



Universidad
Zaragoza



Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER EN
FÍSICA Y TECNOLOGÍAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA

Desarrollo y estudio de un radar
FMCW de 120 GHz para la medida de
altura y propiedades superficiales del
manto nivoso

Development and Study of a 120 GHz
FMCW Radar for Snowpack Height
Measurement and Surface Properties

Víctor Herráiz López

Directores:

Rafael Alonso Esteban

Adrián Subías Martín

Junio de 2024

*“Nada hay más alegre que estas extensiones blancas
cuando un sol brillante las hace resplandecer.”*
Henry Russell, *Souvenirs d’un montagnard*, 1908

Gracias a mis padres,
Marina y Kiara.

Gracias a Rafa, Adri,
Pilar, Cristina, David
y el resto de personas que
han hecho posible este trabajo.

Gracias a la Agencia Estatal de Meteorología y
a la Confederación Hidrográfica del Ebro
por permitirnos emplear sus instalaciones
y los datos de sus sistemas de medida.
Gracias también a la estación de esquí Aramón-Formigal
por el apoyo proporcionado durante la temporada invernal.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de
Ciencia e Innovación bajo el proyecto PID2021-124451OB-100.

Índice

Introducción	1
Objetivos y estructura de la memoria	2
1. El manto nivoso	3
1.1. Estado del arte en sensado de altura del manto nivoso	4
1.2. Estación experimental AEMET-Formigal	5
2. Radares FMCW	6
2.1. Teoría básica de los radares FMCW	6
2.2. Radares de ondas milimétricas	9
3. Desarrollo de un prototipo de radar FMCW para operar en exterior	10
3.1. Implementación física	10
3.2. Validación de su funcionamiento, tratamiento de las medidas y calibración	12
3.3. Instalación del prototipo en la estación experimental AEMET-Formigal	16
4. Interacción de las ondas milimétricas con el manto nivoso	17
4.1. Propiedades dieléctricas de sus constituyentes	17
4.2. Modelo de la estructura del manto nivoso	18
4.3. Difusión de la radiación electromagnética en medios densos	19
4.4. Resolución aproximada de la ecuación de transferencia radiativa	20
5. Medidas en la estación experimental AEMET-Formigal	22
5.1. Validación del tratamiento de las señales bajo distintas condiciones del manto nivoso	22
5.2. Medida de altura del manto nivoso durante la temporada invernal 2023-2024	23
5.3. Sección eficaz de retrodifusión del manto nivoso	25
6. Conclusiones y trabajo futuro	28
Referencias	29
A. Placas de circuito impreso para el prototipo de radar FMCW	32
B. Medida del campo de visión del radar FMCW	34
C. Solución de Mie para la difusión de una esfera dieléctrica	38
C.1. Aplicación al manto nivoso	39
D. Radar FMCW y el manto nivoso: tratamiento complejo	40
E. Cálculo de la sección eficaz de radar de la nieve	41
E.1. A partir del modelo de difusión única	41
E.2. A partir de medidas experimentales	42

Introducción

La nieve juega un importante papel en la planificación hidrológica en áreas frías o montañosas y en las cuencas hidrográficas donde tengan un papel relevante. Por ejemplo, la cuenca del Ebro tiene una superficie de 85000 km^2 , de la que en torno a un 10% está significativamente afectada por precipitaciones en forma de nieve durante el invierno, mayoritariamente el Pirineo. La nieve almacenada en invierno se funde gradualmente conforme aumentan las temperaturas, y gran parte del agua termina en los cauces de los ríos. En el Pirineo pueden llegarse a acumular más de 2000 hm^3 de agua en forma de nieve, mientras que los embalses de Mediano y Yesa, por ejemplo, son capaces de almacenar 435 y 447 hm^3 de agua respectivamente. El embalse más grande de la cuenca del Ebro es el de Mequinzenza, capaz de almacenar 1530 hm^3 . Estas cifras dan una idea de la gran importancia que tienen los recursos nivales en la gestión hidrológica ordinaria, pero también resultan de gran importancia en la gestión de fenómenos extremos como avenidas. Durante el periodo de deshielo, la fusión de la nieve puede llegar a suponer más de un 35% de las aportaciones totales que reciben los ríos [1, 2].

En este contexto, en el que una correcta evaluación de los recursos hídricos almacenados en forma de nieve resulta crucial, es en el que se desarrolla el programa ERHIN (Evaluación de los Recursos Hídricos procedentes de Innivación) desde 1981, dirigido actualmente por el Ministerio para la Transición Ecológica y el Reto Demográfico. Este programa estudia el volumen de agua almacenado en forma de nieve, y la previsión de su evolución, en las cordilleras montañosas de toda la Península Ibérica. La variable hidrológica de mayor interés es el equivalente en agua de la nieve (*Snow Water Equivalent*, SWE), que es el volumen de agua que se obtendría al fundir la nieve almacenada en un área de 1 m^2 .

Para medir el SWE existen varias posibilidades, como determinar su altura y densidad promedio, aunque es una técnica destructiva y que no permite obtener mediciones en tiempo real. La técnica más empleada en el Pirineo que permite la medición en tiempo real y de forma no destructiva consiste en medir la atenuación de los neutrones provenientes de rayos cósmicos al atravesar la nieve. Para ello se entierra en el suelo un detector de neutrones, sobre el que posteriormente se acumula la nieve, y se compara su medida con un detector de referencia sobre el que no hay nieve. El mayor inconveniente de esta técnica es que requiere enterrar un detector, siendo difícilmente reparable en caso de avería.

Actualmente se investiga en el desarrollo de alternativas para medir el equivalente en agua de la nieve. Con esta intención, el Grupo de Tecnologías Fotónicas de la Universidad de Zaragoza participa en la estación experimental AEMET-Formigal, localizada en el Pirineo aragonés, donde se ensayan técnicas radar que permitan obtener esta variable hidrológica [3]. Para complementar y apoyar a estas técnicas resulta conveniente la medida en tiempo real de la altura geométrica del manto nivoso.

En este Trabajo de Fin de Máster se va a presentar el desarrollo de un dispositivo que permite medir la altura de la nieve, utilizando técnicas radar en frecuencias en torno a 120 GHz. En concreto se va a mostrar la construcción de un prototipo de sensor de altura, a estudiar su interacción con el manto nivoso y se va a analizar su viabilidad con los resultados de su operación durante la temporada invernal 2023-2024. La toma de medidas sistemáticas durante una temporada invernal completa permite capturar la distinta fenomenología de condiciones ambientales que pueden encontrarse.

Objetivos y estructura de la memoria

Este Trabajo de Fin de Máster tiene tres grandes objetivos. Por una parte desarrollar un prototipo de radar FMCW (*Frequency-Modulated Continuous Wave Radar*), operando en torno a 120 GHz, para medir la altura geométrica del manto nivoso. Por otra parte estudiar cómo es la interacción de las ondas milimétricas con la nieve, y por último mostrar la aplicabilidad del prototipo desarrollado, instalándolo en la estación experimental AEMET-Formigal para que opere durante una temporada invernal completa.

Para alcanzar estos objetivos primero se presentan las principales características del manto nivoso y el funcionamiento de los sensores habitualmente empleados para medir su altura geométrica. Con intención de mejorar las prestaciones de los sistemas comerciales, se introducirán los fundamentos teóricos de los radares FMCW y se presentarán las principales características del prototipo desarrollado. Se estudiará cómo es la interacción de las ondas milimétricas con el manto nivoso, donde juegan un importante papel los fenómenos difusivos y su dependencia con las condiciones superficiales de la nieve. Por último, se presentarán los resultados de la operación continuada del prototipo durante la temporada invernal 2023-2024. Estas medidas permitirán evaluar la viabilidad del radar FMCW para medir la altura del manto nivoso y mostrar que también puede emplearse para medir su sección eficaz de retrodifusión, que proporciona información de las propiedades superficiales.

La memoria se estructura de la siguiente manera. En la Sección 1 se presentan las características del manto nivoso y los sistemas empleados para medir su altura geométrica. La Sección 2 se dedica al estudio de los radares FMCW y en la Sección 3 se presentan las características del prototipo desarrollado, tanto su construcción como el tratamiento de sus medidas y la validación de su correcto funcionamiento en el laboratorio. La Sección 4 se centra en estudiar la interacción con el manto nivoso de la radiación electromagnética de frecuencia en torno a 120 GHz. El resultado de las medidas tras la operación continuada del radar durante la temporada invernal 2023-2024 se muestra en la Sección 5. Por último en la Sección 6 se presentan las conclusiones del trabajo y las líneas de investigación que deja abiertas. Al final del documento se incluyen una serie de apéndices donde se recogen algunos desarrollos matemáticos y técnicas mencionadas en el texto principal.



Figura 1: Estación experimental AEMET-Formigal en el Pirineo aragonés, situada a 1800 metros de altitud. Gestionada por la Agencia Estatal de Meteorología, participan también la Confederación Hidrográfica del Ebro, el Instituto Pirenaico de Ecología y el Grupo de Tecnologías Fotónicas de la Universidad de Zaragoza.

1. El manto nivoso

El manto nivoso es una estructura multicapa, en la que las propiedades físicas cambian a lo largo de su perfil vertical. Las condiciones ambientales durante la precipitación afectan a las propiedades de cada capa. Estas propiedades también se ven afectadas por las condiciones ambientales posteriores a su precipitación. Un aumento de temperatura tras el depósito de una capa puede producir que sus propiedades cambien drásticamente.

Los primeros estudios de estratigrafía del manto nivoso se remontan a finales del siglo XVIII. Variaciones en la estructura de la nieve, como cambios en el tamaño de los cristales de hielo o en el contenido en agua líquida de la capa, se traducen en que las capas tienen distintas propiedades ópticas, pero también mecánicas [4]. Esta diferencia de propiedades mecánicas puede producir una menor cohesión entre distintas capas, facilitando que se produzcan desprendimientos que den lugar a avalanchas.

En el manto de nieve habitualmente coexisten las fases sólida y líquida del agua, pudiendo pensar en él como un medio poroso formado por aire, cristales de hielo y agua líquida. Algunas de sus características más importantes son el tamaño y forma de los cristales de hielo, la densidad de cada capa y su contenido de agua líquida (*liquid water content*, LWC), que es la fracción del volumen total del manto que ocupa el agua en estado líquido.

La densidad de una capa de nieve puede tomar valores inferiores a 0.2 g/cm^3 en nieve recién precipitada, que posteriormente se va compactando hasta densidades superiores a 0.5 g/cm^3 . El LWC puede ser nulo si la temperatura es lo suficientemente baja, pero en climas como el del Pirineo puede llegar a representar más de un 10 % del volumen total de la nieve. La influencia del LWC sobre las propiedades del manto nivoso es grande, y sin embargo no ha sido ampliamente estudiada en la literatura científica. Esto se debe a que la investigación sobre las propiedades de la nieve se realiza mayoritariamente en los Alpes o en países del norte de Europa, donde las temperaturas son habitualmente más bajas y la nieve permanece seca durante la mayor parte de la temporada invernal.

Los cristales de nieve recién depositados pueden tener características formas geométricas estrelladas. Sin embargo, conforme la radiación solar incide sobre el manto nivoso o aumenta la temperatura exterior, los cristales se van fundiendo parcialmente. Esto causa que aumente el LWC en las capas superficiales, además de que los cristales se fusionen entre sí, formando granos esféricos de tamaños del orden de 1 mm. En la Fig. 2 se muestra una fotografía que permite apreciar la forma y tamaño de los cristales de nieve tras sufrir una transformación como la descrita.

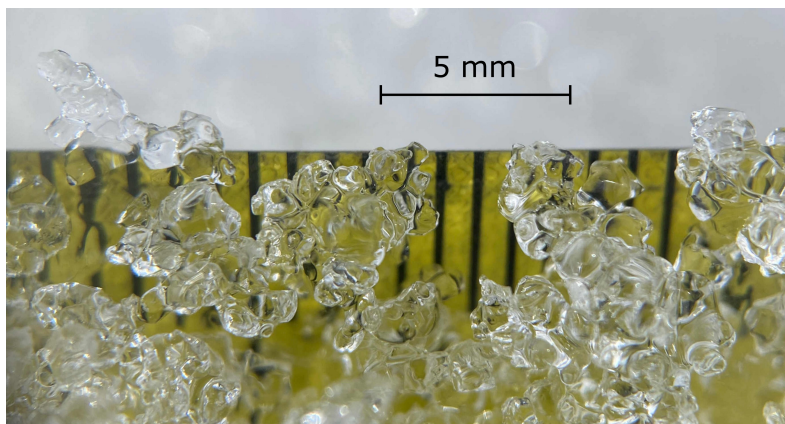


Figura 2: Fotografía detalle de la estructura de la superficie del manto nivoso, tomada con una lupa de 10 aumentos. Las partículas de hielo tienen forma aproximadamente esférica y diámetros del orden de 1 mm. Se observa que están parcialmente unidas entre sí.

1.1. Estado del arte en sensado de altura del manto nivoso

Aunque desde un punto de vista hidrológico la altura del manto nivoso no es la variable más importante, su medida resulta de interés y cuenta con una extendida trayectoria histórica. Por una parte la medición de la altura del manto nivoso puede servir de apoyo a otros sistemas, además de alimentar simulaciones numéricas sobre la evolución de las características del manto. Pero además la altura del manto tiene interés en sí misma, ya que permite caracterizar dinámicas como su compresión.

Las técnicas de medida tradicionales de la altura del manto son manuales, introduciendo una pértiga graduada hasta el suelo y midiendo la altura entre éste y la superficie del manto nivoso. La pértiga puede ser móvil e introducirse manualmente en el manto, o colocarla fija en época estival de forma que quede cubierta conforme nieva. Ambas técnicas perturban las características del manto [5].

Pueden encontrarse en el mercado y en la literatura científica técnicas alternativas de medida de altura. Por ejemplo puede medirse el tiempo de vuelo de un pulso electromagnético desde la superficie del manto hasta el suelo. Este tiempo de vuelo será proporcional al camino electromagnético recorrido por la radiación, lo que permitirá averiguar el espesor del manto de nieve si se conoce su índice de refracción [6, 7]. Aunque esta técnica permite medir la altura de la nieve sin perturbar sus características y sin necesidad de una infraestructura fija, presenta ciertos problemas en cuanto a su exactitud. El índice de refracción de la nieve depende de sus características, estando muy afectado por la densidad y LWC, por lo que varía a lo largo del perfil del manto y de la temporada invernal. Además, para que la onda electromagnética sea capaz de penetrar hasta el suelo puede requerir de una emisión considerable de potencia.

Otra posibilidad es instalar un dispositivo que mida la distancia desde un punto fijo a la superficie del manto nivoso. Conociendo la distancia desde ese punto fijo a la superficie del suelo, puede determinarse la altura del manto. Basados en este principio de operación pueden encontrarse sistemas comerciales que emplean ultrasonidos o un láser en el rango visible, que sin embargo presentan algunas dificultades e inconvenientes.

Los sensores de ultrasonidos basan su funcionamiento en la reflexión que se produce al cambiar la impedancia acústica en una interfaz entre medios. Esta diferencia puede ser muy pequeña, especialmente en nieve recién caída, y producir medidas con poca precisión y muy ruidosas. Además, los cambios de temperatura y humedad afectan significativamente a la velocidad de propagación de las ondas acústicas en el aire, lo que limita la precisión de estos dispositivos. Por su parte los sensores láser tienen un campo de visión pequeño, por lo que para obtener una medida que promedie las ondulaciones que se pueden producir en la superficie del manto resulta necesario realizar un promediado de medidas en varios puntos. Para ello, este tipo de sensores dispone de un sistema rotatorio que cambia el punto en que se toma la medida. El problema es que esta solución requiere de componentes mecánicos que pueden estropearse e inutilizar el sistema. Esto es un gran inconveniente en áreas remotas, donde interesa que el sistema sea robusto frente a averías.

Como solución a estos problemas se ha propuesto en la literatura emplear ondas electromagnéticas milimétricas (frecuencias de 30 a 300 GHz). El tamaño de los granos de nieve, Fig. 2, es similar al de la longitud de onda empleada, lo que asegura que se produzca una intensa retrodifusión de la radiación. Además, la velocidad de propagación en el aire no es tan sensible a las condiciones ambientales como en el caso de emplear ultrasonidos. El campo de visión de

los sensores se puede controlar empleando elementos como lentes dieléctricas, pudiendo prescindir de componentes mecánicos para promediar las irregularidades de superficie. Existen estudios previos de la viabilidad de emplear esta tecnología para la medida de la altura del manto [8], pero no se ha reportado la puesta en marcha de un sistema de medida remoto que opere durante un periodo prolongado de tiempo.

En este Trabajo de Fin de Máster se va a presentar un prototipo de radar que emplea ondas milimétricas y permite medir la altura geométrica del manto de nieve. También se va a presentar el resultado de las medidas continuadas, efectuadas durante la temporada invernal 2023-2024. Estas han sido tomadas en la estación experimental AEMET-Formigal, donde también se dispone de sensores de altura del manto nivoso basados el ultrasonidos y láser.

1.2. Estación experimental AEMET-Formigal

La Agencia Estatal de Meteorología (AEMET) dispone a 1800 metros de altitud en el Pirineo aragonés de una estación experimental, la estación experimental AEMET-Formigal ($42^{\circ}45'41''N$ $0^{\circ}23'32''W$, Fig. 1). En ella se registran continuamente las características ambientales y del manto nivoso. Fue la localización elegida por AEMET para establecer el experimento español de WMO-SPICE (*World Meteorological Organization Solid Precipitation Intercomparison Experiment*). Este experimento estudia el efecto que tiene la velocidad del viento sobre las mediciones de pluviómetros basados en la captura de las precipitaciones sólidas [9]. Entre otros instrumentos, se instaló en esta zona un pluviómetro de referencia protegido del viento por una doble valla (*double fence automated reference*, DFAR), que se muestra en la Fig. 3.

El área de la estación experimental es una pequeña planicie no muy expuesta al viento, lo que favorece que el manto de nieve permanezca homogéneo espacialmente. Temporalmente, se suele disponer de nieve entre los meses de noviembre y mayo, dependiendo de las precipitaciones y temperaturas registradas cada año. Se han llegado a registrar más de 2.5 m de nieve, siendo el promedio de altura máxima registrada en los últimos años de 1.7 m.

Las instalaciones incluyen infraestructura eléctrica bajo tierra, comunicaciones de banda ancha, imágenes de vídeo en tiempo real de los distintos experimentos instalados y un pequeño refugio/taller para poder trabajar. Es fácilmente accesible tanto en verano como en invierno por estar localizada dentro de la estación de esquí Aramón-Formigal. El personal de la estación de esquí se encarga del mantenimiento de la estación experimental, cuyo acceso está restringido para mantener el manto de nieve sin perturbar. En las Figuras 1 y 3 se muestran fotografías del área, con los distintos experimentos que contiene.

En la estación también se pueden encontrar experimentos y sistemas de medición de otras instituciones. La Confederación Hidrográfica del Ebro (CHE) dispone en este área de un sensor ultrasónico de la altura del manto y de un medidor de atenuación de neutrones producidos por la acción de los rayos cósmicos sobre la atmósfera, para medir el SWE. El Instituto Pirenaico de Ecología del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (IPE-CSIC) estudia en esta zona la concentración en el aire de partículas contaminantes. Por último, el Grupo de Tecnologías Fotónicas (GTF) de la Universidad de Zaragoza tiene instalado un radar de salto de frecuencia (*Stepped Frequency Continuous Wave Radar*, SFCW) para estudiar nuevas técnicas de medida del SWE y la estructura estratigráfica del manto nivoso [3].



(a)



(b)

Figura 3: (a) Pluviómetro de referencia protegido por una doble valla (DFAR) instalado por AEMET en el área de experimentación AEMET-Formigal. Es parte del experimento WMO-SPICE, que determina la influencia del viento sobre las mediciones de pluviómetros de captura [9]. (b) Zona de experimentación donde se encuentran la mayoría de instrumentos de medición. En el centro la torre que soporta el radar SFCW desarrollado por el GTF [3]. Se puede apreciar la gran homogeneidad de la superficie del manto nivoso en la zona de experimentación.

2. Radares FMCW

El concepto básico de un sistema radar (derivado del acrónimo inglés, *Radio Detection and Ranging*) es el empleo de ondas electromagnéticas, inicialmente ondas de radio, para determinar la posición y velocidad de un objeto. Por ejemplo, si un objeto refleja un pulso de radiación, el retardo entre el pulso emitido y recibido permitirá calcular la distancia a la que se encuentra el objeto. Además, la diferencia de frecuencia con la que se refleja la radiación contendrá información sobre la velocidad radial del objeto (efecto Doppler).

El empleo de ondas continuas no permite obtener información sobre la distancia a la que se encuentra un objeto, pero sí puede conseguirse introduciendo una cierta modulación en la frecuencia o en la amplitud de la onda continua emitida. Entre ambas opciones resulta más conveniente la modulación en frecuencia, datando la primera patente al respecto de 1928 como sistema para medir la altitud en aviones. Aunque para aplicaciones de larga distancia es más frecuente la utilización de radares pulsados, los radares de onda continua modulados en frecuencia (*Frequency-Modulated Continuous Wave Radar*, FMCW) han encontrado ciertas aplicaciones donde su uso es muy extendido. Se emplean habitualmente en sistemas para medir el nivel de líquido en tanques [10] y en sistemas de asistencia a la conducción en automóviles (*Advanced Driver-Assistance Systems*, ADAS), por ejemplo para detectar objetos en el punto ciego y para el control adaptativo de la velocidad de cruce, ya que permiten medir simultáneamente la posición y velocidad de los objetos [11][Cap. 1].

2.1. Teoría básica de los radares FMCW

Los radares FMCW permiten medir tanto distancias comparables a la longitud de onda de la radiación empleada como distancias mucho mayores con gran precisión. Además permiten medir rango y velocidad simultáneamente y pueden discriminar múltiples objetivos.

Usualmente se emplea una modulación lineal en la frecuencia durante un tiempo t_c (tiempo

de *chirp*), de forma que la frecuencia instantánea de la emisión venga dada por [11][Cap. 3]

$$f(t) = f_0 + \frac{B}{t_c}t, \quad (2.1)$$

para $0 \leq t \leq t_c$, donde B es el ancho de banda barrido en la modulación y f_0 es la frecuencia mínima empleada. El módulo del campo eléctrico en la antena de transmisión vendrá descrito por

$$E_T(t) = E_0 \cos(2\pi\phi(t)) = E_0 \cos\left[2\pi\left(f_0 + \frac{B}{2t_c}t\right)t\right], \quad (2.2)$$

donde E_0 es la amplitud, que se asume independiente del tiempo, y $\phi(t)$ es la fase, que cumple que $f(t) = d\phi(t)/dt$. Usualmente se define γ como la pendiente de la Ec. (2.1), $\gamma = B/t_c$.

Si un objeto se sitúa a una distancia R del radar, el módulo del campo eléctrico de la radiación que refleje y se detecte en la antena de recepción será

$$E_R(t) = \Gamma E_T(t - \tau) = \Gamma E_0 \cos\left[2\pi\left((f_0 - \gamma\tau)t + \gamma(t^2 + \tau^2)/2 - f_0\tau\right)\right], \quad (2.3)$$

donde $\tau = 2R/c$ es el retardo debido a la distancia a la que se encuentra el objeto, siendo c la velocidad de la luz, y Γ da cuenta de la reflexión que produce. Bajo condiciones habituales de operación $\tau \ll t_c$. La frecuencia de la señal recibida será ligeramente distinta a la que se esté emitiendo en ese momento, debido a que se está recibiendo el reflejo de la radiación emitida en un tiempo anterior. Se denota f_b a esta diferencia de frecuencias. En la Fig. 4 se muestra un esquema de la diferencia de frecuencias entre emisión y recepción, cuya medida permite determinar la distancia a la que se encuentra el objeto.

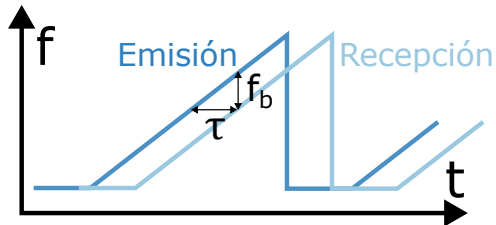


Figura 4: Frecuencias de emisión y recepción en un radar FMCW enfrentado a un objeto a una distancia R . La frecuencia de emisión se varía linealmente en el tiempo. El retardo causado por el viaje de ida y vuelta al objeto, $\tau = 2R/c$, se traduce en una diferencia de frecuencia entre la emisión y la recepción.

Para detectar la diferencia de frecuencia entre emisión y recepción se realiza un mezclado de ambas señales, de forma que la información de la distancia a la que se encuentra el objeto venga contenida en la frecuencia de batido resultante. En la Fig. 5 se muestra un esquema de bloques de un radar FMCW. La radiación emitida se genera a partir de un oscilador, cuya frecuencia viene dada por la Ec. (2.1). El voltaje detectado, proporcional al campo eléctrico, se mezcla en un multiplicador con la señal que emite el oscilador.

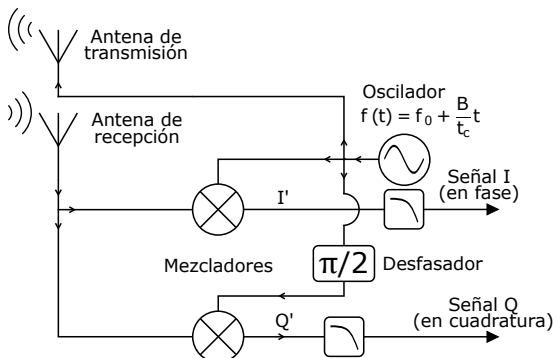


Figura 5: Esquema de bloques de un radar FMCW. La frecuencia de emisión aumenta linealmente en el tiempo. En la recepción se multiplica la señal por la proveniente del oscilador para reducir su frecuencia. La recepción en cuadratura permite mejorar la calidad de las medidas y presenta ventajas en el tratamiento posterior.

En la recepción se suelen generar dos señales: la señal $I'(t)$ (en fase), resultado de mezclar la señal recibida directamente con la del oscilador, y $Q'(t)$ (en cuadratura), resultado de llevar a cabo el mezclado empleando la señal del oscilador desfasada un cuarto de ciclo. Esta recepción en cuadratura presenta ciertas ventajas para el tratamiento posterior.

Se pueden escribir las señales tras el mezclado como

$$I'(t) = kE_R(t) \cos(2\pi\phi(t)) = k\Gamma E_T(t - \tau) \cos(2\pi\phi(t)) , \quad (2.4)$$

$$Q'(t) = kE_R(t) \sin(2\pi\phi(t)) = k\Gamma E_T(t - \tau) \sin(2\pi\phi(t)) , \quad (2.5)$$

donde k es un factor de proporcionalidad, idealmente el mismo para los dos canales de recepción. Del producto de funciones armónicas tras la mezcla surgen dos oscilaciones superpuestas, una con frecuencia igual a la suma de las originales y la otra de frecuencia resta (la frecuencia de batido, f_b). Las salidas del radar se obtienen filtrando pasa-bajo las señales tras el mezclado,

$$I(t) = \frac{k\Gamma E_0}{2} \cos \left[2\pi \left(-\gamma\tau t - f_0\tau + \frac{\gamma}{2}\tau^2 \right) \right] , \quad (2.6)$$

$$Q(t) = -\frac{k\Gamma E_0}{2} \sin \left[2\pi \left(-\gamma\tau t - f_0\tau + \frac{\gamma}{2}\tau^2 \right) \right] . \quad (2.7)$$

La expresión puede simplificarse teniendo en cuenta que $\gamma\tau^2/2 \ll f_0\tau$, por lo que las señales tienen una frecuencia de batido dada por

$$f_b = \gamma\tau = \frac{2B}{ct_c} R , \quad (2.8)$$

y su fase inicial, $f_0\tau$, es también proporcional al retardo. Ambas magnitudes proporcionan pues la información sobre la distancia a la que se encuentra el objeto y pueden obtenerse mediante una Transformada de Fourier (TF) de las señales.

El procedimiento seguido habitualmente es digitalizar las señales $I(t)$ y $Q(t)$, y calcular su Transformada de Fourier Discreta (TFD). Por ser ambas funciones reales tendrán componentes frecuenciales positivas y negativas. Sin embargo, considerando la función compleja

$$Z(t) = I(t) + iQ(t) = \frac{k\Gamma E_0}{2} \exp [2\pi i (\gamma\tau t + f_0\tau)] , \quad (2.9)$$

se consigue una señal sin componentes frecuenciales negativas. De esta forma se eliminan efectos que puede tener esta frecuencia negativa (frecuencia imagen) en la región de interés. Esto reporta beneficios al calcular las componentes frecuenciales de la señal, permitiendo mejorar la precisión [12]. Poder construir esta función compleja y así eliminar las frecuencias negativas es posible gracias a la detección en cuadratura.

Cuando en el campo de visión del radar se tienen varios objetos, las señales que reflejan se superponen. Realizando la TF de la señal recibida se obtiene información sobre los distintos objetos, ya que a cada distancia le corresponde una frecuencia de batido distinta. Al tener la señal una duración finita, sus componentes frecuenciales se ensancharán afectando a la capacidad de distinguir múltiples objetivos. En concreto la distancia mínima a la que se pueden diferenciar dos objetos con técnicas basadas en la TFD es de $c/2B$, por lo que un mayor ancho de banda mejora la precisión multi-objetivo. Sin embargo el ancho de banda no limita teóricamente la precisión con la que se puede conocer la distancia a la que se encuentra un único objetivo [13, 14].

2.2. Radares de ondas milimétricas

La generación y detección de ondas milimétricas, entre 30 y 300 GHz, ha avanzado en los últimos años por la posibilidad de emplear tecnologías basadas en semiconductores a estas frecuencias. Recientemente el gran auge de los ADAS en la industria automovilística ha abaratado la fabricación de radares de ondas milimétricas. Presentan una serie de ventajas sobre otras formas de detectar objetos, por ejemplo es un método de detección más robusto frente a condiciones ambientales adversas (como niebla o lluvia) que otras tecnologías como los ultrasonidos o el lidar. Además esta región del espectro electromagnético permite la miniaturización de los sistemas, incluidas las antenas, por ser la longitud de onda del orden de milímetros. Ambas ventajas son de interés en la aplicación desarrollada en el trabajo.

Actualmente se dispone de dispositivos comerciales de grandes prestaciones y bajo coste capaces de generar y detectar ondas milimétricas. Su construcción, empleando tecnologías semiconductoras, permite que su consumo sea pequeño, además de dotarlos de una amplia versatilidad y sencillez de manejo.

En la Fig. 6 se muestra el dispositivo empleado a lo largo del trabajo, el radar TRX_120_067, comercializado por Indie Semiconductor [15]. Opera en torno a 120 GHz ($\lambda = 2.5$ mm) ofreciendo un ancho de banda de hasta 6.3 GHz. En un mismo chip, cuyo encapsulado mide 8×8 mm², se dispone tanto de la generación de señales como de la recepción. En su interior se integran además las antenas y distintas etapas de amplificación para optimizar su funcionamiento. Este tipo de dispositivos son conocidos como “Sistema en un chip” (*System on Chip*, SoC).

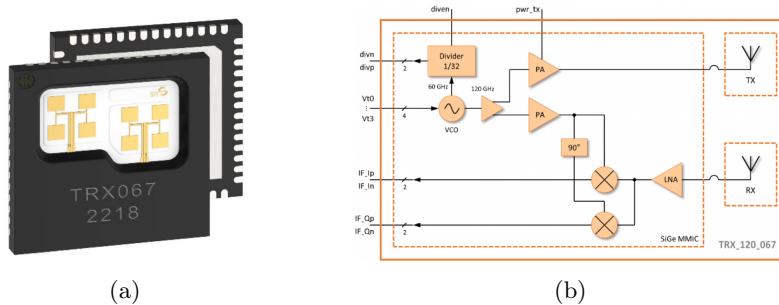


Figura 6: Para el desarrollo del trabajo se ha empleado el radar TRX_120_067, fabricado en tecnología de Silicio-Germanio y comercializado por Indie Semiconductor. En el panel (a) se muestra una fotografía del encapsulado donde pueden observarse las matrices 2×2 de antenas *patch* de emisión y recepción, integradas dentro del chip. Su directividad es alta comparada con las antenas de dipolo habitualmente empleadas en estos dispositivos. En el panel (b) se muestra el esquema de bloques que proporciona el fabricante. Se corresponde perfectamente a la estructura de un radar FMCW, Fig. 5. El chip también incluye la amplificación de potencia para la emisión (PA) y amplificación de bajo ruido para el canal de recepción (LNA). El oscilador controlado por voltaje (VCO) opera en torno a 120 GHz, ofreciendo un ancho de banda total de 6.3 GHz. Las tensiones a la salida del chip se proporcionan en forma diferencial. Figuras extraídas de la Ref. [15].

Se puede observar como el diagrama de bloques de la Fig. 6 se corresponde al presentado para un radar FMCW, Fig. 5. Controlar la frecuencia de emisión mediante un VCO permite una gran flexibilidad al elegir el ancho de banda, e incluso construir un radar de onda continua para medir únicamente velocidades (radar Doppler). Que las señales de salida, Ecuaciones (2.6) y (2.7), sean de baja frecuencia permite implementar una electrónica de control de bajo coste. El chip se alimenta con un voltaje único de 3.3 V, consumiendo 380 mW de potencia. Genera radiación coherente con una potencia típica de -3 dBm ≈ 0.5 mW, suficiente para aplicaciones a corta distancia.

3. Desarrollo de un prototipo de radar FMCW para operar en exterior

Empleando el sensor de ondas milimétricas TRX_120_067, Fig. 6, se ha desarrollado un prototipo de radar FMCW que opera en torno a 120 GHz para medir la altura geométrica del manto nivoso. En concreto se ha llevado a cabo la construcción del equipo, la implementación de un programa de control que permita realizar las medidas y algoritmos para el tratamiento de las mismas. El prototipo se ha diseñado para que pueda operar de forma continuada en el exterior y debe ser capaz de soportar condiciones meteorológicas adversas en la montaña como frío, lluvia y nieve.

3.1. Implementación física

Para implementar un radar FMCW con el sensor TRX_120_067 se necesita controlar la frecuencia de emisión, variándola linealmente en el tiempo, y medir las señales a la salida del chip. Ambas operaciones se realizan con una tarjeta de adquisición de datos (DAQ). En concreto se ha empleado la tarjeta del fabricante National Instruments, modelo DAQ NI USB-6212 OEM. Esta tarjeta dispone de 16 canales de entrada analógica, 2 canales de salida analógica, una velocidad máxima de muestreo de 400 kS/s y resolución de 16 bits.

Se emplea un tiempo de *chirp* de 10.24 ms, de forma que las señales digitalizadas a 200 kS/s (máxima velocidad permitida con la configuración empleada de canales de la DAQ) tengan 2048 puntos. Elegir una potencia de 2 optimiza el cálculo posterior de la TFD.

En el sensor, la señal emitida es generada mediante un oscilador controlado por tensión (*Voltage-Controlled Oscillator*, VCO). Puesto que la relación entre la tensión aplicada en el oscilador y la frecuencia de emisión no es lineal, se compensará en la generación de la tensión empleando los datos proporcionados por el fabricante. La señal de tensión, generada por la DAQ, es previamente filtrada pasa-bajo para eliminar ruido de alta frecuencia, tal y como comúnmente se realiza en este tipo de aplicaciones [13, 16]. Para ello se emplea un filtro RC de orden 2 con frecuencia de corte de 50 kHz.

Las señales diferenciales generadas por el chip, resultantes de la mezcla de la señal recibida con la del oscilador local, antes de ser digitalizadas por la DAQ pasan por una etapa de acondicionamiento. Esta consiste en un filtro pasa-banda RC de orden 2, de frecuencias de corte 2.2 y 16 kHz, y posteriormente un amplificador de instrumentación. Las frecuencias de corte se han escogido de forma que filtren el ruido de alta frecuencia (funcionando también como filtro *antialiasing*, previo a la digitalización), y los objetos que se encuentren demasiado cercanos. Objetos a distancias pequeñas (como los elementos de protección ambiental) y los efectos del acoplamiento radiativo directo entre las antenas generan frecuencias de batido bajas. El filtro pasa-banda debe disminuir estas señales para que en la etapa de amplificación la ganancia se pueda elegir elevada y la salida no sature.

Se ha diseñado una placa de circuito impreso (*printed circuit board*, PCB) para incorporar tanto el radar como las etapas de filtrado, amplificación y una etapa de alimentación para generar la tensión de 3.3 V que requiere el radar. De esta forma a la PCB se le introduce únicamente el voltaje de polarización simétrica de ± 5 V que alimenta los amplificadores, y a partir de este se genera el voltaje de alimentación del radar. Se han incluido también distintos soportes mecánicos que permiten acoplarle elementos colimadores de la radiación generada, así como la unión de la

PCB con el resto de elementos del prototipo. La PCB con todos los componentes electrónicos soldados se muestra en la Fig. 9 y en el Apéndice A se incluyen los planos diseñados.

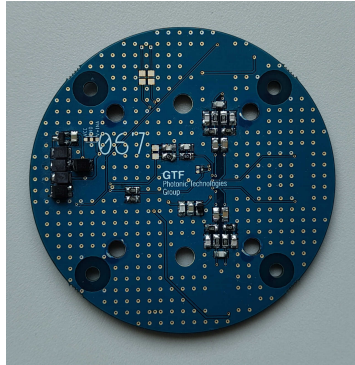
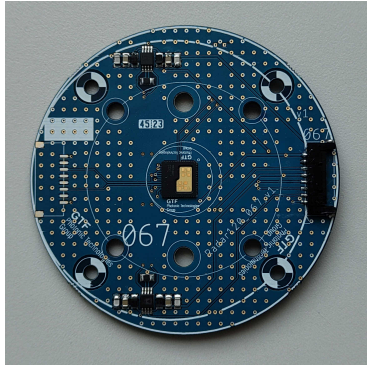


Figura 9: Fotografías de la PCB diseñada para incorporar las etapas de filtrado, amplificación y alimentación para el radar TRX_120_067. Se muestran todos los componentes electrónicos soldados a la PCB. Su diámetro es de 70 mm. En el Apéndice A se incluyen los planos del diseño de la placa.

La DAQ se alimenta y controla desde un ordenador monotarjeta, un LattePanda Alfa, que incorpora Windows 10. En este ordenador se ejecuta un programa en Matlab que controla la adquisición de medidas. Un diagrama de bloques del funcionamiento del prototipo, prescindiendo de los detalles de la alimentación, se muestra en la Fig. 10.

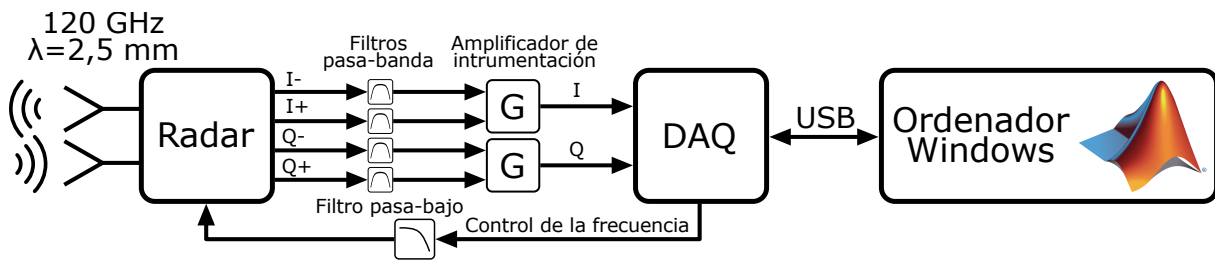


Figura 10: Diagrama de bloques del prototipo desarrollado de radar FMCW. Las etapas de acondicionamiento de las señales, entre la DAQ y el radar, físicamente se implementan en la PCB de la Fig. 9. En la Fig. 13 se muestra el ensamblaje de los elementos del prototipo sobre una plancha de aluminio.

Para la construcción del prototipo estos elementos se ensamblan sobre una plancha de aluminio, tal como se muestra en la Fig. 13. Como la DAQ tiene 2 salidas analógicas se pueden controlar de forma independiente 2 radares, que se montaron por duplicado en el prototipo para que el sistema ganase robustez frente a posibles averías que pudieran producirse en su operación continuada. Esto permitirá además comparar las medidas que proporcionan.

La radiación emitida por ambos radares fue colimada empleando lentes dieléctricas comercializadas también por Indie Semiconductor [17]. En la plancha de aluminio se soporta también un conversor DC-DC, de forma que al prototipo únicamente se le debe suministrar una tensión continua de 12 V. Esta tensión es la que alimenta al ordenador, mientras que el conversor genera la tensión de alimentación bipolar de ± 5 V con la que se alimentan los componentes de la PCB.

En la Fig. 14 se muestra un esquema de la instalación del prototipo, con los radares hacia el suelo para medir su altura. Es necesario destacar que la intención del prototipo no es que su implementación esté optimizada económica ni tecnológicamente, sino demostrar la viabilidad de emplear esta tecnología radar para la medida de la altura del manto nivoso. El comportamiento de la nieve es distinto al de los objetos empleados para hacer pruebas en el laboratorio, por lo que se consideró más conveniente antes de optimizar el prototipo, registrar y comprender la fenomenología de las medidas de campo. De esta forma el prototipo podrá ser en un futuro optimizado teniendo un mayor conocimiento sobre la forma en que resulta conveniente hacerlo.

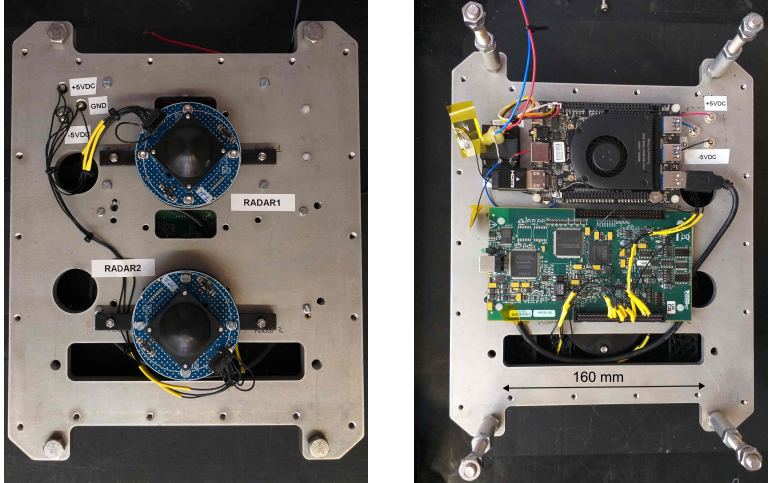


Figura 13: Fotografías de la plancha de aluminio que incorpora dos radares en sus respectivas PCBs, la DAQ que realiza la adquisición de medidas y el ordenador que la alimenta y controla. Se incorpora también un convertor DC-DC para la generación de la tensión de alimentación bipolar de la PCB a partir de la tensión de alimentación del ordenador. Se pueden observar las lentes dieléctricas que coliman la radiación emitida por los radares.

Para proteger la electrónica de las condiciones atmosféricas exteriores se diseñaron radomos (acrónimo del inglés *Radar Domes*) que protegieran ambas caras de la plancha de aluminio. Se imprimieron en 3D empleando PLA, que fue posteriormente impermeabilizado y pintado. Fueron atornillados a la plancha de aluminio, previa colocación de una junta tórica impregnada en grasa de silicona que asegurase la estanqueidad de las uniones. En la Fig. 14 se pueden observar los radomos ya incorporados en el prototipo.

Para el control del ordenador, tanto para medidas en el laboratorio como en la estación experimental, se emplea el programa *Team Viewer*, que permite controlar el ordenador remotamente. El ordenador debe permanecer conectado a internet, pero no resulta necesaria la inclusión de ningún periférico. Por lo tanto al prototipo únicamente se necesita introducir la alimentación de 12 V y proporcionarle una red WiFi.

3.2. Validación de su funcionamiento, tratamiento de las medidas y calibración

En el laboratorio se validó el correcto funcionamiento del prototipo de radar FMCW empleando láminas metálicas reflectantes. En la Fig. 14 se muestra una fotografía del montaje con el prototipo completo colocado en posición horizontal, enfocando al suelo. Las figuras mostradas corresponden a medidas empleando el “Radar 1”. Los resultados del “Radar 2” son análogos.

Para las medidas el voltaje se varía de forma que, según la hoja de especificaciones del fabricante [15], la frecuencia de la señal generada se incrementa desde 120.5 GHz hasta 124.5 GHz. Se escogió este rango por optimizar la calidad de las medidas, aunque posteriormente se comprobará que el ancho de banda barrido es menor que el esperado. Se registran 50 *chirps*, con 5 ms de pausa entre cada uno, que posteriormente se promedian. Es decir, se varía linealmente la frecuencia 50 veces como en la Fig. 4 y se emplea el promedio de las medidas.

Para validar el correcto funcionamiento del sistema y calibrar su respuesta se varía la distancia entre una lámina reflectante metálica y el radar. En cada posición de la lámina se digitalizan las señales $I(t)$ y $Q(t)$, que se muestran en la Fig. 15 para una posición concreta de la lámina. También se muestra la TF de las señales en todas las posiciones medidas, calculada empleando la TFD [18][Cap.5],

$$G(f) = \sum_{t_n} [I(t_n) + iQ(t_n)] e^{-2\pi i f t_n} , \quad (3.1)$$

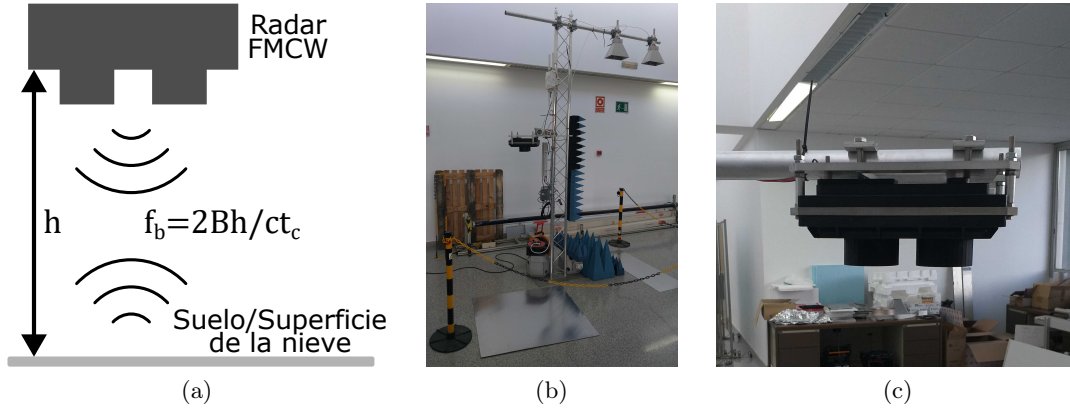


Figura 14: (a) Esquema de la posición de montaje del prototipo, con los radares hacia el suelo. (b) Montaje del prototipo en el laboratorio, enfrentado a una lámina metálica reflectora cuya posición se varía. Es la forma en que se valida y calibra su funcionamiento. (c) Fotografía detalle de los radomos impresos en 3D para proteger los componentes electrónicos. El radomo inferior tiene dos compartimentos para los sistemas de colimación de la radiación.

donde el sumatorio se extiende a las medidas digitalizadas. Para poder conseguir una buena discretización frecuencial y determinar la frecuencia de batido con buena precisión se emplea la técnica de relleno con ceros (*zero padding*) en el cálculo del espectro [13, 16, 19]. La posibilidad de emplear el relleno con ceros está comúnmente implementada en los algoritmos de FFT. Para el cálculo de todos los espectros presentados se emplea el enventanado *Hanning*.

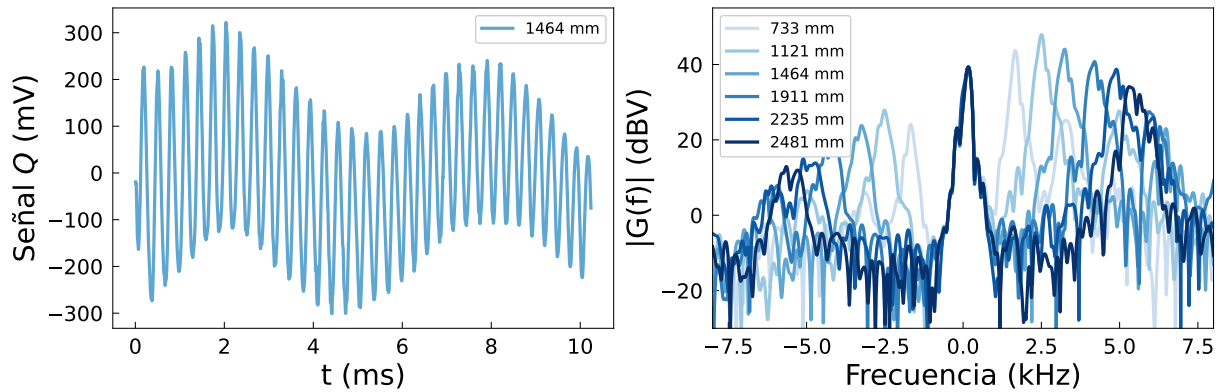


Figura 15: Ejemplo de la señal $Q(t)$ para una posición concreta de la lámina reflectora (izquierda) y espectro de todas las medidas empleadas para la validación y calibración del prototipo (derecho). La oscilación de baja frecuencia corresponde a señales parásitas, y la de mayor frecuencia a la lámina reflectora. Las distancias presentadas fueron medidas entre la lámina reflectora y el radomo del prototipo, empleando un metro láser. En el cálculo de la FFT se emplea un enventanado *Hanning* y *zero padding* para aumentar la resolución en frecuencias. Medidas tomadas empleando el “Radar 1”.

En la medida temporal de la Fig. 15 se observa la superposición de dos oscilaciones. Una de baja frecuencia correspondiente a señales parásitas (a la reflexión que produce el radomo y al acoplamiento directo entre antenas) y otra de mayor frecuencia, que corresponde a la lámina reflectora. Esta característica se observa también en el contenido espectral de las señales, siendo el contenido de baja frecuencia independiente de la posición de la lámina reflectora. Los espectros contienen componentes en frecuencias negativas (frecuencias imagen), aunque menores que las de frecuencias positivas. Esto es causado porque en el chip las amplitudes de ambos canales de recepción no están perfectamente balanceadas. Además, los picos en los espectros tienen una

anchura considerable. Estos efectos son causados por no idealidades en las señales del radar.

Aunque idealmente $Z(t) = I(t) + iQ(t)$ es una oscilación armónica de frecuencia f_b (que depende de la distancia al objeto), un modelo que resulta más realista es considerar

$$Z(t) = Z_0(t) + A(t)\alpha(R) \exp [2\pi i (f_b t - f_0 \tau)] , \quad (3.2)$$

donde $Z_0(t)$ es una cierta señal (la señal de fondo, generada por las reflexiones parásitas en el radomo y el acoplamiento entre antenas) que aparece incluso en ausencia de objeto, $A(t)$ es una modulación en amplitud causada por las diferencias de comportamiento frecuencial del chip (que ensancha los picos del espectro) y $\alpha(R)$ da cuenta de la variación en amplitud dependiendo de la posición a la que se encuentre el objeto, además de las características con las que refleje la radiación. En la Ec. (3.2) no se contempla la existencia de frecuencias negativas porque serán eliminadas de las medidas empleando una etapa de filtrado digital.

La señal $Z_0(t)$ puede medirse eliminando del campo de visión del radar todos los objetos. Empleando además una medida de referencia cuando el reflector se encuentra a una distancia conocida R_r , se denotará $Z_r(t)$, se pueden corregir las no idealidades de las señales. Para ello se define [10, 12, 14, 20-22]

$$\mathcal{Z}(t) = \frac{Z(t) - Z_0(t)}{Z_r(t) - Z_0(t)} = \frac{\alpha(R)}{\alpha(R_r)} \exp [2\pi i ((f_b - f_{b,r})t - f_0(\tau - \tau_r))] , \quad (3.3)$$

que compensa el efecto de las señales parásitas y de la modulación en amplitud. Las magnitudes $f_{b,r}$ y τ_r son las relativas a la señal de referencia empleada. Como consecuencia del cociente, la frecuencia de oscilación de $\mathcal{Z}(t)$ se ve afectada por la de la señal de referencia. Para objetos más cercanos que el de referencia, $f_b < f_{b,r}$, la frecuencia de oscilación de $\mathcal{Z}(t)$ será negativa; mientras que en objetos más lejanos será positiva. Este procedimiento puede realizarse para corregir medidas en que haya más de un objeto, pero la medida de referencia debe ser de un único objeto reflectante. Si la señal de referencia no fuese de un único objeto, la igualdad de la Ec. (3.3) no se cumpliría.

En la Fig. 16 se presentan las medidas empleadas como fondo y referencia para el “Radar 1”. La medida de fondo se toma con un absorbedor de radiofrecuencia delante del prototipo, de forma que se miden las señales parásitas. Como referencia se coloca la lámina reflectora a 1464 mm (una de las medidas incluidas en la Fig. 15). El resultado de restar la señal de referencia y de fondo se filtra pasa-banda empleando un filtro FIR con frecuencias de corte 1.7 y 4.4 kHz. Se consigue así eliminar la oscilación de baja frecuencia, las frecuencias negativas y otras reflexiones parásitas que aparecen en la señal a frecuencias superiores. Esto permite emplear la referencia en el denominador de la Ec. (3.3).

En las señales a analizar también se empleará un filtro FIR pasa-banda, con frecuencias de corte igual a 1 y 9 kHz. Para escoger los valores se han tenido en cuenta las frecuencias de las medidas de la Fig. 15 y las condiciones posteriores de operación del prototipo.

En la Fig. 17 se muestra el resultado de aplicar el procedimiento de corrección a las medidas de la Fig. 15, con el reflector en distintas posiciones. Se denota $\mathcal{G}(f)$ a la TFD de la función $\mathcal{Z}(t)$. Se aprecia que la anchura de los picos disminuye y desaparecen las frecuencias imagen (en cada espectro hay únicamente un pico).

La relación entre la distancia a la que se encuentra el reflector y la frecuencia de oscilación de $\mathcal{Z}(t)$, calculada a través de la búsqueda del máximo de $|\mathcal{G}(f)|$, es lineal. En la Fig. 17 se muestra

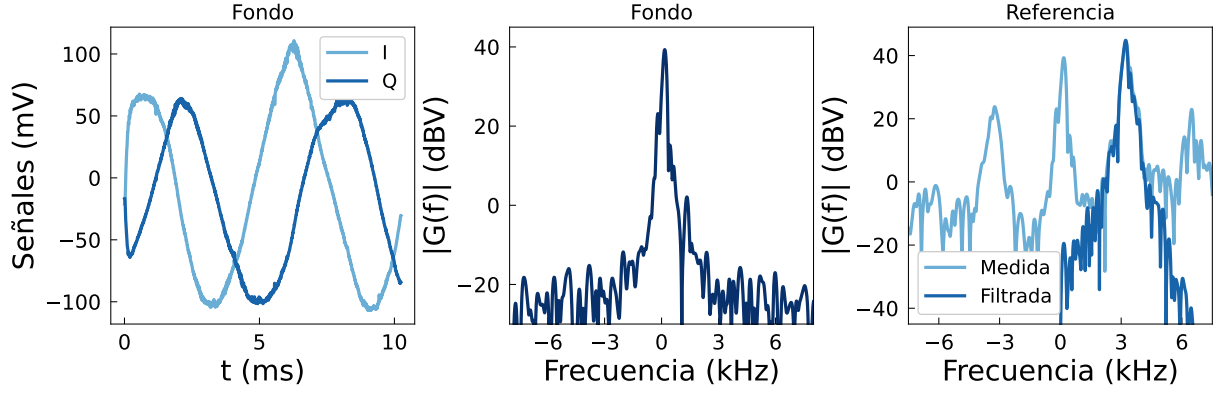


Figura 16: Señales de fondo y referencia empleadas para el tratamiento de los datos del “Radar 1”. La señal de referencia (la medida de 1464 mm de la Fig. 15) se filtra empleando un filtro FIR pasa-banda para asegurar el buen comportamiento de la Ec. (3.3).

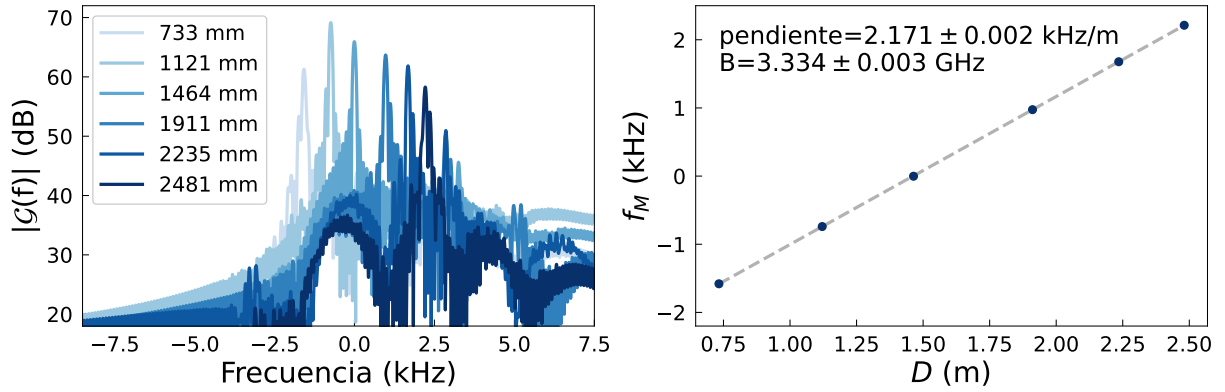


Figura 17: Espectro de las medidas de la Fig. 15 tras el tratamiento de la Ec. (3.3). Se emplean las señales de fondo y referencia de la Fig. 16. Los máximos son notablemente más estrechos que en la Fig. 15 y se han conseguido eliminar las frecuencias imagen mediante el filtrado. Se construye una recta de calibración con la posición del máximo del espectro. La linealidad de la relación es muy buena, pero el ancho de banda que se deduce de la misma es menor que el esperado. Datos medidos con el “Radar 1”.

la recta de calibración que permite conocer la posición midiendo la frecuencia. La pendiente viene fijada por el ancho de banda, Ec. (2.8), lo que permite calcular el ancho de banda efectivo que se barre en las medidas. En ambos radares, mediante un ajuste lineal se obtiene

$$B_1 = 3.334 \pm 0.003 \text{ GHz} , \quad B_2 = 3.328 \pm 0.004 \text{ GHz} . \quad (3.4)$$

Las medidas son compatibles con que ambos estén barriendo el mismo ancho de banda, pero es menor que los 4 GHz esperados por los voltajes proporcionados al radar. En concreto el ancho de banda barrido es un 83% del esperado. Esta disminución es probablemente debida a las etapas de filtrado, tanto analógicas como digitales. El mayor efecto es posiblemente causado por el filtro paso-bajo que se interpone entre la salida analógica de la DAQ y el control de voltaje del sensor, aunque el filtro FIR también hace que se pierda parte de la información en los primeros instantes de tiempo, dando lugar a una pérdida del ancho de banda efectivo. A pesar de que un menor ancho de banda implica una menor resolución para distinguir múltiples objetivos, no resulta crítico en la aplicación desarrollada.

Empleando este procedimiento se ha llegado a conseguir precisión para distinguir desplazamientos submilimétricos en condiciones de laboratorio. Sin embargo, en la ubicación final del

dispositivo para las medidas de campo la precisión conseguida es inferior (del orden de 2 cm). Este hecho se debe a derivas en el comportamiento de los chips, cuyo origen debe estar causado por derivas en su tensión de alimentación o en la temperatura a la que opera. No se ha indagado más en la causa porque en la aplicación final del prototipo esta precisión resulta suficiente.

En el laboratorio también se ha medido el campo de visión de los radares FMCW, empleando una técnica de elaboración propia basada en técnicas de medida del diámetro de campo modal en fibras ópticas [23]. Se ha obtenido que a una distancia de 2 m, el campo de visión tiene unos 23 cm de diámetro. Los detalles de la técnica empleada y las medidas realizadas se presentan en el Apéndice B.

3.3. Instalación del prototipo en la estación experimental AEMET-Formigal

Una vez calibrado el comportamiento del prototipo se procedió a su instalación en la estación experimental AEMET-Formigal para medir el espesor del manto nivoso durante la temporada invernal 2023-2024. En concreto se instaló en la torre en que el Grupo de Tecnologías Fotónicas tiene instalado un radar SFCW para estudiar la estratigrafía y el equivalente en agua del manto nivoso [3], que se muestra en la Fig. 18. Desde la torre se le proporciona al prototipo el voltaje de alimentación y una red WiFi. Esta red, generada a partir de la cobertura 4G disponible en la estación, permite al ordenador conectarse a internet. El control remoto del ordenador posibilita modificar en tiempo real el programa encargado de realizar la toma de medidas, proporcionando una gran flexibilidad al prototipo. En la Fig. 18 se muestran también las condiciones habituales de operación del prototipo tras un periodo de precipitaciones, que justifican las precauciones concernientes a la estanqueidad en el diseño de los radomos.

Bajo el prototipo, dentro de su campo de visión, se instaló un reflector plano metálico. Esto asegura una señal clara en ausencia de nieve, facilitando la detección de la posición del suelo.



Figura 18: (a) Prototipo instalado en la estación experimental AEMET-Formigal, junto con el radar SFCW desarrollado por el GTF. (b) Condiciones habituales de operación del prototipo que justifican la importancia de la estanqueidad del radomo.

4. Interacción de las ondas milimétricas con el manto nivoso

En la Sec. 2 se ha estudiado el funcionamiento de un radar FMCW frente a objetos reflectantes, presentando en la Sec. 3 medidas realizadas con el prototipo desarrollado empleando láminas metálicas. Sin embargo la interacción de las ondas milimétricas con el manto nivoso será predominantemente difusiva. En esta sección se van a estudiar primero las propiedades dieléctricas de las sustancias que constituyen el manto nivoso, para después analizar los efectos difusivos producidos por su estructura. Empleando distintos modelos comunes en la literatura, podrá calcularse la sección eficaz de retrodifusión del manto de nieve.

4.1. Propiedades dieléctricas de sus constituyentes

El manto nivoso está constituido por hielo, agua líquida y aire, cuyas propiedades dieléctricas son notablemente diferentes. Se van a caracterizar las sustancias por su índice de refracción complejo, $n = n_r - in_i$. Al propagarse una onda electromagnética en un medio homogéneo, la función que describirá la evolución de su campo eléctrico será

$$E(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - k_0 n x)} = E_0 e^{-n_i k_0 x} e^{i(\omega t - k_0 n_r x)}, \quad (4.1)$$

donde $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ es el número de ondas en el vacío de la radiación propagada, $\omega = 2\pi f$ es su frecuencia angular y se asume propagación a lo largo del eje X . El resultado es una onda cuya velocidad de fase viene determinada por la parte real del índice de refracción, y además se atenúa exponencialmente. La longitud de penetración de la onda, la distancia que recorre antes de que su intensidad disminuya en un factor $1/e$, viene dada por

$$L_p = \frac{\lambda_0}{4\pi n_i}. \quad (4.2)$$

El aire presenta un índice de refracción real e igual a $n_a = 1$. El índice de refracción tanto del agua como del hielo ha sido ampliamente estudiado y existen modelos matemáticos sencillos que describen sus características con una gran precisión [24][Cap. 4]. En estos modelos se contempla la dependencia del índice de refracción con la frecuencia, pero también con la temperatura y la salinidad. En el manto nivoso, la temperatura será de en torno a 0°C y la salinidad nula. En la Fig. 19 se muestra el índice de refracción y la longitud de penetración para frecuencias entre 100 MHz y 200 GHz.

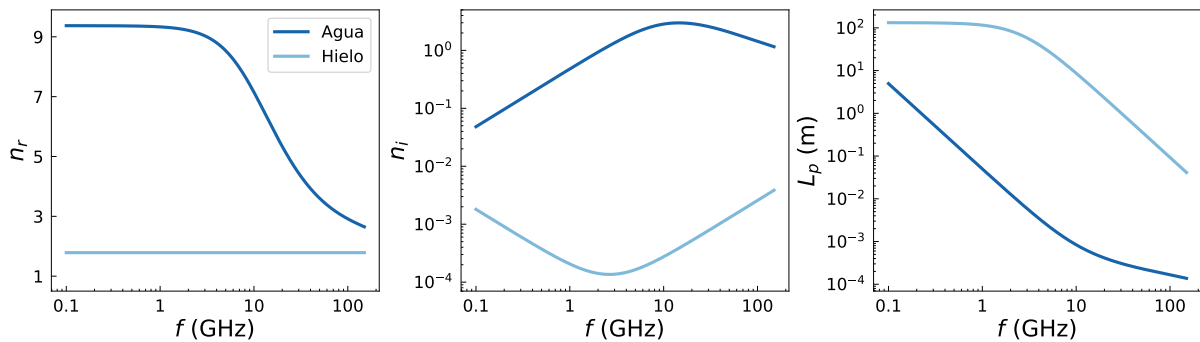


Figura 19: Propiedades dieléctricas del agua y el hielo puros a una temperatura de 0°C . Se muestra el índice de refracción, $n = n_r - in_i$, y la longitud de penetración de la radiación, definida por la Ec. (4.2). Los modelos dieléctricos del agua y hielo han sido extraídos de [24][Cap. 4].

En torno a 15 GHz el agua presenta un modo rotacional, lo que produce que n_i alcance un máximo en esta región. Si se aumenta la temperatura la resonancia se desplaza a frecuencias mayores. En el hielo no existe esta resonancia por estar las moléculas organizadas en un sólido cristalino, perdiendo la capacidad de rotar. Esta diferencia causa que la longitud de penetración de la radiación sea mayor en hielo que en agua líquida.

En concreto para una frecuencia de 120 GHz se tiene que la longitud de penetración en hielo es de 6.4 cm, mientras que en el agua es de 0.15 mm. Esto causará una gran diferencia de comportamiento entre la nieve seca y la nieve con LWC elevado.

4.2. Modelo de la estructura del manto nivoso

Para calcular las propiedades difusivas del manto nivoso se necesitará emplear un modelo de su estructura. Denotando las fracciones volumétricas de aire, agua y hielo respectivamente por ϕ_a , ϕ_w , ϕ_i , se cumplirá que

$$\phi_a + \phi_w + \phi_i = 1, \quad (4.3)$$

$$\phi_w \rho_w + \phi_i \rho_i = \rho_s, \quad (4.4)$$

donde ρ_w , ρ_i y ρ_s son respectivamente la densidad del agua, hielo y de la nieve (la densidad del aire se considera despreciable). El LWC viene dado por ϕ_w . Estas ecuaciones proporcionan las características macroscópicas de una capa de nieve, y permiten caracterizarla midiendo por ejemplo su densidad y LWC.

Aunque esta caracterización es suficiente para algunas aplicaciones, la microestructura tiene un importante impacto sobre la difusión de ondas milimétricas por ser el tamaño de las partículas de hielo comparable al de la longitud de onda de la radiación empleada. En la Fig. 20 se esquematiza un modelo habitual del manto nivoso, considerando que está constituido por esferas de hielo y pequeñas inclusiones de agua, con aire como medio de fondo. Este modelo permite por una parte considerar los fenómenos difusivos, pero también calcular la constante dieléctrica de la nieve para longitudes de onda más largas. Por el tamaño de las inclusiones de agua se suele considerar que no resultan relevantes en el proceso de difusión, sino que junto con el aire conforman un medio de fondo homogéneo sobre el que las esferas de hielo están incrustadas. Es de esta manera en que se suele modelizar el manto nivoso para sensado remoto de microondas y ondas milimétricas [24-26].

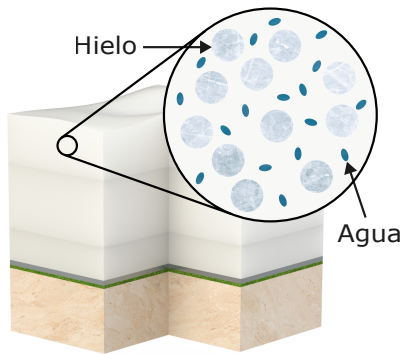


Figura 20: Modelo de la estructura del manto nivoso que permite calcular sus propiedades difusivas para ondas milimétricas. Se considera que está formado por partículas esféricas de hielo y pequeñas inclusiones de agua en el aire. Se suele considerar que el agua no juega un papel relevante en la difusión de ondas milimétricas, sino que junto con el aire conforma un medio de fondo sobre el que se tienen las esferas de hielo [24-26]. Para longitudes de onda largas comparadas con el tamaño de los constituyentes del manto puede emplearse este modelo para calcular una constante dieléctrica de la nieve.

Las esferas de hielo se asumen de un mismo radio R , por lo que su concentración volumétrica vendrá dada por $N_v = 3\phi_i/(4\pi R^3)$. Se va a asumir además que la distribución de las esferas de hielo es aleatoria.

Para caracterizar la constante dieléctrica del medio efectivo de fondo, formado por el aire y las pequeñas inclusiones de agua, se suele emplear la fórmula de mezcla de dieléctricos de De Loor [24][Cap. 4]. La constante dieléctrica del fondo, ε_b , cumplirá la ecuación

$$\varepsilon_b = 1 + \frac{m_v}{3}(\varepsilon_w - 1) \sum_{u=a,b,c} \left[\frac{\varepsilon_b}{1 + A_u(\varepsilon_w - \varepsilon_b)} \right], \quad (4.5)$$

donde se asume que la constante dieléctrica relativa del aire es $\varepsilon_a = 1$, mientras que la del agua, ε_w , se calcula empleando los modelos presentados en la Fig. 19. La fracción del volumen del medio de fondo que ocupa el agua, m_v , viene dada por $m_v = \phi_w / (\phi_w + \phi_a)$. Los factores $\{A_u\}$ son los conocidos como factores de despolarización de las inclusiones de agua ($A_a = A_b = 0.06$ y $A_c = 0.88$ [24][Cap. 11]). En condiciones de nieve seca, $\phi_w = 0$, el medio de fondo es aire. Conforme se aumenta el LWC, el medio efectivo va aumentando su constante dieléctrica (tanto la parte real como la imaginaria). El mayor efecto que tendrá este cambio es el aumento de su absorción, disminuyendo significativamente la longitud de penetración de la radiación.

El modelo de la estructura del manto vendrá pues determinado por la densidad de la nieve, su LWC y el tamaño de los granos de hielo. A partir de esta información podrán calcularse las propiedades difusivas del medio.

4.3. Difusión de la radiación electromagnética en medios densos

Para modelizar medios donde las partículas difusoras ocupan una fracción apreciable del volumen, medios densos como es el caso del manto nivoso, se debe emplear la ecuación de transferencia radiativa (ETR). Ésta describe la propagación y difusión de una onda electromagnética en un medio denso, y para su obtención se asume que no existe correlación entre los campos eléctricos difundidos por las distintas partículas que lo componen. Esto permite realizar un análisis en función de la intensidad de la onda en lugar de tener que estudiar su campo eléctrico, resultando en una mayor sencillez matemática y computacional [24][Cap. 11]. En los casos en que la polarización de la onda no resulta relevante, la ETR escalar viene dada por

$$\frac{dI(\vec{r}, \hat{s})}{ds} = -\kappa_e I(\vec{r}, \hat{s}) + \iint_{4\pi} \Psi(\hat{s}, \hat{s}') I(\vec{r}, \hat{s}') d\Omega', \quad (4.6)$$

donde $I(\vec{r}, \hat{s})$ es la intensidad de la radiación electromagnética en el punto \vec{r} que se propaga en la dirección \hat{s} y $\Psi(\hat{s}, \hat{s}')$ describe cómo se difunde en esa dirección la intensidad que viaja en las distintas direcciones \hat{s}' . La constante de extinción, κ_e , da cuenta de la pérdida de intensidad que se produce por la absorción del medio y por la difusión en las distintas direcciones. Tanto κ_e como $\Psi(\hat{s}, \hat{s}')$ vienen determinadas por las propiedades del medio difusor.

En muchas situaciones la polarización de la onda resulta relevante por tener partículas difusoras no esféricas o por darse un cambio de medio en incidencia oblicua [26], por lo que se deberá emplear la ecuación de transferencia radiativa vectorial. En este trabajo se considerará la ecuación escalar, pues se asumirá que las partículas difusoras son esféricas y la incidencia en los cambios de medio es perpendicular.

Hay dos casos en que el uso de este formalismo, considerando superposición incoherente de las ondas electromagnéticas, está teóricamente justificado. Por una parte estará justificado si la radiación empleada es de naturaleza incoherente, como lo son la mayoría de fuentes en el espectro visible pero no los emisores empleados. Si los centros de difusión están distribuidos

aleatoriamente y lo suficientemente alejados, el formalismo también está justificado. Aunque a priori los cristales de hielo que contienen el manto nivoso no siempre cumplen esta condición, la ecuación de transferencia radiativa es habitualmente empleada en la literatura científica para la difusión del manto nivoso y la comparación con medidas experimentales es satisfactoria [27-29].

En algunos estudios, para mejorar la precisión del tratamiento matemático, se tiene en cuenta que las partículas de hielo tienen cierta tendencia a unirse entre sí, como se observa en la Fig. 2. Esto hará que su distribución no sea completamente aleatoria, incorporando efectos de la coherencia de la radiación y mejorando la comparación con las medidas experimentales [29]. Además, para modelizar de forma precisa el manto nivoso se debe tener en cuenta que sus propiedades pueden variar a lo largo del perfil. En estos casos complejos la resolución completa de la Ec. (4.6) requiere de métodos numéricos [25, 26]. Por ejemplo, considerando un número finito de direcciones, la ecuación integral puede convertirse en un problema de autovalores.

Para calcular las magnitudes que intervienen en la ETR y que definen el problema, hay que tener en cuenta que al propagarse una onda electromagnética en interior del manto nivoso es difundida por las partículas de hielo que lo componen, pero también es absorbida tanto por el hielo como por el agua en estado líquido presente en el manto. Para la difusión que produce cada partícula de hielo deberá considerarse la solución de Mie (que trata la difusión producida por una esfera dieléctrica de radio arbitrario), por tener partículas de tamaño comparable al de la longitud de onda [25, 28].

El coeficiente de extinción de la Ec. (4.6) da cuenta de lo rápidamente que disminuye la intensidad que se propaga en una determinada dirección. Está relacionada con la longitud de penetración de la radiación en el medio,

$$\delta_p = 1/\kappa_e , \quad (4.7)$$

que es la magnitud equivalente a la definida para un medio homogéneo en la Ec. (4.2). Por contribuir a la extinción tanto la absorción como la difusión, se puede escribir que

$$\kappa_e = \kappa_s + \kappa_a , \quad (4.8)$$

donde κ_s es el coeficiente de difusión y κ_a de absorción, que se calculan a partir de la solución de Mie [24][Cap.8]. En el Apéndice C se presentan los detalles de cómo se obtienen estas magnitudes, además de la constante de retrodifusión, κ_b , que da cuenta de la intensidad de la difusión que se produce en la misma dirección que la de incidencia pero sentido contrario.

Para cuantificar la importancia que tienen los fenómenos difusivos en la propagación se define el albedo de difusión única como

$$a = \kappa_s/\kappa_e . \quad (4.9)$$

Si $a \approx 0$, el fenómeno de difusión es despreciable frente a la absorción; mientras que si $a \approx 1$ sucede lo contrario. Teniendo en cuenta la dependencia con la dirección que tiene la difusión se puede calcular $\Psi(\hat{s}, \hat{s}')$.

4.4. Resolución aproximada de la ecuación de transferencia radiativa

Aunque existen programas específicamente desarrollados para resolver numéricamente la ETR en el manto nivoso [30], se va a estudiar analíticamente una solución aproximada, presentado especial atención a sus condiciones de aplicabilidad. Se va a emplear una resolución iterativa,

que resulta especialmente adecuada para medios débilmente difusores. Esta solución permite interpretar de una manera sencilla las magnitudes que involucra.

Al calcular la solución iterativa en orden 0 se asume que no se produce difusión, sino que la radiación se atenúa exponencialmente en el medio con una longitud de penetración δ_p . Posteriormente se emplea $\Psi(\hat{s}, \hat{s}')$ para calcular cómo se difunde la radiación. De forma general, la solución de orden n considera que se han podido producir hasta n procesos de difusión (entre los cuales la propagación es rectilínea y la intensidad se atenúa exponencialmente según δ_p). Aunque este método puede resultar inadecuado para medios donde la difusión juegue un papel importante, $a \gtrsim 0.3$, frecuentemente se aplica sin restricción por su sencillez matemática y de interpretación física de las magnitudes involucradas [24][Cap. 11].

La solución en primer orden, conocida como modelo de difusión única (*single-scattering model*), corresponde a considerar que se puede haber producido un evento de difusión, y es habitualmente utilizada. Modelizando el manto de nieve como un medio de propiedades uniformes a lo largo de su perfil, limitado en su parte superior por aire y en la inferior por el suelo, se muestra en la Fig. 21 un esquema de los procesos que intervienen. Existe una contribución a la difusión por la interfaz entre el manto y el aire, una contribución volumétrica (causada por los cristales de hielo) y procesos en los que interviene difusión o reflexión en la interfaz con el suelo.

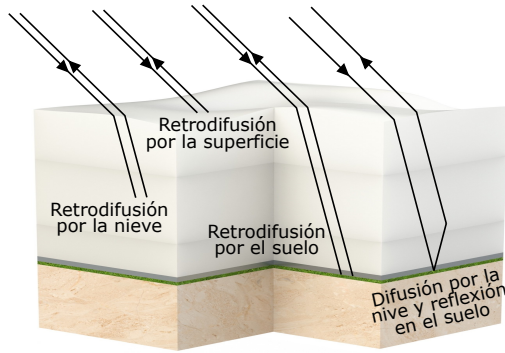


Figura 21: Modelo de difusión única para el manto nivoso. La retrodifusión total es la suma de distintas contribuciones en las que hay un único proceso de difusión. Las contribuciones en las que interviene la interfaz entre nieve y suelo se vuelven despreciables cuando $d \gg \delta_p$. En este caso se considerará únicamente la retrodifusión que produce la superficie y la que produce el manto por unidad de volumen (aproximación de medio semi-infinito). En la contribución que involucra reflejo en el suelo puede invertirse el orden de los procesos o incluso reflejarse dos veces en el suelo.

En los procesos donde interviene el suelo el haz debe atravesar dos veces el manto completo. Esto hace que la aportación a la retrodifusión total sea despreciable si el manto nivoso es mucho más alto que la longitud de penetración ($d \gg \delta_p$).

Para cuantificar la retrodifusión producida, en sensado remoto se suele emplear para objetos extensos la sección eficaz de radar por unidad de área, σ^0 , que da cuenta de la fracción de la intensidad recibida que resulta retrodifundida. Considerando el modelo de difusión única y la aproximación de medio semi-infinito, se podrá calcular como [24][Cap. 11]

$$\sigma^0(\theta_i) = \frac{\kappa_b}{2\kappa_e} \cos \theta'_i, \quad (4.10)$$

donde θ_i es el ángulo que forma la radiación incidente con la normal a la superficie en el aire, θ'_i el ángulo dentro del manto nivoso (obtenido empleando la ley de Snell) y se ha despreciado la contribución a la retrodifusión debida a la transición entre el aire y el manto nivoso. En el Apéndice E se recogen los detalles de la deducción de esta ecuación. Por tanto, partiendo del modelo de la Fig. 20 para la estructura del manto nivoso se puede calcular la sección eficaz de radar por unidad de área resolviendo de forma aproximada la ETR si se conocen las propiedades físicas del manto nivoso. Esta predicción se podrá comparar con los resultados experimentales de las medidas de campo.

5. Medidas en la estación experimental AEMET-Formigal

El prototipo de radar FMCW comenzó a operar en la estación experimental AEMET-Formigal el día 8 de febrero de 2024. Tras su instalación, se repitió la calibración con un reflector metálico para comprobar que no había variado respecto de la realizada en el laboratorio (Fig. 17). El prototipo tomó medidas de la altura del manto nivoso cada 5 minutos, excepto en periodos muy intensos de precipitación, donde el tiempo entre medidas se reducía a 3 minutos. Se finalizó la toma de medidas el día 11 de mayo de 2024 tras la desaparición completa de la nieve en la zona de experimentación. Para mejorar la calidad de las medidas se promedia cada vez el resultado de medir 300 chirps, en lugar de los 50 que se empleaban para la medida de reflectores metálicos.

A lo largo de la campaña de medida se produjeron varios cortes del suministro eléctrico prolongados. Durante estos periodos no se dispone de medidas de la altura del manto de nieve. De los dos radares instalados en el prototipo, uno de ellos (el etiquetado como “Radar 1” en la Fig. 13) dejó de funcionar el día 19 de abril, tras un corte del suministro eléctrico. El fallo se ha localizado en la etapa de alimentación incluida en la PCB.

Las medidas del manto nivoso con el radar FMCW tienen características diferentes de las realizadas en el laboratorio empleando láminas reflectoras metálicas. La principal diferencia se debe a que la radiación puede penetrar parcialmente en el medio, lo que se estudia brevemente en el Apéndice D. Tras validar el correcto funcionamiento del tratamiento de las señales en este caso, se podrá hacer un estudio sistemático de la altura de la nieve y de la intensidad de la señal que retrodifunde.

5.1. Validación del tratamiento de las señales bajo distintas condiciones del manto nivoso

Las características del manto nivoso influyen notablemente en la forma en que retrodifunde la radiación y, por tanto, en la señal que recibe el radar. En concreto, se observan importantes diferencias entre las señales recibidas cuando la superficie del manto de nieve está seca y cuando su LWC es elevado. En la Fig. 22 se compara la señal recibida por el radar en una situación de nieve seca y una de nieve con alto LWC. La primera señal fue medida durante un periodo de precipitaciones sólidas y bajas temperaturas, por lo que la superficie del manto nivoso estaba formada por nieve seca. La segunda, tras varios días sin precipitaciones y con temperaturas sobre cero. Esta elevada temperatura produce que en la superficie del manto nivoso aparezca agua, que absorbe la radiación emitida por el radar y disminuye la señal retrodifundida por la nieve.

En la Fig. 23 se muestra el contenido espectral de las señales de la Fig. 22 calculado directamente. Se observa que la amplitud de la señal proveniente del manto nivoso (entre 2 y 5 kHz) es menor que la del radomo (frecuencias inferiores a 1 kHz). El contenido espectral de la señal del radomo coincide entre ambas medidas, lo que garantiza que el sistema no sufrió significativas derivas de comportamiento en los 10 días de operación continuada entre las medidas. La distinta posición del máximo correspondiente a la superficie de la nieve se debe a la diferencia de altura del manto entre ambas medidas. Se observa como la amplitud del máximo es menor en el caso de nieve húmeda (19 de marzo de 2024) que de nieve seca (9 de marzo).

En la Fig. 23 se muestra también el espectro de la señal tras su corrección empleando la Ec. (3.3) y el filtrado digital. Este procedimiento se había aplicado en la Sec. 3 a las medidas de reflectores metálicos, y se comprueba que proporciona también un buen resultado en el caso de medidas del manto nivoso. El espectro de la señal corregida se representa directamente frente

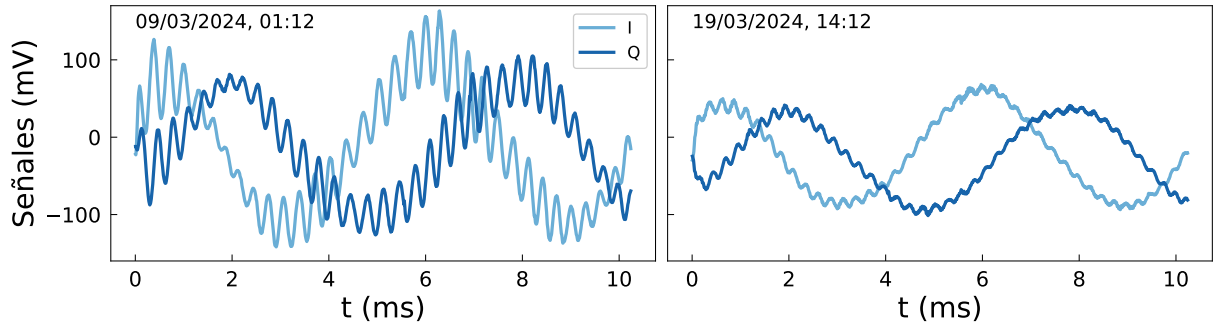


Figura 22: Diferencia entre las señales medidas por el radar FMCW bajo distintas condiciones del manto nivoso. El 9 de marzo de 2024 la superficie del manto estaba formada por nieve seca, recién caída. El 19 de marzo, tras varios días sin precipitaciones y con temperaturas elevadas, la superficie tenía un LWC elevado. La retrodifusión es mayor en nieve seca. En la Fig. 23 se muestra la TF de estas señales, lo que permite identificar la posición de la superficie del manto. La oscilación de menor frecuencia corresponde a la reflexión parásita en el radomo y la de mayor frecuencia a la difusión en la nieve. Medidas tomadas empleando el “Radar 1”.

a la distancia que corresponde a cada frecuencia, obtenida según la recta de calibración de la Fig. 17.

Con este procedimiento se consigue disminuir la intensidad de la señal que proviene de las reflexiones parásitas a corta distancia, de forma que el máximo global del espectro pasa a ser la señal que proviene de la nieve. Pero además se disminuye la influencia que tiene la dispersión espectral en el cálculo de la TF. Con el tratamiento se consigue disminuir la anchura espectral de los máximos del espectro y que tengan una forma más redondeada.

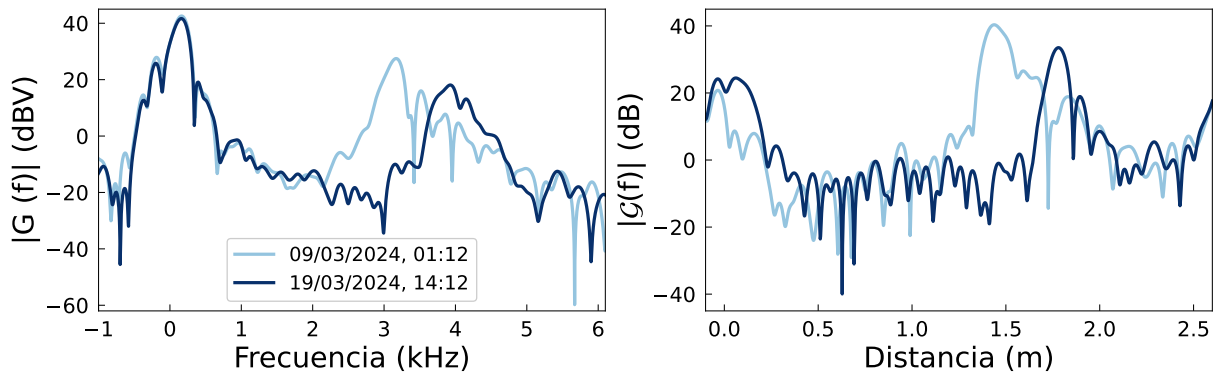


Figura 23: A la izquierda se muestra el espectro de las señales del radar FMCW presentadas en la Fig. 22. A la derecha se muestra el espectro obtenido tras la corrección de las señales empleando la Ec. (3.3). Este se representa frente a la distancia a la que corresponde cada frecuencia según la calibración de la Fig. 17. A partir de la posición y la magnitud del máximo del espectro se podrá calcular la altura del manto de nieve y su sección eficaz de retrodifusión por unidad de área transversal. Resultados del “Radar 1”.

5.2. Medida de altura del manto nivoso durante la temporada invernal 2023-2024

Tras el tratamiento, la distancia entre la superficie del radomo y la superficie de la nieve se obtiene como la posición del máximo del espectro de la Fig. 23. A lo largo de la temporada invernal se realizaron con el “Radar 2” un total de 26972 medidas. Se han descartado aquellas en que se detecta un funcionamiento anómalo del sistema, como que la relación señal-ruido sea menor que la habitual. Tras este procedimiento, discriminando las medidas tanto por amplitud del máximo como por su posición, se conservan 22726 medidas (un 84 % de las totales). Para

el “Radar 1” los resultados son similares, pero se dispone de un menor número de medidas por haber dejado de funcionar el día 19 de abril.

En la Fig. 24 se muestra la distancia medida entre el radomo y la superficie del manto nivoso (o del suelo cuando ya no hay nieve) empleando los dos radares. El acuerdo entre sus medidas es bueno, pero se observa que presentan una cierta dispersión. Ésta limitará la precisión que es capaz de conseguir el sistema de medida.

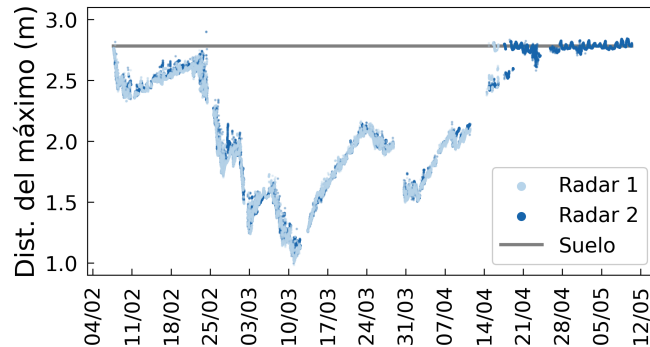


Figura 24: Distancia medida entre el radomo y la superficie del manto nivoso empleando los dos radares FMCW de la Fig. 13. A mayor altura del manto de nieve, menor es la distancia entre su superficie y el radomo. Las medidas de ambos radares coinciden dentro de la precisión que permite la dispersión de las medidas. El “Radar 1” dejó de funcionar el día 19 de abril tras un corte del suministro eléctrico. La distancia geométrica al suelo se calcula como el promedio de las medidas del “Radar 2” a partir del 1 de mayo.

Conociendo la distancia entre el radomo y el suelo y la que había entre el radomo y la superficie del manto de nieve, se puede obtener la altura geométrica del manto nivoso. Empleando las medidas del “Radar 2” a partir del 1 de mayo, cuando ya no quedaba nieve bajo el prototipo, se obtiene la distancia entre el suelo y el radomo calculando su promedio. La dispersión de las medidas en este periodo de tiempo proporciona una estimación de la precisión del prototipo en las medidas de campo. La desviación típica de las medidas es de 2.3 cm.

La dispersión de las medidas de la Fig. 24 hace que dos medidas en instantes próximos de tiempo puedan ser apreciablemente distintas. Para mejorar el cálculo de la altura del manto se pueden emplear filtros de suavizado sobre la serie temporal, como la media móvil. El mejor resultado se ha obtenido empleando una regresión lineal local, ya que resulta más inmune a valores atípicos. En concreto para realizar la regresión lineal local se han considerado las medidas en una ventana total de 5 horas centrada en el tiempo en que se quiere calcular la altura del manto.

En la Fig. 25 se muestra la altura del manto nivoso a lo largo de la temporada invernal completa. Se comparan las medidas del prototipo de radar FMCW con las medidas realizadas en la misma zona de experimentación con sensores basados en ultrasonidos y láser. También con medidas manuales tomadas en el campo de visión del radar.

Los datos del sensor láser (modelo Lufft SHM 31) han sido proporcionados por AEMET y los del sensor de ultrasonidos por CHE. Aunque los tres sensores están colocados en la estación experimental AEMET-Formigal, los separan distancias de unos 10 m entre ellos.

Se observa en la Fig. 25 que las medidas de radar FMCW reproducen las tendencias de los sensores ya instalados en la zona. Se observan los mismos periodos de crecimiento/decrecimiento y los mismos máximos. El comportamiento más suave de las medidas del radar FMCW se debe al efecto de la regresión lineal local. Entre las medidas de los sensores se observa una diferencia que permanece aproximadamente constante. En la zona de experimentación, la superficie del manto permanece muy homogénea durante la mayor parte de la temporada (Figuras 3 y 18), lo que provoca que las pequeñas irregularidades naturales del terreno se traduzcan en irregularidades en el espesor de nieve almacenada. En la zona de experimentación se han medido irregularidades del orden de 30 cm.

Las grandes diferencias a final de temporada entre el radar FMCW y los sensores láser y de

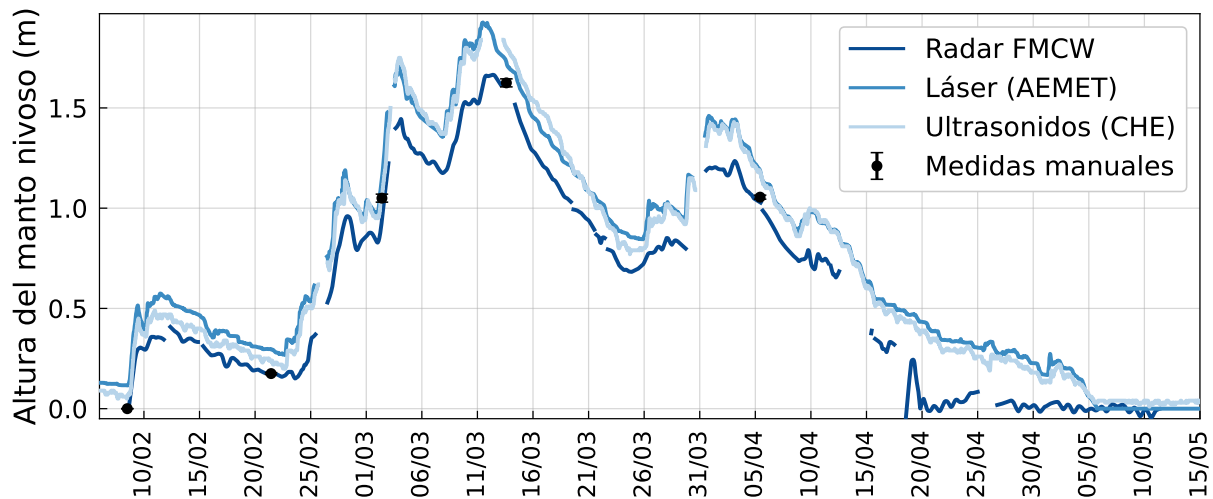


Figura 25: Comparación de las medidas de altura del manto nivoso empleando el prototipo de radar FMCW, sensores basados en láser y en ultrasonidos. La diferencia constante entre unos y otros sistemas se debe a pequeñas irregularidades del terreno. La exactitud de las medidas del prototipo se comprueba mediante la comparación con medidas manuales en el mismo punto. Los datos de los sensores láser y de ultrasonidos han sido cedidos respectivamente por AEMET y CHE. Las medidas presentadas del radar FMCW son del “Radar 2”, coinciden con las del “Radar 1” dentro de la precisión manejada (2.3 cm).

ultrasonidos son causadas por la influencia de las torres sobre las que se soportan los experimentos (Figuras 3 y 18). Conforme aumenta la temperatura al final de la temporada invernal, las torres actúan como focos calientes acelerando la fusión de la nieve en torno a ellas. El prototipo de sensor de altura desarrollado observa una porción del manto más cercana a la torre que lo soporta que los otros dos instrumentos, provocando que la desaparición de la nieve sea más rápida. Además, la fusión se ve también acelerada por la instalación en el suelo de la lámina reflectora metálica, que actúa también como foco caliente.

La comparación con otros instrumentos sirve para confirmar que las medidas del radar FMCW siguen las tendencias generales del comportamiento de la zona, pero no para comprobar su exactitud. Para ello se realizaron a lo largo de la temporada varias medidas manuales de la altura del manto debajo del prototipo, empleando una pértiga milimetrada que se introduce verticalmente hasta el suelo. Estas medidas se presentan también en la Fig. 25 y confirman que la altura medida del manto de nieve con el radar FMCW es correcta, ya que coinciden los valores medidos manualmente con los del radar.

En cuanto a la precisión que se ha estimado del prototipo, 2.3 cm, es suficiente para medir la altura geométrica del manto nivoso por no ser una superficie completamente horizontal. Frecuentemente la rugosidad de la superficie de la nieve es de mayor tamaño que la precisión que permite el instrumento.

La Figura 25 representa el principal resultado de este Trabajo de Fin de Máster, pues demuestra que el prototipo de sensor desarrollado es capaz de medir con suficiente precisión la altura del manto nivoso, además de coincidir con los resultados de medidas manuales efectuadas en el mismo punto.

5.3. Sección eficaz de retrodifusión del manto nivoso

En la Fig. 22 se ha mostrado que la intensidad de la radiación retrodifundida por el manto nivoso depende de sus propiedades físicas. AEMET dispone de un programa que simula la evolu-

ción del manto en la estación experimental, *Snowpack* [31]. Partiendo de variables meteorológicas como la temperatura ambiente, la velocidad del viento, la irradiancia solar y la intensidad de las precipitaciones; el programa simula la evolución de las características del manto completo. Proporciona las propiedades termodinámicas y mecánicas de la estructura multicapa, como su densidad, LWC, el tamaño de los granos de hielo o el espesor de cada capa.

Con los datos que proporciona la simulación de *Snowpack* se pueden calcular las propiedades de la propagación y difusión de ondas milimétricas en el manto nivoso empleando los resultados de la Sec. 4. La necesidad de tratar la estructura multicapa se elimina si la distancia de penetración en la primera capa de nieve es mucho menor que su espesor; comportándose como un medio semi-infinito. Además se puede emplear el modelo de difusión única si el albedo de difusión única de esta primera capa es moderado ($a \lesssim 0.3$). Cuando estas condiciones no se cumplen es necesario recurrir a otros métodos numéricos.

En la Fig. 26 se muestra la simulación de *Snowpack* de la densidad y el LWC de la capa superficial del manto nivoso, que se emplearán para calcular sus propiedades difusivas. El tamaño de los granos simulado presenta una serie de anomalías que han propiciado la decisión de no emplear esta variable en el cálculo de las propiedades de propagación. Por contra, se ha supuesto un tamaño de grano de 1 mm (como se observa en la fotografía de la Fig. 2). Posteriormente se justificará esta decisión. Se presentan además en la Fig. 26 los valores de δ_p y a calculados a partir del modelo de estructura del manto (Sec. 4).

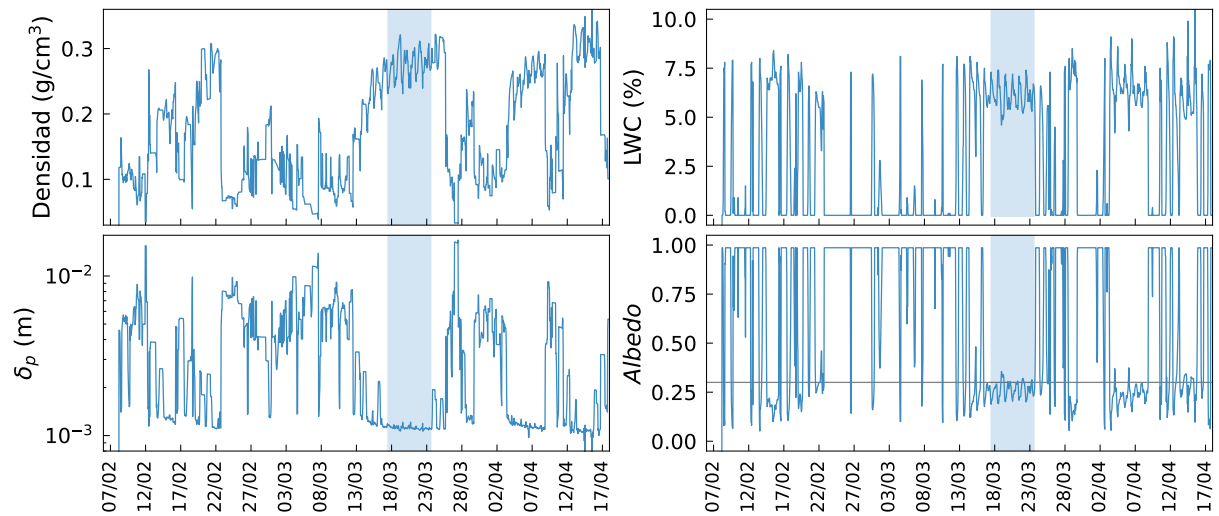


Figura 26: En la parte superior se muestra la evolución completa a lo largo de la temporada invernal 2023-2024 de las variables físicas de la capa superficial del manto nivoso, densidad y LWC, que permite calcular el comportamiento difusivo del manto nivoso (Figura 20, Apéndice C). Se han obtenido mediante la simulación completa de las características del manto nivoso que realiza AEMET con el programa *Snowpack* [31]. No se ha empleado el valor simulado del tamaño de grano por presentar comportamientos anómalos, sino que se ha utilizado un valor constante de 1 mm. En la parte inferior se muestran las variables que definen la propagación de la radiación de 120 GHz calculadas a partir de las características físicas del manto simuladas. Cuando sus valores sean suficientemente pequeños se podrá aplicar el modelo de difusión única en un medio semi-infinito, lo que se realiza en la Fig. 27 sobre la ventana temporal sombreada. En el albedo se señala el valor de $a = 0.3$.

En los periodos en que no hay precipitación y la temperatura diurna es moderadamente alta, aumentan el LWC y la densidad de la capa superficial. Además los granos se fusionan hasta adquirir tamaños del orden de 1 mm como se mostraba en la fotografía de la Fig. 2. Esto produce que δ_p sea del orden de 1 mm y $a \lesssim 0.3$. En concreto el periodo entre el 17 y 23 de marzo de 2024 cumple estas características y resulta adecuado para aplicar la resolución aproximada de

la ETR presentada en la Sec. 4, lo que permite obtener una predicción para la sección eficaz de retrodifusión por unidad de área, σ^0 (se le referirá como valor simulado).

En el Apéndice E se muestra cómo calcular esta misma magnitud a partir de las medidas experimentales realizadas. En resumen, tras el tratamiento de las señales se obtiene que $\sigma^0 \propto \max\{|\mathcal{G}(f)|^2\}$. Esto concuerda con los resultados de las Figuras 22 y 23, donde una mayor retrodifusión se traduce en una mayor amplitud del máximo del espectro. En la Fig. 27 se compara el valor medido de σ^0 con el simulado resolviendo de forma aproximada la ETR. Se observa que la simulación predice las mismas tendencias que se encuentran experimentalmente, aunque los valores no se pueden comparar directamente porque las medidas experimentales no están calibradas. En el cálculo de σ^0 con la Ec. (4.10) se emplea $\theta_i = 0$.

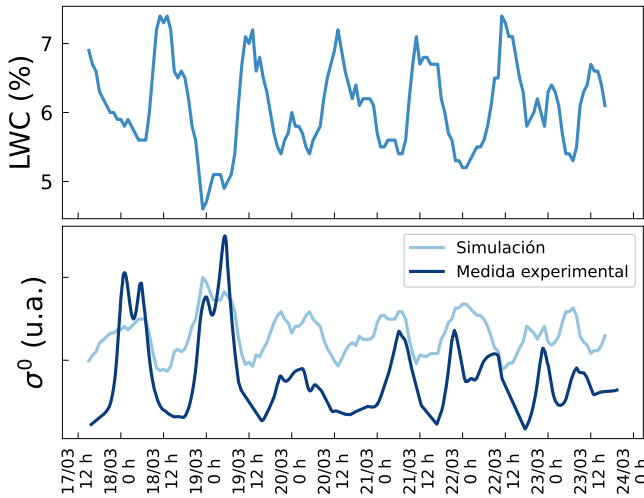


Figura 27: Comparación de las medidas de la intensidad de la radiación retrodifundida con la predicción del modelo de difusión única empleando las variables del manto nivoso simuladas mediante *Snowpack*, Fig. 26. La variable de mayor influencia es el LWC. Al aumentar también lo hace la absorción del manto y disminuye su retrodifusión. Las medidas experimentales han sido suavizadas empleando una regresión lineal local. La simulación numérica emplea un modelo muy simplificado y una resolución aproximada, pero recrea las tendencias observadas. Para su cálculo se ha empleado $f = 120$ GHz y $\theta_i = 0$. El valor numérico de las medidas experimentales no puede compararse directamente con los simulados porque no se dispone de una calibración de su valor, únicamente se pueden comparar las tendencias.

Durante el periodo considerado el LWC de la capa superficial oscila entre el 4 y 8%. Durante el día la irradiancia solar y el incremento de temperaturas favorecen el incremento del LWC, lo que produce que el manto se vuelva más absorbente y la intensidad de la radiación reflejada disminuya. Por el contrario durante la noche las temperaturas disminuyen, el manto vuelve a congelarse parcialmente, su LWC disminuye y la absorción resulta menor. Por tanto en este caso el LWC es la variable que más afecta a las propiedades difusivas del manto. El efecto de la irradiación solar puede observarse también en la evolución de la altura del manto en la Fig. 25. Durante el día la fusión parcial de la capa superior produce una disminución acelerada de la altura, mientras que por la noche se modera la tendencia. Es el hecho de tener en la superficie nieve transformada por efecto de la radiación solar lo que justifica que se emplee un valor de tamaño de grano de 1 mm para el cálculo teórico de las propiedades del manto nivoso.

La observación de una menor retrodifusión del manto nivoso por el día había sido previamente reportada empleando sistemas radar de otras características [27, 29]. Sin embargo, la capacidad de medir esta dinámica con un dispositivo como el desarrollado, de bajo coste, abre la posibilidad a emplear la intensidad de la retrodifusión como método para sensar el contenido en agua líquida de la superficie del manto nivoso. Hay que tener en cuenta en la Fig. 27 que el valor simulado de σ^0 se ha calculado resolviendo de forma aproximada la ETR, a primer orden de la solución iterativa, y con grandes limitaciones de aplicabilidad. Una vez comprendida la fenomenología de la difusión que produce el manto, puede pasar a explorarse la simulación de sus características difusivas con modelos específicamente desarrollados para el manto nivoso más complejos, cuya predicción sea más cercana a las medidas experimentales.

6. Conclusiones y trabajo futuro

En este Trabajo de Fin de Máster se ha presentado un prototipo de radar FMCW que opera en torno a 120 GHz para medir la altura y sección eficaz de retrodifusión del manto nivoso. Emplear ondas electromagnéticas milimétricas presenta una serie de ventajas frente a los sistemas convencionales de medición de altura de la nieve, lo que puede tener un gran impacto debido a la importancia de cuantificar con precisión los recursos hídricos almacenados en forma de nieve.

Para ello, se ha estudiado el funcionamiento de los radares FMCW y la interacción de las ondas milimétricas con el manto nivoso, prestando especial atención a los modelos que permiten predecir la sección eficaz de retrodifusión del manto en función de sus características superficiales.

Una importante conclusión del trabajo es que se ha conseguido que el prototipo opere de forma remota y continuada en las complejas condiciones ambientales a las que está expuesto durante la temporada invernal. El prototipo ha demostrado la viabilidad de medir la altura geométrica del manto nivoso, con precisión centimétrica, y su sección eficaz de retrodifusión, operando durante un periodo de tiempo superior a 3 meses. Por lo tanto se ha demostrado la viabilidad de fabricar un sensor de bajo coste capaz de medir la altura y propiedades superficiales del manto nivoso empleando ondas milimétricas. En el análisis de la sección eficaz de retrodifusión se ha observado que es el LWC de la capa superficial la variable que más le afecta.

Como trabajo futuro queda mejorar algunos aspectos del prototipo, como su electrónica (principalmente las etapas de filtrado) y el sistema de protección ambiental (tratando de minimizar la reflexión parásita que produce). Una mejora de la electrónica podría además permitir aprovechar el ancho de banda completo que ofrece el sensor empleado. También se puede retirar la lámina reflectora metálica instalada en el suelo, de forma que se perturbe el manto de nieve lo mínimo posible. Se investigará además el origen de las derivas observadas en el comportamiento del chip, de forma que se puedan corregir para aumentar la precisión en las medidas.

Este trabajo abre otras posibles líneas de investigación. Por una parte el coste y complejidad del prototipo pueden disminuirse con intención de instalarlo en una mayor cantidad de ubicaciones. Además, la capacidad de medir la sección eficaz de retrodifusión abre la puerta a explorar la posibilidad de sensar y cuantificar el LWC superficial de forma remota empleando ondas milimétricas.

Por otra parte, el estudio y comprensión de los fenómenos difusivos que se producen en el manto nivoso que se ha adquirido durante el desarrollo del trabajo puede ser la base de futuros estudios. Empleando frecuencias menores la longitud de penetración de la radiación en el manto nivoso aumenta, permitiendo obtener información sobre la estructura estratigráfica del manto mediante la difusión que produce.

Por último, una vez demostrada la exactitud del radar FMCW, queda incorporar sus medidas en tiempo real como sistema de apoyo de otros instrumentos que se están desarrollando en la estación experimental AEMET-Formigal. En concreto se empleará la altura de nieve medida con el radar FMCW para mejorar la precisión de las medidas del SWE y la estructura estratigráfica del manto de nieve que se efectúan con el radar SFCW instalado en la estación experimental.

Referencias

- [1] M. Arenillas, G. Cobos y J. Navarro, *Datos sobre la nieve y los glaciares en las cordilleras españolas. El programa ERHIN (1984–2008)* (Ed. Ministerio de Medio Ambiente y Medio Rural y Marino, 2008).
- [2] Confederación Hidrográfica del Ebro, *Geoportal*, [en línea] [consulta: 11 de junio de 2024] Disponible en: <https://iber.chebro.es/geoportal>.
- [3] R. Alonso, J. M. G. d. Pozo, S. T. Buisán y J. A. Álvarez, «Analysis of the snow water equivalent at the AEMet-formigal field laboratory (Spanish Pyrenees) during the 2019/2020 winter season using a stepped-frequency continuous wave radar (SFCW)», *Remote Sens.* **13**, 616 (2021).
- [4] C. Pielmeier y M. Schneebeli, «Developments in the stratigraphy of snow», *Surv. Geophys.* **24**, 389 (2003).
- [5] N. Kinar y J. Pomeroy, «Measurement of the physical properties of the snowpack», *Rev. Geophys.* **53**, 481 (2015).
- [6] A. Tang, N. Chahat, Y. Kim, A. Bharathan, G. Virbila, H.-P. Marshall, T. Van Der Weide, G. Gupta, R. Anand, G. Chattopadhyay et al., «A UAV Based CMOS Ku-Band Metasurface FMCW Radar System for Low-Altitude Snowpack Sensing», *IEEE J. Microw.* (2023).
- [7] S. Kolpuke, F. Abushakra, S. P. Gogineni, D. Braaten, D. Taylor, J. Larson, A. Rapadas y T. Luong, «Airborne Multi-channel UWB FMCW Radar for Snow Depth Measurements», *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* (2024).
- [8] S. Ayhan, M. Pauli, S. Scherr, B. Göttel, A. Bhutani, S. Thomas, T. Jaeschke, J.-M. Panel, F. Vivier, L. Eymard et al., «Millimeter-wave radar sensor for snow height measurements», *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **55**, 854 (2016).
- [9] S. T. Buisán, M. E. Earle, J. L. Collado, J. Kochendorfer, J. Alastrué, M. Wolff, C. D. Smith y J. I. López-Moreno, «Assessment of snowfall accumulation underestimation by tipping bucket gauges in the Spanish operational network», *Atmos. Meas. Tech.* **10**, 1079 (2017).
- [10] D. Brumbi, «Measuring process and storage tank level with radar technology», en *Proc. Int. Radar Conf.* (IEEE, 1995), págs. 256-260.
- [11] I. V. Komarov y S. M. Smolskiy, *Fundamentals of short-range FM radar* (Artech House, 2003).
- [12] Y. Tokieda, H. Sugawara, S. Niimura y T. Fujise, «High precision waterlevel gauge with an FMCW radar under limited bandwidth», en *Eur. Radar Conf.* (IEEE, 2005), págs. 339-342.
- [13] S. Ayhan, M. Pauli, T. Kayser, S. Scherr y T. Zwick, «FMCW radar system with additional phase evaluation for high accuracy range detection», en *Eur. Radar Conf.* (IEEE, 2011), págs. 117-120.
- [14] K. B. Cooper, R. J. Dengler, N. Llombart, B. Thomas, G. Chattopadhyay y P. H. Siegel, «THz imaging radar for standoff personnel screening», *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.* **1**, 169 (2011).

- [15] Indie Semiconductor FFO GmbH, «TRX_120_067 120-GHz Highly Integrated IQ Transceiver with Antennas in Package in Silicon Germanium Technology», [Hoja de características](#).
- [16] M. G. Girma, S. Beer, J. Hasch, M. Gonser, W. Debski, W. Winkler, Y. Sun y T. Zwick, «Miniaturized 122 GHz system-in-package (SiP) short range radar sensor», en [Eur. Radar Conf.](#) (IEEE, 2013), págs. 49-52.
- [17] Indie Semiconductor FFO GmbH, «Collimator Lens», [Hoja de características](#).
- [18] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab et al., *Señales y sistemas* (México: Prentice-Hall Hispanoamericana, 1998).
- [19] S. Scherr, S. Ayhan, M. Pauli y T. Zwick, «Accuracy limits of a K-band FMCW radar with phase evaluation», en [Eur. Radar Conf.](#) (IEEE, 2012), págs. 246-249.
- [20] G. S. Woods, D. L. Maskell y M. V. Mahoney, «A high accuracy microwave ranging system for industrial applications», [IEEE Trans. Instrum. Meas.](#) **42**, 812 (1993).
- [21] B. Welp, S. Hansen, G. Briese, S. Küppers, S. Thomas, C. Bredendiek y N. Pohl, «Versatile dual-receiver 94-GHz FMCW radar system with high output power and 26-GHz tuning range for high distance applications», [IEEE Trans. Microw. Theory Tech.](#) **68**, 1195 (2020).
- [22] R. Dengler, K. Cooper, G. Chattopadhyay, I. Mehdi, E. Schlecht, A. Skalare, C. Chen y P. Siegel, «600 GHz imaging radar with 2 cm range resolution», en [IEEE MTTs Int. Microw. Symp.](#) (IEEE, 2007), págs. 1371-1374.
- [23] F. Villuendas, F. Calvo y J. Marques, «Measurement of mode field radius in axially nonsymmetrical single-mode fibers with arbitrary power distribution», [Opt. Lett.](#) **12**, 941 (1987).
- [24] D. Long y F. Ulaby, *Microwave radar and radiometric remote sensing* (Artech, 2015).
- [25] Y. Kuga, F. T. Ulaby, T. F. Haddock y R. D. DeRoo, «Millimeter-wave radar scattering from snow 1. Radiative transfer model», [Radio Sci.](#) **26**, 329 (1991).
- [26] B. Wen, L. Tsang, D. P. Winebrenner y A. Ishimaru, «Dense medium radiative transfer theory: comparison with experiment and application to microwave remote sensing and polarimetry», [IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.](#) **28**, 46 (1990).
- [27] F. T. Ulaby, T. F. Haddock, R. T. Austin e Y. Kuga, «Millimeter-wave radar scattering from snow: 2. Comparison of theory with experimental observations», [Radio Sci.](#) **26**, 343 (1991).
- [28] L. Tsang y J. Kong, «Scattering of electromagnetic waves from a dense medium consisting of correlated Mie scatterers with size distributions and applications to dry snow», [J. Electromagn. Waves Appl.](#) **6**, 265 (1992).
- [29] S.-E. Shih, K.-H. Ding, J. A. Kong, Y. Yang, R. Davis, J. Hardy y R. Jordan, «Modeling of Millimeter Wave Backscatter of Time-Varying Snowcover—Summary», [J. Electromagn. Waves Appl.](#) **11**, 1289 (1997).
- [30] G. Picard, M. Sandells y H. Löwe, «SMRT: An active-passive microwave radiative transfer model for snow with multiple microstructure and scattering formulations (v1. 0)», [Geosci. Model Dev.](#) **11**, 2763 (2018).
- [31] P. Bartelt y M. Lehning, «A physical SNOWPACK model for the Swiss avalanche warning: Part I: numerical model», [Cold Reg. Sci. Tech.](#) **35**, 123 (2002).

A. Placas de circuito impreso para el prototipo de radar FMCW

En este apéndice se incluyen por completitud del trabajo los planos de la placa de circuito impreso (PCB) diseñadas para el prototipo de radar FMCW, cuyas fotografías se muestran en la Fig. 9. Para el diseño se ha empleado el programa *EAGLE*.

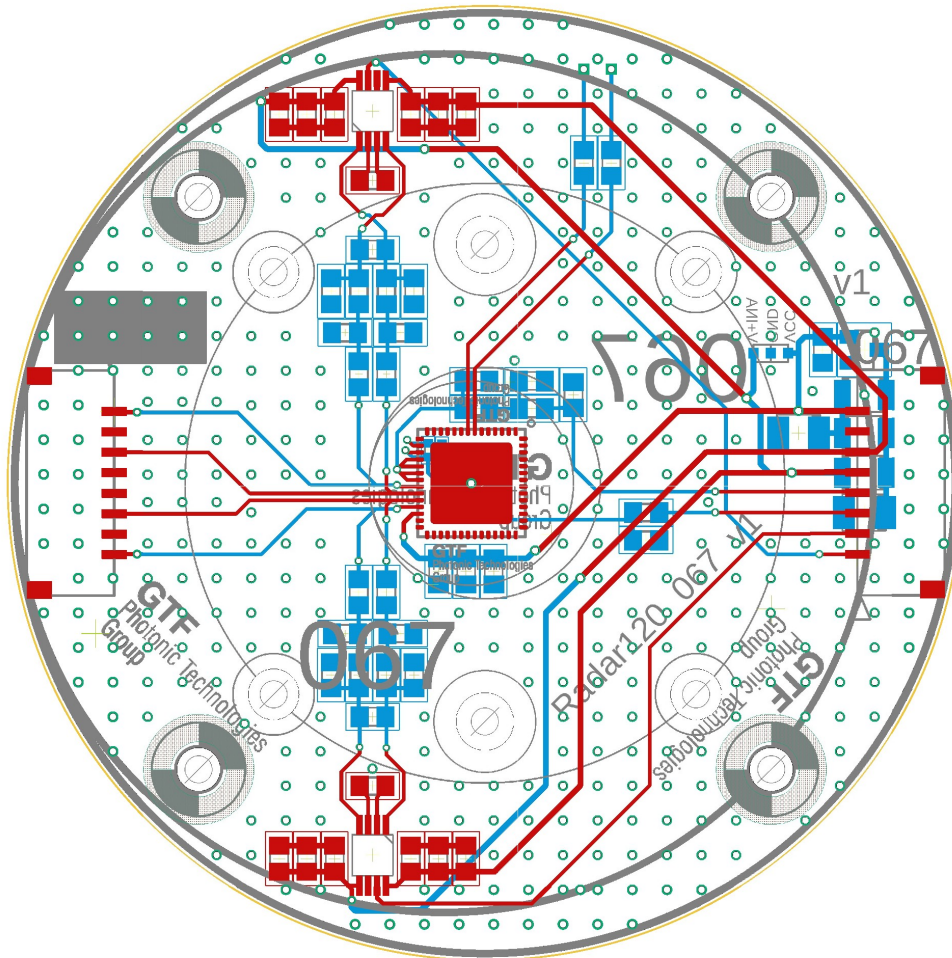


Figura 28: Ambas caras de la placa diseñada para incorporar las etapas de filtrado, amplificación y alimentación del radar TRX_120_067. Las fotografías de ambas caras de placa se muestran en la Fig. 9 y el esquemático en la Fig. 29. Se muestran los orificios previstos para la colocación de la lente dieléctrica empleada como elemento colimador [17], además de los empleados para unir la placa al resto del prototipo.

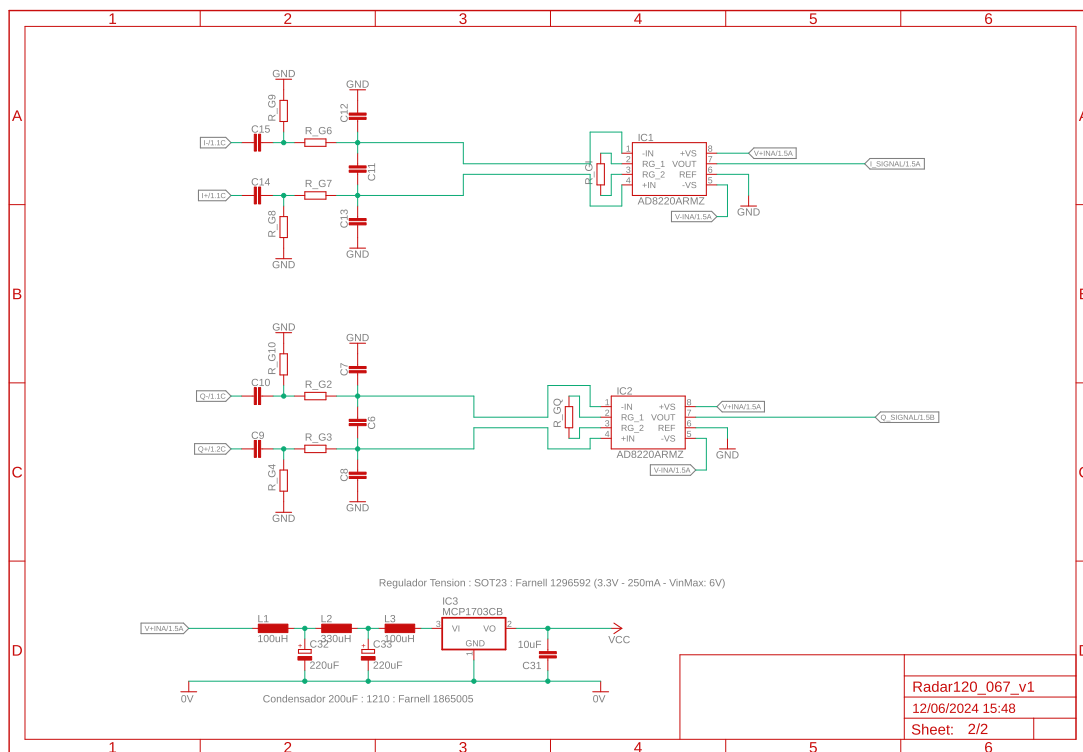
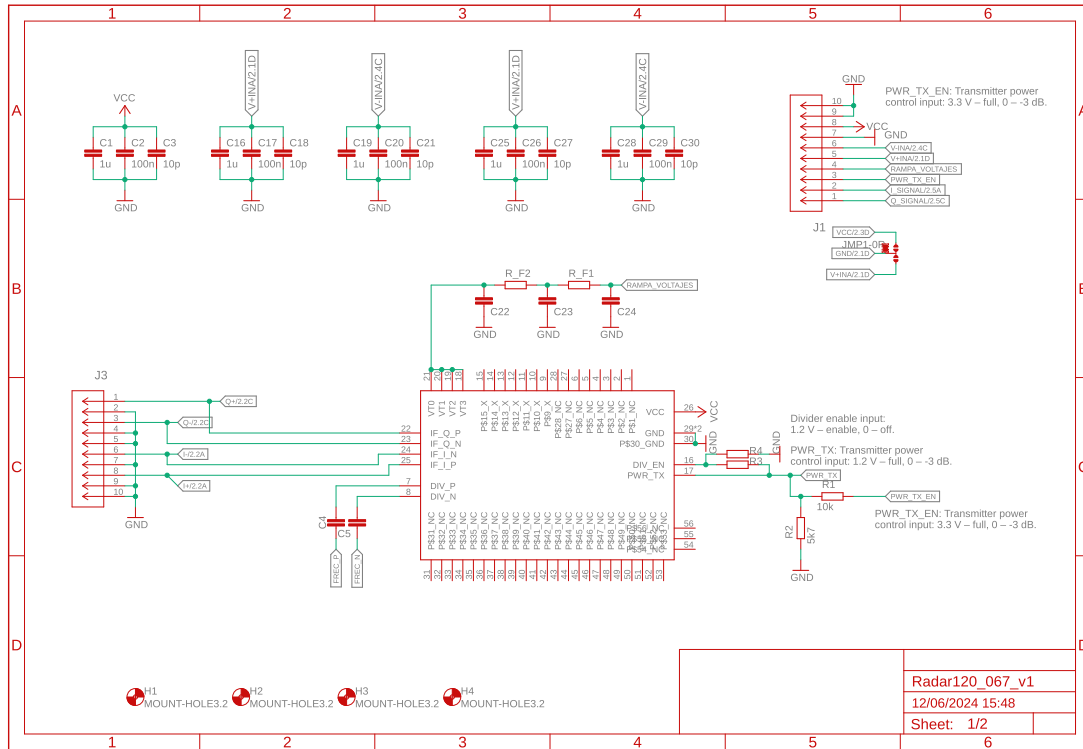


Figura 29: Esquemático de la placa diseñada para incorporar las etapas de filtrado, amplificación y alimentación del radar TRX_120_067. No se incluyen los valores concretos de resistencias y condensadores de las etapas de filtrado porque se varían dependiendo de las condiciones de operación del radar. En la imagen superior se muestran los condensadores para filtrar los voltajes de alimentación, el conector que permite acceder a las distintas señales y el símbolo esquemático del radar, junto con el filtro RC de los voltajes de control de la frecuencia y un conector que permite acceder directamente a las señales generadas por el radar. En la imagen inferior se muestran las etapas de acondicionamiento de las señales $I(t)$ y $Q(t)$, con los filtros pasa-banda y los amplificadores de instrumentación de ganancia configurable, además de la etapa de alimentación que incluye el regulador de tensión para generar el voltaje de 3.3 V que necesita el radar.

B. Medida del campo de visión del radar FMCW

La medida del tamaño del campo de visión del radar FMCW diseñado no resulta sencilla por emplear radiación electromagnética de 120 GHz, región del espectro donde no es habitual disponer de instrumentación. Para realizar esta medida se ha partido del tratamiento matemático de un método elaborado por Villuendas y colaboradores [23] para medir el diámetro de campo modal en fibras ópticas. Así, se ha medido el campo de visión del radar FMCW con una lente dieléctrica como elemento colimador, tal como se muestra en la Fig. 13.

Si se dispone de una superficie horizontal situada a una distancia L del radar, empleando la técnica de FMCW se localizará en el espectro de la señal un máximo que corresponderá a la reflexión/retrodifusión que produzca la superficie. La amplitud del máximo del espectro, A , será el resultado de la suma de la radiación recibida desde cada punto de la superficie

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y) dx dy , \quad (\text{B.1})$$

donde (x, y) son coordenadas cartesianas introducidas en la superficie transversal y $\psi(x, y) \geq 0$ es la distribución de amplitud de la señal recibida desde cada punto de la superficie. Depende tanto de la distribución de potencia que proyecta el radar sobre la superficie, como de las propiedades reflectoras/difusoras de la superficie y la recepción de nuevo en el radar.

La función $\psi(x, y)$ se comporta como en una distribución de probabilidad. El centro y la anchura del haz en una de las direcciones se podrá calcular como

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi(x, y) dx dy , \quad (\text{B.2})$$

con $f(x) = x$ para calcular la posición del centro del haz y $f(x) = (x - \langle x \rangle)^2$ para el cálculo de la anchura.

Aunque el valor de la distribución $\psi(x, y)$ no es directamente medible, sí se puede medir la función

$$A(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x', y') dy' \right) dx' . \quad (\text{B.3})$$

Para ello basta con impedir que la radiación que llegue a puntos con $x' > x$ vuelva al sensor, por lo que se estará midiendo únicamente la señal proveniente de $x' < x$. Nótese que $A = \lim_{x \rightarrow \infty} A(x)$. Tomando la derivada de la Ec. (B.3),

$$\frac{dA(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y) dy , \quad (\text{B.4})$$

se puede calcular la Ec. (B.2) como

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{A} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) \left(\frac{dA(x)}{dx} \right) dx . \quad (\text{B.5})$$

Se han sustituido los límites de integración por la región en que el integrando toma valores apreciables, ya que a partir de cierto punto la radiación que llega a la superficie es despreciable, $A(x)$ tiende a un determinado valor constante y la derivada se anula.

Al determinar experimentalmente la función $A(x)$ se miden una cantidad finita de puntos,

que además tendrán una cierta incertidumbre. Por ello, tomar la derivada numérica para calcular la Ec. (B.5) acarrea una importante imprecisión numérica. Como solución se puede integrar por partes obteniendo

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{A} \left(f(x_{\max})A(x_{\max}) - f(x_{\min})A(x_{\min}) \right) - \frac{1}{A} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{df(x)}{dx} A(x) dx . \quad (\text{B.6})$$

Bloquear completamente la radiación que proviene de una determinada región no resulta sencillo. La realización experimental más simple es cubrir parcialmente una superficie poco reflectante con una lámina muy reflectante. Denotando la señal que produce cada elemento de la superficie cuando está ocupado por uno u otro material como $\psi_{\pm}(x, y) = k_{\pm}\psi(x, y)$, la amplitud reflejada cuando la superficie es completa de uno de los dos materiales será

$$A_{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\pm}(x', y') dx' dy' = k_{\pm} A , \quad (\text{B.7})$$

donde $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y) dx dy$. La forma funcional de la señal que producen ambas superficies es la misma porque depende de la emisión del radar.

Cubriendo parcialmente la superficie poco reflectora con la lámina reflectante (desde $x = -\infty$ hasta x' pero todos los valores de y) la medida de amplitud será

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^x \psi_{+}(x', y') dx' + \int_x^{+\infty} \psi_{-}(x', y') dx' \right) dy' , \quad (\text{B.8})$$

y por tanto

$$\frac{dA(x)}{dx} = (k_{+} - k_{-}) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x', y') dx' dy' , \quad (\text{B.9})$$

donde $A_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x)$.

El cálculo de valores medios, Ec. (B.2), puede reescribirse como

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{A_{+} - A_{-}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) \left(\frac{dA(x)}{dx} \right) dx . \quad (\text{B.10})$$

Esto supone una generalización de la Ec. (B.5) cuando no resulta posible bloquear completamente la señal proveniente de una zona concreta. Integrando por partes se llega a una expresión análoga a la Ec. (B.6),

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{A_{+} - A_{-}} \left(f(x_{\max})A(x_{\max}) - f(x_{\min})A(x_{\min}) - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{df(x)}{dx} A(x) dx \right) . \quad (\text{B.11})$$

Experimentalmente se tomaron medidas para 41 posiciones distintas del extremo de la lámina reflectora, colocada a 98 cm del radar. Para cada posición se tomaron 25 medidas, cada una de las cuales es el resultado de promediar 200 chirps. En la Fig. 30 se muestra un esquema del montaje experimental y en la Fig. 31 se presenta el resultado obtenido en las medidas.

Se muestra por una parte el resultado de la medida de la posición de la reflexión. La precisión conseguida en la medida de la posición es similar a la obtenida en la medida de la altura del manto nivoso (Sec. 5). En las medidas con x entre 20 y 40 cm se detecta una distancia algo mayor, debido a que la señal de la lámina reflectante comienza a dominar pero todavía no está situada verticalmente debajo del sensor. No obstante esta diferencia de distancia entre las señales que

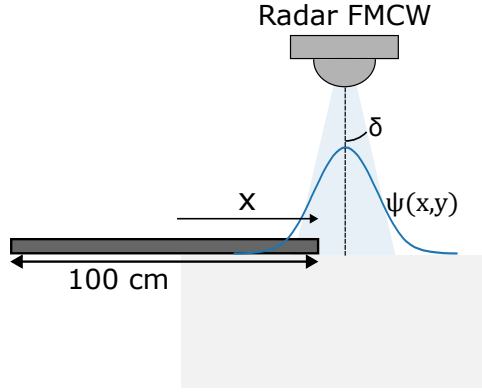


Figura 30: Esquema del montaje experimental para la medida del campo de visión del radar FMCW. Se muestra el objeto poco reflectante (bloque de poliestireno expandido) que se va cubriendo parcialmente por un objeto más reflectante (lámina metálica).

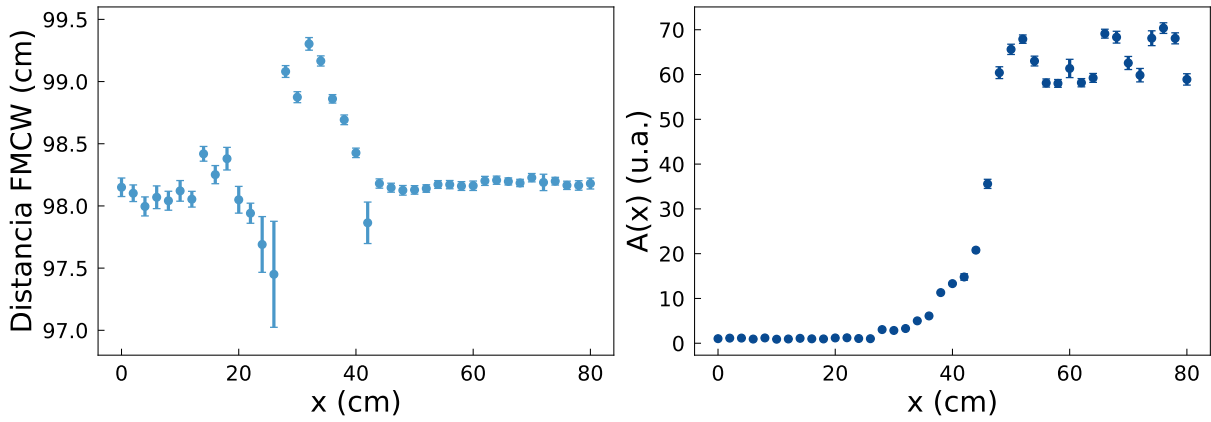


Figura 31: Medidas realizadas de la intensidad de la señal recibida por el radar cubriendo parcialmente una superficie poco reflectante con otra muy reflectante. Se mide mediante FMCW la posición de la reflexión y además su amplitud. La amplitud permite calcular la anchura del haz.

proviene de distintos puntos no afecta en las medidas de la intensidad de la reflexión, porque la resolución que proporciona el radar FMCW para identificar 2 objetos diferentes no es la suficiente.

En la medida de $A(x)$ se observa un crecimiento rápido que se debe a que la lámina se introduce en el campo de visión del radar. A pesar de que teóricamente $A(x)$ debe ser una función no decreciente, se observan disminuciones en su valor. Esto se debe a imprecisiones experimentales, pero que deben ser corregidas para emplear la función en el cálculo de los promedios, Ec. (B.11).

Para corregir este efecto se realiza un suavizado de las medidas empleando una regresión lineal local, y se asume que los valores constantes a los que satura la función tanto inferior como superior se alcanzan para $x = 16$ cm y $x = 54$ cm. El resultado de este tratamiento se muestra en la Fig. 32.

Una vez se dispone de las medidas suavizadas, se puede calcular el centro del haz en el sistema de coordenadas empleado $\langle x \rangle$. Coincide con el resultado esperado por la colocación geométrica del radar. La semianchura se estima empleando la desviación típica de la distribución $\psi(x, y)$, $s_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.

De esta forma se obtiene para la semianchura del haz un valor de

$$s_x = 5.6 \text{ cm} , \tag{B.12}$$

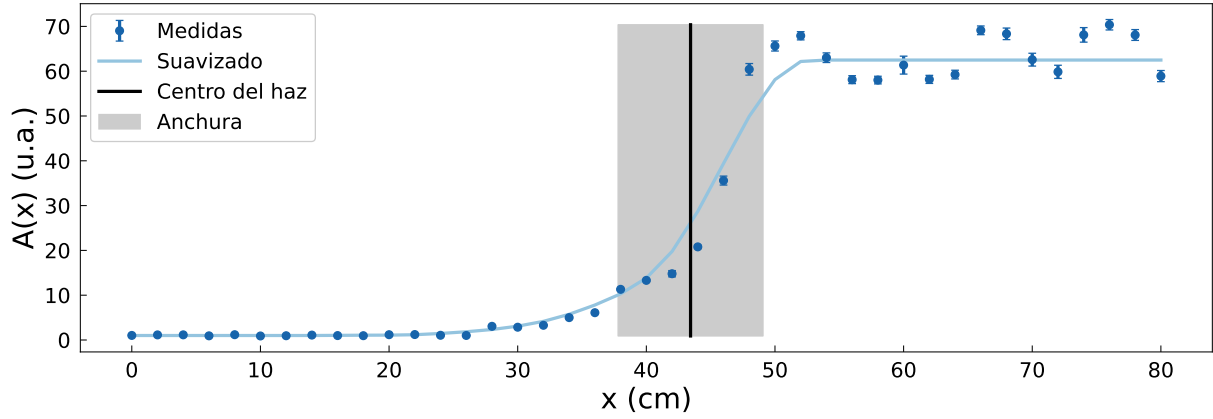


Figura 32: La función $A(x)$ debe ser una función no decreciente, por estar definida a partir de la integral de una función no negativa. Por ello se suavizan los datos experimentales usando una regresión lineal local. Además se asume que para $x \leq 16$ cm y $x \geq 54$ cm la función ya ha alcanzado respectivamente sus valores mínimo y máximo. Con las medidas suavizadas puede calcularse la posición del centro del haz y su anchura.

que se representa en la Fig. 32 junto con las medidas realizadas.

Se define el ángulo del campo de visión del radar, δ , de forma que $\tan \delta = s/L$, donde L es la distancia entre el radar y la superficie. La definición de este ángulo se incluye en el esquema de la Fig. 30. Con los datos anteriores se obtiene un valor de

$$\delta = 3.3^\circ . \quad (\text{B.13})$$

Este valor permite calcular el tamaño del campo de visión a cualquier distancia. Por ejemplo, a una distancia de 2 m se obtendría un campo de visión de unos 23 cm de diámetro.

Empleando el radar FMCW para medir las características del manto nivoso, esta forma de medir la anchura del haz resulta especialmente adecuada. En ambas situaciones, con el radar observando el manto nivoso y en el montaje de medición de la anchura del haz, se tiene que el dispositivo está enfrentado a una superficie horizontal y extensa.

Cabe mencionarse que estas medidas del tamaño del haz están relacionadas con la distribución de su campo eléctrico, por considerar la amplitud de la señal reflejada. Si se considera el cuadrado de la amplitud se estaría teniendo en cuenta la distribución de intensidad, tal como se detalla en el Apéndice E.

C. Solución de Mie para la difusión de una esfera dieléctrica

En la primera parte se va a presentar la solución de la difusión de una esfera dieléctrica, debida a Mie y extraída de [24][Cap. 8]. Después se aplicará al caso de tener múltiples centros de difusión distribuidos aleatoriamente, como sucede en el manto nivoso.

Se considera una esfera de radio arbitrario r y constante dieléctrica ε_i , inmersa en un medio de constante dieléctrica ε_b , y sobre la que incide una onda plana de longitud de onda en el vacío λ_0 . La solución de Mie se escribe en función de las variables

$$\chi = \frac{2\pi r}{\lambda_0} \sqrt{\text{Re}(\varepsilon_b)} , \quad (\text{C.1})$$

$$n = \sqrt{\varepsilon_i/\varepsilon_b} . \quad (\text{C.2})$$

χ es la “circunferencia normalizada” y n el índice de refracción relativo. Para calcular las propiedades difusivas de la esfera no se tiene en cuenta la parte imaginaria de su permitividad, pues complica la resolución y habitualmente no resulta relevante. Sí es tenido el carácter complejo de la constante dieléctrica de la esfera para calcular su absorción de la radiación.

La solución viene determinada por las secciones eficaces de difusión, extinción y retrodifusión de la esfera, respectivamente definidas por las siguientes series convergentes,

$$\sigma_s(n, \chi) = \frac{2\pi r^2}{\chi^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) (|a_l|^2 + |b_l|^2) , \quad (\text{C.3})$$

$$\sigma_e(n, \chi) = \frac{2\pi r^2}{\chi^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \text{Re} [a_l + b_l] , \quad (\text{C.4})$$

$$\sigma_b(n, \chi) = \frac{\pi r^2}{\chi^2} \left| \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l (2l+1) (a_l - b_l) \right|^2 . \quad (\text{C.5})$$

Los coeficientes $\{a_l\}$ y $\{b_l\}$, conocidos como coeficientes de Mie, son funciones de (χ, n) . Aunque puede encontrarse una expresión analítica, también pueden calcularse empleando una relación recursiva

$$a_l = \frac{(A_l/n + l/\chi)\text{Re}(W_l) - \text{Re}(W_{l-1})}{(A_l/n + l/\chi)W_l - W_{l-1}} , \quad (\text{C.6})$$

$$b_l = \frac{(nA_l + l/\chi)\text{Re}(W_l) - \text{Re}(W_{l-1})}{(nA_l + l/\chi)W_l - W_{l-1}} , \quad (\text{C.7})$$

$$(\text{C.8})$$

donde

$$W_l = \frac{2l-1}{\chi} W_{l-1} - W_{l-2} , \quad (\text{C.9})$$

y $W_0 = e^{i\chi}$, $W_{-1} = e^{-i\chi}$.

La sección eficaz de absorción de la esfera se define como $\sigma_a = \sigma_e - \sigma_s$. Cuando la esfera es mucho menor que la longitud de onda de la radiación considerada se tiene que $\chi \ll 1$ y el límite de la solución coincide con la conocida como Difusión de Rayleigh.

C.1. Aplicación al manto nivoso

Se ha presentado la solución de la difusión que produce una única esfera. Sin embargo, si se tiene un medio con una densidad de centros difusores dada por N_v (como sucede en el manto nivoso), los coeficientes de los distintos procesos vienen dados por [24][Cap. 11]

$$\kappa_\beta = N_v \sigma_\beta , \quad (\text{C.10})$$

donde $\beta = s, b, a$. Se asume que no existe correlación entre las distintas partículas difusoras, que están además lo suficientemente alejadas (mismas suposiciones que para obtener la ETR, Ec. (4.6)). Los coeficientes $\{\kappa_\beta\}$ son la sección eficaz de cada uno de los procesos por unidad de volumen.

Por último, en el caso del manto nivoso la absorción del medio dieléctrico de fondo (formado por la mezcla de aire y agua) juega un papel importante. Por tanto a la absorción habrá que sumarle también la que produce este fondo

$$\kappa_{ab} = \frac{4\pi}{\lambda_0} \left(1 - N_v \frac{4}{3} \pi r^3 \right) |\text{Im}(\sqrt{\varepsilon_b})| . \quad (\text{C.11})$$

La constante de extinción del manto nivoso se calculará por tanto como

$$\kappa_e = \kappa_s + \kappa_a + \kappa_{ab} , \quad (\text{C.12})$$

ya que κ_a , calculada empleando la solución de Mie, tiene en cuenta únicamente la absorción que producen los centros de difusión (partículas de hielo en la nieve). Esta constante de extinción es la magnitud que aparece en la ETR, Ec. (4.6), y da cuenta de la pérdida de la intensidad que viaja sin difundirse en el medio, que se produce de forma exponencial debido a los procesos tanto de difusión como de absorción.

Con estas magnitudes es a partir de las que se puede calcular la longitud de penetración, $\delta_p = 1/\kappa_e$, y el albedo de difusión única, $a = \kappa_s/\kappa_e$. Ambas dependerán de las características del manto nivoso. Por una parte el radio de las esferas puede ejercer una importante influencia cuando es similar a la longitud de onda de la radiación empleada, pero también el LWC tiene un importante efecto, mayoritariamente sobre la absorción total.

D. Radar FMCW y el manto nivoso: tratamiento complejo

En este apéndice se va a estudiar la forma de las señales medidas por un radar FMCW cuando el medio en que incide es difusivo, dejando penetrar parcialmente la radiación. Además se va a introducir una notación compleja de los campos para describir el proceso de detección en cuadratura, simplificando el tratamiento matemático.

Al iluminar con un radar FMCW un medio como el manto nivoso, donde se espera que la radiación penetre parcialmente y se difunda, el módulo del campo eléctrico retrodifundido que llega de nuevo hasta el radar podrá escribirse como

$$E_B(t) = \int_0^\infty F(\tau) E_T(t - \tau) d\tau, \quad (\text{D.1})$$

donde $E_T(t)$ es la amplitud del campo eléctrico transmitido por el radar, Ec. (2.2). La función $F(\tau)$ da cuenta de la intensidad de la retrodifusión que producen los objetos situados a un retardo τ del radar, pero también de la atenuación en el trayecto de ida y vuelta y otros efectos que puedan producirse. En la práctica los límites de integración abarcarán un rango más estrecho, es decir, existirán valores de τ tal que $F(\tau) = 0$.

Para simplificar el tratamiento matemático se puede trabajar con campos complejos. El campo eléctrico en la antena de transmisión se escribirá

$$E_T^{\text{C}}(t) = A e^{2\pi i \phi(t)}, \quad (\text{D.2})$$

correspondiendo su parte real a la Ec. (2.2).

Empleando la Ec. (D.1), el módulo del campo eléctrico retrodifundido que vuelve hasta la antena de recepción vendrá dada por

$$E_B^{\text{C}}(t) = A e^{2\pi i \phi(t)} \int_0^\infty \left[F(\tau) e^{\pi i (\gamma \tau^2 - 2f_0 \tau)} \right] e^{-2\pi i \gamma t \tau} d\tau. \quad (\text{D.3})$$

Esta relación expresa que el campo recibido en el radar se puede escribir como la TF de una cierta función, que da cuenta de lo intensa que es la retrodifusión producida por el medio en función de la profundidad a la que se produce.

La notación compleja facilita el cálculo de la detección de las señales en cuadratura, tras el mezclado y filtrado pasa bajo que se esquematiza en la Fig. 5. El proceso puede escribirse como

$$Z(t) = I(t) + iQ(t) = k E_B^{\text{C}}(t) e^{-2\pi i \phi(t)}, \quad (\text{D.4})$$

donde k es la constante de proporcionalidad que relaciona el campo eléctrico de la radiación recibida por el sensor con el voltaje a su salida. Empleando la Ec. (D.3) se obtiene que

$$Z(t) = \frac{A}{k} \int_0^\infty \left[F(\tau) e^{\pi i (\gamma \tau^2 - 2f_0 \tau)} \right] e^{-2\pi i \gamma t \tau} d\tau. \quad (\text{D.5})$$

Como $Z(t)$ y la función $F(\tau)$ vienen relacionadas a través de una TF, puede invertirse la relación. Esto permite obtener información sobre la intensidad de la retrodifusión que se produce a cada distancia del medio, proporcionada por $F(\tau)$, a partir de la medida experimental de $Z(t)$.

E. Cálculo de la sección eficaz de radar de la nieve

Para un objeto puntual, se define la sección eficaz de radar (*radar cross-section*, RCS) como

$$\sigma = 4\pi R^2 \frac{\mathcal{I}_B}{\mathcal{I}_I}, \quad (\text{E.1})$$

donde \mathcal{I}_I es la intensidad de la radiación incidente (medida en el propio objeto), \mathcal{I}_B es la intensidad de la radiación retrodifundida que vuelve hasta la antena de recepción del radar (intensidad medida en el radar) y R es la distancia a la que se encuentra el objeto [24][Cap. 5]. Para objetos extensos, como la superficie del manto nivoso, suele definirse la RCS por unidad de área transversal,

$$\sigma^0 = \frac{\sigma}{A}. \quad (\text{E.2})$$

E.1. A partir del modelo de difusión única

Partiendo del modelo de difusión única esquematizado en la Fig. 21, equivalente al primer orden de la resolución iterativa de la ETR, se puede calcular la RCS por unidad de área transversal que presenta el manto nivoso [24][Cap. 11].

Asumiendo que el medio es uniforme y semi-infinito, únicamente contribuirá la retrodifusión producida en la superficie, σ_s^0 , y la que se produzca en el volumen interior, σ_v^0 .

Para la contribución volumétrica se puede calcular la intensidad que retrodifunde cada elemento diferencial de volumen. Por simplicidad se considerará incidencia normal. La expresión de la sección eficaz por unidad de volumen del manto nivoso, κ_b , se ha proporcionado en el Apéndice C empleando la solución de la difusión de Mie. De esta forma, cada elemento diferencial de volumen retrodifundirá una intensidad. La que posteriormente llegará al radar y será detectada vendrá dada por

$$d\mathcal{I}_B^v(z) = \frac{1}{4\pi R^2} \kappa_b \mathcal{I}(z) e^{-\kappa_e z} dV, \quad (\text{E.3})$$

donde $dV = Adz$, z es la profundidad desde la superficie a la que se encuentra el elemento, A su área transversal, $\mathcal{I}(z)$ es la intensidad de la radiación no retrodifundida a esa profundidad y R es la distancia de observación a la que se encuentra el radar (se asume mucho mayor que δ_p). Se ha introducido el factor $e^{-\kappa_e z}$ porque describe la atenuación que sufre la radiación difundida en el viaje de vuelta hasta el radar.

Como se está resolviendo la ETR de forma iterativa a orden 1, se tiene que la intensidad $\mathcal{I}(z)$ considerada para el cálculo de cómo se difunde viene dada por

$$\mathcal{I}(z) = \mathcal{I}(0) e^{-\kappa_e z}. \quad (\text{E.4})$$

De esta forma

$$4\pi R^2 \mathcal{I}_B^v = \int_{z=0}^d d\mathcal{I}_B^v(z) = \mathcal{I}(0) A \kappa_b \int_{z=0}^d e^{-2\kappa_e z} dz = \mathcal{I}(0) A \frac{\kappa_b}{2\kappa_e} (1 - e^{-2\kappa_e d}). \quad (\text{E.5})$$

donde d es la altura total del manto nivoso. Bajo la aproximación de medio semi-infinito, $d \gg \delta_p$, se tiene que $\kappa_e d \gg 1$ y por tanto la RCS por unidad de área transversal asociada a la difusión volumétrica vendrá dada por

$$\sigma_v^0 = 4\pi R^2 \frac{\mathcal{I}_B^v}{\mathcal{I}(0)} \frac{1}{A} = \frac{\kappa_b}{2\kappa_e}, \quad (\text{E.6})$$

ya que es $\mathcal{I}(0)$ la intensidad de la radiación que incide sobre el medio.

Sumando la contribución volumétrica a la superficial y teniendo en cuenta que la incidencia puede ser oblicua se obtiene que la RCS por unidad de área transversal del manto nivoso viene dada por

$$\sigma^0(\theta_i) = \frac{\kappa_b}{2\kappa_e} \cos \theta'_i + \sigma_s^0(\theta_i) , \quad (\text{E.7})$$

donde θ_i es el ángulo que forma la radiación incidente con la normal a la superficie en el aire, θ'_i el ángulo dentro del manto nivoso (obtenido empleando la ley de Snell) y σ_s^0 es la contribución debida a la transición entre el aire y el manto nivoso. Generalmente la contribución superficial es despreciable frente a la retrodifusión de los cristales de nieve porque el tamaño las rugosidades de la superficie es mucho mayor que el de la longitud de onda.

E.2. A partir de medidas experimentales

La RCS se define a partir de la Ec. (E.1). La intensidad de la radiación incidente en el objeto dependerá únicamente de la distancia a la que se encuentre si las condiciones de operación del sensor no se ven modificadas. Por tanto $\mathcal{I}_I \propto R^{-2}$.

Para el cálculo de \mathcal{I}_B se parte de la Ec. (D.2), que permite expresar el campo eléctrico de la radiación recibida por el radar, en notación compleja, como

$$E_B^{\mathbb{C}}(t) = \frac{1}{k} Z(t) e^{2\pi i \phi(t)} . \quad (\text{E.8})$$

La parte real del campo viene dada por

$$E_B(t) = \text{Re} [E_B^{\mathbb{C}}(t)] = \frac{1}{k} [I(t) \cos(2\pi\phi(t)) - Q(t) \sin(2\pi\phi(t))] , \quad (\text{E.9})$$

a partir de la cual se puede calcular la intensidad promedio recibida en un *chirp*,

$$\mathcal{I}_B \propto \langle E_B^2(t) \rangle \propto \langle I^2(t) \cos^2(2\pi\phi(t)) + Q^2(t) \sin^2(2\pi\phi(t)) - 2I(t)Q(t) \sin(2\pi\phi(t)) \cos(2\pi\phi(t)) \rangle . \quad (\text{E.10})$$

Para calcular el promedio temporal se tienen dos escalas de tiempo claramente diferenciadas. Por una parte la escala de tiempo en que varían las señales $I(t)$ y $Q(t)$, y por otra las funciones armónicas con fase $\phi(t)$, cuya variación es mucho más rápida. De esta forma,

$$\mathcal{I}_B \propto \langle I^2(t) + Q^2(t) \rangle = \langle |Z(t)|^2 \rangle = \frac{1}{t_c} \int_0^{t_c} |Z(t)|^2 dt . \quad (\text{E.11})$$

La función $G(f)$ se define como la TF de $Z(t)$. Por tanto, empleando el Teorema de Parseval

$$\int_0^{t_c} |Z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df . \quad (\text{E.12})$$

Es decir, el promedio en un *chirp* de la intensidad de la onda recibida está relacionada con el área bajo el espectro de la señal detectada,

$$\mathcal{I}_B \propto \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df . \quad (\text{E.13})$$

Para calcular la RCS por unidad de área transversal se tiene en cuenta que el área iluminada

por el radar cumplirá que $A \propto R^2$. La constante de proporcionalidad entre la distancia y el área iluminada vendrá fijada por el campo de visión del radar, medido en el Apéndice B, y por la dirección de observación (que se mantiene constante en las medidas). De esta forma la RCS y la RCS por unidad de área transversal cumplen

$$\sigma \propto R^4 \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df, \quad \sigma^0 \propto R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df. \quad (\text{E.14})$$

Cuando el campo que detecta el radar es producido por varios objetos distintos, como sucede siempre por tener la reflexión parásita del radomo por ejemplo, en el espectro se pueden diferenciar las contribuciones de los objetos si están lo suficientemente separados. Por tanto, si se desea conocer la RCS de un objeto concreto, habría que integrar únicamente la región del espectro de las señales que genera.

Particularización al caso del manto nivoso

En el caso del manto nivoso, no se tiene un objeto puntual. Por tanto interesará calcular la RCS por unidad de área transversal, Ec. (E.14). Pero además, al ser un objeto en que la radiación se retrodifunde conforme va penetrando, los espectros $G(f)$ de las señales que genera se esperaría que tuvieran componentes frecuenciales en una región amplia.

La resolución que permite un radar FMCW para distinguir varios objetos al calcular la transformada de Fourier es del orden de $c/2B$. Por lo tanto con $B \sim 3$ GHz se tendría que objetos separados por menos de 5 cm son irresolubles. Este es lo que sucede en el manto nivoso bajo valores habituales de la longitud de penetración, que puede oscilar entre 1 mm y 1 cm, como se presenta en la Fig. 26. Por tanto, bajo estas condiciones se obtiene que el espectro producido por el manto debería comportarse de forma similar a como lo hace una reflexión en una lámina reflectora, donde la radiación no penetra.

Aunque las señales reales medidas por el radar presenten no idealidades, tras su proceso de corrección (Ec. (3.3)) se obtienen tanto en el caso de los reflectores metálicos como en la nieve espectros con máximos muy pronunciados (Figuras 15 y 23), aunque en ocasiones el máximo presente unos ciertos lóbulos laterales.

Así, para el cálculo de \mathcal{I}_B habría que considera el área bajo estos máximos pronunciados de la TF de la señal corregida, $\mathcal{G}(f)$. Como la anchura de los máximos de la TF viene fijada por el ancho de banda barrido en la medida, que permanece constante, el área bajo estos máximos es proporcional a la altura de los mismos. Por lo tanto se cumplirá que

$$\mathcal{I}_B \propto \text{máx} \{ |\mathcal{G}(f)|^2 \}. \quad (\text{E.15})$$

Cuando las condiciones de la superficie del manto nivoso produzcan que δ_p sea lo suficientemente pequeño, se podrá calcular la RCS por unidad de área transversal como

$$\sigma^0 \propto R^2 \text{máx} \{ |\mathcal{G}(f)|^2 \}, \quad (\text{E.16})$$

donde R es la distancia entre el radar y el manto nivoso, que puede medirse con el propio radar FMCW mediante la localización de la posición del máximo del espectro.