partir de los resultados obtenidos de los correladores:

$$Cov_N(n_t, n'_t) = \frac{1}{N-1} \langle (C(n_t) - \langle C(n_t) \rangle_N) (C(n'_t) - \langle C(n'_t) \rangle_N) \rangle_N \quad (88)$$

por lo que usaremos el inverso de esto como peso.

Una vez tenemos un método para obtener los distintos valores a nivel fundamental, nos queda solo saber cómo sacar los primeros excitados, pues a tiempos pequeños tienen una relevancia bastante grande. Para ello, hay muchas metodologías que se pueden seguir, si bien el empleado en este trabajo es el análisis bayesiano, es decir, trabajaremos con ciertos priores, que usaremos para hacer que el fit se estabilice antes, no para establecer un resultado esperado. En él, uno busca estabilizar el fit minimizando una función de la forma:

$$F = \chi^2 + \lambda \phi, \quad \text{con } \phi = \sum_{k=1}^K \left(a_k \left(E_k - \hat{E}_k \right)^2 + b_k \left(c_k - \hat{c}_k \right)^2 \right) \quad (89)$$

en donde ϕ es una función que depende de los parámetros del fit, siendo \hat{E}_k y \hat{c}_k los valores en torno a los que esperamos que se encuentren la energía y sus respectivos coeficientes. Además, los parámetros a_k y b_k simplemente dan un peso relativo para el sesgo que hayamos escogido y son la anchura del prior. Así, este fit buscamos minimizarlo que modo que dependa lo menor posible del parámetro λ , pues este es el que cuantifica cómo de sesgado está nuestro resultado final. Recordemos que (87) era la función usada para tener una estimación del nivel fundamental, pero que nosotros ajustamos a (83), truncando las exponenciales a 2 o 3 estados, incluyendo respectivamente otros 2 o 3 oscilantes, de ahí que los ajustes sean a $n_{states} = 2 + 2$ y $n_{states} = 3 + 3$.

Concluyendo ya con este punto, una vez se ha explicado todo lo relacionado con las simulaciones y el fit, los resultados se pueden ver en (6), donde se muestran los valores obtenidos para el ensemble con mayor espaciado y para el de menor.

5.3 Alguntos tests a los resultados obtenidos

Como es sabido, cuando hacemos simulaciones, es imposible saber con certeza plena si estas son correctas o no, pero tenemos ciertas herramientas para saber la confianza de estas. En el caso de

p ($2\pi/L$)	Ground state (aE_D)		1^{st} excited state (aE'_D)		$Z_{1S,1S}$	$Z_{d,d}$	χ^2/dof	
	2 + 2	3 + 3	2 + 2	3 + 3			2 + 2	3 + 3
000	0.51866(41)	0.51807(71)	-1.60(8)	-1.98(27)	2.342(57)	0.00815(24)	66.04/81	57.05/99
100	0.52346(44)	0.52335(48)	-1.52(10)	-1.62(17)	2.309(33)	0.00849(14)	49.29/81	47.57/99
110	0.52735(49)	0.52712(57)	-1.48(10)	-1.60(18)	2.211(35)	0.00847(16)	60.81/81	60.18/99
200	0.53545(56)	0.53500(51)	-1.47(11)	-1.57(9)	2.025(28)	0.00847(13)	49.43/81	52.35/99
211	0.54198(75)	0.54172(83)	-1.58(11)	-1.75(18)	1.804(45)	0.00818(23)	91.87/81	90.45/99
222	0.5649(12)	0.5645(11)	-1.62(17)	-1.74(24)	1.435(47)	0.00832(30)	71.24/81	68.75/99
300	0.5538(10)	0.55353(73)	-1.56(16)	-1.58(9)	1.634(31)	0.00838(18)	52.94/81	55.73/99
400	0.5788(23)	0.5790(13)	-1.88(23)	-1.68(13)	1.235(42)	0.00831(31)	63.97/81	64.35/99

Table 6: Tabla de resultados para el ensemble SuperFine.

p ($2\pi/L$)	Ground state (aE_D)		1^{st} excited state (aE'_D)		$Z_{1S,1S}$	$Z_{d,d}$	χ^2/df	
	2 + 2	3 + 3	2 + 2	3 + 3			2 + 2	3 + 3
000	1.18633(60)	1.18580(64)	-0.434(50)	-0.742(99)	7.051(51)	0.1898(16)	17.07/24	25.20/42
100	1.20109(91)	1.1992(13)	-0.452(55)	-0.74(11)	6.674(61)	0.1931(19)	11.26/24	26.60/42
110	1.2143(10)	1.2119(13)	-0.493(63)	-0.79(10)	6.008(90)	0.1865(31)	19.46/24	32.32/42
200	1.24328(85)	1.24304(80)	-0.505(61)	-0.552(55)	5.473(42)	0.1959(17)	19.13/24	35.52/42
211	1.2678(19)	1.2638(21)	-0.464(78)	-0.863(84)	4.49(11)	0.1840(45)	12.07/24	33.94/42
222	1.3424(43)	1.3354(41)	-0.68(12)	-0.89(19)	3.01(14)	0.1805(93)	16.41/24	27.62/42
300	1.3027(29)	1.2996(28)	-0.61(10)	-0.800(97)	3.71(12)	0.1841(62)	20.00/24	27.96/42
400	1.3860(62)	1.3743(46)	-0.52(17)	-0.779(71)	2.37(11)	0.1796(88)	15.27/24	31.77/42

Table 7: Tabla de resultados para el ensemble MediumCoarse.

Table 8: En estas tablas se muestran los resultados del fit para las energías del estado fundamental E_D , del primer excitado (no oscilante) E'_D , de los factores de solapamiento $Z_{1S,1S}$ y $Z_{d,d}$ para los dos smearing estudiados y el χ^2 dividido de los grados de libertad para los distintos momentos estudiados. Todos los resultados se muestran tanto el estado (2+2) como para el estado (3+3), aunque para los ajustes posteriores de las funciones de correlación solo se usan los resultados de 3+3. Cada medida viene acompañado de su error.

nuestras simulaciones de las funciones a dos puntos del $B \rightarrow D\ell\nu$ tenemos varias cosas que nos indican si estamos en un camino aceptable o no.

5.3.1 Distribución del p -value

El primero de ellos es la distribución del p -value. Ya se ha comentado que se ha realizado una simulación para todos los momentos de los distintos ensemble, tanto para $n_{states} = 2 + 2$ como para $n_{states} = 3 + 3$, por lo que tenemos en cada uno de los distintos casos de n_{states} 50 simulaciones distintas, es decir, 50 p -value distintos. Como es lógico, el valor de uno de ellos no nos va a marcar si el procedimiento que estamos siguiendo es correcto o no, por lo que lo que resulta más sensato es visualizar la distribución de estos y si es uniforme (dentro de lo que cabe, sabiendo que en una muestra de 50 valores va a haber una gran varianza) podremos considerar que el p -value de nuestras simulaciones es aceptable. De este modo, el histograma que se obtiene para ambos casos son los mostrados en 6 y 7 y, por tanto, podemos decir que para ser una muestra de 50 valores los p -value están distribuidos de manera bastante uniforme y que por este motivo tenemos un conjunto de ajustes que ofrecen un p -value razonable.

5.3.2 Diferencia entre los resultados para $n_{states} = 2 + 2$ y $n_{states} = 3 + 3$

En segundo lugar, si recordamos la discusión del rango de tiempos a usar, cuando hablamos del tiempo mínimo se estableció que era necesario tomar un valor a partir del cual la energía del

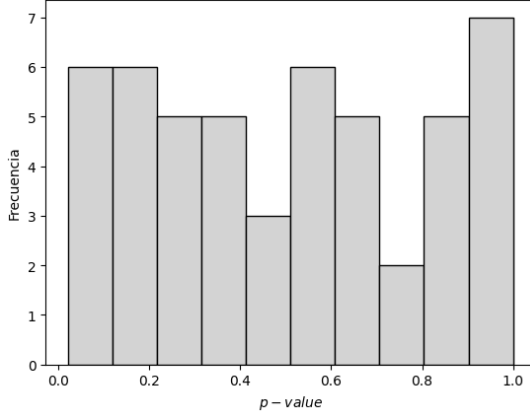


Figure 6: p -value para $n_{states} = 3 + 3$

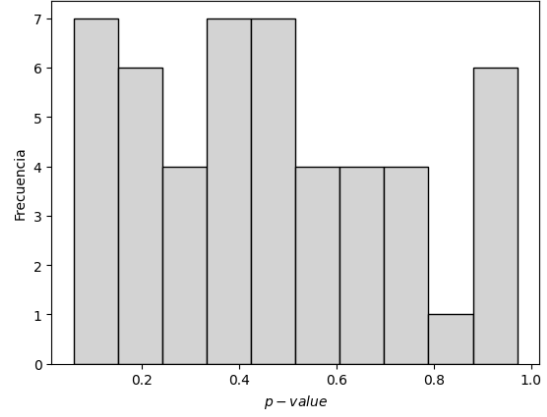


Figure 7: p -value para $n_{states} = 2 + 2$

estado fundamental se estabilizase, es decir, mirando el fit de estabilización. Sin embargo, esto no es lo único que se busca, ya que idealmente se espera que trabajando tanto con 2 como con 3 exponenciales el valor obtenido sea el mismo para la energía del estado fundamental, Z_d y Z_{1S} en los distintos momentos. Para comprobar esto, al tener medidas con un valor central y un error, lo que se ha hecho ha sido calcular la diferencia entre estos resultados, tomando como aceptables los resultados que tienen un valor central de dicha diferencia menor que su error. Además, al tener 100 resultados distintos (6 momentos para 3 ensembles y 8 para otros cuatro, además de tener cada caso para 2 números de estados), lo que se ha decidido hacer es estudiar un momento que intermedio, el (2,0,0), como se puede ver en 9. De tal modo, es fácil observar que los valores centrales de la diferencia son menores que el error de esta, por lo que en el rango de tiempos que hemos estudiado nuestros resultados 2+2 y 3+3 estados son compatibles.

	MediumCoarse	Coarse-1	Coarse-2	Coarse-Phys	Fine-1	Fine-Phys	SuperFine
E_0	0.0002 ± 0.0012	0.0009 ± 0.0020	0.0003 ± 0.0033	0.0009 ± 0.0015	0.0009 ± 0.0012	0.00059 ± 0.00081	0.00045 ± 0.00076
Z_d	0.0017 ± 0.0056	0.008 ± 0.014	0.001 ± 0.019	0.008 ± 0.010	0.008 ± 0.011	0.0055 ± 0.0072	0.006 ± 0.011
Z_{1S}	0.0035 ± 0.0053	0.007 ± 0.012	0.001 ± 0.016	0.0069 ± 0.0089	0.0069 ± 0.0091	0.0050 ± 0.0062	0.0060 ± 0.0096

Table 9: Diferencia de energía, Z_d , y Z_{1S} con sus respectivos errores entre $N_{states}=3+3$ y $N_{states}=2+2$ para el momento (2,0,0) para los distintos ensembles.

5.3.3 Estabilización de Z_d

Por último, otra condición que se debe dar está relacionada con Z_d , la cual debe ser constante para los distintos momentos. Los resultados de esto se muestran en las imágenes 8 y 9, las cuales muestran el caso de mayor espaciado, donde esperamos peores resultados, y el menor espaciado, que, al tender al continuo, esperamos que reproduzca mejor todo lo estudiado. Asimismo, se añade el cono de error, que esperamos que sea del orden de $Z_d \pm \mathcal{O}(\alpha_s a^2 p^2)$. Con todo, vemos que en ambos ensembles los datos obtenidos están dentro del error que podíamos preveer. Es interesante recalcar que el cono de error de los ensembles de mayor espaciado de retículo va a ser mayor que en el resto de casos, ya que los errores de discretización serán más grandes.

De este modo, nuestras simulaciones cumplen los 3 requisitos que se piden para verificar que los

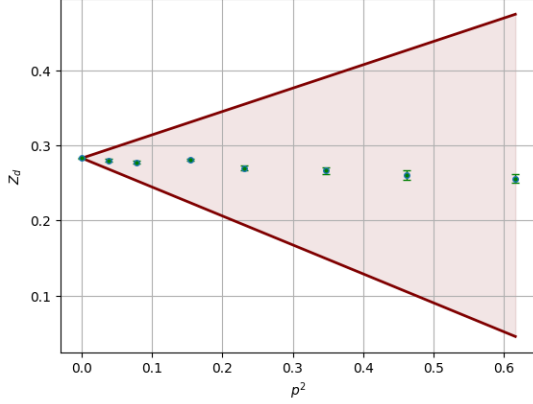


Figure 8: Z_d para el ensemble MediumCoarse.

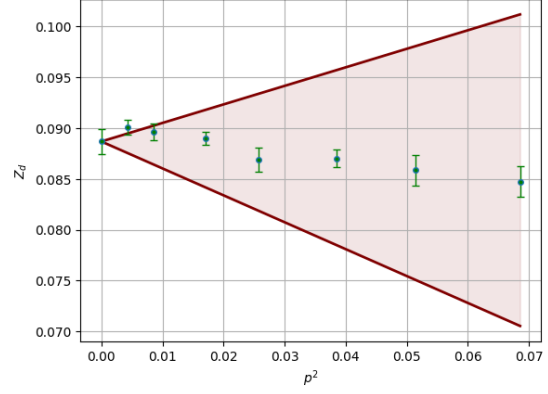


Figure 9: Z_d para el ensemble SuperFine.

resultados tienen cierto grado de confianza, por lo que ya podemos trabajar en obtener resultados útiles a partir de ellas.

5.4 Relación de dispersión

Realizados todos los ajustes de los distintos ensembles para el caso de correladores a dos puntos y habiendo realizado todas las comprobaciones necesarias para asegurarnos de que son aceptables, otra cosa que podemos hacer es ver cómo de bien se ajustan nuestros resultados a la relación de dispersión de la energía $E^2 = m^2 + p^2$ (trabajando en unidades naturales $c = \hbar = 1$). Esto lo haremos mediante un plot en el que representemos $E^2/(p^2 + m^2)$ en función del momento, pues como sabemos esto debería ser 1, por lo que midiendo desviaciones respecto a este valor podemos ver cómo de cerca están nuestros resultados del continuo. Todos los resultados se muestran en la figura 10, la cual además tiene pintados los conos de errores esperados, los cuales los esperamos del orden $1 \pm O(\alpha_s a^2 p^2)$. [7]

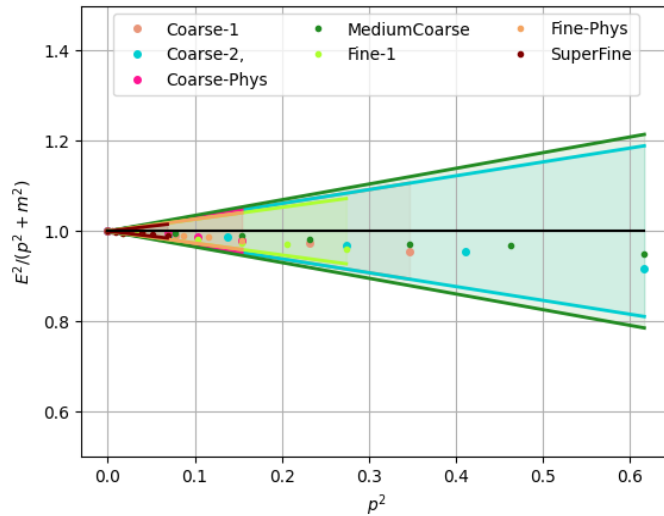


Figure 10: Relación entre las energías ajustadas y las energías esperadas de la relación de dispersión del continuo. Los conos muestran el tamaño esperado de los errores de discretización por tamaño de retículo para los distintos ensembles.

En ella, como se puede observar, todos los ensembles están dentro de su respectivo cono de errores

(la constante de acoplo fuerte depende del espaciado del retículo, se calculan en [17]), por lo que todos resultan fits muy válidos dentro del orden de error que hemos marcado como máximo, pero además, cuanto menor es el espaciado del retículo vemos que tendemos mucho más a la unidad, lo que es lógico porque al tender al continuo debemos recuperar las expresiones de este.

Sin embargo, evidentemente no es un resultado exacto, lo que nos indica que deben existir correcciones a esta relación de dispersión de la energía. Esta relación de dispersión que incluye los efectos de discretización viene dada por la siguiente expresión: [7]

$$a^2 E^2(\mathbf{p}) = (aM_1)^2 + \frac{M_1}{M_2}(a\mathbf{p})^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(aM_2)^2} - \frac{aM_1}{(aM_4)^3} \right] (a^2 \mathbf{p}^2)^2 - \frac{aM_1 w_4}{3} \sum_{i=1}^3 (ap_i)^4 + O(\mathbf{p}^6) \quad (90)$$

donde M_1 es la masa en reposo, M_2 es la masa cinética, M_4 es una cantidad que es similar a la masa y donde los efectos de discretización se tienen en cuenta en los términos $a\mathbf{p}$. Así, lo que haremos será realizar un fit con nuestros datos a esta ecuación para poder obtener los coeficientes que nos corrigen la relación de dispersión en el retículo.

Para ello, partiremos de las siguientes expresiones que utilizaremos para los priores de los coeficientes a los que ajustamos la función:

$$M_1 = a^{-1} \log(1 + m_0 a), \quad (91)$$

$$\frac{1}{M_2 a} = \frac{2\zeta^2}{m_0 a(2 + m_0 a)} + \frac{r_s \zeta}{1 + m_0 a}. \quad (92)$$

$$w_4 = \frac{2\zeta^2}{m_0(2 + m_0)} + \frac{r_s \zeta}{4(1 + m_0)}, \quad (93)$$

$$\frac{1}{M_4^3} = \frac{8\zeta^4}{m_0^3(2 + m_0)^3} + \frac{4\zeta^3[\zeta + 2r_s(1 + m_0)]}{m_0^2(2 + m_0)^2} + \frac{r_s^2 \zeta^2}{(1 + m_0)^2}. \quad (94)$$

utilizando $\zeta = r_s = 1$, ya que $r_s = 1$ es la elección más sensata para evitar el problema que surge al trabajar en lattice QCD de que aparezcan estados no físicos adicionales a causa de la intentar representar una teoría continua en una red discreta, y $\zeta = 1$ es consecuencia directa de dicha elección. Además, en estas expresiones $m_0 a$ es la masa en unidades del retículo del quark charm. En la ecuación (90) lo que esperamos es que en el límite al continuo, es decir, cuando $a \rightarrow 0$, se nos quede la ya conocida relación de dispersión $E^2 = m^2 + p^2$ (unidades naturales con $c = 1$), por lo que debemos esperar que esta nos ofrezca un resultado M_1 igual a la energía fundamental para el momento $p = (0, 0, 0)$ y que $M_1 \sim M_2$ cuando trabajemos con espaciados del retículo más pequeños, perdiendo precisión cuando nos vayamos a espaciado más grandes. Así, los valores obtenidos de los distintos parámetros del fit se muestran en la tabla 10, acompañado de dos gráficas que muestran el comportamiento de nuestro fit 11 y 12. En ellas se ve que el fit se ajuste bastante bien para el ensemble SuperFine pero que a medida que aumenta el espaciado del retículo encontramos pequeñas desviaciones respecto a los datos obtenidos en los momentos más altos. Al final, en este trabajo por falta de tiempo el cálculo de errores se ha dejado en un segundo plano, sin entrar en excesivo detalle. Hay métodos que nos habrían permitido obtener unos errores mucho más precisos y hacer estos datos del fit compatibles con nuestros resultados pero como en su mayoría los ensembles se ajustan bien, no se ha estimado necesario entrar en tanto detalle en el cálculo de errores. Con todo, es esperable encontrar discrepancias entre el continuo y el caso más alejado, además de estar intentando ajustar a una función muy parecida a una recta, por lo que los coeficientes han de ser muy precisos para captar las finas desviaciones que existen respecto a un comportamiento lineal.

	MediumCoarse	Coarse-1	Coarse-2	Coarse-Phys	Fine-1	Fine-Phys	SuperFine
M_1	1.18578 ± 0.00058	1.00582 ± 0.00080	1.01503 ± 0.00084	0.99982 ± 0.00062	0.77549 ± 0.00035	0.77114 ± 0.00028	0.51903 ± 0.00035
M_2	1.318 ± 0.028	1.147 ± 0.032	1.134 ± 0.030	1.105 ± 0.028	0.849 ± 0.017	0.837 ± 0.015	0.535 ± 0.013
M_4	1.074 ± 0.080	1.07 ± 0.14	1.13 ± 0.14	1.09 ± 0.16	0.801 ± 0.074	0.83 ± 0.10	0.526 ± 0.071
w_4	0.649 ± 0.041	0.400 ± 0.060	0.389 ± 0.058	0.403 ± 0.061	0.272 ± 0.097	0.648 ± 0.098	1.24 ± 0.19

Table 10: Resultados del ajuste para diferentes ensembles

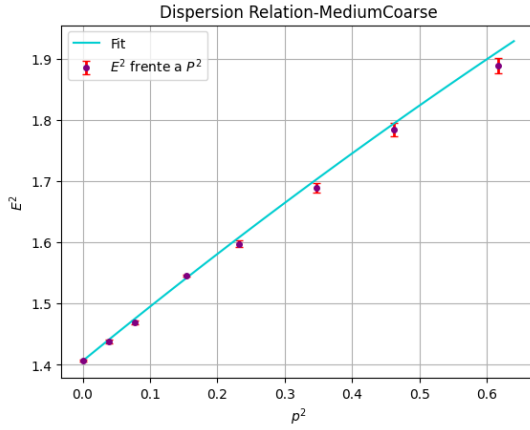


Figure 11: Ajuste a la relación de dispersión con efectos de discretización para el ensemble MediumCoarse.

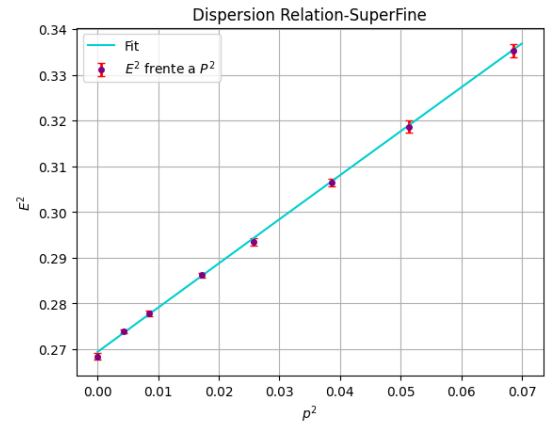


Figure 12: Ajuste a la relación de dispersión con efectos de discretización para el ensemble SuperFine.

6 Funciones de correlación a 3 puntos

Cuando hemos terminado el análisis relacionado con las funciones de correlación a 2 puntos, el siguiente paso es continuar incluyendo la corriente para trabajar con las de 3 puntos. Como dijimos en anteriores puntos, nuestro objetivo principal es obtener los factores de forma, para lo que necesitamos los priores de los distintos parámetros de los que dependen los correladores, que son los que obtuvimos con el desarrollo del punto anterior. Con ello, utilizando las expresiones (73), (76), (78) y (80), podemos obtener valores a ajustar a las expresiones (75), (77), (79) y (81) respectivamente, y, con ello, llegar a los valores de los ratios y de los coeficientes que acompañan a las exponenciales. Como se ve en estas fórmulas, tenemos muchos coeficientes distintos que nos hacen que el fit se asemeje más a la función original. Sin embargo, nosotros como dijimos trabajamos solo con A y B , permitiendo al ajuste esos 2 o 3 parámetros, en los que se incluye el ratio como es lógico. Así, los resultados que se presentan en este trabajo son ajustando a 2 parámetros, ya que al trabajar con una muestra de datos tan pequeña, el fitter no es capaz de resolver un tercer parámetro y lo único que hace es cambiar el error obtenido, sin modificar el valor central que se obtiene ajustando a 2 parámetros libres. Con ello, en las tablas 12 y 11, se muestran los parámetros obtenidos a partir de los fits para los casos de espaciados más extremos, como hemos ido haciendo a lo largo del trabajo. Asimismo, podemos observar los fits de las funciones a 3 puntos que hemos usado para sacar estos ratios en 13.

A partir de dichos resultados, recordando la expresión del parámetro de recoil (59), podemos

Ratio/Momento	000	100	200	300	400
Q_+	-	0.9901(23)	0.9663(79)	0.9242(95)	0.884(16)
R_-	-	-0.0815(21)	-0.1567(24)	-0.2194(54)	-0.263(15)
X_F	-	-0.0719(13)	-0.1407(18)	-0.1999(29)	-0.2438(63)
R_+	1.026(15)	-	-	-	-

Table 11: Tabla de resultados de los ratios del ensemble MediumCoarse para los distintos momentos.

Ratio/Momento	000	100	200	300	400
Q_+	-	0.9611(53)	0.9454(60)	0.9440(14)	0.8981(41)
R_-	-	-0.06707(99)	-0.1318(11)	-0.1939(18)	-0.2555(38)
X_F	-	-0.06154(51)	-0.12207(63)	-0.1794(10)	-0.2325(15)
R_+	1.0476(36)	-	-	-	-

Table 12: Tabla de resultados de los ratios del ensemble SuperFine para los distintos momentos.

obtener este para los distintos ensembles y momentos, que se muestran en 13, que junto a los ratios nos permiten estudiar las expresiones factores de forma (60) y (61), obteniendo los resultado de la gráficas 14 y 15.

Momento	MediumCoarse	Fine-1	Fine-Phys	SuperFine	Coarse-1	Coarse-2	Coarse-Phys
100	1.01040(39)	1.01217(37)	1.00798(24)	1.00760(13)	1.01670(90)	1.0284(10)	1.00786(28)
200	1.0404(11)	1.04943(98)	1.03055(58)	1.03025(32)	1.0627(25)	1.1043(35)	1.03009(71)
300	1.0833(26)	1.1079(23)	1.0661(13)	1.06649(80)	1.1291(60)	1.209(11)	1.0643(14)
400	1.1263(70)	1.1832(56)	1.1117(27)	1.1143(16)	-	-	-

Table 13: Resultados obtenidos del parámetro de recoil w para los distintos ensemble y los distintos momentos.

Con todo, como se puede ver si comparamos nuestros resultados con los mostrados en la figura 3 de [4], que son resultados en los que se ha trabajado para minimizar los errores y ya renormalizados, podemos ver que obtenemos algo muy similar, estando en valores muy próximos y con un comportamiento calcado tanto en h_+ como en h_- .

Si quisiésemos aproximarnos a dichos resultados, deberíamos empezar estudiando las diferentes fuentes de error. Como sabemos, tenemos el error que encontramos por realizar simulaciones de Monte Carlo finitas, pero existen también otras fuentes de error sistemático. Las principales que encontramos en nuestro trabajo se deben a haber trabajado en el retículo y discretizado el espacio-tiempo. Cuando discretizamos la acción para los quarks ligeros y los gluones nos encontramos errores de orden $\alpha_s a^2$ y $\alpha_s^2 a^2$ [5]. Luego, esto ocurre de igual forma para los quarks pesados, pudiéndose calcular el tamaño de estos errores gracias al estudio del *cutoff* de la teoría efectiva de quarks pesados, como se hace en [14]. Además, como es obvio, al trabajar en un volumen finito esto va a causar cierto efecto en nuestros resultados, cuya importancia se puede determinar con la teoría de perturbaciones quiral χPT que veremos en el siguiente punto [1].

7 Pasos a seguir en el estudio del elemento de matriz V_{cb}

Concluiremos el trabajo hablando de los siguientes pasos que se han de tomar para determinar el elemento de matriz V_{cb} .

Una vez se han obtenido los factores de forma, los siguientes pasos naturales son llevar estos

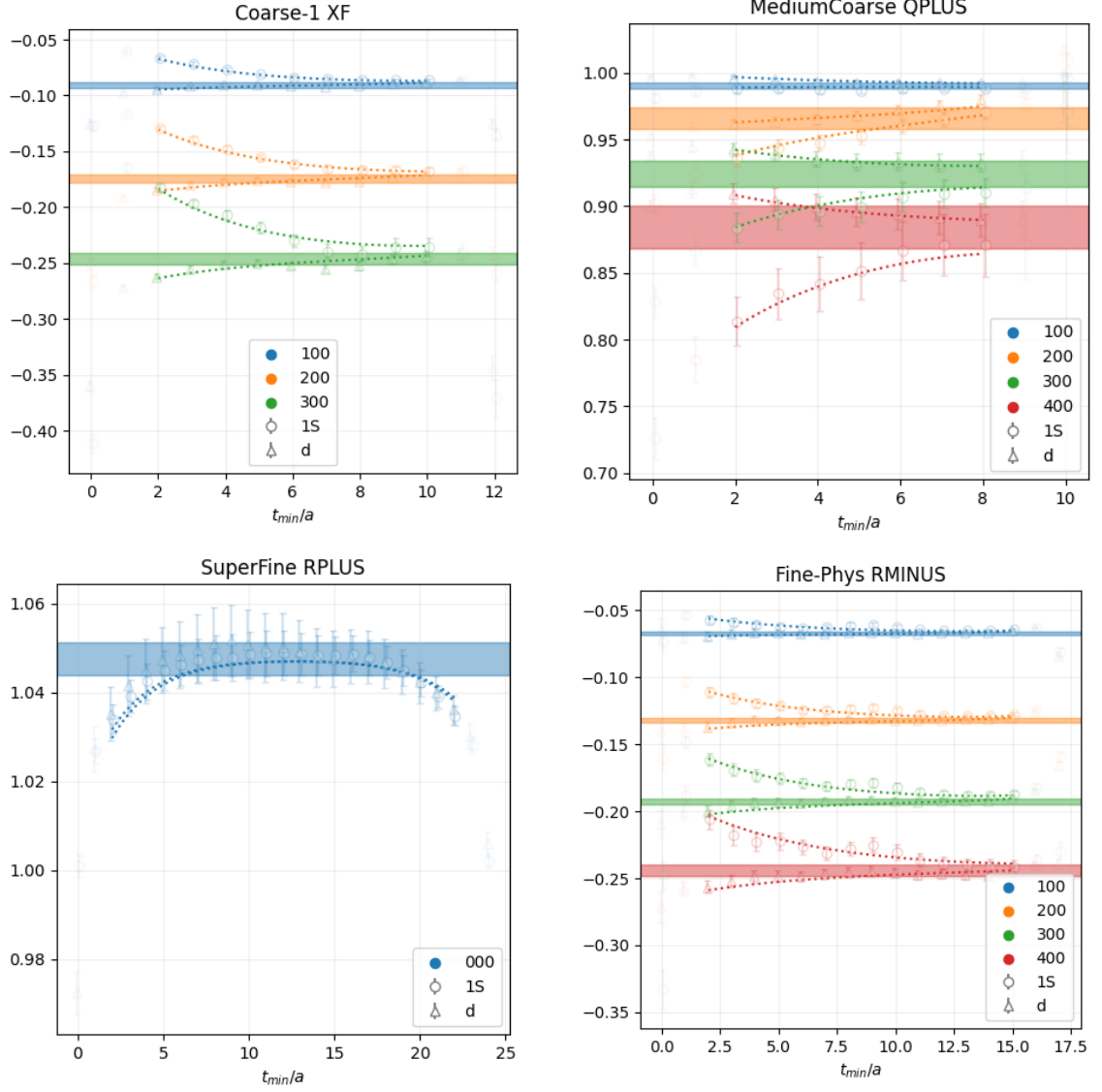


Figure 13: Fit de los distintos ratios para varios ensemble usados para determinar el valor de estos. Los valores están pintados frente al tiempo t de la corriente vectorial. Las líneas sombreadas indican el rango a 1σ del valor obtenido en el fit para el ratio correspondiente.

resultados al continuo, es decir, $a \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$ y $am_q \rightarrow am_q^{phys}$. Para ello, como es natural, hemos de asegurarnos que nuestros resultados estén normalizados de acuerdo a los convenios del continuo, para lo que se debe utilizar los factores ρ_V^μ definidos en (54). En concreto, estos denominados *matching factor* siguen las siguientes relaciones:

$$\mathcal{R}_+ = \rho_{V^4}^2(1)R_+; \quad \mathcal{Q}_+(p) = \frac{\rho_{V^4}(w)}{\rho_{V^4}(1)}Q_+(p),; \quad \mathcal{R}_-(p) = \frac{\rho_{V^i}(w)}{\rho_{V^4}(w)}R_-(p), \quad (95)$$

donde el lado izquierdo representa el ratio renormalizado.

El factor $\rho_{V^4}^2(1)$ usado para normalizar \mathcal{R}_+ se calcula utilizando el límite $m_{2c}a \ll 1$, en donde desaparece la dependencia con el parámetro de recoil (que es difícil de calcular) y se obtiene con teoría de perturbaciones a un loop [14]. Para el otro, se usa el mismo límite $m_{2c}a \ll 1$ y se puede

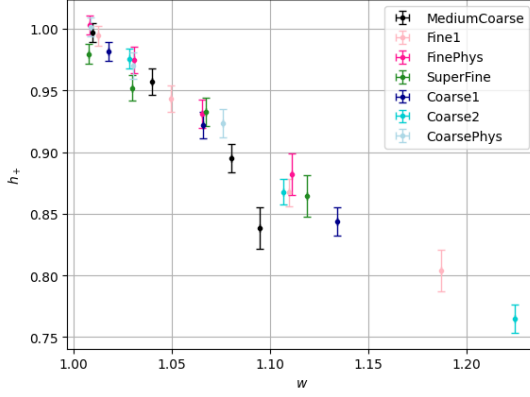


Figure 14: Factor de forma h_+ frente al parámetro de recoil. Usamos el mismo color con distintas tonalidades para los ensembles con mismo espaciado y distinto color para los distintos espaciados y se adjuntan las correspondientes barras de error.

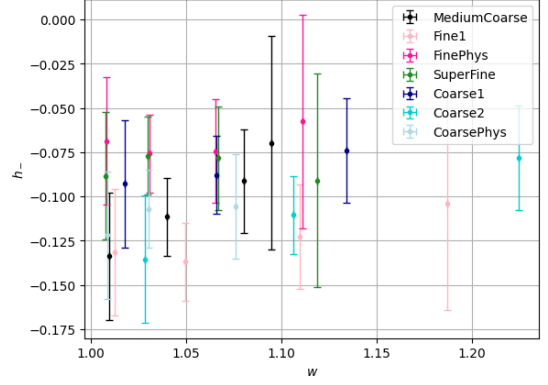


Figure 15: Factor de forma h_- frente al parámetro de recoil. Usamos el mismo color con distintas tonalidades para los ensembles con mismo espaciado y distinto color para los distintos espaciados y se adjuntan las correspondientes barras de error.

calcular de forma explícita.

Para el siguiente paso lo que se hace es trabajar con la teoría de perturbaciones quiral. Debemos saber que cuando trabajamos en el límite en el que la masa de los quarks ligeros tiende a 0, aparece una simetría quiral $SU(3)_L \times SU(3)_R$, la cual está rota en el vacío de QCD haciendo que aparezcan mesones pseudo-Nambu-Goldstone (piones, kaones y etas). Así, surge una teoría efectiva que es la que describe las interacciones de estas partículas y permite que cuando volvamos al continuo la simetría quiral sea respetada. Ahora, con estas correcciones de esta teoría de perturbaciones quiral y la normalización hecha con los matching factors, ya tenemos los factores de forma expresados de forma apropiada para poder realizar una extrapolación al continuo que sea válida.

Con los resultados que se obtienen de dicha extrapolación, ya solo quedaría utilizar las expresiones (51) y (50), que si recordamos, son los factores de forma en el continuo que nos permiten obtener el elemento de matriz $|V_{cb}|$ mediante la relación (47).

-
- [1] Daniel Arndt and C-J David Lin. “Heavy meson chiral perturbation theory in finite volume”. In: *Physical Review D* 70.1 (2004), p. 014503.
 - [2] B. Aubert et al. “Search for the $Z(4430)^-$ at BABAR”. In: *Phys. Rev. D* 79 (11 June 2009), p. 112001. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.112001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.112001>.
 - [3] Jon A. Bailey et al. “ $B_s \rightarrow D_s/B \rightarrow D$ semileptonic form-factor ratios and their application to $\text{BR}(B_s^0 \rightarrow \mu^+\mu^-)$ ”. In: *Phys. Rev. D* 85 (11 June 2012), p. 114502. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.114502. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.114502>.
 - [4] Jon A. Bailey et al. “ $B \rightarrow D\ell\nu$ form factors at nonzero recoil and $|V_{cb}|$ from 2+1-flavor lattice QCD”. In: *Phys. Rev. D* 92 (3 Aug. 2015), p. 034506. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.034506. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.034506>.
 - [5] Jon A. Bailey et al. “Update of $|V_{cb}|$ from the $\bar{B} \rightarrow D^*\ell\bar{\nu}$ form factor at zero recoil with three-flavor lattice QCD”. In: *Phys. Rev. D* 89 (11 June 2014), p. 114504. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.114504. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.114504>.

- [6] M Bargiotti et al. “Present knowledge of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrix”. In: *La Rivista del Nuovo Cimento* 23 (2000), pp. 1–71.
- [7] A. Bazavov et al. “Semileptonic form factors for $B \rightarrow D^* \ell \nu$ at nonzero recoil from 2 + 1-flavor lattice QCD: Fermilab Lattice and MILC Collaborations”. In: *The European Physical Journal C* 82.12 (Dec. 2022). ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10984-9. URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10984-9>.
- [8] C. Bernard et al. “ $\overline{B} \rightarrow D^* \ell \overline{\nu}$ form factor at zero recoil from three-flavor lattice QCD: A model independent determination of $|V_{cb}|$ ”. In: *Phys. Rev. D* 79 (1 Jan. 2009), p. 014506. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.014506. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.014506>.
- [9] A. Ceccucci, Z. Ligeti, and Y. Sakai. “The CKM quark-mixing matrix”. In: (2008).
- [10] Norman H. Christ, Min Li, and Huey-Wen Lin. “Relativistic heavy quark effective action”. In: *Physical Review D* 76.7 (Oct. 2007). ISSN: 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.76.074505. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.76.074505>.
- [11] E Eichten. “Heavy quarks on the lattice”. In: *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements* 4 (1988), pp. 170–177.
- [12] Paolo Gambino and Christoph Schwanda. “Inclusive semileptonic fits, heavy quark masses, and V_{cb} ”. In: *Physical Review D* 89.1 (2014), p. 014022.
- [13] Christof Gattringer and Christian Lang. *Quantum chromodynamics on the lattice: an introductory presentation*. Vol. 788. Springer Science & Business Media, 2009.
- [14] Junpei Harada et al. “Application of heavy-quark effective theory to lattice QCD. III. Radiative corrections to heavy-heavy currents”. In: *Physical Review D* 65.9 (May 2002). ISSN: 1089-4918. DOI: 10.1103/physrevd.65.094514. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.65.094514>.
- [15] Jochen Heitger and Rainer Sommer. “Non-perturbative Heavy Quark Effective Theory”. In: *Journal of High Energy Physics* 2004.02 (Feb. 2004), pp. 022–022. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1088/1126-6708/2004/02/022. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2004/02/022>.
- [16] Aida X. El-Khadra, Andreas S. Kronfeld, and Paul B. Mackenzie. “Massive fermions in lattice gauge theory”. In: *Physical Review D* 55.7 (Apr. 1997), pp. 3933–3957. ISSN: 1089-4918. DOI: 10.1103/physrevd.55.3933. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.55.3933>.
- [17] G Peter Lepage and Paul B Mackenzie. “Viability of lattice perturbation theory”. In: *Physical Review D* 48.5 (1993), p. 2250.
- [18] H.B. Nielsen and M. Ninomiya. “A no-go theorem for regularizing chiral fermions”. In: *Physics Letters B* 105.2 (1981), pp. 219–223. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(81\)91026-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)91026-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269381910261>.
- [19] Si-Wei Qiu et al. *Semileptonic decays $B \rightarrow D^{(*)} \ell \nu$ at nonzero recoil*. 2013. arXiv: 1312.0155 [hep-lat]. URL: <https://arxiv.org/abs/1312.0155>.
- [20] John L Richardson. “The heavy quark potential and the Υ , J/ψ systems”. In: *Physics Letters B* 82.2 (1979), pp. 272–274.
- [21] J. Tobias Tsang and Michele Della Morte. *B-physics from Lattice Gauge Theory*. 2023. arXiv: 2310.02705 [hep-lat]. URL: <https://arxiv.org/abs/2310.02705>.