

Sincronización cuántica, redes complejas y propuestas experimentales

Ignacio Hermoso de Mendoza Naval

23 de junio de 2014

Índice general

1. Sincronización: el modelo de Kuramoto cuántico	9
1.1. La sincronización y el modelo de Kuramoto	9
1.2. El modelo de Kuramoto cuántico	12
1.3. Modelización experimental con uniones Josephson	14
2. Otras topologías	17
2.1. Redes	17
2.2. Sincronización en redes	19
2.2.1. Redes Scale-Free y Erdős-Rényi: umbral crítico	20
2.2.2. Redes estrella: Sincronización explosiva	21
3. Sincronización cuántica en redes	23
3.1. Kuramoto cuántico en redes Scale-free y Erdős-Rényi	24
3.2. Kuramoto cuántico en redes estrella	25
3.2.1. Efecto de la cuanticidad	26
3.2.2. Efecto de la temperatura	28
4. Conclusiones	31

Introducción

El siguiente proyecto de fin de máster ha sido realizado bajo la dirección de los doctores Jesús Gómez-Gardeñes y David Zueco.

Motivación

El fenómeno de la sincronización es quizá el concepto de emergencia de comportamiento colectivo más interdisciplinario en la literatura sobre sistemas complejos, pues poco a poco ha sido adoptado por muchas ramas de las ciencias no solo naturales, sino también sociales. Grupos de mariposas, células y hasta personas tienden a sincronizarse cuando están lo suficientemente acoplados, produciendo estados macroscópicos dinámicamente coherentes. En todas estas situaciones, sin relación aparente y de distinta naturaleza, existe una tendencia natural a que las unidades de dichos sistemas se comporten de forma homogénea. Debido a esto, el estudio de reglas microscópicas que conducen a los sistemas hacia la sincronía ha centrado la atención de muchos trabajos teóricos y experimentales durante décadas [12, 13, 14].

La formulación matemática de los primeros modelos acerca de fenómenos de sincronización datan de los años 70, cuando tras algunos trabajos preliminares de Peskin y Winfree [16], Kuramoto [15] formalizó su famoso modelo. El modelo de Kuramoto incorpora los elementos dinámicos mínimos y abre el camino a comprender una gran variedad de fenómenos físicos relacionados con el surgimiento de sincronización. En particular, el modelo de Kuramoto relaciona fenómenos como auto-organización, emergencia, orden temporal y transiciones de fase, revelándose como el marco de trabajo más paradigmático para estudiar la sincronización, como nos revela la ingente cantidad de literatura dedicada a su estudio a lo largo de las últimas décadas [16, 17, 18].

Pese a la gran cantidad de literatura acerca del modelo de Kuramoto y sus variantes, su estudio siempre ha estado restringido al dominio clásico. A primera vista, dada la naturaleza (escala) usual de los sistemas en los que típicamente se observa la sincronización, parece superfluo pensar en una teoría cuántica para el modelo de Kuramoto. Sin embargo, no hay duda acerca de la importancia fundamental de estudiar las fluctuaciones cuánticas en torno a la emergencia de estados sincronizados [26, 27, 28, 29].

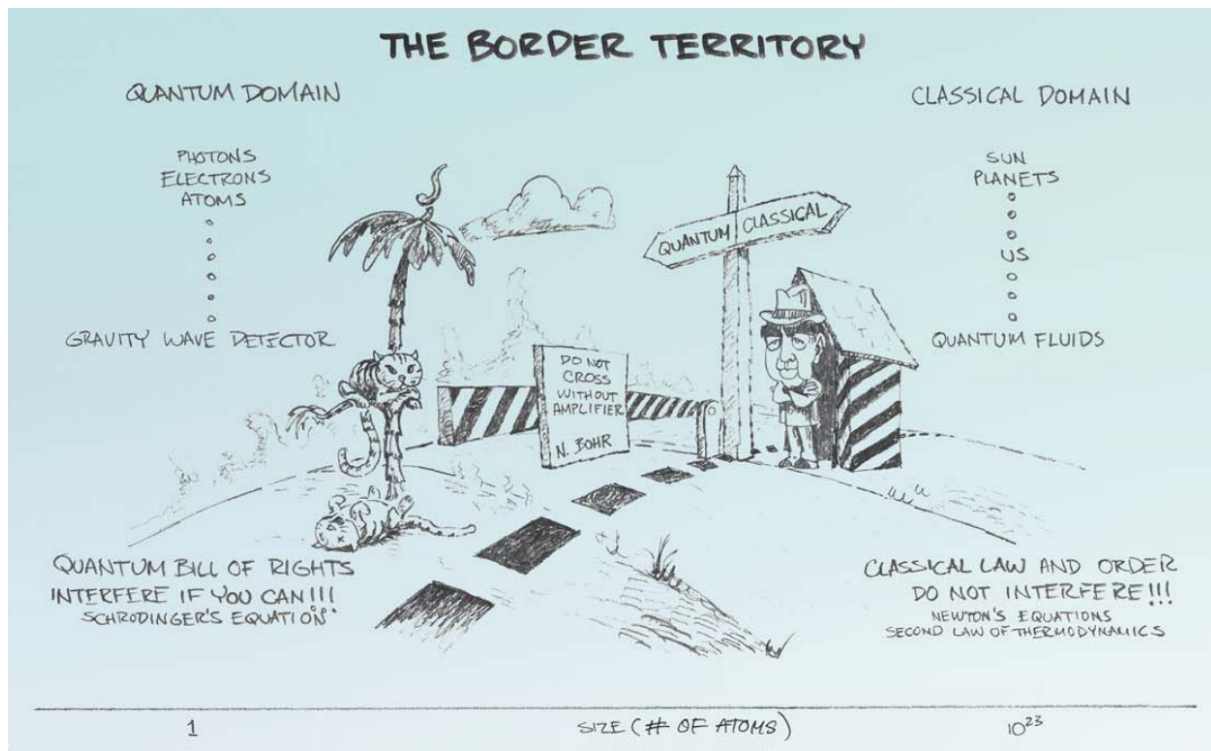


Figura 1: La frontera entre los dominios clásico y cuántico, figura ilustrativa tomada de un artículo de Zurek [2]

Más aún, el modelo de Kuramoto ha sido implementado en circuitos y en estructuras micro y nanomecánicas [30, 31], sistemas que de los que ya se ha estudiado el dominio cuántico [33, 34]. A nivel cuántico, la sincronización, entendida como la emergencia de comportamiento coherente a partir de una situación incoherente en ausencia de campos externos, es un reminisciente de fenómenos tales como la condensación de Bose-Einstein y ha sido observada en condensados interactivos de cuasipartículas [32, 35]. En este sentido, aunque la dinámica cuántica normalmente encuentra espacio en cuanto trata con sistemas microscópicos y ordenados, la modelización de sistemas intrínsecamente cuánticos bajo condiciones ruidosas solo ha sido tanteada recientemente en el contexto biofísico [21, 22] para explicar la emergencia de comportamiento cooperativo de unidades biológicas cuya dinámica opera en el régimen cuántico.

Por tanto, motivados por su importancia fundamental y aplicada, hemos desarrollado recientemente una versión cuántica del modelo de Kuramoto [1]. Nuestro modelo novel se apoya en la cuantización de sistemas abiertos en el marco del formalismo de la integral de camino de Feynman [23]. Esta versión cuántica del modelo de Kuramoto incorpora un grado de cuantidad como parámetro, tal que que en el límite clásico uno recupera el modelo clásico de Kuramoto. En dicho trabajo analizamos sus propiedades críticas derivando el punto crítico para el que aparece la sincronización y discutimos como las fluctuaciones cuánticas afectan a esta transición de sincronización.

Como aproximación semiclásica, el modelo de Kuramoto cuántico desarrollado tiene

en cuenta las primeras fluctuaciones cuánticas y sus resultados representan el primer paso hacia el estudio de la sincronización en sistemas extendidos al dominio cuántico. La consecuencia más importante de este primer trabajo fue que la cuanticidad retrasa la aparición del estado sincronizado. La explicación de este efecto subyace en el hecho de que en el dominio cuántico las fases no solo tienen frecuencias naturales diferentes, sino que además las fluctuaciones en torno a las trayectorias clásicas son diferentes dependiendo de esos ritmos internos.

Si bien obtuvimos un efecto y una explicación para este, nuestro estudio del modelo de Kuramoto cuántico quedó restringido a un tipo de red de osciladores extremadamente sencillo: un sistema de osciladores donde todos interactúan con todos. Por una parte, este es un sistema difícil de encontrar en la naturaleza, donde las redes de interacciones suelen ser más complejas. Por otra parte, estas otras topologías poseen una gran riqueza [8, 9, 10, 11] y resulta de gran interés conocer como se verán afectados estos efectos por su inmersión en el dominio cuántico.

Resumen

El objetivo de este trabajo es la aplicación de nuestro modelo de Kuramoto cuántico en otras topologías de red. Además de presentar un comportamiento no trivial, algunas redes pueden implementarse con gran facilidad en el laboratorio, lo que nos abre la puerta a la realización experimental de nuestro modelo en estas redes. Dividiremos este proyecto de la siguiente forma:

1. Una introducción al modelo de Kuramoto y una síntesis de su análogo cuántico, sus ecuaciones y los resultados obtenidos en el trabajo anterior [1] debidamente interpretados, para poder comprender correctamente los nuevos resultados. También presentamos cómo se puede implementar experimentalmente el modelo descrito.
2. Una descripción de las topologías en las que vamos a aplicar el modelo cuántico: La red homogénea de Erdős-Rényi, la red heterogénea de Barabasi-Albert y la red estrella. También resumiremos los resultados más relevantes de la muy estudiada [8, 9, 10, 11] aplicación del modelo de Kuramoto clásico a estas redes.
3. Aplicaremos el algoritmo numérico de Kuramoto cuántico, debidamente adaptado, a las redes descritas anteriormente. Buscaremos diferencias con el resultado para la red completa usada en el modelo original y resultados no triviales.

Capítulo 1

Sincronización: el modelo de Kuramoto cuántico

1.1. La sincronización y el modelo de Kuramoto

Como punto de partida hemos de tomar la ecuación original de Kuramoto. Este modelo considera un conjunto de N osciladores en el que asumimos que la escala de tiempo característica para sus amplitudes es mucho más veloz que para las fases, por lo que el oscilador i se mueve en un ciclo límite. Su estado dinámico es descrito entonces por una variable angular $\theta_i \in (0, 2\pi]$ cuya evolución temporal dada por:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N J_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1.1)$$

En esta ecuación, ω_i denota la frecuencia natural del oscilador i y J_{ij} son los elementos de una matriz \hat{J} que denota el acoplamiento entre los distintos osciladores. En el modelo de uso más general, todos los osciladores se acoplan con la misma fuerza J/N de forma que la matriz \hat{J} es producto de la fuerza de acoplamiento o acoplo J normalizada con el número de sumandos N y la matriz de adyacencia \hat{A} , matriz de 0's y 1's que denota cuáles osciladores interaccionan entre sí (veremos este concepto en el siguiente capítulo), de tal forma que $\hat{J} = \frac{J}{N} \hat{A}$.

En el límite desacoplado ($J = 0$) cada elemento i oscila en el ciclo límite con su frecuencia natural. Kuramoto demostró que incrementando el acoplamiento J el sistema experimenta una transición hacia la sincronización completa, un estado dinámico en el cual $\theta_i(t) = \theta_j(t) \forall i, j$ y $\forall t$. Esta transición aparece cuando la fuerza de acoplamiento supera un valor crítico J_C cuyo valor depende de las características de la red (de las que hablaremos en el siguiente capítulo) y del sistema, como la distribución de frecuencias

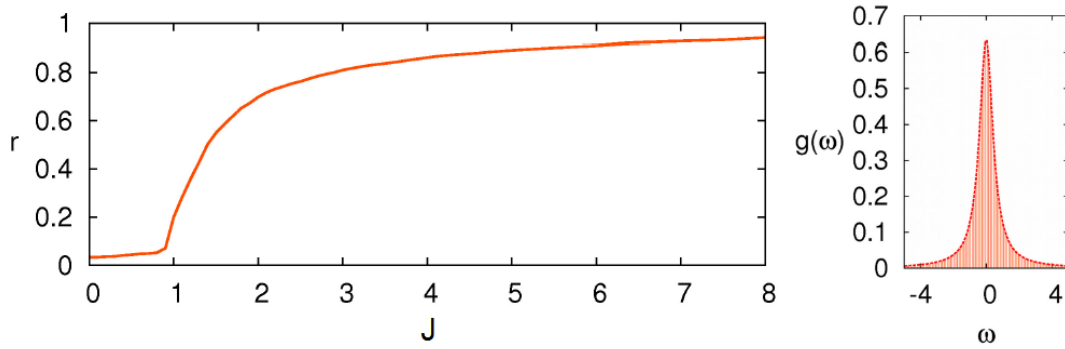


Figura 1.1: Diagrama $r(J)$ para una distribución de Cauchy-Lorentz de frecuencias naturales. Obsérvese como el sistema se mantiene en un estado incoherente por debajo de un acoplo crítico $J_C = 1$, por encima del cual el sistema se empieza a sincronizar hasta llegar a $r = 1$.

naturales.

Para poder monitorizar esta transición hacia el estado sincronizado, Kuramoto introdujo un parámetro de orden complejo:

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \right|. \quad (1.2)$$

El módulo del parámetro de orden r mide la coherencia de la moción colectiva, alcanzando el valor $r = 1$ cuando el sistema está completamente sincronizado (o coherente), mientras que vale $r = 0$ para el estado desincronizado (o incoherente). Los diagramas de sincronización suelen ser ilustrados representando la curva $r(J)$ (ver figura 1.1) en la cual el valor exacto de r para cada J es el resultado de una media temporal de $r(t)$ sobre una ventana temporal lo suficientemente amplia. El valor de $\psi(t)$ mide la fase media de la dinámica colectiva del sistema, es decir la fase global. Esta fase global no es parte importante del estudio por lo que, en adelante, al hablar de parámetro de orden nos estaremos refiriendo solamente a su módulo r .

La red completa es el modelo de red más básico, donde todos los nodos (en nuestro caso ocupados por osciladores) del sistema interactúan con todos los demás (sin incluirse a si mismos). El valor crítico J_C puede resolverse analíticamente para la red completa, en función de $g(\omega)$. Concretamente Strogatz [16] lo resolvió para una distribución de frecuencias $g(\omega)$ de Cauchy-Lorentz (o lorentziana), que es unimodal y par en torno a una frecuencia principal Ω de la población, tal que $g(\Omega + \omega) = g(\Omega - \omega)$. Obtuvo así un acoplamiento crítico de $J_c = 2/(\pi g(\Omega))$, que coincide con los resultados numéricos que obtuvo y que podemos ver en la figura 1.1. Esta es la configuración que usamos en [1], añadiendo un efecto de temperatura, para los resultados clásicos y cuánticos.

Ecuación de Langevin

Para implementar simulaciones numéricas trabajamos con la ecuación de Langevin, cuya forma completa viene dada por la ecuación:

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial x} + m\xi(t) , \quad (1.3)$$

la cual modela un proceso Markoviano y estocástico, con una fuerza fluctuante $\xi(t)$ que depende de la temperatura T :

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 , \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t') . \quad (1.4)$$

$$D = \frac{k_B T}{m\gamma} . \quad (1.5)$$

En el límite sobreamortiguado $\gamma \gg 1$ cuando quiera que el amortiguamiento γ provea la escala de tiempo más lenta en el sistema [4], llegamos a:

$$m\gamma\dot{x} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} + m\xi . \quad (1.6)$$

Pasando de una a N partículas y definiendo las posiciones (fases) adimensionales θ_i , reescribimos el modelo de Kuramoto (1.1) de forma conveniente:

$$\dot{\theta}_i = -\frac{\partial \bar{V}(\theta_1 \dots \theta_N)}{\partial \theta_i} + \bar{\xi}_i(t) , \quad (1.7)$$

donde las cantidades \bar{V} , $\bar{\xi}$ los equivalentes adimensionales de los anteriores. El proceso de adimensionalización está descrito en [1]. Concretamente, V sería llamado potencial de Kuramoto y se define como:

$$V(\theta_1, \dots, \theta_N) \equiv -\sum_i \omega_i \theta_i - \sum_{i,j} J_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) , \quad (1.8)$$

obteniendo de la derivada de $V(\theta_1, \dots, \theta_N)$ la ecuación de Kuramoto (1.1).

La inclusión del ruido en la ecuación (1.3) es necesaria, pese a que el modelo clásico puede realizarse con temperatura nula. Esto se debe a que en un sistema cuántico, debido a las fluctuaciones cuánticas, siempre tenemos ruido. Por ello el ruido es incluido en el modelo clásico para poder compararlo con el modelo cuántico a la misma temperatura.

1.2. El modelo de Kuramoto cuántico

La derivación de las ecuaciones dinámicas del modelo de Kuramoto cuántico es un proceso largo y no lo vamos a escribir aquí, puede verse la descripción completa en [1]. En resumen lo que hacemos es buscar una descripción hamiltoniana de 1.1, usamos el formalismo de la integral de camino buscando el camino que minimiza la acción y estudiamos las fluctuaciones en torno a dicho camino mínimo para obtener la matriz densidad en el equilibrio. Tomamos dicha matriz en el límite sobreamortiguado y, dado que estudiamos la dinámica a tiempos largos, la forzamos a ser estacionaria para encontrar los coeficientes de la ecuación maestra de Fokker-Planck. Obtenida esta, obtenemos la correspondiente ecuación de Langevin que describirá la mecánica del sistema cuántico:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = -\frac{1}{F_i} \frac{\partial V}{\partial \theta_i} + \frac{\beta \lambda}{F_i} \sum_j \frac{\partial V}{\partial \theta_j} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \frac{\lambda}{F_i} \sum_{j \neq i} \frac{\partial^3 V}{\partial \theta_j^2 \partial \theta_i} - \frac{\lambda}{2F_i} \frac{\partial^3 V}{\partial \theta_i^3} + \left(\frac{1}{F_i}\right)^{\frac{1}{2}} \xi_i(t). \quad (1.9)$$

Este es el equivalente cuántico a la ecuación (1.7), donde para no recargar la notación hemos dejado de usar la barra \bar{O} para indicar la cantidad O adimensionalizada, siendo en esta ecuación (1.9) adimensionales todas las cantidades. De nuevo, la descripción completa del proceso de adimensionalización puede encontrarse en [1]. En (1.9) λ es el parámetro cuántico o cuanticidad (recuperando el caso clásico con $\lambda = 0$) y F_i es un factor de corrección individual para cada partícula descrito como:

$$F_i = e^{-\beta \lambda V''_{ii}}. \quad (1.10)$$

El resultado principal fue que al resolver analíticamente las ecuaciones [25] (fácil mientras tengamos una red completa y la distribución lorentziana para $g(\omega)$) obtuvimos una sencilla relación entre el acoplo crítico predicho para los casos clásico J_C^C y cuántico J_C^Q :

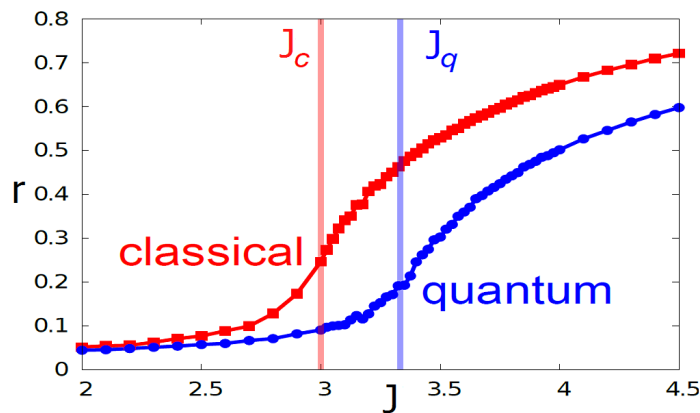


Figura 1.2: Curvas clásica (rojo) y cuántica (azul) con $\lambda = 0,1$ y $\beta = 1$ en la red completa. Las rectas verticales corresponden al valor teórico de J_C para cada curva.

$$J_C^Q = \frac{J_C^C}{1 - \lambda}. \quad (1.11)$$

Este es el principal resultado que obtuvimos con el modelo de Kuramoto cuántico. El modelo fue implementado en simulaciones numéricas, que confirmaron el resultado analítico. Podemos ver el resultado en la figura 1.2. Esta simulación se hizo con una red completa de 1000 osciladores con una distribución de frecuencia de Cauchy-Lorentz, de media cero y varianza unidad.

Interpretación del resultado: efecto túnel

Para explicar el resultado nos remitimos a una situación más simple: dos osciladores acoplados. En este caso el modelo de Kuramoto consiste en solo dos ecuaciones acopladas. Tomando la diferencia entre estas dos ecuaciones e introduciendo la diferencia de fase $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ y la diferencia de frecuencias naturales $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 + \frac{K}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1), \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 + \frac{K}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \dot{\varphi} &= \Delta\omega - K \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Este modelo tiene un análogo clásico muy sugerente [24], que es la ecuación de una partícula sobreamortiguada en un potencial "washboard" (tabla de lavar) a temperatura cero (figura 1.3). Este es un potencial periódico (con periodicidad 2π) que posee máximos y mínimos relativos siempre que $J > \Delta\omega$ (que es el resultado del modelo de Kuramoto clásico a $T=0$). En este caso las partículas quedan bloqueadas en los mínimos y en estos tenemos que $\dot{\varphi} = 0$, de modo que estamos en el estado sincronizado.

Si $K < \Delta\omega$ los mínimos y máximos desaparecen, permitiendo la deriva de las partículas (drift). Lo que tenemos en esta situación es que $\dot{\varphi} \neq 0$, es decir que el sistema se encuentra en el estado desincronizado. Este régimen puede darse también en $K > \Delta\omega$, si las fluctuaciones térmicas son lo suficientemente grandes frente al acoplamiento como para que el potencial sea sobrepasado en casi todas las oscilaciones. De no ser así el sistema permanece en el estado bloqueado, oscilando en torno al mínimo.

El resultado principal es que los ritmos de escape, y por tanto el mecanismo de desbloqueo, son intensificados por las fluctuaciones cuánticas. Este efecto puede ser visto como una consecuencia del aumento de las transiciones a energías por debajo de la altura de la barrera, que no es sino efecto túnel. Dado que el efecto túnel disminuye la altura efectiva de la barrera de potencial, necesitamos tener un acoplamiento J mayor para compensarlo.

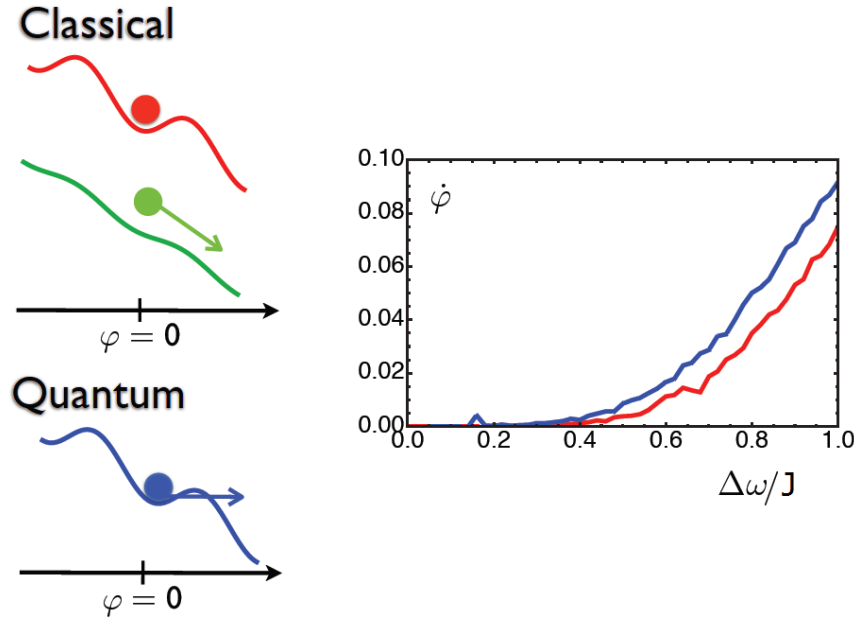


Figura 1.3: Velocidad angular relativa $\dot{\varphi}$ entre los dos osciladores, siendo $\dot{\varphi} = 0$ el estado sincronizado, que pasa al estado desincronizado $\dot{\varphi} \neq 0$ si J es lo bastante grande. El efecto túnel cuántico ayuda a las partículas a escapar del estado sincronizado, por lo que el rango de $\Delta\omega/J$ en donde tenemos estados acoplados se ve reducido.

1.3. Modelización experimental con uniones Josephson

En [5] [6] [7] se muestra como un sistema de uniones Josephson puede ser mapeado en el modelo de Kuramoto en el límite de acoplamiento débil y desorden débil (lo que es decir $r \rightarrow 1$). Si consideramos N uniones Josephson bajo una corriente I_B y sujetas a una impedancia con inductancia L , resistencia R y capacidad C , las ecuaciones del circuito son:

$$\frac{\hbar}{2eR_j} \dot{\phi}_j + I_j \sin \phi_j + \dot{Q} = I_B, \quad (1.13)$$

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \frac{\hbar}{2e} \sum_{k=1}^N \dot{\phi}_k. \quad (1.14)$$

Donde ϕ_j es la diferencia de fase en la unión j -ésima, R_j es la resistencia de la unión, I_j la corriente que atraviesa la unión, Q la carga eléctrica de la impedancia y e la carga del electrón. Este modelo está ilustrado en la figura 1.4a. En [5] se demuestra que estas dos ecuaciones pueden mapearse en un conjunto de N osciladores en ciclo límite descritos por:

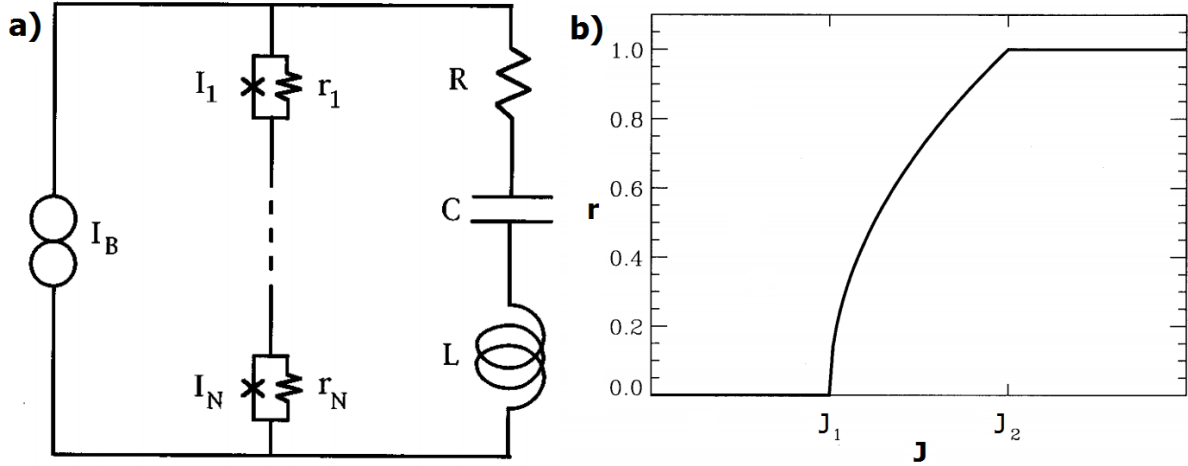


Figura 1.4: (a) Modelo de circuito para una unión en serie de uniones Josephson en paralelo con una impedancia genérica inducción-condensador-resistencia. (b) Comportamiento del parámetro de orden r en función del acoplamiento J para el circuito de uniones Josephson.

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + \frac{J}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\theta_k - \theta_j), \quad (1.15)$$

donde el parámetro de acoplamiento J y la frecuencia ω_j se definen como:

$$\omega_j = \frac{2eR_j}{\hbar} (I_B^2 - I_j^2)^{1/2}, \quad (1.16)$$

$$J = \frac{Nr\omega \left(\frac{2e}{\hbar} r I_b - \omega \right)}{[(L\omega^2 - 1/C)^2 + \omega^2(R + Nr)^2]^{1/2}}, \quad (1.17)$$

siendo ω la media de la frecuencia de todos los osciladores.

Las fluctuaciones térmicas pueden incorporarse al modelo mediante la adición de una corriente ruidosa $\tilde{I}(t)$ con $\langle \tilde{I}(t) \rangle = 0$ y $\langle \tilde{I}(t) \tilde{I}(t') \rangle = (2k_B T/R) \delta(t - t')$.

En este sistema, la fracción de uniones Josephson acopladas varía con el acoplamiento J tal como se puede ver en la figura 1.4b. De esta forma, una unión en serie de uniones Josephson forma el modelo de red más básico, la red completa, donde todos los osciladores enlazan con todos. Es posible entonces realizar un experimento con uniones Josephson para emular la red completa, imitando el circuito de la figura 1.4a. La recreación de otras redes requiere de otros circuitos más complicados, que desafortunadamente no hemos conseguido construir.

Capítulo 2

Otras topologías

2.1. Redes

La abstracción matemática de una red es un grafo $\zeta(N, M)$ que comprende un conjunto de N nodos (o vértices) conectados por un conjunto de M enlaces (o ejes), siendo k_i el grado o conectividad (número de enlaces) del nodo i . Este grafo es representado mediante la matriz de adyacencia \widehat{A} , con elementos $a_{ij} = 1$ representando la existencia de un enlace dirigido de j a i y $a_{ij} = 0$ si no existe enlace. En el caso más general de una red ponderada, se caracteriza mediante una matriz \widehat{W} cuyos elementos w_{ij} representan la fuerza (o peso) del enlace de j a i . Un caso muy común es una red donde todos los enlaces son recíprocos, de forma que la matriz \widehat{A} es simétrica (así son las redes con las que vamos a trabajar).

La investigación de las propiedades estadísticas de muchas redes complejas revela que, pese a representar sistemas muy diferentes, es posible categorizarlas de varias formas. La más representativa de estas propiedades es la distribución de grado $P(k)$, que indica la probabilidad de que un nodo tenga un grado k .

La diferenciación entre redes homogéneas y heterogéneas en grado está asociada en general a la cola de la distribución $P(k)$. Si en una red la distribución decae exponencialmente con el grado nos estamos refiriendo a una red homogénea, siendo el ejemplo más representativo el grafo aleatorio de Erdős-Rényi (ER), construido asociando una probabilidad p de que cada enlace posible exista. Éste entra dentro de una categoría de redes llamada *Small World* (SW), caracterizadas por la capacidad de alcanzar cualquier punto de la red en pocos pasos desde cualquier otro, que se construyen partiendo de un anillo de nodos conectados a sus vecinos hasta cierto orden (determinado por el grado medio $\langle k \rangle$) y asignando una probabilidad q de liberar y reasociar un enlace. En el límite $q \rightarrow 1$, tenemos la red ER.

Por contra, cuando la cola de la distribución es ancha decimos que la red es hete-

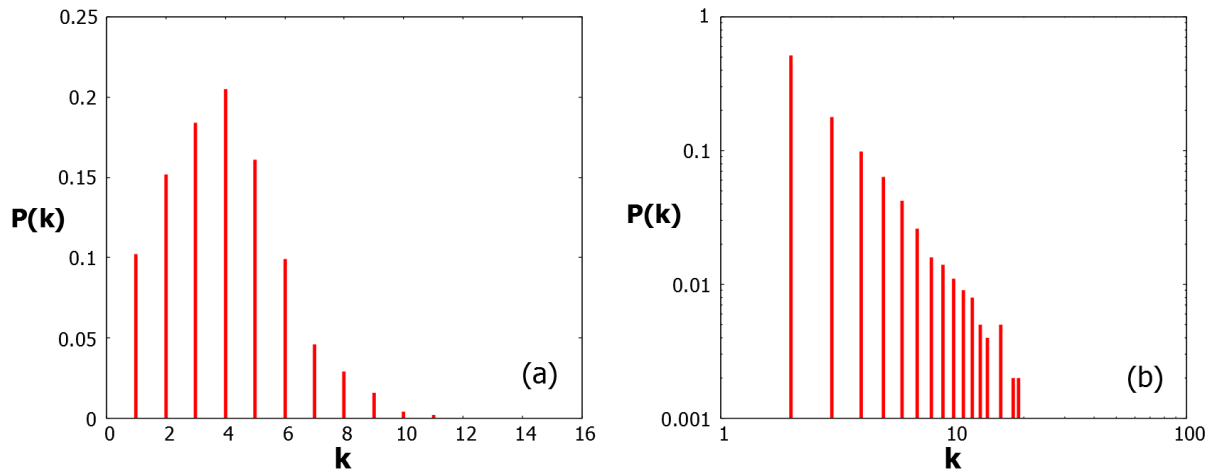


Figura 2.1: Distribuciones de grado o conectividad para las redes (a) Erdős-Rényi y (b) Barabási-Albert. Ambas redes tienen la misma conectividad media $\langle k \rangle = 4$ y la misma cantidad de nodos $N = 1000$.

rogénea. En particular, las redes *Scale Free* (libres de escala, SF) son un tipo de redes cuya distribución de grado es potencial, $P(k) \sim k^{-\eta}$, siendo el modelo de Barabási-Albert (BA) el más paradigmático en este tipo de grafos, que cumple $\eta = 3$. Esta red se construye mediante un mecanismo en donde añadimos nodos que se enlazan preferencialmente con los ya existentes según la cantidad de enlaces que ya tengan (la cantidad de enlaces de cada nuevo nodo determina $\langle k \rangle$, sin alterar η). Esto puede dar lugar a la existencia de *hubs*, nodos con una conectividad mucho más elevada que la conectividad media.

Dos de las redes con las que vamos a trabajar van a ser las redes ER y BA. En concreto, usaremos dos redes de $N = 1000$ nodos y un mismo grado o conectividad media $\langle k \rangle = 4$, que han de tener para poder establecer una comparación entre éstas. Una representación de la distribución de grado para estas dos redes puede verse en la figura 2.1.

Otra de las redes con las que trabajaremos es la llamada red estrella. Esta red consiste en un nodo central $i = N$ que conecta con todos los demás, mientras que estos últimos (nodos periféricos $i = 1, \dots, N - 1$) sólo conectan con el nodo central, lo que naturalmente fija las conectividades como $k_N = N - 1$ para el nodo central y $k_i = 1$ ($i = 1, \dots, N - 1$) para los periféricos. Esta red estrella resulta atractiva por su simplicidad para el análisis

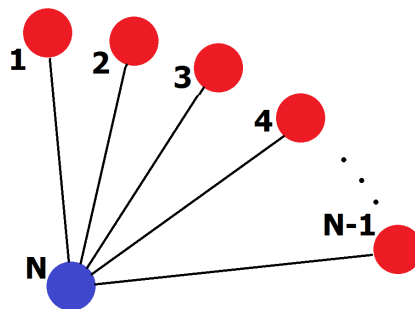


Figura 2.2: Red estrella: un nodo central (azul) conectado con todos los k nodos periféricos (rojos) que solo conectan con el central.

teórico y numérico. Además, representa en primera aproximación a las redes heterogéneas (como las redes SF) presentando muchos de los efectos (como la sincronización explosiva de la que hablaremos en la siguiente sección) característicos en las redes libres de escala. Más aún, el análisis de esta red estrella, por ser aparentemente sencilla de implementar en un experimento, puede dar indicios de cómo observar los efectos cuánticos sobre la sincronización en el laboratorio. Podemos ver una ilustración de este tipo de red en la figura 2.2. Concretamente, nosotros utilizaremos una red estrella de $N = 31$ nodos.

2.2. Sincronización en redes

El modelo de Kuramoto se implementa en redes complejas [19] mediante la definición de la matriz de adyacencia \hat{A} en la ecuación 1.1, donde $\hat{J} = \frac{J}{N}\hat{A}$. En el modelo original el término de acoplamiento es una magnitud intensiva debido a que la dependencia en la magnitud del sistema se cancela al normalizarse con $\frac{1}{N}$. Esta prescripción resulta esencial para el análisis del sistema en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ para la red completa, donde los osciladores enlazan todos con todos.

Sin embargo, esta elección para las ecuaciones del modelo de Kuramoto en otros tipos de redes las hace dependientes de N . Por tanto, en el límite termodinámico, el término de acoplamiento tiende a cero excepto en aquellos nodos cuyo grado escale con N . Hay que notar que la existencia de estos nodos solo es posible en redes con una distribución de grado potencial, pero aun así esto ocurre con una probabilidad muy pequeña que va con $k^{-\eta}$, siendo $\eta > 2$ [8]. En estos casos las soluciones independientes de N se recuperan, pero con ligeras diferencias en el umbral de la sincronización de redes completas y de redes *Scale Free*.

Una segunda posible elección consiste en tomar $J_{ij} = \frac{J}{k_i}a_{ij}$, de forma que tenemos una interacción ponderada que hace que el acoplamiento sea intensivo. Esta forma se ha usado para resolver la paradoja de la heterogeneidad, consistente en que la heterogeneidad en la distribución de grado, que a menudo reduce la distancia media entre nodos, puede suprimir la sincronización en redes de osciladores simétricamente acoplados con una fuerza de acoplo uniforme. Este resultado afecta a la estabilidad del estado plenamente sincronizado, pero no a la dependencia que el parámetro de orden tiene en la fuerza de acoplo. Además, la inclusión de pesos en la interacción altera fuertemente la dinámica original de Kuramoto en redes complejas, pues puede imponer una dinámica homogénea que enmascara la auténtica heterogeneidad topológica de la red.

Por ello, para comparar apropiadamente redes de distinta heterogeneidad, se toma simplemente $J_{ij} = Ja_{ij}$. Esto nos deja la ecuación original de Kuramoto de la forma:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + J \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) . \quad (2.1)$$

Esta es la elección más común al tratar con redes complejas, incluso si no nos centramos en el estudio de la heterogeneidad. Por ello es la forma que tomaremos para \hat{J} .

2.2.1. Redes Scale-Free y Erdős-Renyi: umbral crítico

Los primeros trabajos de aplicación del modelo de Kuramoto en redes se hicieron sobre redes SW [20, 36, 37] y BA [38, 39]. En [37] los autores construyeron distribuciones de frecuencias Gaussianas con varianza unidad en una red SW. Encontraron que la sincronización aparecía con J finito incluso para valores casi nulos de la probabilidad de reenlazado q . En particular, haciendo $q = 1$, recuperaban la red ER y dejando aumentar en esta la conectividad media se iba aproximando a los resultados del límite de Kuramoto ($\langle k \rangle = N - 1$, la red completa).

En [38] se consideraba el mismo problema para las redes BA. Las frecuencias naturales eran distribuidas uniformemente en un intervalo $(-1/2, 1/2)$ y se encontraba que la dinámica global del sistema resultaba ser cualitativamente la misma que para el modelo original de Kuramoto.

La existencia de un punto crítico para el modelo de Kuramoto en redes SF fue una sorpresa. Este es uno de los pocos casos en que un proceso dinámico muestra comportamiento crítico cuando la topología es descrita por una distribución de conectividad potencial con un exponente $\eta = 3$. Aunque al principio lo aparentaba, las simulaciones demostraron que no se trataba de un efecto por tamaño finito.

Para conocer cuál es el efecto de la heterogeneidad escogemos las dos redes representativas de los casos límite de homogeneidad y de heterogeneidad, que son las redes ER y BA, respectivamente. Para compararlas apropiadamente han de tener como ya comentábamos la misma conectividad media, además de la misma distribución de frecuencias, el mismo tamaño y las simulamos con los mismos parámetros externos, por lo tanto a la misma

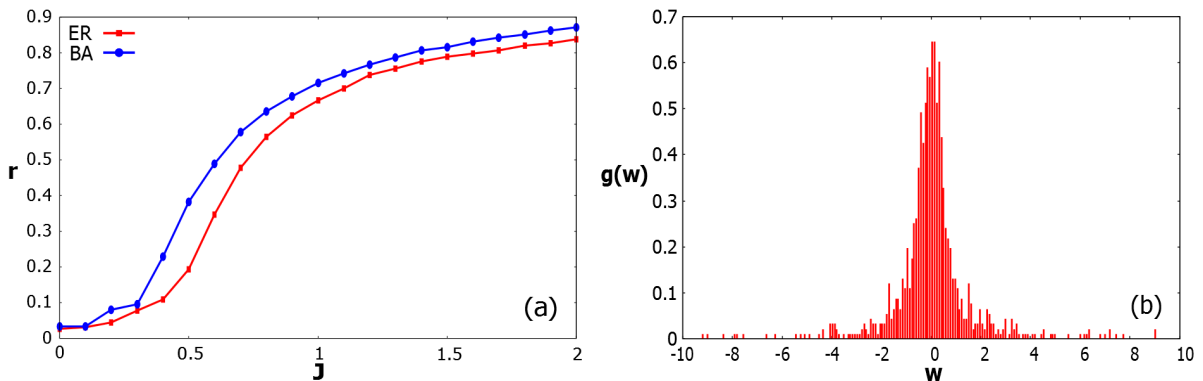


Figura 2.3: (a) Curvas de sincronización para las redes Erdős-Renyi y Barabási-Albert, con la misma distribución $g(\omega)$ y a la misma temperatura $\beta = 5$. (b) Distribución de Cauchy-Lorentz $g(\omega)$.

temperatura. Podemos ver una comparación de las curvas de sincronización en la figura 2.3, usando una distribución de frecuencias de Cauchy-Lorentz, de media cero y varianza unidad (la misma que usamos en la red completa). Ambas redes presentan una transición de segundo orden hacia un estado sincronizado, el efecto de la heterogeneidad adelanta el comienzo de la transición a un acoplo menor.

2.2.2. Redes estrella: Sincronización explosiva

La implementación del modelo de Kuramoto en las redes estrella da lugar a un interesante efecto basado en una correlación frecuencia-conectividad [9, 10]. Cuando las frecuencias de los osciladores son proporcionales a sus conectividades $\omega_i \sim k_i$, aparece una transición de fase de primer orden en la sincronización, que llamamos sincronización explosiva. Este fenómeno (cambio en el orden de la transición a la sincronización) se debe al hecho de que en redes heterogéneas (con frecuencias arbitrariamente distribuidas en los nodos) los nodos más conectados (*hubs*) guían la sincronización del sistema siendo los primeros en ajustarse a la frecuencia media (la frecuencia de sincronización). Al imponer una correlación positiva entre la frecuencia y el número de conexiones de un nodo, estamos asignando una frecuencia muy distinta de la frecuencia media a los hubs, y por tanto entorpeciendo su labor como *mediadores* de la sincronización. Como resultado obtenemos un retraso considerable en el punto crítico y, como subproducto, una transición abrupta (de primer orden).

Además, esta transición de primer orden en el parámetro de sincronización r presenta una histéresis que se ensancha al aumentar N , es decir, al aumentar el número de nodos periféricos en la estrella [9]. Este ciclo de histéresis, como se muestra en la figura 2.4, describe la siguiente fenomenología. Partiendo de un estado coherente, el sistema caerá a un

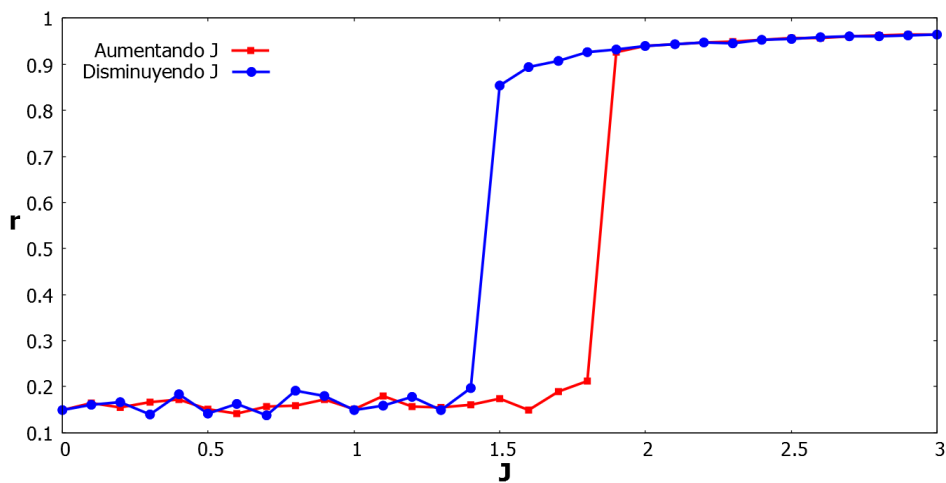


Figura 2.4: Diagrama de sincronización $r(J)$ para una red estrella de $N = 31$ nodos. En la figura se muestra el ciclo de histéresis en la red con $\beta = 5$: El sistema tiene un acoplo umbral para sincronizarse (línea roja) mayor que el acoplo umbral para desincronizarse (línea azul).

estado incoherente para un acoplo $J < J_{c1}$, donde llamamos a J_{c1} *umbral inferior*. Cuando el sistema se encuentra en un estado incoherente, se sincroniza para valores del acoplo $J > J_{c2}$, siendo J_{c2} el *umbral superior*. Dado que entre estos valores las dos soluciones coherente e incoherente son estables, nos referimos a este intervalo como zona biestable o de histéresis. Recientemente, se ha observado que el fenómeno de sincronización explosiva es robusto a la introducción de desorden en las frecuencias ($\omega_i = k_i \pm \epsilon$) revelando incluso que el desorden aumenta la región biestable, es decir, la anchura del ciclo de histéresis [8].

Podemos ver un ejemplo de la histéresis en la figura 2.4. Esta es una simulación hecha con un oscilador central y treinta periféricos, asignando a cada oscilador su grado como frecuencia, es decir $\omega_i = 1$ ($i = 1, \dots, N - 1$) y $\omega_N = 30$. Utilizamos una temperatura correspondiente a $\beta = 5$. Si partimos del estado incoherente y aumentamos el acoplo J , obtenemos una curva diferente que si partimos del estado coherente y disminuimos el acoplo.

Capítulo 3

Sincronización cuántica en redes

Introducidos los conceptos del modelo de Kuramoto cuántico y la sincronización en redes complejas, podemos cruzar ambos conceptos entre sí. Esto lo hacemos de forma numérica, implementando las ecuaciones del modelo de Kuramoto cuántico (1.9) en las topologías de nuestras redes. Ya fueron realizadas simulaciones numéricas en el anterior estudio del modelo en la red completa [1], por lo que basta adaptar el programa usado anteriormente.

Aunque parece sencillo, hay que tener en cuenta algunas dificultades. Como describimos en el capítulo anterior, para conservar la heterogeneidad de la red necesitábamos usar las ecuaciones de Kuramoto (2.1) sin normalizar. Esto supone que para nodos con una alta conectividad en relación con el grado medio de la red, los que llamábamos *hubs*, la ecuación tiene muchos sumandos y al no normalizarse dará valores numéricamente grandes. El problema radica en el factor (1.10), que afecta a todos los términos de la ecuación 1.9: en los *hubs* este factor exponencial puede llegar a dispararse a valores muy grandes, que si bien son válidos nos obligan a usar una dinámica temporal con un paso temporal dt muy pequeño.

Este problema podría solucionarse mediante un método de Runge-Kutta adaptativo, sin embargo el algoritmo que se usa no es adaptable a uno de estos métodos. El motivo es que la presencia de (1.10) en el término del ruido estocástico en (1.9) supone que el ruido depende del estado del sistema, por lo que no es ruido aditivo sino multiplicativo. Esto supone la necesidad de usar un algoritmo de ruido multiplicativo [3] que no podemos abandonar para usar un algoritmo de Runge-Kutta adaptativo. Debido a esto la solución pasa por añadir un algoritmo propio consistente en medir las velocidades obtenidas de las ecuaciones dinámicas y aceptar o repetir el paso, cambiando el paso temporal según sea necesario. Esto limita en la práctica algunos de los parámetros que podemos usar, pues según que combinación de parámetros usemos los tiempos de simulación pueden dispararse de forma excesiva.

La ecuación (1.9) es el equivalente adimensional al que implementamos en la simula-

ción. Esta adimensionalización hace desaparecer los parámetros m y γ que aparecen en la ecuación, por lo que no hay necesidad de preocuparse por sus valores. Los únicos valores que cambiaremos en las simulaciones serán:

- La cuanticidad λ , que mide la inmersión del sistema en el dominio cuántico.
- La temperatura, a través de $\beta = \frac{1}{k_B T}$.
- El acoplo J , que cambiamos poco a poco durante una simulación sin reiniciar el estado del sistema.

Los demás posibles parámetros, como el tipo y tamaño de las redes y la distribución de frecuencias $g(\omega)$ las mantenemos fijas dentro de cada una de las siguientes secciones.

3.1. Kuramoto cuántico en redes Scale-free y Erdős-Rényi

Las primeras redes en las que implementamos el modelo de Kuramoto cuántico son las redes ER y BA, con ánimo de buscar alguna influencia que la heterogeneidad puede tener sobre el efecto cuántico. Como ya hemos dicho, en la red completa este efecto consistía en un desplazamiento hacia la decoherencia del sistema clásico.

Para comparar ambas redes, usamos en ambas la misma distribución de frecuencias $g(\omega)$ de Cauchy-Lorentz con media cero y varianza unidad que utilizábamos en el ejemplo del caso clásico en la figura 2.3b. Ambas redes contienen $N = 1000$ osciladores y las

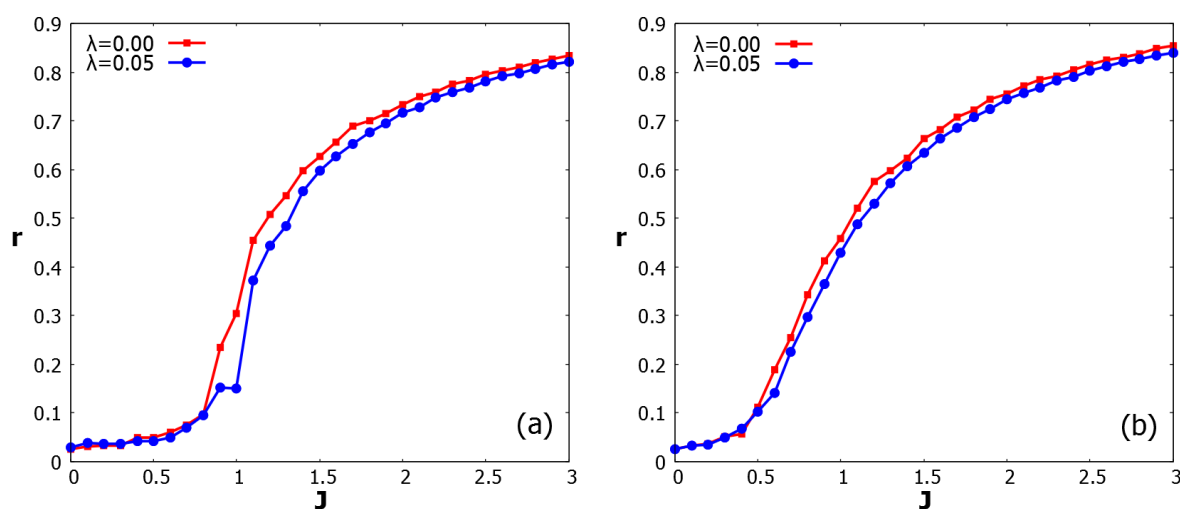


Figura 3.1: Curvas de sincronización clásica (rojo) y cuántica (azul) en las dos redes (a) Erdős-Rényi y (b) Barabasi-Albert. Todas las curvas tienen $\beta = 1$ y las curvas cuánticas $\lambda = 0,05$.

mismas distribuciones de grado $P(k)$ que teníamos en 2.1. Para comprobar el efecto del parámetro cuántico comparamos el resultado obtenido con $\lambda = 0,05$ con el anterior que obteníamos en el caso clásico, cuando $\lambda = 0$. El resultado puede verse en la figura 3.1.

El resultado es el mismo que obteníamos en la red completa, la cuanticidad retrasa la sincronización de una forma similar. Dado que en el caso clásico la sincronización en ambas redes era similar a la de la red completa, esto no es una gran sorpresa.

3.2. Kuramoto cuántico en redes estrella

Simulamos ahora una red estrella de 31 osciladores (1 oscilador central y 30 periféricos) con una distribución de frecuencias correlacionada con la distribución de grado: $\omega_i = 1$ y $\omega_j = 30$. Es decir, la misma distribución que usábamos en el caso clásico.

El motivo de usar una red de pequeño tamaño es que disminuye el efecto que tiene el *hub* sobre la velocidad del sistema, un efecto puramente numérico. Además, no se detectó un comportamiento diferente al cambiar el tamaño del sistema, más allá del incremento considerable de los tiempos de simulación a causa del *hub*. De esta forma podemos permitirnos barrer un espectro más amplio de parámetros, dándonos un mejor entendimiento de lo que sucede en las redes heterogéneas. Veamos ahora los efectos encontrados al implementar las ecuaciones cuánticas en el sistema.

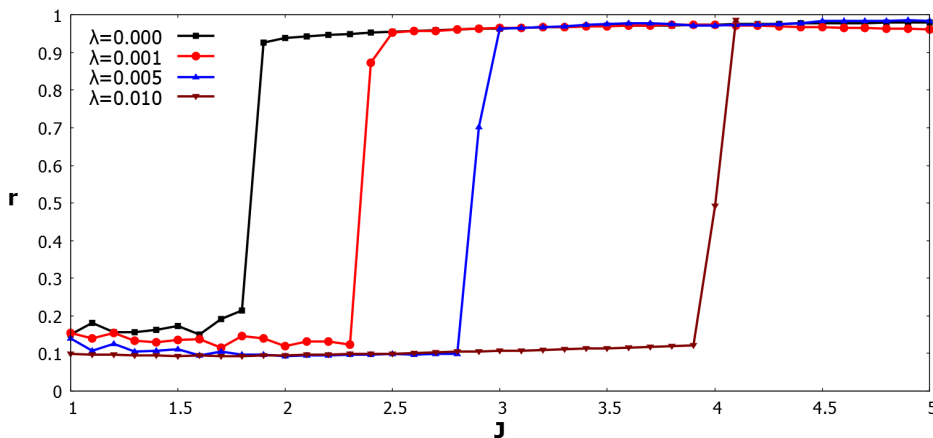


Figura 3.2: Desplazamiento con la cuanticidad de la curva de sincronización $r(J)$ obtenida al aumentar J partiendo de un estado incoherente, para $\beta = 5$.

3.2.1. Efecto de la cuanticidad

Las primeras simulaciones incrementando poco a poco el valor de λ desde el caso clásico parecían arrojar el mismo efecto que en las redes anteriores, un retraso en la sincronización. Sin embargo esto se observó solamente para el acoplo crítico para pasar del estado incoherente al coherente, el *umbral superior* J_{c2} , como puede verse en la figura 3.2. Sin embargo el acoplo crítico para desincronizar el sistema, el *umbral inferior* J_{c1} , no parecía ser afectado por la cuanticidad del sistema.

En realidad J_{c1} sí que se desplaza, pero muy poco. En cambio J_{c2} es fuertemente afectado por la cuanticidad, desplazándose mucho para pequeños valores de λ . Sin embargo al seguir aumentando λ nos encontramos con que J_{c2} crece más lentamente, llegando de hecho a un máximo J_{c2} pasado el cual empieza a disminuir. El mismo efecto pero a menor escala se produce con J_{c1} , aumenta hasta llegar a un máximo en el mismo punto y empieza a decrecer.

Viéndose que J_{c2} decrece más rápido que J_{c1} , se daba la posibilidad de que llegaran a cortarse para un alto valor de λ . Esto implicaría la desaparición de la histéresis, lo que es un efecto de importancia ya que, a su vez, la desaparición de la histéresis conlleva que la transición pase de primero a segundo orden. En la figura 3.3 mostramos el cambio de J_{c1} y J_{c2} con λ , como resultado de un conjunto de simulaciones realizadas con la temperatura correspondiente a $\beta = 20$.

En la figura 3.3 se puede ver como las curvas de J_{c1} y J_{c2} se cortan en un punto donde la histéresis desaparece, de tal forma que en este punto aparentemente se cortan tres zonas con diferentes regímenes: la zona de sincronización cero, donde la única solución estable es la incoherente; la zona de sincronización plena, donde la única solución estable es la coherente; y la zona de histéresis o biestabilidad, donde ambas soluciones coherente e incoherente son estables. A priori, este punto de corte es un punto tricrítico.

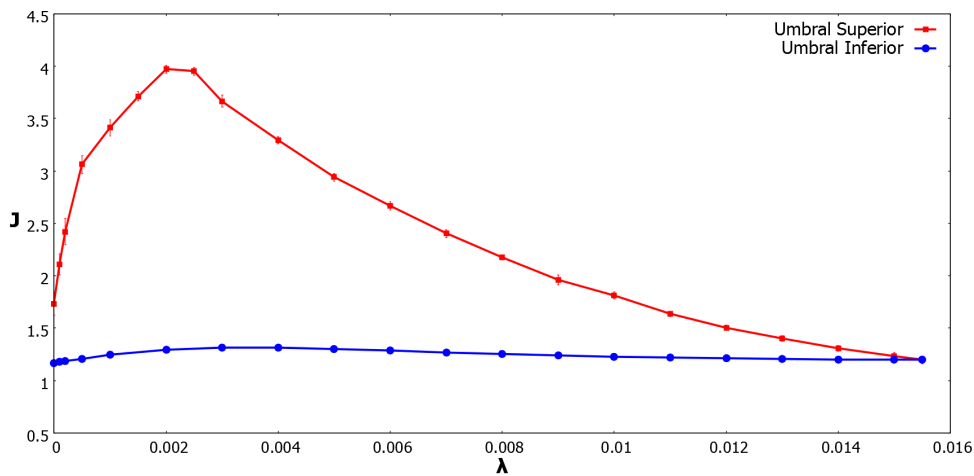


Figura 3.3: Umbrales críticos superior J_{c2} (rojo) e inferior J_{c1} (azul) de la histéresis en función del parámetro cuántico λ para la temperatura correspondiente a $\beta = 20$.

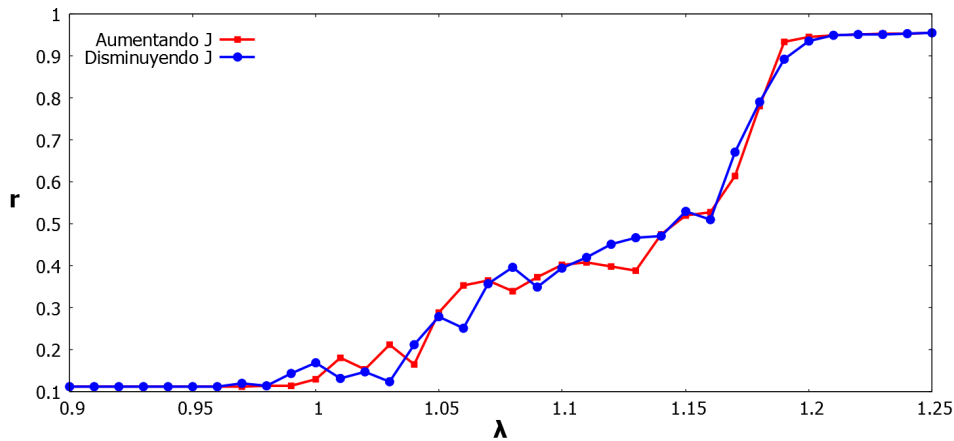


Figura 3.4: Curvas de sincronización con $\beta = 20$ y $\lambda = 0,018$, pasado el punto crítico. La histéresis ha desaparecido y la transición aparenta ser de segundo orden.

A la temperatura $\beta = 20$ este punto de corte ha sido localizado en $\lambda = 0,0155$. Para cuantidades mayores no hay histéresis, pero tiene que haber una separación entre la zona de sincronización plena y la de sincronización cero, lo que apoyaría la suposición de que este punto de corte sea un punto tricrítico. Para saber lo que ocurre, realizamos una simulación a la misma temperatura con una cuantidad mayor, por ejemplo $\lambda = 0,018$. El resultado puede verse en la figura 3.4.

Por el resultado de la figura 3.4 parece que ya no hay sincronización explosiva, sino que efectivamente la transición ha pasado de ser de primer orden a ser de segundo orden. Sin embargo, en una transición de segundo orden, el parámetro de orden r adoptaría valores intermedios entre $r = 0$ y $r = 1$, los estados incoherente y coherente respectivamente. Pero

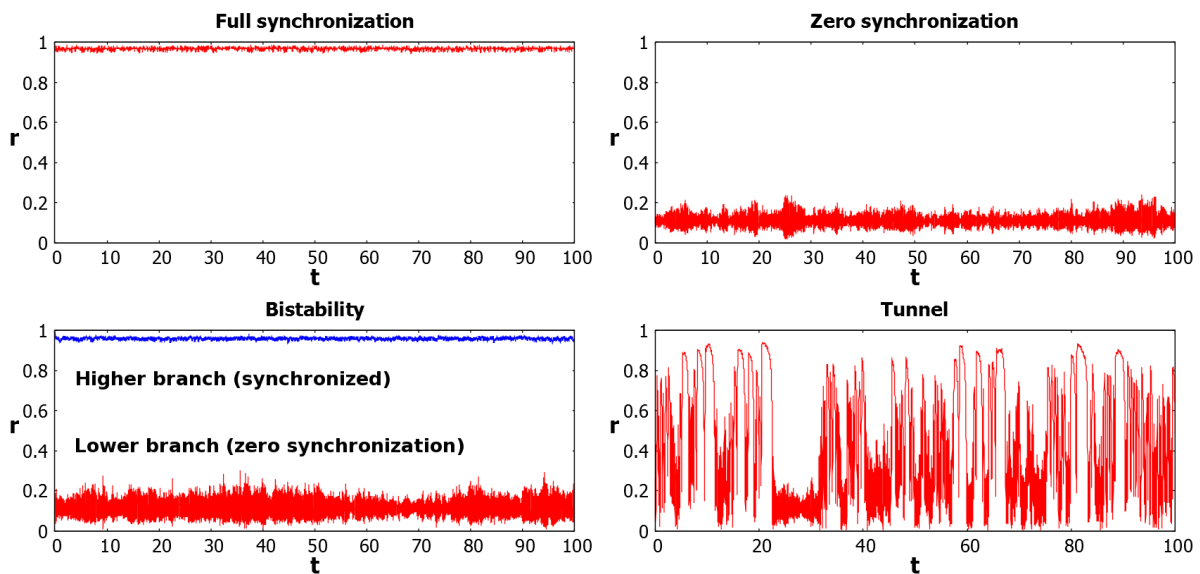


Figura 3.5: Evolución temporal del parámetro de sincronización r para los cuatro regímenes: sincronización plena, sincronización cero, biestabilidad o histéresis y túnel.

en realidad no es esto lo que sucede, sino que el sistema se encuentra en otro régimen de comportamiento distinto a los anteriores, donde r fluctúa enormemente entre los estados coherente e incoherente, permaneciendo un tiempo medio en cada uno que varía según el valor del acoplo J . Nótese que el valor de r en la figura 3.4 es una media temporal de los valores instantáneos adoptados por r para cada valor de J , motivo por el cual obtenemos estos valores intermedios sin tener realmente sincronizaciones intermedias.

En la figura 3.5 podemos ver la forma característica para la evolución temporal de los cuatro regímenes: sincronización plena, sincronización cero, biestabilidad o histéresis y el cuatro régimen mostrando grandes fluctuaciones de r y que nosotros hemos denotado como *túnel*, por motivos que explicaremos posteriormente.

3.2.2. Efecto de la temperatura

Antes de caracterizar las fronteras entre los distintos regímenes, vamos a comprobar cómo influye la temperatura sobre éstas. Para ello realizamos un gran número de simulaciones para obtener las curvas que limitan la zona de histéresis, como la obtenida con $\beta = 20$, a diferentes temperaturas. Podemos ver los resultados en la figura 3.6.

Como vemos en la figura 3.6, aumentar la temperatura (disminuir β por lo tanto) tiene el efecto de aumentar el valor de λ del punto en el cual desaparece la histéresis. Para comprobar exactamente como cambia, tomamos la posición en λ de este punto para diferentes temperaturas y lo representamos en la figura 3.7.

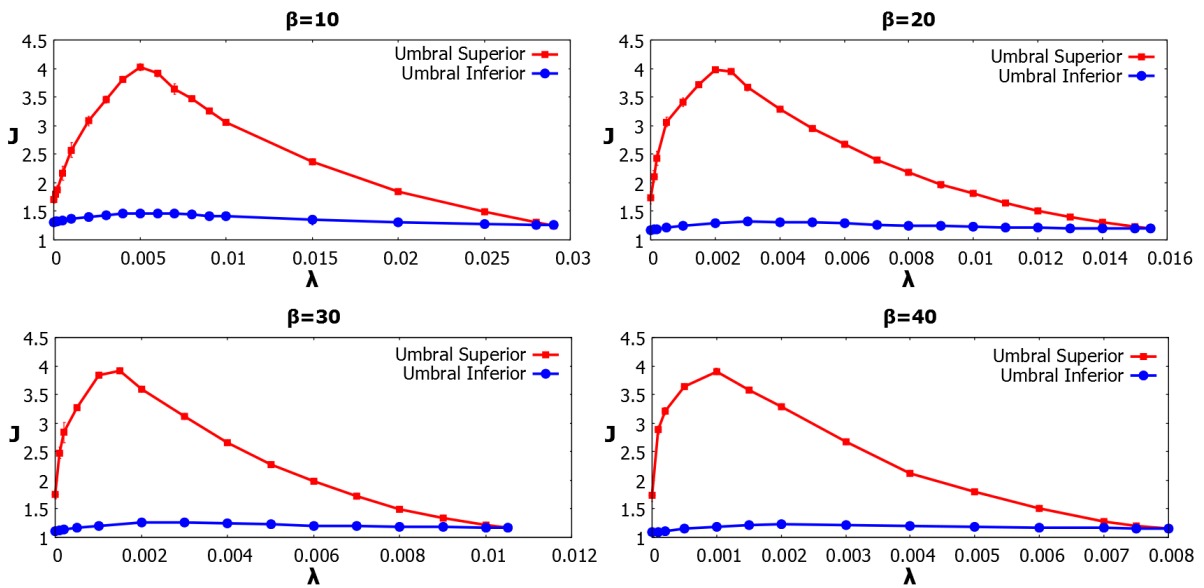


Figura 3.6: Umbrales críticos superior J_{c2} (rojo) e inferior J_{c1} (azul) de la histéresis en función del parámetro cuántico λ , para cuatro temperaturas $\beta = 10$, $\beta = 20$, $\beta = 30$ y $\beta = 40$.

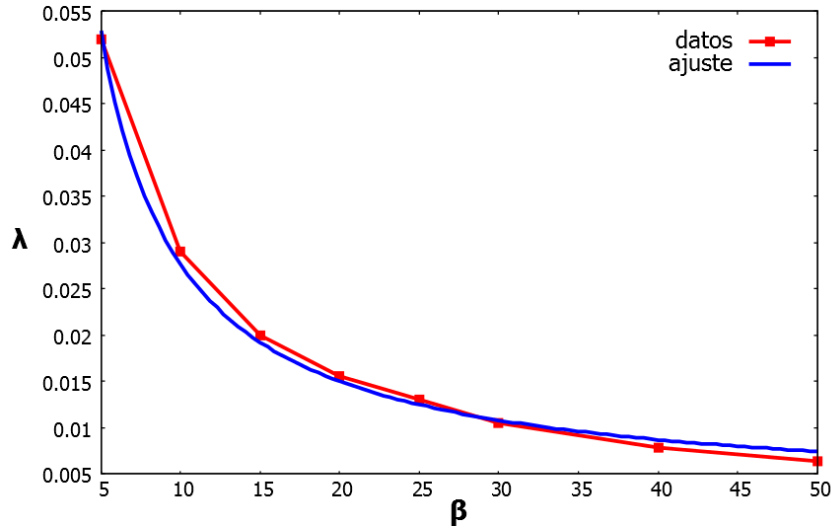


Figura 3.7: Posición del punto tricrítico en el espacio de parámetros de β , λ y ajuste a una función $\lambda(\beta) = \frac{a}{\beta} + b$.

En la figura 3.7 podemos ver inmediatamente que las posiciones en λ del punto de desaparición de la histéresis parecen tener una dependencia inversamente proporcional al valor de β , por lo que hemos intentado ajustarlo por mínimos cuadrados a una función $\lambda(\beta) = \frac{a}{\beta} + b$. Esto nos da unos valores $a = 0,253 \pm 0,006$ y $b = 0,00236 \pm 0,00055$, lo que es un error del 25% en b pero solo del 2,5% en a . Al seguir una función de ese tipo, no tiene ningún máximo o mínimo que podamos estudiar.

Una vez visto cómo depende la zona de histéresis con la temperatura, vamos a buscar las fronteras entre los distintos regímenes observados. Las fronteras de la zona de biestabilidad ya son conocidas, por lo que vamos a buscar las fronteras de la zona donde se observa el fenómeno anteriormente referido como *túnel*. Debido a la evolución temporal característica en esta zona, el programa puede determinar fácilmente para que valores de J tenemos este régimen. Si se hace estadística con el valor de r a lo largo de la evolución temporal en un punto del espacio (J, λ) , obtendremos una varianza órdenes de magnitud mayor para el régimen *túnel* que la que obtenemos para las otros regímenes.

En la figura 3.8 representamos las fronteras entre los cuatro regímenes en el espacio (J, λ) para dos temperaturas diferentes, correspondientes a $\beta = 20$ y $\beta = 40$. Si bien con $\beta = 20$ parece que las cuatro zonas se cortan en el mismo punto, en realidad la zona de sincronización plena no llega a tocar con la zona de sincronización cero, si bien la separación (que queda dentro de la zona *túnel*) es muy estrecha para apreciarse. Con $\beta = 40$ la zona *túnel* se observa a valores de λ menores, lo que nos permite apreciar mejor la separación de las zonas.

Como primera conclusión, podemos ver que lo antes pensábamos que era un punto tricrítico separando tres regímenes distintos, en realidad es una zona (y no un punto) de frontera de cuatro regímenes bien diferenciados. Tres presentes clásicamente: la sincronización plena, la sincronización cero y la histéresis; y una nueva zona que solo se ha

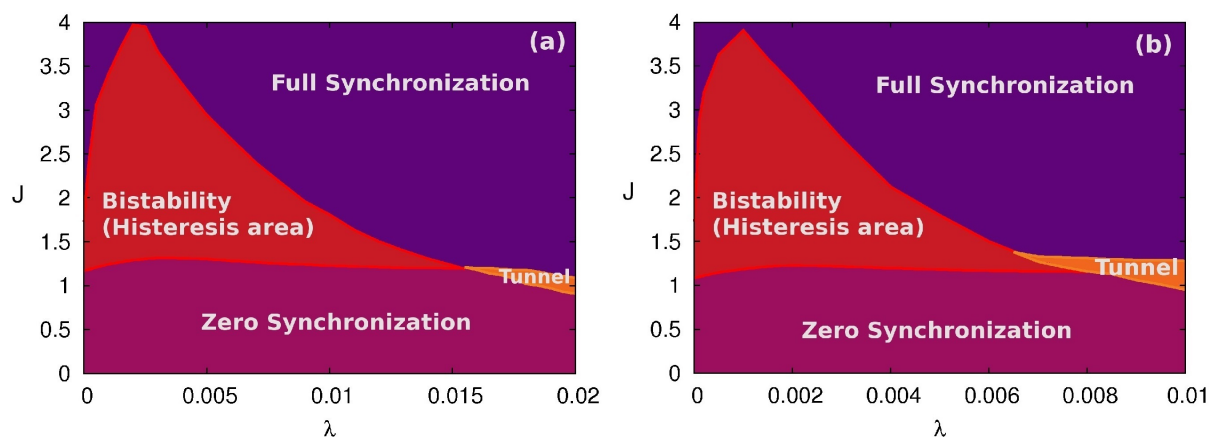


Figura 3.8: Zonas ocupadas por los diferentes regímenes en el espacio (J, λ) para las temperaturas correspondientes a (a) $\beta = 20$ y (b) $\beta = 40$.

observado cuánticamente y que hemos llamado zona túnel.

En nuestra interpretación del modelo de Kuramoto cuántico, habíamos interpretado el primer efecto obtenido, el retraso en la sincronización, como efecto túnel. Dado que en el nuevo régimen descubierto el sistema parece saltar entre dos estados inconexos clásicamente como efecto de aumentar la cuanticidad, lo que podría interpretarse como que el sistema atraviesa una barrera de potencial presente en el caso clásico, parece lógico asumir que lo que tenemos en esta situación es efecto túnel. No obstante, dado que éste es un resultado muy novedoso sobre el que vamos a continuar trabajando, es posible que este efecto sea reinterpretado en un futuro cercano.

Capítulo 4

Conclusiones

El trabajo realizado puede resumirse en la aplicación de las ecuaciones del modelo de Kuramoto cuántico a redes complejas en simulaciones numéricas. Hemos adaptado convenientemente las ecuaciones del modelo general y los algoritmos numéricos para permitir la aplicación del modelo a topologías complejas. Al hacerlo hemos encontrado en las redes de Erdős-Rényi y Barabási-Albert un comportamiento análogo al obtenido con la red completa, un desplazamiento del sistema hacia la desincronización. Dada la similitud cualitativa existente entre estas redes en el caso clásico, no ha sido una sorpresa comprobar este comportamiento. Sin embargo tenemos intención de ampliar el estudio de estas redes en un futuro, pues los resultados obtenidos para la red estrella hacen de esperar un comportamiento parecido en las redes heterogéneas y nuestra falta de resultados podría deberse simplemente a falta de exploración en el espacio de parámetros.

La aplicación del modelo en la red estrella ha revelado sin embargo un comportamiento sensible y no trivial respecto a la cuantización, que implica la desaparición de un efecto tan importante como la sincronización explosiva, y su consiguiente histéresis. Hemos analizado cómo la zona de histéresis se ve afectada por la cuantización y temperatura y como resultado hemos encontrado la existencia de un nuevo régimen, ausente en la visión clásica del modelo, interpretado como efecto túnel entre el estado de sincronización clásica y el estado incoherente. Este comportamiento novedoso resulta de gran interés y nos anima a profundizar en el estudio de este régimen. No hemos obtenido, sin embargo, una solución analítica que contraste con los resultados arrojados por las simulaciones numéricas. Esta es una posible línea para la ampliación del trabajo, pues la obtención de una solución analítica para topología con ruido y para el modelo cuántico no es trivial. Obtener unos resultados analíticos que abalaran los resultados numéricos sería un gran éxito.

El uso de una topología estrella en este trabajo y los resultados obtenidos en esta topología nos permiten pensar en la posible implementación experimental de modelos de sincronización en el laboratorio. Ante tan prometedores resultados, se hace necesaria la preparación de un experimento con uniones Josephson para la red estrella que permita contrastar la aparición del nuevo régimen observado. Idear un circuito que pueda repro-

ducir la topología de la red estrella no es trivial y todavía no nos ha sido posible diseñar uno, pero es una de nuestras prioridades para la continuación de este trabajo. Asimismo, exploraremos (una vez observado en la red estrella) la existencia de este régimen *túnel* en redes heterogéneas, dado que la topología estrella supone una aproximación a primer orden de la heterogeneidad en grado presente en redes libres de escala.

Por supuesto, otra posible línea de ampliación sería estudiar más topologías aparte de las ya tratadas en este trabajo. Lo que en un principio era un resultado modesto para nuestro modelo cuántico, un pequeño desplazamiento hacia la desincronización, ha demostrado tener un gran potencial. La aplicación del modelo a otras redes podría darnos nuevos efectos de interés.

Hemos de mencionar otra vía de ampliación con la que empezamos a trabajar pero no llegó lo bastante lejos como para poder incluirse en este proyecto. Se trata de una ampliación de otro modelo de sincronización, el modelo de van der Pol, que se ha llevado ya al dominio cuántico [40]. La idea consistía en añadir nuevos términos al modelo clásico y cuantizarlo de forma análoga, implementarlo en simulaciones numéricas y relacionar los resultados con el modelo de Kuramoto, el cual es un caso límite del modelo de van der Pol.

En definitiva, hemos obtenido un prometedor resultado para el estudio de la influencia de la topología de interacciones en nuestro modelo de Kuramoto cuántico, habiéndonos apenas adentrado en la riqueza que la heterogeneidad añade al modelo usual (todos-con-todos). Este resultado nos anima a seguir profundizando en el modelo por esta y otras vías como las ya señaladas arriba.

Bibliografía

- [1] I. H. de Mendoza, L. A. Pachón, J. Gómez-Gardeñes y D. Zueco, *The Quantum Kuramoto Model*. arXiv:1309.3972.
- [2] W. H. Zurek *Decoherence and the Transition from Quantum to Classical*. Los Alamos Science **22** (2002).
- [3] C. R. Doerin, K. V. Sargsyan y P. Smereka, *A numerical method for some stochastic differential equations with multiplicative noise*. Physics Letters A **334**, 149-155 (2005).
- [4] J. T. Ariaratnam y S. H. Strogatz, *Phase diagram for the Winfree model of coupled oscillators*. Physical Review Letters **86**, 4278 (2001).
- [5] K. Wiesenfeld, P. Colet y S. H. Strogatz, *Frequency locking in Josephson arrays: Connection with the Kuramoto model*. Physical Review E **57**, 1563 (1998).
- [6] B. C. Daniels, S. T. M. Dissanayake y B. R. Trees, *Synchronization of coupled rotators: Josephson junction ladders and the locally coupled Kuramoto model*. Physical Review E **67**, 026216 (2003).
- [7] B. R. Trees, V. Saranathan y D. Stroud, *Synchronization in disordered Josephson junction arrays: Small-world connections and the Kuramoto model*. Physical Review E **71**, 016215 (2005).
- [8] S. Skardal y A. Arenas, *Disorder induces explosive synchronization*. arXiv:1404.0883v3
- [9] J. Gómez-Gardeñes, S. Gómez, A. Arenas y Y. Moreno, *Explosive Synchronization Transitions in Scale-Free Networks*. Physical Review Letters **106**, 128701 (2011)
- [10] B. C. Coutinho, A. V. Goltsev, S. N. Dorogovtsev y J. F. F. Mendes, *Kuramoto model with frequency-degree correlations on complex networks*. arXiv:1211.5690v2
- [11] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno y C. Zhou, *Synchronization in complex networks*. arXiv:0805.2976v3
- [12] A. Pikovsky, M. Rosenblum, y J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press (2001).

- [13] S. C. Manrubia, A. S. Mikhailov y D. H. Zanette, *Emergence of Dynamical Order* World Scientific, (2004).
- [14] S. Boccaletti. *The Synchronized Dynamics of Complex Systems*. Elsevier, (2008).
- [15] Y. Kuramoto y H. Arakai, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*. Lecture Notes in Physics **39**, 420 (1975).
- [16] S. H. Strogatz, *From Kuramoto to Crawford: Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*. Physica D **143**, 1–20 (2000).
- [17] S. Nadis, *Complex systems: All together now*. Nature **421**, 780 (2003).
- [18] L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente y F. Ritort, *The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena*. Reviews of Modern Physics **77**, 137 (2005).
- [19] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno y C. Zhou, *Synchronization in complex networks*. Physical Review Letters **469**, 93 (2008).
- [20] D. J. Watts y S. H. Strogatz, *Collective dynamics of 'small-world' networks*. Nature **393**, 440–442 (1998).
- [21] G. S. Engel, T. R. Calhoun, E. L. Read, T. K. Ahn, T. Mancal, Y. Ch. Cheng, R. E. Blankenship y G. R. Fleming, *Evidence for wavelike energy transfer through quantum coherence in photosynthetic systems*. Nature **446**, 782 (2007).
- [22] H. J. Briegel y S. Popescu, *Entanglement and intra-molecular cooling in biological systems? - A quantum thermodynamic perspective*. Cornell University Library, arXiv:0806.4552 (2008).
- [23] A. O. Caldeira y A. J. Leggett, *Quantum tunnelling in a dissipative system*. Annals of Physics **149**, 374 (1983).
- [24] L. Machura, M. Kostur, P. Talkner, J. Luczka, y P. Hänggi, *Quantum diffusion in biased washboard potentials: Strong friction limit*. Physical Review E **73** 031105 (2006).
- [25] H. Sakaguchi *Cooperative Phenomena in Coupled Oscillator Systems under External Fields*. Progress of Theoretical Physics **79** 39 (1988).
- [26] A. Mari, A. Farace, N. Didier, V. Giovannetti y R. Fazio, *Measures of quantum synchronization in continuous variable systems*. arXiv:1304.5925.
- [27] O. V. Zhirov y D. L. Shepelyansky, *Synchronization and bistability of qubit coupled to a driven dissipative oscillator*. Physical Review Letters **100**, 014101 (2008).
- [28] Y. Liu, P. Piechon y J. N. Fuchs, *Quantum loss of synchronization in the dynamics of two spins*. arXiv:1303.5564.
- [29] G. L. Giorgi, F. Galve, G. Manzano, P. Colet y R. Zambrini, *Quantum correlations and mutual synchronization*. Physical Review A **85**, 052101 (2012).

- [30] M. H. Matheny, M. Grau, L. G. Villanueva, R. B. Karabalin, M.C. Cross y M.L. Roukes, *Synchronization of two anharmonic nanomechanical oscillators*. arXiv:1305.0815.
- [31] K. L. Turner, S. A. Miller, P. G. Hartwell, N. C. MacDonald, S. H. Strogatz y S. Adams, *Five parametric resonances in a microelectromechanical system*. Nature **396**, 149–152 (1998).
- [32] A. Baas, K. G. Lagoudakis, M. Richard, R. André, S. L. Dang y B. Deveaud-Plédran, *Synchronized and Desynchronized Phases of Exciton-Polariton Condensates in the Presence of Disorder*. Physical Review Letters **100**, 170401 (2008).
- [33] M. D. LaHaye, O. Buu, B. Camarota y K.C. Schwab, *Approaching the Quantum Limit of a Nanomechanical Resonator*. Science **304**, 74–77 (2004).
- [34] A.D. O’Connell, M. Hofheinz, M. Ansmann, R.C. Bialczak, M. Lenander, E. Lucero, M. Neeley, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, J.M. Martinis y A.N. Cleland, *Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator*. Nature **464**, 697–703 (2010).
- [35] P. Cristofolini, A. Dreismann, G. Christmann, G. Franchetti, N. G. Berloff, P. Tsotsis, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, *Optical Superfluid Phase Transitions and Trapping of Polariton Condensates*. Physical Review Letters **110**, 186403 (2013).
- [36] D. J. Watts, *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*. Princeton University Press, 1999.
- [37] H. Hong, M. Y. Choi y B. J. Kim, *Synchronization on small-world networks*. Phys. Rev. E **65**, 026139 (2002).
- [38] Y. Moreno y A. F. Pacheco, *Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks*. Europhys. Lett. **68**, 603–609 (2004).
- [39] Y. Moreno, M. V´azquez-Prada, A. F. Pacheco, *Fitness for synchronization of network motifs*. Physica A **343**, 279–287 (2004).
- [40] T. E. Lee y H. R. Sadeghpour, *Quantum Synchronization of Quantum van der Pol Oscillators with Trapped Ions*. Physical Review Letters **111**, 234101 (2013).