

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Entropías de Rényi en cadenas de spines

Filiberto ARES ASENSIO

Trabajo de Fin de Máster dirigido por

Fernando FALCETO BLECUA y José V. GARCÍA ESTEVE

MÁSTER EN FÍSICA Y TECNOLOGÍAS FÍSICAS
CURSO 2013-2014

Índice

1	Introducción	1
1.1	Operador densidad	2
1.2	Entropía de Rényi	3
1.3	Entropía de Rényi y teoría de campos conforme	4
1.4	Cadenas de fermiones y de spines	5
2	Cadenas homogéneas de fermiones	7
2.1	Entropía y matriz de correlaciones	8
2.2	Cadenas locales: entropía y matrices de Toeplitz	9
2.2.1	Límite $\beta \rightarrow \infty$	12
2.2.2	Ejemplo: Tight Binding Model	15
3	Escaleras de fermiones	19
3.1	Ejemplo: escalera de dos railes $q = 2$	21
4	Cadenas de spines: modelo XY	25
4.1	Diagonalización del Hamiltoniano XY	25
4.2	Matrices de correlaciones térmicas del modelo XY	27
4.3	Relación entre las entropías de los modelos XY e Ising	28
5	Conclusiones	31

1. Introducción

En una contestación [1] al conocido artículo de Einstein, Podolski y Rosen (EPR) [2], Schrödinger acuña el término *entrelazamiento* para referirse a aquellas correlaciones de naturaleza exclusivamente cuántica que pueden darse entre sistemas físicos. Estas correlaciones habían sido empleadas por EPR para tratar de argumentar que la Mecánica Cuántica da una descripción incompleta de la realidad física y la necesidad de una teoría que superara sus características intrínsecamente indeterministas, dando pie a las llamadas teorías de variables ocultas. En su respuesta a EPR, Schrödinger señala que el entrelazamiento no es una más de las propiedades de la Mecánica Cuántica sino su rasgo fundamental pues carece de análogo clásico. En este sentido, Schrödinger reconoce en el entrelazamiento el reflejo de que el conocimiento completo del estado de un sistema cuántico no implica el total conocimiento del estado de las partes que lo forman, a diferencia de lo que sucede en los sistemas clásicos. Más adelante, Bell [3] encuentra que en las teorías de variables ocultas locales existen ligaduras sobre las correlaciones de los observables (desigualdades de Bell), que son violadas por los estados entrelazados. La preparación de estados entrelazados en el laboratorio y la comprobación experimental de la existencia de estas ligaduras inclinaría la balanza a favor de la teoría cuántica convencional frente a las variables ocultas locales. Es el grupo de Aspect [4] quien da la primera prueba experimental convincente de la violación de las mencionadas desigualdades. Experimentos posteriores han vuelto a confirmar la existencia de estados entrelazados y la validez de las predicciones de la Mecánica Cuántica.

En las últimas décadas, el interés por comprender el entrelazamiento no ha dejado de aumentar. Por un lado, parece ser uno de los ingredientes necesarios a la hora de desarrollar ordenadores cuánticos y, en general, para la realización de tareas clásicamente imposibles. Este tipo de investigaciones han originado un nuevo campo de trabajo denominado información cuántica. Por otro, resulta clave en distintos ámbitos y en la comprensión de algunos fenómenos físicos: decoherencia [5], sistemas en no equilibrio [6], transiciones de fase [7, 8], superconductividad [9], física de agujeros negros [10], teorías de campos [11, 12], principio holográfico [13]... En la actualidad, uno de los aspectos que más interés suscita es la forma de cuantificar el grado de entrelazamiento entre sistemas. Se han propuesto diferentes medidas, cada una adecuada a determinandas circunstancias [14]. En el caso de un sistema en un estado puro y dividido en dos partes, una de las magnitudes más apropiadas para medir las correlaciones cuánticas entre ambas es la *entropía de Rényi* del estado reducido de una de ellas.

Las cadenas unidimensionales de fermiones y de spines resultan ser sistemas muy atractivos donde analizar esta medida. Por un lado, porque uno de los soportes más prometedores para abordar la construcción de un ordenador cuántico escalable es el de iones atrapados [15]. Actualmente ya se ha conseguido mantener alineados y entrelazados más de una docena de iones (usualmente de elementos alcalinotérreos o de metales de transición como Zn^+ , Hg^+ , Cd^+ o Yb^+). Los modelos matemáticos que describen estas alineaciones de iones, cada uno representando un qubit, son las cadenas de fermiones o de spines. Por otra parte, porque existen distintos métodos analíticos sencillos y algoritmos numéricos eficientes para obtener la entropía de Rényi en estos modelos. Numéricamente, la complejidad de calcularla aumenta exponencialmente con el tamaño del subsistema considerado. No obstante, si el estado de la cadena cumple la propiedad de descomposición de Wick es posible reducirla a una dependencia polinomial, siendo suficientes las correlaciones para

obtenerla [8, 16]. En ciertos caso, si el Hamiltoniano es además invariante bajo traslaciones, la matriz de correlaciones de un intervalo de la cadena es Toeplitz. Este hecho permite llegar a una expansión de la entropía en función de su longitud para cualquiera de los autoestados de la energía [17, 18]. Desgraciadamente, las correlaciones de varios intervalos disjuntos no forman una matriz de Toeplitz. Sin embargo, puede conjeturarse una generalización de la expresión de la entropía de Rényi para ese caso que verificamos numéricamente en [19]. Existen más aproximaciones a esta cuestión. Por ejemplo, si el Hamiltoniano es local (contiene únicamente interacciones de corto alcance) y crítico (el conjunto de sus autoestados forma un continuo), pueden aprovecharse técnicas de la teoría de campos conformes para hallar su expresión en el estado fundamental [11, 20]. Éstas pueden extenderse al caso de varios intervalos [21] y a ciertos estados excitados [22].

En esta memoria aplicaremos estos métodos para evaluar la entropía de Rényi de un intervalo en distintas cadenas de fermiones y spines que se encuentran a una cierta temperatura. En este caso, su estado ya no es puro sino una mezcla estadística por lo que a las correlaciones cuánticas hay que añadir las de origen térmico. En [23] se analiza este mismo problema desde otro punto de vista.

En los párrafos anteriores hemos ido introduciendo ciertos términos técnicos que es necesario definir de forma precisa. Por ello, esta primera sección la dedicamos a introducir los conceptos generales de Mecánica Cuántica necesarios para trabajar con la entropía de Rényi. También veremos los resultados genéricos que la invariancia conforme permite obtener e introduciremos de manera general las cadenas de fermiones y de spines, así como la estrecha relación que existe entre ambas. A continuación, calcularemos constructivamente la entropía de Rényi en distintas cadenas; es decir, los resultados que obtengamos en el primer modelo, cadena de fermiones homogénea y local (sección 2), nos permitirán calcular esta magnitud en escaleras de fermiones (sección 3) y en el modelo de Ising cuántico (sección 4).

1.1 Operador densidad

En general, el estado de un sistema cuántico puede ser puro o mezcla. El primer caso corresponde a un vector normalizado $|\psi\rangle$ del espacio de estados \mathcal{H} del sistema. El segundo consiste en una colectividad estadística de estados puros $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^Q$ de manera que si $\{\lambda_i\}_{i=1}^Q$ es el conjunto de probabilidades de encontrarse en cada uno de ellos, el operador densidad

$$\rho = \sum_{i=1}^Q \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

caracteriza dicho estado. Este operador también permite dar cuenta del estado puro $|\psi\rangle$, para el cual la expresión anterior se reduce a $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$.

El operador densidad se caracteriza por ser hermítico ($\rho^\dagger = \rho$), de traza unidad ($\text{Tr } \rho = 1$) y semidefinido positivo (sus autovalores son no negativos). Si corresponde a un estado puro es un proyector; es decir, $\rho^2 = \rho$ y entonces $\text{Tr } \rho^2 = 1$. Por el contrario, para un estado mezcla $\rho^2 \neq \rho$ que, unido al hecho de que es semidefinido positivo, implica $\text{Tr } \rho^2 < 1$. Esta propiedad permite discernir la pureza de ρ .

Si O es un observable de nuestro sistema, su valor esperado $\langle O \rangle$ se obtiene a partir de ρ a través de

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(\rho O).$$

Cuando $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, la expresión anterior puede reexpresarse como $\langle O \rangle = \langle\psi| O |\psi\rangle$.

En esta memoria dividiremos los sistemas considerados en dos subsistemas X e Y de manera que el espacio de estados total \mathcal{H} puede escribirse como el producto tensorial $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_Y$ siendo \mathcal{H}_X y \mathcal{H}_Y los espacios de estados de X e Y respectivamente. El estado de X está dado por la matriz densidad reducida

$$\rho_X = \text{Tr}_Y \rho,$$

donde Tr_Y es la traza parcial al subsistema Y , que implica sumar a los estados correspondientes a Y . Es decir, si $\{|X_j\rangle\}$ e $\{|Y_j\rangle\}$ son bases de \mathcal{H}_X y \mathcal{H}_Y respectivamente, los elementos de matriz de ρ_X son

$$(\rho_X)_{nm} = \sum_j (\langle X_n | \otimes \langle Y_j |) \rho (|X_m\rangle \otimes |Y_j\rangle).$$

De manera análoga, el estado de Y queda caracterizado por $\rho_Y = \text{Tr}_X \rho$.

1.2 Entropía de Rényi

Se denomina entropía de Rényi de la matriz densidad reducida a

$$S_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr} \rho_X^\alpha,$$

donde $\alpha > 1$. Por definición, $S_\alpha(X) \geq 0$. Además, si d es la dimension de \mathcal{H}_X entonces el máximo valor que puede alcanzar $S_\alpha(X)$ es $\log d$. En el límite $\alpha \rightarrow 1$ obtenemos la entropía de von Neumann,

$$S_1(X) = -\text{Tr}(\rho_X \log \rho_X).$$

Para un estado puro, esta magnitud cuantifica el grado de entrelazamiento existente entre X e Y . Decimos que ambas partes se encuentran entrelazadas si el estado total $|\psi\rangle$ del sistema no puede factorizarse en el producto tensorial del estado de cada subsistema; es decir,

$$|\psi\rangle \neq |X\rangle \otimes |Y\rangle,$$

de manera que ρ_X y ρ_Y son estados mezcla y, por tanto, $S_\alpha(X) = S_\alpha(Y) > 0$. En caso contrario, el sistema es separable, ρ_X y ρ_Y son estado puros ($\rho_X = |X\rangle\langle X|$, $\rho_Y = |Y\rangle\langle Y|$), por lo que $S_\alpha(X) = S_\alpha(Y) = 0$.

Para un estado mezcla, la noción de entrelazamiento es menos clara y es necesario un criterio más general de separabilidad (como concepto opuesto a entrelazamiento). En este caso, la entropía de Rényi de la matriz densidad reducida no es única, $S_\alpha(X) \neq S_\alpha(Y)$.

Como hemos dicho al inicio, aquí estamos interesados en analizar el comportamiento de $S_\alpha(X)$ cuando el sistema se encuentra a una cierta temperatura $1/\beta$ (en unidades de la inversa de la constante de Boltzmann). Su estado es entonces una mezcla estadística

de los autoestados $\{|\varphi_i\rangle\}$ de su Hamiltoniano H cada uno con una probabilidad $\{e^{-\beta E_i}\}$ (colectividad canónica o estado de Gibbs) siendo E_i la energía de $|\varphi_i\rangle$. Por tanto,

$$\rho = \frac{\sum_i e^{-\beta E_i} |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|}{\sum_i e^{-\beta E_i}},$$

es decir,

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta H}, \quad (1.1)$$

donde $Z = \text{Tr } e^{-\beta H}$ es la función de partición. Ahora $S_\alpha(X)$ cuantifica tanto las correlaciones cuánticas como térmicas existentes entre X e Y .

1.3 Entropía de Rényi y teoría de campos conforme

La función de partición de un sistema estadístico unidimensional es equivalente al propagador de una teoría de campos definida sobre un espacio-tiempo bidimensional (una dimensión espacial+una dimensión temporal). En particular, a un sistema cuyo Hamiltoniano H es local y crítico le corresponde una teoría de campos invariante bajo transformaciones conformes; es decir, aquellas que preservan ángulos pero no distancias y entre las que se incluyen translaciones, rotaciones y reescalados. Aprovechando la simetría conforme de la teoría de campos subyacente es posible determinar la entropía de Rényi de un subsistema. En particular, si X es un intervalo de longitud L y se toma el límite termodinámico del sistema, Holzhey, Larsen y Wilczek [20] y Calabrese y Cardy [11] obtienen que en el estado fundamental (temperatura cero)

$$S_\alpha^{GS}(X) = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{c}{6} \log L + C_\alpha, \quad (1.2)$$

donde c es la denominada carga central, un parámetro que da el número de partículas sin masa de la correspondiente teoría de campos conforme.

A partir de este resultado y utilizando también la simetría conforme, puede encontrarse una expresión para $S_\alpha(X)$ a una temperatura finita $1/\beta$. La clave a la hora de emplear estas técnicas es observar que existe una clara analogía entre el estado térmico $\rho = Z^{-1} e^{-\beta H}$ y el operador evolución temporal $U(t) = e^{-itH}$ si efectuamos el cambio $it \mapsto \tau$ (rotación de Wick) con $\tau \in [0, \beta]$. El operador $U(t)$ da el propagador de la teoría: la amplitud de probabilidad de que el sistema evolucione de un cierto estado a otro, transcurrido un intervalo t de tiempo. En el formalismo de la integral de camino, dicha amplitud de probabilidad puede escribirse como la suma sobre todas las posibles configuraciones del sistema que llevan de un estado a otro. En teoría de campos, dicha suma está definida sobre el plano formado por el espacio-tiempo (minkowskiano). En base a la analogía entre el operador evolución temporal y el estado de Gibbs, los elementos de matriz de este último pueden también escribirse como una integral de caminos definida sobre una banda del espacio-tiempo (euclídeo) de anchura β . De esta forma, ρ_X se obtiene al unir los extremos de dicha banda (que corresponden con $\tau = 0$ y $\tau = \beta$) salvo aquellos puntos del espacio que pertenecen a X , obteniendo el cilindro de radio $\beta/(2\pi)$ de la figura 1.1. A temperatura nula, $\beta \rightarrow \infty$, dicho cilindro es un plano. En [11], Calabrese y Cardy determinan cómo cambia la entropía (1.2) al efectuar una transformación conforme sobre los puntos del plano. En particular, la aplicación $\exp(2\pi z/\beta)$ lleva los puntos z del plano a

un cilindro de radio $\beta/(2\pi)$, que corresponde a un sistema a temperatura $1/\beta$. Al efectuar dicha transformación sobre (1.2) se obtiene [11, 24],

$$S_\alpha(X) = \frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{c}{6} \log \left[\frac{\beta}{\pi} \sinh \left(\frac{\pi L}{\beta} \right) \right] + C'_\alpha. \quad (1.3)$$

Cuando $L \ll \beta$ recuperamos la expresión (1.2). Por el contrario, cuando $L \gg \beta$ tenemos que

$$S_\alpha(X) = \frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{c}{6} \frac{\pi L}{\beta} + \frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{c}{6} \log \left(\frac{\beta}{2\pi} \right) + C'_\alpha. \quad (1.4)$$

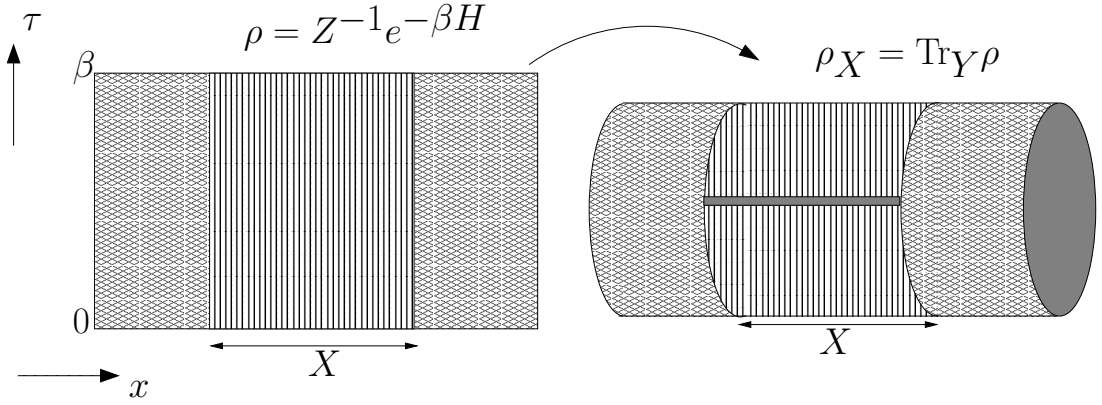


Figura 1.1: Los elementos de matriz de $\rho = Z^{-1}e^{-\beta H}$ están definidos sobre una banda de anchura β del espacio-tiempo euclídeo (x, τ) de la teoría de campos subyacente. La zona rayada verticalmente corresponde a los puntos del intervalo X elegido. Los elementos de ρ_X se obtienen al unir los bordes de la banda salvo aquellos puntos que pertenecen a X .

1.4 Cadenas de fermiones y de spines

En esta memoria vamos a trabajar con cadenas de fermiones y de spines. Ambos son sistemas cuánticos constituidos por una red unidimensional de N puntos o *sites* cuyo espacio de estados es \mathbb{C}^2 , de manera que el total \mathcal{H} es

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^{2^N}.$$

Dividiremos estos sistemas en dos partes X , formada por L sites contiguos, e Y , que contiene $N - L$ sites, y analizaremos su entropía de Rényi $S_\alpha(X)$ para L grande a una cierta temperatura $1/\beta$; es decir, cuando $\rho = Z^{-1}e^{-\beta H}$, donde H es el Hamiltoniano, que caracteriza las interacciones entre los distintos sites. De acuerdo a esta división, \mathcal{H} puede escribirse como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_Y,$$

donde

$$\mathcal{H}_X = \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^{2^L}, \quad \mathcal{H}_Y = \mathbb{C}^{2^{N-L}}.$$

Diremos que el sistema es una *cadena de fermiones* si sobre cada site n definimos los operadores fermiónicos de creación y aniquilación a_n, a_n^\dagger que satisfacen las reglas canónicas de anticonmutación

$$\{a_n^\dagger, a_m\} = \delta_{nm}, \quad \{a_n, a_m\} = \{a_n^\dagger, a_m^\dagger\} = 0, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (1.5)$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker. Por otra parte, se tratará de una *cadena de spines* si sobre cada site n definimos una variable de spin 1/2 a través de los operadores de Pauli σ_n^μ , con $\mu = x, y, z$, que siguen las reglas de conmutación

$$[\sigma_n^\mu, \sigma_m^\nu] = 2i\delta_{nm} \sum_{\tau=x,y,z} \varepsilon^{\mu\nu\tau} \sigma_n^\tau, \quad \mu, \nu = x, y, z, \quad (1.6)$$

siendo $\varepsilon^{\mu\nu\tau}$ el símbolo totalmente antisimétrico de Levi-Civita, y las relaciones de anti-conmutación

$$\{\sigma_n^\mu, \sigma_n^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Existe una estrecha relación entre las cadenas de fermiones y de spines. Los operadores escalera sobre cada site de una cadena de spines

$$\sigma_n^+ = \frac{1}{2}(\sigma_n^x + i\sigma_n^y), \quad \sigma_n^- = \frac{1}{2}(\sigma_n^x - i\sigma_n^y), \quad (1.8)$$

presentan reglas de anticonmutación,

$$\{\sigma_n^+, \sigma_n^-\} = 1, \quad \{\sigma_n^+, \sigma_n^+\} = \{\sigma_n^-, \sigma_n^-\} = 0,$$

análogas a las de los operadores a_n y a_n^\dagger sobre el site n . No obstante, las reglas de anticonmutación fermiónicas involucran, en general, operadores que actúan sobre distintos sites de la cadena. Como el conmutador de los operadores de Pauli sobre dos sites distintos es nulo, $[\sigma_n^\mu, \sigma_m^\nu] = 0$, entonces $\{\sigma_n^\mu, \sigma_m^\nu\} = 2\sigma_n^\mu \sigma_m^\nu$. Por tanto,

$$\{\sigma_n^+, \sigma_m^-\} = 2\sigma_n^+ \sigma_m^-, \quad \{\sigma_n^+, \sigma_m^+\} = 2\sigma_n^+ \sigma_m^+, \quad \{\sigma_n^-, \sigma_m^-\} = 2\sigma_n^- \sigma_m^-.$$

Es decir, los operadores escalera sobre distintos sites no siguen las reglas de anticonmutación de los operadores fermiónicos. De hecho, sus conmutadores,

$$[\sigma_n^+, \sigma_m^-] = [\sigma_n^+, \sigma_m^+] = [\sigma_n^-, \sigma_m^-] = 0.$$

son semejantes a los de los operadores bosónicos de creación y aniquilación. En definitiva, no podemos identificar directamente los operadores escalera con operadores fermiónicos o bosónicos. No obstante, si introducimos un cierto factor no local, podemos definir a partir de ellos un conjunto de operadores que sí satisfacen las reglas (1.5):

$$a_n := \prod_{j=1}^{n-1} (-\sigma_j^z) \sigma_n^-, \quad a_n^\dagger := \prod_{j=1}^{n-1} (-\sigma_j^z) \sigma_n^+. \quad (1.9)$$

Esta relación entre operadores de 1/2-spin y operadores fermiónicos se denomina *transformación de Jordan-Wigner* [25]. Además, teniendo en cuenta la regla $[\sigma_n^+, \sigma_n^-] = 2\sigma_n^z$,

$$\sigma_n^z = a_n^\dagger a_n - \frac{1}{2}.$$

Observamos que

$$a_n^\dagger a_n = \sigma_n^+ \sigma_n^-, \quad (1.10)$$

por lo que el número de a -fermiones es igual al número de 1/2-spines cuya componente z es $+1/2$. La transformación de Jordan-Wigner establece una equivalencia entre sistemas de fermiones y de spines que, en general, permite extender inmediatamente las propiedades que conozcamos de uno de los dos sistemas al otro; por ejemplo, a la hora de evaluar su espectro de energía o la entropía de Rényi de un intervalo de sites contiguos.

2. Cadenas homogéneas de fermiones

Comencemos considerando una cadena de fermiones cuyas interacciones están dadas por un Hamiltoniano homogéneo (es decir, invariante bajo translaciones) de la forma,

$$H_{\text{ferm}} = \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{N/2} J_l a_n^\dagger a_{n+l} + h.c., \quad (2.1)$$

donde $h.c.$ denota hermítico conjugado. Tomaremos que $a_{n+N} \equiv a_n$ y admitiremos que las constantes de acoplo J_l tomen valores complejos. Se dice además que este Hamiltoniano es *libre* puesto que existe una transformación que permite reexpresarlo en términos de otros operadores fermiónicos que se encuentran desacoplados. En dicha base el Hamiltoniano es diagonal. En nuestro caso, debido a su invariancia translacional basta una transformación de Fourier discreta para diagonalizarlo. En efecto, introduciendo los operadores fermiónicos

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{i\theta_k n} a_n; \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{N}; \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (2.2)$$

y sus adjuntos

$$b_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-i\theta_k n} a_n^\dagger,$$

nuestro Hamiltoniano queda expresado explícitamente en términos de fermiones libres

$$H_{\text{ferm}} = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \Lambda_k b_k^\dagger b_k.$$

En este caso, la relación de dispersión es

$$\Lambda_k = \sum_{l=1}^{N/2} J_l e^{i\theta_k l} + c.c., \quad (2.3)$$

donde $c.c.$ denota complejo conjugado. Los autoestados de este Hamiltoniano son los determinantes de Slater,

$$|\Psi_{\mathcal{K}}\rangle = \prod_{k \in \mathcal{K}} b_k^\dagger |0\rangle,$$

donde $|0\rangle$ representa el vacío, es decir $b_k |0\rangle = 0 \ \forall k$, y $\mathcal{K} \subset \{-N/2, \dots, N/2 - 1\}$ es el subconjunto de modos k ocupados en $|\Psi_{\mathcal{K}}\rangle$. De esta forma,

$$H_{\text{ferm}} |\Psi_{\mathcal{K}}\rangle = E_{\mathcal{K}} |\Psi_{\mathcal{K}}\rangle,$$

siendo $E_{\mathcal{K}} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \Lambda_k$ la energía del estado $|\Psi_{\mathcal{K}}\rangle$. El estado fundamental de H_{ferm} es

$$|GS\rangle = \prod_{\Lambda_k < 0} b_k^\dagger |0\rangle.$$

La entropía de Rényi de un intervalo es bien conocida para los estados $|\Psi_{\mathcal{K}}\rangle$. Inicialmente, Jin y Korepin [17] la calcularon para $|GS\rangle$ mediante el teorema de Fisher-Hartwig para matrices de Toeplitz. En [18] extendemos este resultado a cualquier autoestado de la energía. Aquí aplicaremos dicho teorema en el estado de Gibbs.

2.1 Entropía y matriz de correlaciones

En principio, si queremos calcular $S_\alpha(X)$ necesitamos obtener el espectro de autovalores de ρ_X , cuya dimensión es 2^L . En consecuencia, para L suficientemente grandes su diagonalización es, en general, inviable; aún empleando métodos numéricos. No obstante, si el estado de la cadena satisface la propiedad de descomposición de Wick es posible reducir la complejidad del cómputo de $S_\alpha(X)$. Esta propiedad consiste en que las funciones de correlación de $2J$ sites pueden expresarse en términos de las correlaciones de las posibles parejas; es decir,

$$\text{Tr}(\rho d_1 \dots d_{2J}) = \frac{1}{J!} \sum_{\sigma \in S'_{2J}} \prod_{j=1}^J (-1)^{|\sigma|} \text{Tr}(\rho d_{\sigma(2j-1)} d_{\sigma(j)}) \quad (2.4)$$

donde d_l es una combinación lineal $d_l = \alpha_l a_l^\dagger + \beta_l a_l$,

$$S'_{2J} = \{\sigma \in S_{2J} | \sigma(2j-1) < \sigma(2j), j = 1 \dots J\}$$

es el conjunto de permutaciones que preserva el orden en cada par y $|\sigma|$ es la signatura de la permutación σ . Lo interesante de que un estado de una cadena fermiónica cumpla esta propiedad es que permite construir ρ a partir de la matrices de correlaciones $C_{nm} = \text{Tr}(\rho a_n^\dagger a_m)$ y $F_{nm} = \text{Tr}(\rho a_n a_m)$ [8, 16]. Además, como ρ_X y ρ_Y heredan la propiedad de Wick, también pueden construirse a partir de la restricción de C y F al subsistema en cuestión.

El estado térmico del Hamiltoniano (2.1), $\rho_{\text{ferm}} = Z^{-1} e^{-\beta H_{\text{ferm}}}$, verifica la descomposición de Wick. En ese caso, como H_{ferm} no posee términos del tipo $a_n a_m$ y $a_n^\dagger a_m^\dagger$, tenemos que $F_{nm} = 0$ mientras que

$$C_{nm} = \frac{1}{N} \sum_k \frac{e^{i\theta_k(n-m)}}{e^{\beta\Lambda_k} + 1}. \quad (2.5)$$

Si escribimos esta expresión en forma matricial,

$$C = \Theta D \Theta^\dagger,$$

donde $(\Theta)_{kn} = e^{i\theta_k n} / \sqrt{N}$ y $(D)_{kk'} = (e^{\beta\Lambda_k} + 1)^{-1} \delta_{kk'}$. Dado que Θ es unitaria, los autovalores μ_k de la matriz C son iguales a los de la matriz D , que ya es diagonal. Por tanto,

$$\mu_k = (e^{\beta\Lambda_k} + 1)^{-1}, \quad (2.6)$$

y, de esta forma, podemos determinar ρ_{ferm} a partir de la matriz de correlaciones C . La base de esta idea es que el estado térmico cumple el teorema de Wick, propiedad que conservan ρ_X y ρ_Y que, por tanto, pueden construirse a partir de C restringida a X e Y respectivamente. Empleando la expresión (2.6), encontramos

$$\text{Tr}(\rho_{\text{ferm}}^\alpha) = \prod_k \frac{1 + e^{-\alpha\beta\Lambda_k}}{(1 + e^{-\beta\Lambda_k})^\alpha} = \prod_k [(1 - \mu_k)^\alpha + \mu_k^\alpha].$$

De esta forma,

$$S_\alpha(\rho_{\text{ferm}}) = \frac{1}{1-\alpha} \sum_k \log [(1 - \mu_k)^\alpha + \mu_k^\alpha],$$

y para $\alpha \rightarrow 1$ tenemos la entropía de von Neumann

$$S_1(\rho_{\text{ferm}}) = - \sum_k [(1 - \mu_k) \log(1 - \mu_k) + \mu_k \log \mu_k].$$

Si denotamos por C_X la restricción de C al subsistema X , su entropía de Rényi es

$$S_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \text{Tr} \log [(I - C_X)^\alpha + C_X^\alpha], \quad (2.7)$$

y cuando $\alpha \rightarrow 1$

$$S_1(X) = - \text{Tr} [(I - C_X) \log(I - C_X) + C_X \log C_X].$$

2.2 Cadenas locales: entropía y matrices de Toeplitz

Los elementos de matriz C_{nm} (2.5) únicamente dependen de la diferencia $n - m$. Es decir, todos los elementos de cada subdiagonal paralela a la diagonal principal de dicha matriz son iguales. Las matrices que satisfacen esta característica se denominan matrices de Toeplitz. Esta propiedad es heredada por cualquier submatriz C_X obtenida de la restricción a un subsistema X constituido por un único intervalo de sites contiguos. Sin embargo, esto no se cumple si tomamos un subsistema formado por sites no adyacentes. En la figura 2.1 representamos ambos casos.

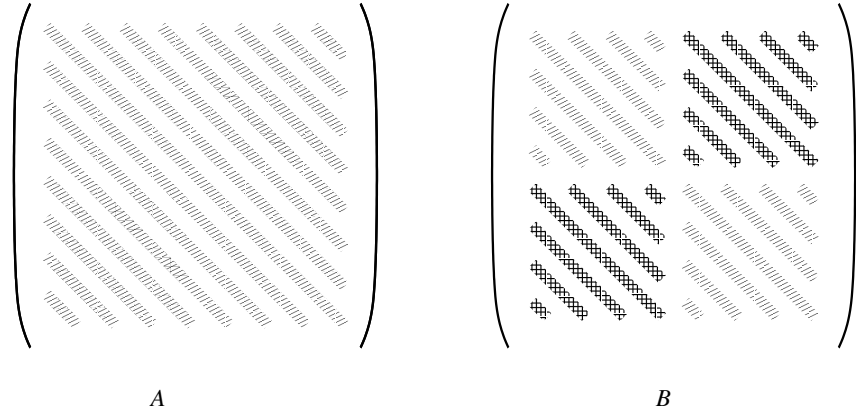


Figura 2.1: La matriz A es una matriz de Toeplitz: todos los elementos de cada subdiagonal paralela a la principal, representadas por las bandas rayadas, son iguales. La matriz B es una matriz por bloques en el que cada uno de ellos es una matriz de Toeplitz.

En esta sección consideraremos subsistemas similares a la situación expuesta en A en los que C_X es una matriz de Toeplitz. Aprovecharemos esta propiedad para obtener una expansión de la entropía de X con su longitud L en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ cuando el Hamiltoniano (2.1) es *local*; es decir, sus acoplos J_l decaen rápidamente con l ,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J_l l^\gamma = 0, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}.$$

En el límite termodinámico podemos efectuar el paso al continuo $\theta_k = 2\pi k/N \rightarrow \theta \in [-\pi, \pi]$ de manera que la relación de dispersión (2.3) para un Hamiltoniano local,

$$\Lambda(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} J_l e^{i\theta l} + c.c.,$$

es una función periódica, continua y suave. Si los acoplos son tales que $\Lambda(\theta)$ nunca se anula diremos que la cadena es *no crítica*. Si, por el contrario, tiene un número par ν de ceros en los que cambia de signo, consideraremos que es *crítica*.

Si introducimos la matriz $V_X = 2C_X - I$, que también es Toeplitz,

$$V_{nm} = -\frac{1}{N} \sum_k \tanh\left(\frac{\beta\Lambda_k}{2}\right) e^{i\theta_k(n-m)},$$

la expresión (2.7) queda de la forma

$$S_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \text{Tr} \log \left[\left(\frac{I + V_X}{2} \right)^\alpha + \left(\frac{1 - V_X}{2} \right)^\alpha \right]. \quad (2.8)$$

En el límite termodinámico, podemos reemplazar en los elementos V_{nm} la suma discreta por una integral tal que

$$V_{nm} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tanh\left(\frac{\beta\Lambda(\theta)}{2}\right) e^{i\theta(n-m)} d\theta.$$

Si aplicamos ahora el teorema de los residuos de Cauchy en (2.8), escribimos $S_\alpha(X)$ en términos de la integral de contorno

$$S_\alpha(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f_\alpha(1 + \varepsilon, \lambda) \frac{d \log \det(\lambda I - V_X)}{d\lambda} d\lambda, \quad (2.9)$$

donde

$$f_\alpha(x, y) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left[\left(\frac{x+y}{2} \right)^\alpha + \left(\frac{x-y}{2} \right)^\alpha \right],$$

y el contorno \mathcal{C} rodea a los polos del integrando, que son los autovalores v_l de V_X . El contorno de integración, los polos y los cortes de la función f_α están representados en la figura 2.2.

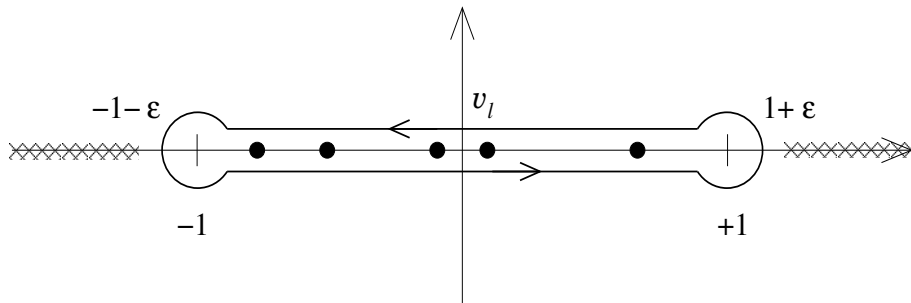


Figura 2.2: Contorno de integración \mathcal{C} , cortes (\times) y polos (\bullet) para el cálculo de $S_\alpha(X)$. Los cortes de la función f_α se extienden a $\pm\infty$.

El teorema de Fisher-Hartwig [26, 27] permite obtener una expansión del determinante de la matriz de Toeplitz $\lambda I - V_X$ en términos de L en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$. Gracias a este resultado, podemos determinar explícitamente la dependencia de $S_\alpha(X)$ con la longitud del intervalo,

$$S_\alpha(X) = A_\alpha(\beta)L + C_\alpha(\beta) + \cdots, \quad (2.10)$$

donde los puntos suspensivos expresan los restantes términos de la expansión, que se anulan en el límite de gran L . Puede comprobarse numéricamente que este desarrollo es únicamente válido cuando $\beta \ll L$, como también se desprende de la comparación con el resultado conforme (1.3).

El coeficiente de la expansión correspondiente al término lineal es de la forma

$$A_\alpha(\beta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi^2 i} \oint_{\mathcal{C}} f_\alpha(1 + \varepsilon, \lambda) \frac{d}{d\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \log[\lambda + \tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)] d\lambda,$$

que puede simplificarse,

$$A_\alpha(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\alpha[1, \tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)] d\theta. \quad (2.11)$$

El término de la expansión independiente de L es

$$C_\alpha(\beta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f_\alpha(1 + \varepsilon, \lambda) \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k s_k s_{-k}, \quad (2.12)$$

donde s_k denota al k -ésimo modo de Fourier del $\log[\lambda + \tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)]$,

$$s_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log[\lambda + \tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)] e^{-ik\theta} d\theta.$$

En este caso, no hemos encontrado un camino para deshacernos de la integral sobre el contorno \mathcal{C} y llegar a una expresión que al menos pueda calcularse de manera numérica para cada β , como sucede con $A_\alpha(\beta)$.

Cuando $\alpha \rightarrow 1$, entropía de von Neumann, encontramos

$$S_1(X) = -\frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [(1 - n_{\text{FD}}) \log(1 - n_{\text{FD}}) + n_{\text{FD}} \log n_{\text{FD}}] d\theta + C_1(\beta) + \dots,$$

donde

$$n_{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta\Lambda(\theta)} + 1}$$

es la distribución de Fermi-Dirac. El factor que acompaña a L es la densidad de entropía termodinámica de un gas de fermiones [28]. También puede comprobarse que en la entropía de *toda* la cadena no tenemos el término $C_\alpha(\beta)$. Por tanto, podemos concluir que $A_\alpha(\beta)$ se debe exclusivamente a las correlaciones térmicas mientras que $C_\alpha(\beta)$ refleja la dependencia con la temperatura de las correlaciones cuánticas entre X e Y . Además, éste último sigue la *ley del área*. Esta propiedad establece que el entrelazamiento en el estado fundamental crece con el número de enlaces que se rompen cuando aislamos el subsistema. En sistemas unidimensionales, este resultado se traduce en que la entropía es independiente del tamaño del subsistema. Por contra, el término $A_\alpha(\beta)L$ sigue una *ley de volumen* pues es proporcional al tamaño del subsistema.

En el límite de alta temperatura, $\beta \rightarrow 0$, tenemos que $f_\alpha(1, 0) = \log 2$, y, por tanto, $A_\alpha(0) = \log 2$. Además, $C_\alpha(0) = 0$. En consecuencia, únicamente existen correlaciones de naturaleza térmica,

$$S_\alpha(X) = L \log 2, \quad \beta = 0.$$

Como en este caso la dimensión del espacio de estados de X es 2^L , el máximo valor que puede tomar $S_\alpha(X)$ es justamente $L \log 2$. Cuando $\beta \rightarrow 0$, la expresión general para $S_\alpha(X)$ que se obtiene mediante la teoría conforme (1.3) diverge. La razón es que el espacio de estados de una teoría de campos conforme es de dimensión infinita. Por tanto, esta técnica no es la apropiada para tratar con sistemas fermiónicos o de spines a alta temperatura, donde el comportamiento de la entropía depende de la dimensión del espacio de estados.

2.2.1 Límite $\beta \rightarrow \infty$

A diferencia de lo que sucede a alta temperatura, en el límite opuesto $\beta \rightarrow \infty$ el comportamiento de $S_\alpha(X)$ depende de si la relación de dispersión $\Lambda(\theta)$ cambia o no de signo.

Cuando la cadena no es crítica y $\beta \rightarrow \infty$,

$$S_\alpha(X) \approx \frac{\alpha}{\alpha - 1} e^{-\beta m} \left(1 - \frac{e^{(1-\alpha)\beta m}}{\alpha} \right) L, \quad \alpha > 1,$$

donde m es el valor mínimo que toma $\Lambda(\theta)$ que corresponde con el gap entre la energía del estado fundamental y el primer excitado y es inversamente proporcional a la longitud de correlación del sistema. Cuando $\alpha \rightarrow 1$,

$$S_1(X) \approx (1 + \beta m) e^{-\beta m} L.$$

Por tanto, para una cadena no crítica la entropía de un intervalo decae exponencialmente a cero a baja temperatura. De hecho, en el estado fundamental, $|GS\rangle = |0\rangle$, se anula de manera exacta [18].

En una cadena crítica, como hemos dicho, existen una o más parejas de modos críticos o de Fermi en los que la relación de dispersión $\Lambda(\theta)$ cambia de signo. Supongamos que tenemos ν modos críticos θ_i , $i = 1, \dots, \nu$, en los que $\Lambda(\theta_i) = 0$. Al igual que sucede en el estado fundamental, este hecho modifica radicalmente el comportamiento de $S_\alpha(X)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$ ya que existen modos $\theta \in (\theta_i - \delta_i, \theta_i + \delta_i)$ para los cuales $A_\alpha(\beta)$ no decae exponencialmente a cero con β .

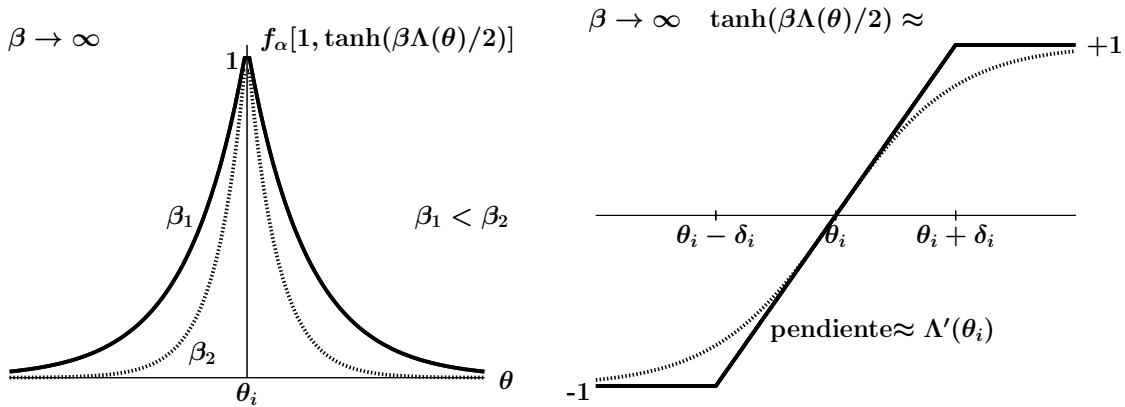


Figura 2.3: A la izquierda, representamos la aproximación a baja temperatura, $\beta \rightarrow \infty$, de la función $f_\alpha[1, \tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)]$ en el entorno de un modo crítico θ_i . A la derecha, aproximación considerada en los cálculos para la función $\tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)$ en las proximidades de θ_i cuando $\beta \rightarrow \infty$.

Como se desprende de la figura 2.3 (izquierda), la anchura de cada entorno es inversamente proporcional a $\beta|\Lambda'(\theta_i)|$, donde $\Lambda'(\theta_i)$ denota la derivada de la relación de dispersión en θ_i ; es decir, la velocidad de Fermi de θ_i . Por lo tanto, $\delta_i = 2\pi/(\beta|\Lambda'(\theta_i)|)$. Para valores de θ suficientemente alejados de los modos críticos tenemos una situación idéntica a la del caso no crítico.

De acuerdo con estas ideas, dividamos la integral del término lineal (2.11) en ν piezas,

$$A_\alpha(\beta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\nu} \int_{\theta_i-\delta_i}^{\theta_i+\delta_i} f_\alpha[1, \tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)] d\theta + \dots,$$

donde los puntos suspensivos denotan el resto de partes cuyo integrando decae exponencialmente a cero a baja temperatura. Si efectuamos el cambio de variable $\xi = \tanh(\beta\Lambda/2)$ y consideramos la aproximación de la figura 2.3 derecha para la función $\tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)$ en cada cambio de signo de $\Lambda(\theta)$ cuando $\beta \rightarrow \infty$, tenemos

$$A_\alpha(\beta) \approx \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\pi\beta|\Lambda'(\theta_i)|} \int_{-1}^1 \frac{f_\alpha(1, \xi)}{(1-\xi^2)} d\xi + \dots. \quad (2.13)$$

La integral de la expresión (2.13) puede ser resuelta analíticamente mediante el cambio de variable $\xi = (t-1)/(t+1)$,

$$\frac{1}{1-\alpha} \int_{-1}^1 \log \left[\left(\frac{1+\xi}{2} \right)^\alpha + \left(\frac{1-\xi}{2} \right)^\alpha \right] \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \frac{\pi^2}{12} \frac{\alpha+1}{\alpha}. \quad (2.14)$$

En definitiva, si $\Lambda(\theta)$ posee ν cambios de signo en θ_i , $i = 1, \dots, \nu$, entonces

$$A_\alpha(\beta) \approx \frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{\pi}{12\beta} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{|\Lambda'(\theta_i)|} + \dots, \quad \beta \rightarrow \infty,$$

donde los puntos suspensivos denotan términos que decaen exponencialmente a cero.

El problema a la hora de tratar con el término independiente de L , $C_\alpha(\beta)$, se encuentra en determinar la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k s_k s_{-k}$, donde, recordemos, s_k representa el k -ésimo modo de Fourier de la función $\log[\lambda + \tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)]$.

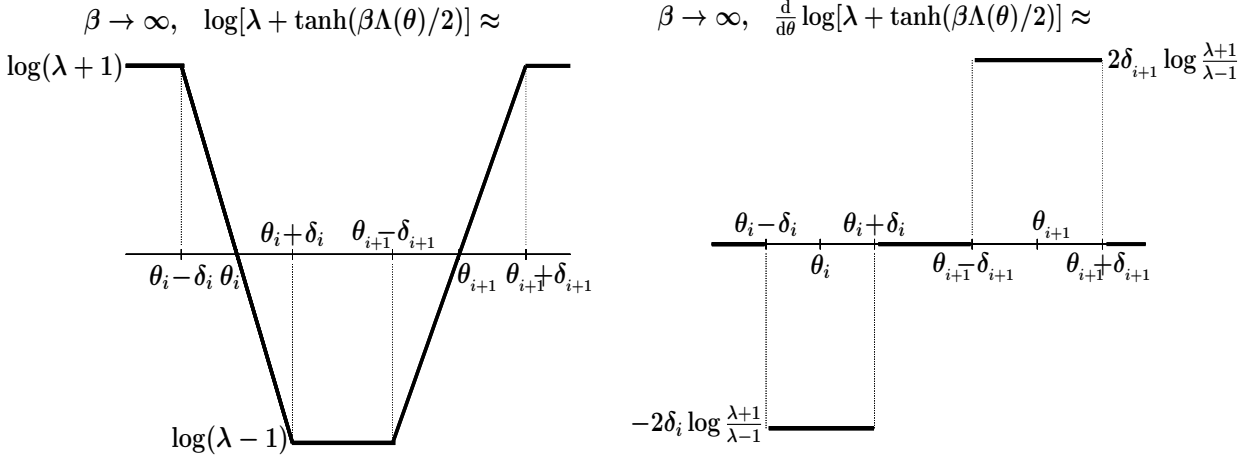


Figura 2.4: A la izquierda, representamos la aproximación de la función $\log[\lambda + \tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)]$ que consideramos a la hora de obtener $C_\alpha(\beta)$ a bajas temperaturas, $\beta \rightarrow \infty$. Aquí hemos dibujado únicamente dos modos críticos θ_i y θ_{i+1} consecutivos tales que $\Lambda'(\theta_i) < 0$ y $\Lambda'(\theta_{i+1}) > 0$. A la derecha, representamos la derivada en θ de la aproximación de la izquierda que empleamos para calcular en primera aproximación los modos de Fourier iks_k .

Observemos que iks_k es el modo k -ésimo de $\frac{d}{d\theta} \log[\lambda + \tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)]$. En el límite $\beta \rightarrow \infty$, la función $\log[\lambda + \tanh(\beta\Lambda(\theta)/2)]$ puede tomarse constante en θ salvo en los entornos de cada cero de $\Lambda(\theta)$, para los cuales, en primera aproximación la consideraremos lineal, tal y como refleja la figura 2.4 izquierda. De esta forma, su primera derivada es nula salvo para los modos $\theta \in (\theta_i - \delta_i, \theta_i + \delta_i)$, en los cuales es constante. Calculando iks_k con dicha aproximación y quedándonos al sumar la serie con los términos dominantes cuando $\beta \rightarrow \infty$ se llega a

$$\sum_{k=1}^{\infty} ks_k s_{-k} \approx \frac{1}{4\pi^2} \left[\log \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right) \right]^2 \sum_{i=1}^{\nu} \log \left(\frac{2\pi}{\beta |\Lambda'(\theta_i)|} \right) + \dots; \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Llevando este resultado a la expresión de $C_\alpha(\beta)$, (2.12),

$$C_\alpha(\beta) = \frac{1}{8\pi^3 i} \sum_{i=1}^{\nu} \log \left(\frac{2\pi}{\beta |\Lambda'(\theta_i)|} \right) I_\alpha,$$

donde

$$I_\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\mathcal{C}} f_\alpha(1 + \varepsilon, \lambda) \frac{d}{d\lambda} \left[\log \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right) \right]^2 d\lambda.$$

Existen distintas formas de proceder con esta integral. La más adecuada es efectuar una integración por partes puesto que eliminamos directamente las divergencias que de otro modo aparecen. Si a continuación integramos a lo largo del contorno \mathcal{C} llegamos a una integral idéntica a (2.14). De esta manera,

$$C_\alpha(\beta) = \frac{\alpha+1}{12\alpha} \sum_{i=1}^{\nu} \log \left(\frac{\beta |\Lambda'(\theta_i)|}{2\pi} \right) + \dots, \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Agrupando los resultados anteriores, tenemos que en una cadena fermiónica local cuya relación de dispersión posee ν cambios de signo en los modos θ_i , $i = 1, \dots, \nu$, la entropía de Rényi de un intervalo a baja temperatura, $\beta \rightarrow \infty$, es en primera aproximación

$$S_\alpha(X) \approx \frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{\pi}{12\beta} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{|\Lambda'(\theta_i)|} L + \frac{\alpha+1}{12\alpha} \sum_{i=1}^{\nu} \log \left(\frac{\beta |\Lambda'(\theta_i)|}{2\pi} \right) + \dots,$$

que escala en L y β de manera similar a la prevista por la expresión conforme (1.4) cuando $\beta \ll L$. De hecho, salvo por la constante C'_α , nuestro resultado se reduce a (1.4) cuando las velocidades de Fermi $|\Lambda'(\theta_i)|$ valen la unidad. La carga central c es igual al número de parejas de cambios de signo de $\Lambda(\theta)$, de forma que cada uno de ellos puede identificarse con una de las partículas sin masa de la teoría de campos conforme subyacente.

A diferencia del caso no crítico, aquí $S_\alpha(X)$ no tiende de manera continua a su expresión para el estado fundamental de H_{ferm} local y crítico, $|GS\rangle = \prod_{\Lambda_k < 0} b_k^\dagger |0\rangle$. En efecto, de acuerdo con [18], para este estado

$$S_\alpha^{GS}(X) = \frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{\nu}{12} \log L + \nu \Upsilon_\alpha + \sum_{1 \leq i \neq j \leq \nu} \frac{\log[2 - 2 \cos(\theta_i - \theta_j)]}{6}, \quad (2.15)$$

donde

$$\Upsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{df_\alpha(1, \lambda)}{d\lambda} \log \left[\frac{\Gamma(1/2 - i\omega(\lambda))}{\Gamma(1/2 + i\omega(\lambda))} \right] d\lambda, \quad \omega(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right|,$$

es un término universal, que no varía bajo pequeñas modificaciones de los acoplos, y Γ es la función Gamma de Euler.

2.2.2 Ejemplo: Tight Binding Model

Un caso particular de Hamiltoniano local de la forma (2.1) es el del *Tight Binding Model*,

$$H_{\text{TBM}} = \sum_{n=1}^N [J_0 a_n^\dagger a_n + J_1 a_n^\dagger (a_{n-1} + a_{n+1})], \quad (2.16)$$

suponiendo los acoplos J_0 y J_1 reales y $J_1 < 0$. Su relación de dispersión es

$$\Lambda_{\text{TBM}}(\theta) = J_0 + 2J_1 \cos(\theta).$$

Si $|J_0| > 2|J_1|$, no tiene ningún cero. Por el contrario si $|J_0| < 2|J_1|$ hay dos valores de θ

$$\theta_1 = \arccos \left(-\frac{J_0}{2J_1} \right) \quad \text{y} \quad \theta_2 = -\theta_1,$$

para los cuales cambia de signo; es decir, $\nu = 2$. De acuerdo con los resultados de la sección anterior, en el límite a baja temperatura $\beta \rightarrow \infty$ la entropía de von Neumann de un intervalo L es

$$S_1^{\text{TBM}}(X) \approx [1 + \beta(J_0 - 2J_1)] e^{-\beta(J_0 - 2J_1)} L, \quad \text{si} \quad |J_0| > 2|J_1|,$$

ya que aquí $m = J_0 - 2J_1$, y

$$S_1^{\text{TBM}}(X) \approx \underbrace{\frac{\pi}{3\beta\sqrt{(2J_1)^2 - J_0^2}} L}_{A_1^{\text{TBM}}} + \underbrace{\frac{1}{3} \log \left(\frac{\beta\sqrt{(2J_1)^2 - J_0^2}}{2\pi} \right)}_{C_1^{\text{TBM}}}, \quad \text{si} \quad |J_0| < 2|J_1|. \quad (2.17)$$

Observemos que, salvo por el término constante aditivo C'_1 , este resultado es el que se obtiene de la simetría conforme cuando $L \gg \beta$ (1.4) con carga central $c = 1$. Podemos determinar la constante C'_1 para este modelo mediante un estudio numérico de $S_1(X)$. Para ello, como el estado térmico satisface la descomposición de Wick, basta con obtener la matriz de correlaciones C (2.5) para cada tamaño L de intervalo y temperatura $1/\beta$, diagonalizarla y aplicar la expresión (2.7). Para hallar el espectro de autovalores, hemos empleado la rutina correspondiente a matrices complejas hermíticas incluida en GNU Scientific Library [29] escrita para el lenguaje C.

Si tomamos $J_1 = -1/2$ el Hamiltoniano (2.16) será crítico cuando $|J_0| < 1$. En primer lugar, consideremos $J_0 = 0$, fijemos el valor de la temperatura $1/\beta$ y evaluemos $S_1(X)$ modificando la longitud del intervalo entre $L = 500$ y $L = 4500$ sites en una cadena con un total de $N = 10000$ sites. Los puntos de la figura 2.5 representan los resultado numéricos para distintos valores de β . La tabla 2.1 recoge los coeficientes del ajuste a una función lineal $aL + c$ de cada serie de puntos numéricos con β fijo. También contiene los valores numéricos de las aproximaciones de A_1^{TBM} y C_1^{TBM} cuando $\beta \rightarrow \infty$. La última columna representa la diferencia entre c y C_1^{TBM} , que es un valor prácticamente idéntico al que obtenemos para el término independiente de la entropía de von Neumann de un intervalo en el estado fundamental de (2.16) cuando $J_0 = 0$ y $J_1 = -1/2$, $|GS\rangle = \prod_{|k| < N/4} b_k^\dagger |0\rangle$,

$$S_1^{GS}(X) = 1/3 \log L + 0.726067... \quad (2.18)$$

con $\Upsilon_1 = 0.247509...$

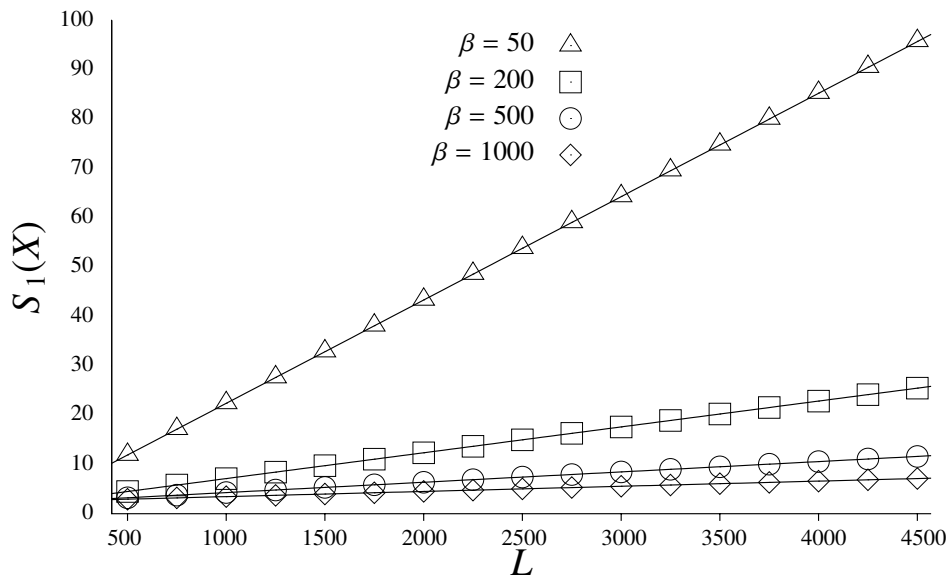


Figura 2.5: entropía de von Neumann, $S_1(X)$, de un intervalo X de un TBM (2.16) con $J_0 = 0$ y $J_1 = -1/2$ en función de su longitud L para distintas temperaturas $1/\beta$. Los puntos representan los valores obtenidos numéricamente mientras que las rectas corresponden a la expresión analítica (2.17) para cada valor de β más la constante aditiva $C_1^{\text{TBM}} = 0.726067...$

β	Ajuste		Analítico $\beta \rightarrow \infty$		
	$a (\times 10^{-3})$	c	$A_1^{\text{TBM}} (\times 10^{-3})$	C_1^{TBM}	$C_1^{\text{TBM}} = c - C_1^{\text{TBM}}$
50	20.9631	1.41691	20.9440	0.69138	0.72553
200	5.23624	1.87951	5.23599	1.15348	0.72603
500	2.09445	2.18497	2.09440	1.45891	0.72606
1000	1.04877	2.41110	1.04720	1.68996	0.72115

Tabla 2.1: a y c son los coeficientes del ajuste a la función lineal $aL + c$ de los valores numéricos de $S_1(X)$ que obtenemos a una temperatura fija $1/\beta$ variando la longitud L de un intervalo de un TBM (2.16) con $J_0 = 0$ y $J_1 = -1/2$. Las columnas A_1^{TBM} y C_1^{TBM} contienen los correspondientes valores numéricos de estos coeficientes para $\beta \rightarrow \infty$ dados por (2.17). Obsérvese que la resta $c - C_1^{\text{TBM}}$ es un número cercano al término constante de la entropía del intervalo en el estado fundamental (2.18).

En la figura 2.5 las líneas continuas representa la aproximación (2.17) más la corrección aditiva $C_1^{\text{TBM}} = 0.726067\dots$. En vista de estos resultados, conjeturamos que C_1^{TBM} es el término independiente de la entropía de un intervalo en el estado fundamental (2.15) del Hamiltoniano (2.16) crítico, $|GS\rangle = \prod_{\Lambda_k < 0} b_k^\dagger |0\rangle$,

$$C_1^{\text{TBM}} = 0.4950179\dots + \frac{1}{6} \log[2 - 2\cos(2\theta_1)]. \quad (2.19)$$

Para comprobar esta hipótesis, estudiamos numéricamente $S_1(X)$ para distintos valores de $J_0 < 1$ con $J_1 = -1/2$, variando L entre 500 y 4500 sites y fijando la temperatura en $\beta = 200$. En la tabla 2.2 recogemos los coeficientes a y c del ajuste de los valores numéricos de $S_1(X)$ que obtenemos para cada J_0 , comparándolos con los correspondientes coeficientes A_1^{TBM} y $C_1^{\text{TBM}} + C_1^{\text{TBM}}$.

J_0	Ajuste		Analítico $\beta \rightarrow \infty$	
	$a (\times 10^{-3})$	c	$A_1^{\text{TBM}} (\times 10^{-3})$	$C_1^{\text{TBM}} + C_1^{\text{TBM}}$
0.1	5.26263	1.87615	5.26237	1.87620
0.3	5.48920	1.84805	5.48881	1.84811
0.5	6.04687	1.78356	6.04600	1.78365
0.7	7.33500	1.65487	7.33185	1.65510
0.9	12.0641	0.247412	12.0122	1.32597

Tabla 2.2: a y c son los parámetros que obtenemos al ajustar a una dependencia lineal $aL + c$ los valores numéricos que obtenemos para $S_1(X)$ al variar el tamaño L del intervalo X de un TBM a $\beta = 200$ para cada acoplo J_0 , con $J_1 = -1/2$. Las columnas A_1^{TBM} y $C_1^{\text{TBM}} + C_1^{\text{TBM}}$ recogen los valores que da la expresión (2.17) para los dos primeros y (2.19) en el caso de C_1^{TBM} .

Como se desprende de la tabla 2.2, los resultados numéricos corroboran la conjetura propuesta salvo para $J_0 = 0.9$. A medida que aumentamos este acoplo y nos aproximamos al valor para el cual el Hamiltoniano deja de ser crítico (esto es, $J_0 = 1$), los ceros de $\Lambda_{\text{TBM}}(\theta)$ se van acercando. Hemos comprobado numericamente que la expresión (2.19) para el término independiente de L de la entropía del estado fundamental no es válida cuando θ_1 y $-\theta_1$ están suficientemente cerca, como sucede en el caso $J_0 = 0.9$.

3. Escaleras de fermiones

Los resultados que hemos obtenido para la entropía de un intervalo de una cadena homogénea y local de fermiones a una cierta temperatura van a servirnos para obtener la entropía de partes de sistemas más complicados. En esta sección consideraremos una escalera de fermiones en forma de prisma con q aristas o railes cuyas interacciones están descritas por el Hamiltoniano

$$H_{\text{ladder}} = \sum_{n=1}^N \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{l=0}^{N/(2q)} J_{p,l} a_n^\dagger a_{n+pN/q+l} + h.c. \quad (3.1)$$

Supondremos que los acoplos $J_{p,l}$ decaen rápidamente en l . Un ejemplo de este tipo de escaleras con $q = 3$ y $J_{p,l} = 0$ para $l \geq 2$ se muestra en la figura 3.1 izquierda.

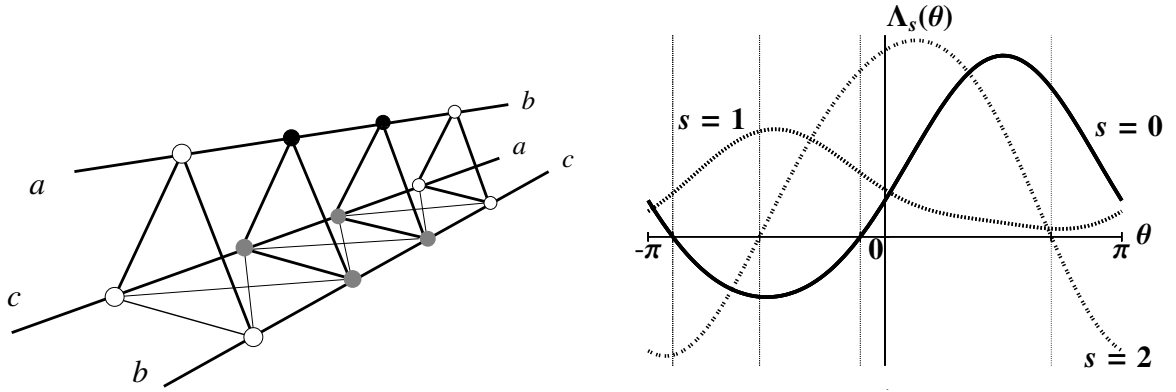


Figura 3.1: A la izquierda, representación de una escalera de fermiones (3.1) de tres railes, $q = 3$. Los extremos de cada rail con la misma letra están unidos, formando un anillo retorcido. Por simplicidad, únicamente hemos dibujado (con líneas más finas) las interacciones a segundos vecinos de la cara inferior del prisma. Los sites oscuros corresponden al fragmento X elegido. A la derecha, representamos las bandas de la relación de dispersión de una posible escalera de fermiones (3.1) con tres railes, $q = 3$.

Este Hamiltoniano también puede interpretarse como una cadena unidimensional (2.1) con acoplos no locales. Por tanto, es diagonalizable introduciendo los operadores b_k (2.2) y sus autoestados son los determinantes de Slater $|\Psi_{\mathcal{K}}\rangle$. En este caso, la relación de dispersión del sistema,

$$\Lambda_k = \sum_{p,l} J_{p,l} e^{2\pi i k(pN/q+l)/N} + h.c.,$$

puede descomponerse en q bandas o ramas. En efecto, si tomamos $k = s$ en mod q tenemos que

$$\Lambda_k = \sum_{p=0}^{q-1} e^{2\pi i s p/q} \sum_{l=0}^{N/(2q)} J_{p,l} e^{2\pi i k l/N} + h.c.,$$

y, en el límite termodinámico $2\pi k/N \rightarrow \theta$,

$$\Lambda_s(\theta) = \sum_{p=0}^{q-1} e^{2\pi i s p/q} \sum_{l=0}^{\infty} J_{p,l} e^{i\theta l} + h.c.$$

Por tanto, hay una relación de dispersión independiente $\Lambda_s(\theta)$ para cada valor de $s = 0, \dots, q-1$. Cada banda es una función periódica, continua y suave que puede tener un

número par ν_s de cambios de signo. En la figura 3.1 derecha mostramos un caso genérico para $q = 3$.

En las escaleras resulta natural elegir como subsistema X un fragmento de longitud L de la misma; esto es, q intervalos de tamaño L situados cada uno de ellos en uno de los railes y perfectamente enfrentados entre si. Desde el punto de vista de una cadena unidimensional no local, esto equivale a tomar q intervalos disjuntos de longitud L separados entre si por una distancia $N/q - L$. Por tanto,

$$X = \bigcup_{p=0}^{q-1} X_p,$$

donde $X_p = \{1 + pN/q, \dots, L + pN/q\}$ es el intervalo de sites contiguos de longitud L situado en el rail p -ésimo. Nuestro objetivo es calcular la entropía de Rényi de X en el límite termodinámico de una escalera que se encuentra a una cierta temperatura $1/\beta$.

En principio podemos proceder como en el caso de una cadena local, introduciendo la matriz V_X , de dimensión qL , que se obtiene de restringir

$$V_{nm} = -\frac{1}{N} \sum_k \tanh\left(\frac{\beta\Lambda_k}{2}\right) e^{i\theta_k(n-m)}$$

a los índices que pertenecen a X . Sin embargo, esta matriz ya no es Toeplitz. Es una matriz por bloques en la que cada bloque es Toeplitz (situación B de la figura 2.1). Por tanto, no podemos aplicar directamente el teorema de Fisher-Hartwig como hicimos para un intervalo de la cadena local. No obstante, teniendo en mente la separación en ramas de la relación de dispersión, descompongamos V de la siguiente forma

$$V = \frac{1}{q} \sum_{s=0}^{q-1} V_s,$$

donde

$$(V_s)_{nm} = -\frac{q}{N} \sum_{k=s \pmod{q}} \tanh\left(\frac{\beta\Lambda_k}{2}\right) e^{i\theta_k(n-m)}.$$

Observemos que tenemos la propiedad de simetría

$$(V_s)_{n+pN/q, m+p'N/q} = e^{2\pi i s(p-p')/q} (V_s)_{n, m}. \quad (3.2)$$

Aprovechándola, podemos escribir la matriz V_s retringida a X , $V_{s,X}$, como

$$V_{s,X} = V_{s,X_0} \otimes T_s = \begin{pmatrix} V_{s,X_0} & e^{2\pi i s/q} V_{s,X_0} & \cdots \\ e^{-2\pi i s/q} V_{s,X_0} & V_{s,X_0} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde V_{s,X_0} es la restricción de V_s al intervalo $X_0 = \{1, \dots, L\}$ y T_s son matrices con elementos

$$(T_s)_{pp'} = e^{2\pi i s(p-p')/q}, \quad p, p' = 0, \dots, q-1.$$

De esta forma tenemos que

$$V_X = \frac{1}{q} \sum_{s=0}^{q-1} V_{s,X_0} \otimes T_s.$$

Las matrices T_s conmutan entre si por lo que existe una transformación que las diagonaliza simultáneamente

$$(UT_s U^{-1})_{pp'} = q \delta_{s,p} \delta_{s,p'}$$

donde U es la matriz unitaria de elementos

$$U_{pp'} = \frac{1}{\sqrt{q}} e^{2\pi i p p' / q}.$$

Entonces,

$$(I \otimes U) V_X (I \otimes U^{-1}) = \begin{pmatrix} V_{0,X_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_{1,X_0} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_{q-1,X_0} \end{pmatrix}.$$

Las matrices V_{s,X_0} sí que son matrices de Toeplitz tales que, en el límite termodinámico,

$$(V_s)_{nm} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tanh\left(\frac{\beta \Lambda_s(\theta)}{2}\right) e^{i\theta(n-m)} d\theta.$$

El espectro de una matriz suma directa de matrices es la unión de los espectros de cada matriz de la suma directa. Por tanto,

$$S_\alpha(X) = \sum_{s=0}^{q-1} S_{\alpha,s}(X_0), \quad (3.3)$$

donde

$$S_{\alpha,s}(X_0) = \frac{1}{1-\alpha} \text{Tr} \log \left[\left(\frac{I + V_{s,X_0}}{2} \right)^\alpha + \left(\frac{I - V_{s,X_0}}{2} \right)^\alpha \right],$$

que puede calcularse a partir de los resultados de la cadena local. El estado fundamental de la escalera, $\prod_{\Lambda_{s,k} < 0} b_k^\dagger |0\rangle$, también satisface la simetría (3.2). En ese caso, cada $S_{\alpha,s}^{GS}(X_0)$ está dado por la expresión (2.15) aplicada a la banda $\Lambda_s(\theta)$.

3.1 Ejemplo: escalera de dos railes $q = 2$

El caso más sencillo de escalera de fermiones es la de dos railes, $q = 2$, descrita por el Hamiltoniano

$$H_{\text{ladder}} = \sum_{n=1}^N (J_0 a_n^\dagger a_n + J_1 a_n^\dagger a_{n+1} + J_{N/2} a_n^\dagger a_{n+N/2}) + h.c. \quad (3.4)$$

Consideremos que los acoplos toman valores reales. En este caso la relación de dispersión,

$$\Lambda_k = 2J_0 + 2J_1 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + 2(-1)^k J_{N/2},$$

posee dos bandas. Una correspondiente a los momentos k pares,

$$\Lambda_{k\text{par}} = 2(J_0 + J_{N/2}) + 2J_1 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right),$$

y la otra para los k impares,

$$\Lambda_{k\text{impar}} = 2(J_0 - J_{N/2}) + 2J_1 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right).$$

Para simplificar las expresiones, tomemos $J_{N/2} = J_0$. En ese caso, en el límite termodinámico tenemos que

$$\Lambda_{\text{par}}(\theta) = 4J_0 + 2J_1 \cos(\theta),$$

y

$$\Lambda_{\text{par}}(\theta) = 2J_1 \cos(\theta).$$

Por tanto, de acuerdo con los resultados obtenidos anteriormente (3.3), la entropía de un fragmento X de tamaño L viene dada por

$$S_\alpha(X) = S_{\alpha,\text{par}}(X_0) + S_{\alpha,\text{impar}}(X_0).$$

donde $S_{\alpha,\text{par}}(X_0)$ y $S_{\alpha,\text{impar}}(X_0)$ son las entropías de un intervalo X_0 de tamaño L de una cadena de fermiones local cuya relación de dispersión es $\Lambda_{\text{par}}(\theta)$ y $\Lambda_{\text{impar}}(\theta)$ respectivamente.

Si suponemos que $J_1 < 0$ y $|J_1| < 2|J_0|$, entonces la banda Λ_{par} carece de ceros, $\nu_{\text{par}} = 0$, mientras que Λ_{impar} se anula en $\pm\pi/2$ independientemente del valor de los acoplos. Por tanto, $\nu_{\text{impar}} = 2$. Como en este caso la banda par no cambia de signo, su contribución a la entropía en el límite $\beta \rightarrow \infty$ decae exponencialmente a cero y puede despreciarse frente a la de la banda impar. Particularizando a esta banda los resultados obtenidos en la sección 2.2.1 cuando $\beta \rightarrow \infty$, tenemos que la entropía de von Neumann del fragmento X será

$$S_1(X) \approx S_{1,\text{impar}}(X_0) \approx \underbrace{\frac{1}{3} \frac{\pi}{2|J_1|\beta}}_{A_{1,\text{impar}}} L + \underbrace{\frac{1}{3} \log\left(\frac{2|J_1|\beta}{2\pi}\right)}_{C_{1,\text{impar}}} + \dots, \quad |J_1| < 2|J_0|. \quad (3.5)$$

En este caso, la entropía del fragmento escala de manera similar a la de un intervalo en el TBM crítico (2.17) con $J_0^{\text{TBM}} = 0$. Estudiémosla numéricamente para comprobar si también tenemos una constante aditiva de la que Fisher-Hartwig no da cuenta. De nuevo, para reducir la complejidad y alcanzar tamaños mayores, calculamos la entropía de von Neumann del fragmento X a partir de la matriz de correlaciones C_{nm} restringida a dicho subsistema. Los puntos de la figura 3.2 son los valores que obtenemos para dicha magnitud tomando una escalera de $N = 10000$ sites con $J_0 = 1$ y $J_1 = -1/2$, para distintas temperaturas $1/\beta$ y modificando el tamaño del fragmento entre $L = 500$ y $L = 2250$ sites. La tabla 3.1 recoge los coeficientes a y c del ajuste a una función lineal $aL + c$ de cada serie de puntos a una determinada temperatura, así como el valor de $A_{1,\text{impar}}$ y $C_{1,\text{impar}}$ para cada caso.

β	Ajuste		Analítico $\beta \rightarrow \infty$		
	$a (\times 10^{-3})$	c	$A_{1,\text{impar}} (\times 10^{-3})$	$C_{1,\text{impar}}$	$c - C_{1,\text{impar}}$
50	20.9634	1.41692	20.9440	0.69138	0.72554
200	5.23629	1.87951	5.23599	1.15348	0.72603
500	2.09463	2.18460	2.09440	1.45891	0.72569
1000	1.05292	2.40585	1.04720	1.68996	0.71589

Tabla 3.1: a y c son los parámetros del ajuste a una función lineal $aL + c$ de los valores numéricos de $S_1(X)$ que obtenemos a una temperatura fija $1/\beta$ variando el tamaño L de un fragmento X de la escalera (3.4) con $J_0 = J_{N/2} = 1$ y $J_1 = -1/2$. Las columnas $A_{1,\text{ladder}}$ y $C_{1,\text{ladder}}$ contienen los correspondientes valores numéricos de estos coeficientes para $\beta \rightarrow \infty$, dados por (3.5). La diferencia $c - C_{1,\text{impar}}$ es un número próximo al término constante de la entropía del fragmento en el estado fundamental (3.6) de esta escalera.

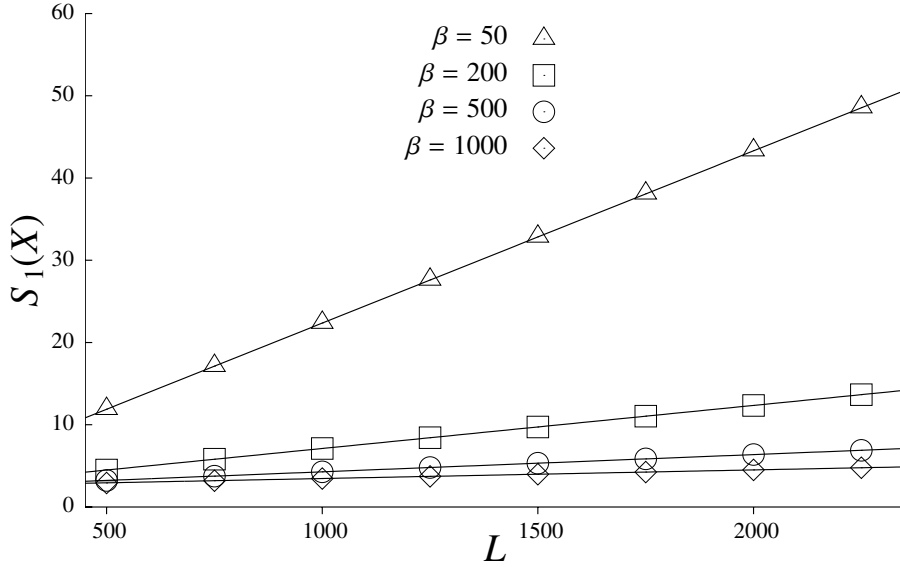


Figura 3.2: entropía de von Neumann, $S_1(X)$, de un fragmento X de la escalera (3.4) con $J_0 = J_{N/2} = 1$ y $J_1 = -1/2$ en función de su tamaño L para diferentes valores de β . Los puntos corresponden a los valores obtenidos mediante la diagonalización numérica de las correlaciones. Cada recta representa la expresión analítica (3.5) con los coeficientes $A_{1,\text{impar}}$ y $C_{1,\text{impar}}$ de la tabla 3.1 para cada valor de β más la constante aditiva 0.726067....

La entropía de un fragmento en el estado fundamental de esta escalera, $|GS\rangle = \prod_{\Lambda_{k,\text{impar}} < 0} b_k^\dagger |0\rangle$, es similar a la de un intervalo del TBM crítico con $J_0^{\text{TBM}} = 0$ en su estado fundamental,

$$S_1^{GS}(X) = S_{1,\text{impar}}^{GS}(X_0) \approx \frac{1}{3} \log L + 0.726067... \quad (3.6)$$

Por lo tanto, examinando la última columna de la tabla 3.1, parece claro que también tenemos aquí un término constante adicional en la entropía que parece corresponder al término independiente de L de la entropía del fragmento en el estado fundamental de la escalera.

Comprobemos esta conjetura considerando la situación $|J_1| > 2|J_0|$. En ese caso, la banda

Λ_{par} también se anula en $\pm \arccos(-2J_0/J_1)$ por lo que no puede despreciarse su contribución a la entropía del fragmento cuando $\beta \rightarrow \infty$. Así tenemos que,

$$S_1(X) \approx \overbrace{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{(2J_1)^2 - (4J_0)^2}} + \frac{1}{2|J_1|} \right) \frac{\pi}{\beta} L}^{A_1^{\text{ladder}} = A_{1,\text{par}} + A_{1,\text{impar}}} + \underbrace{\frac{1}{3} \left[\log \left(\frac{\sqrt{(2J_1)^2 - (4J_0)^2 \beta}}{2\pi} \right) + \log \left(\frac{2|J_1|\beta}{2\pi} \right) \right]}_{C_1^{\text{ladder}} = C_{1,\text{par}} + C_{1,\text{impar}}} + \dots,$$

más una constante aditiva C_1^{ladder} que, conjeturamos, es el término independiente de la entropía del fragmento X en el estado fundamental de la escalera, $|GS\rangle = \prod_{\Lambda_k < 0} b_k^\dagger |0\rangle$. Cuando $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} S_1^{GS}(X) &= S_{1,\text{par}}^{GS}(X_0) + S_{1,\text{impar}}^{GS}(X_0) \\ &\approx \frac{2}{3} \log L + \underbrace{0.4950179\dots + \frac{1}{6} \log[2 - 2 \cos(2 \arccos(-2J_0/J_1))] + 0.726067\dots}_{C_1^{\text{ladder}}} \end{aligned}$$

Comprobemos esta hipótesis numéricamente. Fijamos $N = 10000$ sites, $\beta = 200$, $J_1 = -1/2$, y calculamos $S_1(X)$ para distintos acoplos $J_0 < 1/4$ variando la longitud de X entre $L = 500$ y $L = 2250$ sites. Ajustamos cada serie de valores de $S_1(X)$ para un J_0 fijo a una relación lineal $aL + c$. La tabla 3.2 recoge los valores de a y c que obtenemos en cada ajuste así como los de los correspondientes A_1^{ladder} y $C_1^{\text{ladder}} + C_1^{\text{ladder}}$.

$J_0 = J_{N/2}$	Ajuste		Analítico $\beta \rightarrow \infty$	
	a	c	A_1^{ladder}	$C_1^{\text{ladder}} + C_1^{\text{ladder}}$
0	1.04726	3.75903	1.04720	3.75909
0.05	1.05806	3.74542	1.05799	3.74549
0.1	1.09498	3.70089	1.09489	3.70097

Tabla 3.2: a y c son los coeficientes del ajuste a la función lineal $aL + c$ de los valores numéricos de $S_1(X)$ que obtenemos a un β fijo variando la longitud L del fragmento X de la escalera (3.4) para distintos acoplos $J_0 = J_{N/2}$ y $J_1 = -1/2$. A_1^{ladder} y C_1^{ladder} corresponden a los valores numéricos de estos coeficientes previstos por la aproximación que hemos obtenido cuando $\beta \rightarrow \infty$. Por su parte, C_1^{ladder} lo calculamos a partir de la expresión del término independiente de L de la entropía de X en el estado fundamental.

Comparando las columnas de c y $C_1^{\text{ladder}} + C_1^{\text{ladder}}$ podemos concluir que nuestra conjetura es acertada. Como sucedía en el TBM, la expresión que tenemos para el término independiente de L de la entropía en $|GS\rangle$ deja de ser válida cuando los ceros de la banda par están lo suficientemente cerca.

4. Cadenas de spines: modelo XY

Los resultados obtenidos para la entropía de una cadena fermiónica local no sólo sirven para calcular la de un fragmento de una escalera fermiónica. Como mencionamos al principio, dicho resultado es también aplicable a la correspondiente cadena de spines con la que se relaciona mediante la transformación de Jordan-Wigner. Ahora veremos que también permite conocer la de un modelo de Ising cuántico. Para ello, debemos explorar primero el conocido *modelo XY*. Se trata de una cadena unidimensional de spines descrita por el Hamiltoniano

$$H_{\text{XY}} = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1+\gamma}{2} \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \frac{1-\gamma}{2} \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + h \sigma_n^z \right], \quad (4.1)$$

donde γ y h son dos constantes reales. Físicamente, γ es un parámetro de anisotropía entre los acoplos de las componentes x e y de cada spin con sus vecinos mientras que h representa la interacción de los spines con un campo magnético en la dirección z . Consideremos condiciones de borde periódicas, de manera que $\sigma_{N+1}^\mu = \sigma_1^\mu$.

Para $\gamma = 0$ obtenemos el Hamiltoniano del *modelo XX*,

$$H_{\text{XX}} = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \frac{1}{2} \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + h \sigma_n^z \right], \quad (4.2)$$

en el que la interacción entre vecinos es isótropa. El valor $\gamma = 1$ corresponde al Hamiltoniano del modelo de *Ising cuántico*,

$$H_{\text{I}} = \sum_{n=1}^N \left[\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + h \sigma_n^z \right], \quad (4.3)$$

en el que únicamente interaccionan las componentes x de los spines vecinos. Este Hamiltoniano se obtiene también al efectuar la técnica de la matriz de transferencia en el modelo de Ising bidimensional.

4.1 Diagonalización del Hamiltoniano XY

La transformación de Jordan-Wigner permite expresar el Hamiltoniano XY en términos de los operadores fermiónicos a_n, a_n^\dagger (1.5),

$$\begin{aligned} H_{\text{XY}} = & -\frac{Nh}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \left[\gamma (a_n^\dagger a_{n+1}^\dagger - a_n a_{n+1}) + (a_n^\dagger a_{n+1} - a_n a_{n+1}^\dagger) \right] \\ & + e^{i\pi P} \left[\gamma (-a_N^\dagger a_1^\dagger + a_N a_1) + (-a_N^\dagger a_1 + a_N a_1^\dagger) \right] + \sum_{n=1}^N h a_n^\dagger a_n, \end{aligned}$$

donde P es el operador

$$P = \sum_{n=1}^N \sigma_n^+ \sigma_n^- = \sum_{n=1}^N a_n^\dagger a_n,$$

que aplicado sobre un estado $|\Phi\rangle$ de la cadena

$$P |\Phi\rangle = p |\Phi\rangle,$$

indica el número de spines p con componente $z + 1/2$ que presenta. En virtud de la transformación de Jordan-Wigner (1.10), éste es igual al número de a -excitaciones en la cadena fermiónica equivalente. Obsérvese que si p es par tenemos que $a_{N+1} \equiv -a_1$ (condiciones de borde antiperiódicas). Por el contrario, si p es impar, entonces $a_{N+1} \equiv a_1$ (condiciones de borde periódicas). Este término introduce en los observables correcciones $O(1/N)$ [30]. Como en el resto del trabajo, estamos interesados en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$. En ese caso, su contribución puede despreciarse, de manera que podemos tomar condiciones de borde periódicas tanto para p impar como para p par; es decir, el Hamiltoniano

$$H_{XY} = -\frac{Nh}{2} + \sum_{n=1}^N \left[\gamma(a_n^\dagger a_{n+1}^\dagger - a_n a_{n+1}) + (a_n^\dagger a_{n+1} - a_n a_{n+1}^\dagger) \right] + \sum_{n=1}^N h a_n^\dagger a_n, \quad (4.4)$$

en lugar del inicial (4.1).

Si sobre éste efectuamos una transformación de Fourier introduciendo los operadores fermiónicos b_k, b_k^\dagger (2.2),

$$H_{XY} = \sum_{k>0} \left(b_k^\dagger, b_{-k} \right) \begin{pmatrix} c_k & s_k \\ -s_k & -c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

donde

$$c_k = h + 2 \cos \varphi_k, \quad s_k = 2\gamma \sin \varphi_k.$$

Como ahora tenemos interacciones $a_n a_m$ y $a_n^\dagger a_m^\dagger$, no basta esta transformación para expresarlo en términos de fermiones libres. Para conseguirlo, recurrimos a una transformación de Bogoliubov, que consiste en definir unos nuevos operadores d_k, d_k^\dagger a partir de b_k y b_k^\dagger ,

$$\begin{aligned} d_k &= \cos \xi_k b_k - i \sin \xi_k b_{-k}^\dagger \\ d_k^\dagger &= \cos \xi_k b_k^\dagger + i \sin \xi_k b_{-k}. \end{aligned}$$

Llamaremos ángulo de Bogoliubov a ξ_k , definido por

$$\cos(2\xi_k) = \frac{c_k}{\Lambda_k^{XY}}; \quad \sin(2\xi_k) = -\frac{s_k}{\Lambda_k^{XY}}, \quad \text{donde} \quad \Lambda_k^{XY} = \sqrt{c_k^2 + s_k^2}.$$

Dado que la transformación de Bogoliubov es unitaria, los operadores d_k, d_k^\dagger son también fermiónicos, siguiendo reglas de anticonmutación idénticas a (1.5). El Hamiltoniano XY queda, de esta manera, expresado explícitamente en términos de fermiones libres,

$$H_{XY} = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \Lambda_k^{XY} d_k^\dagger d_k \quad (4.6)$$

Los autoestados de este Hamiltoniano son los determinantes de Slater

$$|\Phi_{\mathcal{K}}\rangle = \prod_{k \in \mathcal{K}} d_k^\dagger |0\rangle, \quad (4.7)$$

donde $|0\rangle$ representa el vacío (es decir $d_k |0\rangle = 0 \ \forall k$) y $\mathcal{K} \subset \{-N/2, \dots, N/2 - 1\}$ es el subconjunto de modos ocupados en $|\Phi_{\mathcal{K}}\rangle$. De esta manera,

$$H_{XY} |\Phi_{\mathcal{K}}\rangle = E_{\mathcal{K}}^{XY} |\Phi_{\mathcal{K}}\rangle,$$

siendo $E_{\mathcal{K}}^{XY} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \Lambda_k^{XY}$ la energía del estado $|\Phi_{\mathcal{K}}\rangle$. Dado que $\Lambda_k^{XY} \geq 0$, el estado fundamental de H_{XY} es el vacío $|0\rangle$.

Observemos que si en (4.4) hacemos $\gamma = 0$ (modelo XX) obtenemos un Hamiltoniano fermiónico H_{XX} análogo a H_{TBM} (2.16).

4.2 Matrices de correlaciones térmicas del modelo XY

El estado térmico del modelo XY, $\rho_{XY} = Z^{-1}e^{-\beta H_{XY}}$, también satisface el teorema de descomposición de Wick. Por tanto, podemos construirlo a partir de las correlaciones fermiónicas a dos sites C_{nm} y F_{nm} . La principal diferencia con el caso de las cadenas fermiónicas iniciales (2.1) es que ahora el Hamiltoniano presenta acoplos $a_n a_m$ y $a_n^\dagger a_m^\dagger$ y, por tanto, los elementos F_{nm} no son nulos. Efectivamente, para el estado térmico del modelo XY tenemos

$$C_{nm}^{XY} = -\frac{1}{2N} \sum_k e^{-i\theta_k(n-m)} \cos(2\xi_k) \tanh\left(\frac{\beta\Lambda_k^{XY}}{2}\right) + \frac{\delta_{nm}}{2}, \quad (4.8)$$

y

$$F_{nm}^{XY} = \frac{i}{2N} \sum_k e^{-i\theta_k(n-m)} \sin(2\xi_k) \tanh\left(\frac{\beta\Lambda_k^{XY}}{2}\right). \quad (4.9)$$

Definiendo la matriz

$$G_{nm} = C_{nm}^{XY} - \frac{\delta_{nm}}{2} - F_{nm}^{XY} = -\frac{1}{2N} \sum_k e^{-i[\theta_k(n-m)-2\xi_k]} \tanh\left(\frac{\beta\Lambda_k^{XY}}{2}\right), \quad (4.10)$$

de manera que $G^\dagger = C^{XY} - I/2 + F^{XY}$. Efectuando el producto entre ellas, encontramos

$$(GG^\dagger)_{nm} = \frac{1}{4N} \sum_k e^{-i\theta_k(n-m)} \tanh^2\left(\frac{\beta\Lambda_k^{XY}}{2}\right), \quad (4.11)$$

expresión que podemos escribir en forma matricial,

$$GG^\dagger = \Theta D' \Theta^\dagger, \quad (4.12)$$

donde $(\Theta)_{kn} = e^{i\theta_k n} / \sqrt{N}$ y $(D')_{kk'} = \frac{1}{4} \tanh^2(\beta\Lambda_k^{XY}/2) \delta_{kk'}$. Dado que Θ es unitaria, los autovalores η_k de la matriz GG^\dagger son los de la matriz D' , que ya es diagonal. Por tanto,

$$\eta_k = \frac{1}{4} \tanh^2\left(\frac{\beta\Lambda_k^{XY}}{2}\right). \quad (4.13)$$

De esta forma, podemos determinar ρ_{XY} , cuya dimensión es 2^N , a partir de la matriz GG^\dagger , de dimensión N . Puesto que las matrices densidad reducidas heredan esta propiedad, las ideas anteriores también pueden aplicarse en ellas siempre que X e Y sean, cada uno, un único intervalo de spines contiguos. Por el contrario, cuando están formados por varios intervalos disjuntos, esta propiedad no se transmite debido a la no localidad de la transformación de Jordan-Wigner. Observemos que si $F_{nm} = 0$ recuperamos el caso descrito en la sección 2.1.

Con esta técnica podemos escribir la entropía de Rényi de ρ_{XY} en términos de los autovalores de GG^\dagger . Utilizando la expresión (4.13), tenemos que

$$\text{Tr}(\rho_{XY}^\alpha) = \prod_k \frac{1 + e^{-\alpha\beta\Lambda_k^{XY}}}{(1 + e^{-\beta\Lambda_k^{XY}})^\alpha} = \prod_k \left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\eta_k}\right)^\alpha + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\eta_k}\right)^\alpha \right]$$

y, por tanto,

$$S_\alpha(\rho_{\text{XY}}) = \frac{1}{1-\alpha} \sum_k \log \left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\eta_k} \right)^\alpha + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\eta_k} \right)^\alpha \right].$$

Cuando $\alpha \rightarrow 1$, encontramos la expresión para la entropía de von Neumann,

$$S_1(\rho_{\text{XY}}) = - \sum_k \left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\eta_k} \right) \log \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\eta_k} \right) + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\eta_k} \right) \log \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\eta_k} \right) \right].$$

Así, la entropía de Rényi de X puede obtenerse a partir de la restricción de G siempre que dicho subsistema esté constituido por spines contiguos

$$S_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \text{Tr} \log \left[\left(\frac{I}{2} + \sqrt{G_X G_X^\dagger} \right)^\alpha + \left(\frac{I}{2} - \sqrt{G_X G_X^\dagger} \right)^\alpha \right],$$

y

$$S_1(X) = - \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt{G_X G_X^\dagger} \right) \log \left(\frac{1}{2} + \sqrt{G_X G_X^\dagger} \right) + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{G_X G_X^\dagger} \right) \log \left(\frac{1}{2} - \sqrt{G_X G_X^\dagger} \right) \right].$$

En este caso, la matriz interesante a la hora de obtener la entropía es GG^\dagger que es Toeplitz cuando consideramos toda la cadena. Sin embargo, para un subsistema X , $G_X G_X^\dagger$ ya no lo es, aun siendo X un único intervalo de spines. Por lo tanto, no podemos aplicar el teorema de Fisher-Hartwig. Sin embargo, la introducción de estas matrices no ha sido en vano puesto que presentan interesantes simetrías bajo ciertas condiciones que permiten establecer relaciones entre las entropías de Rényi de los distintos modelos de spines que acabamos de presentar.

4.3 Relación entre las entropías de los modelos XY e Ising

En [31], Igloi y Juhasz demuestran que la entropía en el estado fundamental de un modelo XY de N spines con campo magnético $h_{\text{XY}} = 0$ es igual a la suma de las entropías de dos modelos de Ising ($\gamma = 1$), llamémoslos I1 e I2, de $N/2$ spines cada uno y cuyos campos h_{I1} y h_{I2} están relacionados con la constante de anisotropía γ_{XY} del modelo XY,

$$h_{\text{I1}} = 2 \frac{1 - \gamma_{\text{XY}}}{1 + \gamma_{\text{XY}}}, \quad \text{y} \quad h_{\text{I2}} = 2 \frac{1 + \gamma_{\text{XY}}}{1 - \gamma_{\text{XY}}}. \quad (4.14)$$

Esta propiedad puede generalizarse a cualquier configuración excitada del modelo XY en la que si un modo k está ocupado también lo están los modos $-k$ y $k + N/2$. Aquí extendemos esta relación al estado térmico.

Partamos de un modelo XY de tamaño total N sites a temperatura $1/\beta_{\text{XY}}$. Llamemos

$$q_k(n-m) = - \tanh \left(\frac{\beta_{\text{XY}} \Lambda_k^{\text{XY}}}{2} \right) e^{-i[\theta_k(n-m) - 2\xi_k]}$$

Si tomamos su campo magnético nulo, $h_{\text{XY}} = 0$, tenemos que $2\xi_{k+N/2} = 2\xi_k + \pi$ y $\Lambda_{k+N/2}^{\text{XY}} = \Lambda_k^{\text{XY}}$. Entonces

$$q_{k+N/2}(n-m) = -e^{-i\pi(n-m)} q_k(n-m),$$

y, por lo tanto,

$$q_{k+N/2}(n-m) = -q_k(n-m), \quad \text{si } n-m \text{ par},$$

$$q_{k+N/2}(n-m) = q_k(n-m), \quad \text{si } n-m \text{ impar}.$$

De esta manera, si $n = 2p$ (pares) y $m = 2q$ (pares) ó $n = 2p-1$ (impares) y $m = 2q-1$ (impares)

$$G_{2p,2q} = G_{2p-1,2q-1} = 0.$$

Sin embargo, para $n = 2p$ (pares) y $m = 2q-1$ (impares)

$$G_{2p,2q-1} = -\frac{1}{2N/2} \sum_{k=-N/4}^{N/4-1} \tanh\left(\frac{\beta_{XY}\Lambda_k^{XY}}{2}\right) e^{-i[2\theta_k(p-q)+\theta_k-2\xi_k]},$$

mientras que si $n = 2p-1$ (impares) y $m = 2q$ (pares)

$$G_{2p-1,2q} = -\frac{1}{2N/2} \sum_{k=-N/4}^{N/4-1} \tanh\left(\frac{\beta_{XY}\Lambda_k^{XY}}{2}\right) e^{-i[2\theta_k(p-q)-\theta_k-2\xi_k]}.$$

Identificando

$$\theta_k^{I1} = \theta_k^{I2} = 2\theta_k = \frac{2\pi k}{N/2}, \quad 2\xi_k^{I1} = \theta_k - 2\xi_k, \quad \text{y} \quad 2\xi_k^{I2} = -\theta_k - 2\xi_k,$$

se obtienen las relaciones (4.14) cuando $\gamma_{I1} = \gamma_{I2} = 1$. Introduciéndolas en la relación de dispersión del modelo XY inicial (con $h_{XY} = 0$) y tras un poco de álgebra puede verse que

$$\Lambda_k^{XY} = \frac{\Lambda_k^{I1}}{1 + h_{I1}/2} = \frac{\Lambda_k^{I2}}{1 + h_{I2}/2}$$

para I1 e I2 respectivamente.

Por lo tanto,

$$G_{p,q}^{(I1)} = G_{2p,2q-1} = -\frac{1}{2N/2} \sum_{k=-N/4}^{N/4-1} \tanh\left(\frac{\beta_{I1}\Lambda_k^{I1}}{2}\right) e^{-i[\theta_k^{I1}(p-q)-2\xi_k^{I1}]}$$

son los elementos de la matriz de correlaciones $G^{(I1)}$ de un modelo de Ising de tamaño total $N/2$ y campo magnético h_{I1} a temperatura

$$\beta_{I1} = \frac{\beta_{XY}}{1 + h_{I1}/2}.$$

Por su parte,

$$G_{p,q}^{(I2)} = G_{2p-1,2q} = -\frac{1}{2N/2} \sum_{k=-N/4}^{N/4-1} \tanh\left(\frac{\beta_{I2}\Lambda_k^{I2}}{2}\right) e^{-i[\theta_k^{I2}(p-q)-2\xi_k^{I2}]}$$

son los elementos de la matriz $G^{(I2)}$ de un modelo de Ising de tamaño total $N/2$, campo magnético h_{I2} , a temperatura

$$\beta_{I2} = \frac{\beta_{XY}}{1 + h_{I2}/2}.$$

Si escribimos G en la base en la que separamos los sites pares de los impares

$$G = \begin{pmatrix} 0 & G^{(I_2)} \\ G^{(I_1)} & 0 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$GG^\dagger = \begin{pmatrix} G^{(I_1)}G^{(I_1)\dagger} & 0 \\ 0 & G^{(I_2)}G^{(I_2)\dagger} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matrix GG^\dagger , de un intervalo L , de este modelo XY sin campo magnético se puede descomponer como la suma directa de las matrices GG^\dagger , de dos intervalos $L/2$, de I_1 e I_2 . En consecuencia, el espectro de autovalores de la primera será la unión de los espectros de las dos segundas. Transladando este resultado a la entropía,

$$S_\alpha^{\text{XY}}(L, \beta_{\text{XY}}) = S_\alpha^{I_1}(L/2, \beta_{I_1}) + S_\alpha^{I_2}(L/2, \beta_{I_2}).$$

Cuando $\gamma_{\text{XY}} = 0$ (es decir, cuando el modelo XY se reduce al XX), ambos modelos de Ising son iguales ($h_{I_1} = h_{I_2} = 2$, $I_1 \equiv I_2 \equiv I$), y se encuentran a la misma temperatura $\beta_I = \beta_{\text{XX}}/2$ por lo que

$$S_\alpha^{\text{XX}}(L, \beta_{\text{XX}}) = 2S_\alpha^I(L/2, \beta_I). \quad (4.15)$$

De acuerdo con Jordan-Wigner, el equivalente fermiónico del modelo de spines XX es el TBM. Si nuestro subsistema es un intervalo de spines contiguos, los resultados para la entropía de un modelo fermiónico pueden trasladarse directamente al de spines. En consecuencia, utilizando (4.15), podemos obtener también la entropía de un intervalo de un modelo de Ising cuántico a una cierta temperatura.

5. Conclusiones

El objetivo principal de esta memoria ha sido el estudio de la entropía de Rényi $S_\alpha(X)$ de un intervalo X de diferentes cadenas de fermiones y spines en el estado térmico o de Gibbs, $\rho = Z^{-1}e^{-\beta H}$. En primer lugar hemos considerado cadenas de fermiones homogéneas y locales, demostrando que $S_\alpha(X)$ puede obtenerse a partir de las correlaciones de X . Este hecho resulta muy útil a la hora de estudiarla. Numéricamente reduce la complejidad de computarla, que crece exponencialmente con el tamaño L de X , a una dependencia polinomial con L . Analíticamente permite escribirla en términos del determinante de una matriz que en este caso es Toeplitz. Para este tipo de matrices, el teorema de Fisher-Hartwig da una expansión de su determinante y, en nuestro caso, un desarrollo de $S_\alpha(X)$ en términos de L en el límite termodinámico de la cadena. A partir de este resultado, hemos encontrado algunas propiedades muy interesantes:

- En el estado de Gibbs $S_\alpha(X)$ es, al igual que la entropía termodinámica, extensiva siempre que $\beta \ll L$. Por contra, en el estado fundamental, la entropía de X crece con el $\log L$ si la relación de dispersión es crítica, mientras que se anula de manera exacta si no lo es.
- Hemos visto que el coeficiente $A_\alpha(\beta)$ del término que escala con L corresponde, para von Neumann, a la densidad de entropía termodinámica de un gas de fermiones. Además, en la entropía de Rényi de toda la cadena no tenemos el coeficiente $C_\alpha(\beta)$ independiente de L . Así hemos interpretado que $A_\alpha(\beta)$ es debido a las correlaciones térmicas mientras que $C_\alpha(\beta)$ da cuenta de la dependencia con β del entrelazamiento entre X e Y . Además, $A_\alpha(\beta)L$ sigue una ley de volumen mientras que $C_\alpha(\beta)$ cumple la ley del área, característica de las correlaciones cuánticas.
- A alta temperatura, tenemos correlaciones de naturaleza exclusivamente térmica puesto que el único término que no se anula es $A_\alpha(\beta)$, que en dicho límite depende de la dimensión del espacio de estados de X .
- A baja temperatura, $S_\alpha(X)$ depende del número de cambios de signo de la relación de dispersión (modos de Fermi) y de su derivada en ellos (velocidades de Fermi). En este sentido, al igual que sucede en el estado fundamental, $S_\alpha(X)$ detecta a baja temperatura si el sistema es crítico o no.
- En el estado fundamental, el factor del término que escala con $\log L$ es universal puesto que es invariante bajo pequeños cambios en el valor de los acoplos del Hamiltoniano, mientras que el término independiente de L contiene una parte no universal. A bajas temperaturas, los coeficientes $A_\alpha(\beta)$ y $C_\alpha(\beta)$ de la expansión de $S_\alpha(X)$ son no universales pues dependen directamente de los acoplos a través de las velocidades de Fermi.
- El desarrollo a bajas temperaturas que hemos encontrado a partir de la expansión de Fisher-Hartwig es similar a la expresión conforme de $S_\alpha(X)$ cuando $\beta \ll L$ (1.4), salvo por una constante aditiva C'_α independiente de L y β . Las técnicas conformes dan cuenta de la existencia de este término pero no de la forma que tiene. Aquí hemos conjeturado que es igual al término independiente de la entropía de un intervalo en el estado fundamental. Por tanto, es debido a las correlaciones cuánticas entre X y el resto del sistema. Hemos verificado esta hipótesis en el Tight Binding Model. Podemos explicar este resultado mediante la invariancia conforme. La entropía (1.3)

para un sistema de tamaño infinito a una cierta temperatura se relaciona con la de un sistema de tamaño finito en el estado fundamental (temperatura cero) mediante una rotación de Wick: esencialmente cambiar la dirección de compactificación, de la temporal a la espacial, en el cilindro de la figura 1.1. Esta rotación no modifica el término independiente del tamaño del intervalo.

También hemos visto que este resultado sirve para obtener la entropía de Rényi de un fragmento de una escalera local de fermiones. La clave está en darse cuenta que la relación de dispersión de una escalera se descompone en tantas bandas como railes tiene. Cada banda puede interpretarse como la relación de dispersión de una cadena local. De esta forma, la entropía de un fragmento de tamaño L de la escalera es la suma de las entropías de un intervalo de longitud L de una cadena local dada por cada banda. También hemos extendido al estado térmico la relación entre la entropía de Rényi de un intervalo de un modelo de spines XY sin campo magnético y las de dos modelos de Ising cuánticos. En particular, hemos visto que esta relación permite obtener la entropía de Rényi de un intervalo de un Ising cuántico a partir de la de un modelo XX sin campo magnético cuyo equivalente fermiónico es, de acuerdo con la transformación de Jordan-Wigner, el Tight Binding Model.

Bibliografía

- [1] E. Schrödinger, *Discussion of Probability Relations Between Separated Systems*, Proc. Camb. Philos. Soc., 31, 555-563 (1935); 32, 446-451 (1935)
- [2] A. Einstein, B. Podolski, N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Rev. 47 777 (1935)
- [3] J. S. Bell, *On the Einstein Podolski Rosen paradox*, Physics, 1, 195-200 (1964)
- [4] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem*, Phys. Rev. Lett. 47, 7, 460-463 (1981)
- [5] W. Zurek, *Decoherence and the transition from quantum to classical*, arXiv:quant-ph/0306072, puesta al día de Physics Today, 44, 36-44 (1991)
- [6] F. Galve, L. A. Pachón, D. Zueco, *Bringing entanglement to the high temperature limit*, Phys. Rev. Lett. 105, 180501 (2010), arXiv:1002.1923 [quant-ph]
- [7] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, R. Fazio, *Scaling of entanglement close to a quantum phase transition*, Nature 416, 608-610 (2002)
- [8] G. Vidal, J.I. Latorre, E. Rico, A. Kitaev, *Entanglement in quantum critical phenomena*, Phys. Rev. Lett. 90, 22: 227902-227906 (2003); arXiv:quant-ph/0211074v1
- [9] V. Vedral, *High temperature macroscopic entanglement*, New J. Phys. 6, 102 (2004) arXiv: quant-ph/0405102
- [10] S. N. Solodukhin *Entanglement entropy of black holes*, Living Rev. Relativity 14, (2011), 8. arXiv:hep-th/1104.3712
- [11] P. Calabrese, J. Cardy, *Entanglement entropy and Quantum Field Theory*, J. Stat. Mech. 0406:P06002 (2004); arXiv:hep-th/0405152v3
- [12] H. Casini, M. Huerta, *Entanglement entropy in free quantum field theory*, J.Phys. A: Math. Theor. 42, 504007 (2009); arXiv:hep-th/0905.2562
- [13] T. Nishioka, S. Ryu, T. Takayanagi, *Holographic Entanglement Entropy: An Overview*, J. Phys. A: Math. Theor. 42, 504008 (2009); arXiv:0905.0932
- [14] M. B. Plenio, S. Virmani, *An introduction to entanglement measures*, Quantum Information & Computation, 7, 1-51 (2007) arXiv: quant-ph/0504163v3
- [15] C. Monroe, J. Kim, *Scaling the Ion Trap Quantum Processor*, Science 339 (2013) 1164.
- [16] I. Peschel, *Calculation of reduced density matrices from correlation functions*, J. Phys. A: Math. Gen., L205 (2003) arXiv: cond-mat/0212631v1
- [17] B. Q. Jin, V. E. Korepin, *Quantum spin chains, Toeplitz determinants and the Fisher-Hartwig conjecture*, J. Stat. Phys. 116, 79 (2004), arXiv:quant-ph/0304108v4

-
- [18] F. Ares, J. G. Esteve, F. Falceto, E. Sánchez-Burillo, *Excited states entanglement in homogeneous fermionic chains*, J. Phys A: Math. Theor. 47 245301 (2014). arXiv: 1401.5922[quant-phys]
 - [19] F. Ares, J. G. Esteve, F. Falceto, *Entanglement of several blocks in fermionic chains*, arXiv: 1406.1668[quant-phys]
 - [20] C. Holzhey, F. Larsen, F. Wilczek, *Geometric and renormalized entropy in conformal field theory*, Nucl. Phys. B 424, 443-467 (1994) arXiv: hep-th/9403108v1
 - [21] P. Calabrese, J. Cardy, E. Tonni, *Entanglement entropy of two disjoint intervals in conformal field theory*, J. Stat. Mech. P11001 (2009), arXiv: 0905.2069v2[hep-th]
 - [22] F. C. Alcaraz, M. Ibáñez Berganza, G. Sierra, *Entanglement of low-energy excitations in CFT*, Phys. Rev. Lett. 106, 101601 (2011) arXiv:1101.2881v2[cond-mat.stat-mech]
 - [23] H. Bernigau, M. J. Kastoryano, J. Eisert, *Area laws for thermal free fermions*, arXiv:1301.5646 [quant-ph]
 - [24] V. E. Korepin, *Universality of entropy scaling in one dimensional gapless models*, Phys. Rev. Lett. 92, 096402 (2004) arXiv: cond-mat/0311056v4
 - [25] P. Jordan, E. P. Wigner, *About the Pauli exclusion principle*, Zeitschrift fur Physik, 47,631–651 (1928)
 - [26] M. E. Fisher, R. E. Hartwig, *Toeplitz determinants, some applications, theorems and conjectures*, Adv. Chem. Phys. 15, 333-353 (1968)
 - [27] E. L. Basor, *A localization theorem for Toeplitz determinants*, Indiana Math. J. 28, 975-983 (1979)
 - [28] L. E. Reichl, *A modern course in Statistical Physics*, University of Texas Press, 1988, ISBN 0-292-75080-3 pbk
 - [29] M. Galassi et al, *GNU Scientific Library Reference Manual*, (3rd Ed.), ISBN 0954612078. <http://www.gnu.org/software/gsl>
 - [30] E. Lieb, T. Schulz, D. Mattis, *Two soluble models of an antiferromagnetic chain*. Annals of Physics, 16, 407-466 (1961)
 - [31] F. Iglói, R. Juhász, *Exact relationship between the entanglement entropies of XY and quantum Ising chains* Europhys. Lett. 81, 57003 (2008) arXiv:0709.3927 [cond-mat.stat-mech]