



**Universidad**  
Zaragoza

## Trabajo Fin de Grado

“Geometric Algebra (GA)” aplicada a diagramas de radiación electromagnética

Geometric Algebra (GA) applied to electromagnetic radiation patterns

Autor

**Juan Royo Serrano**

Director

Miguel Labodía Doce

Ponente

Arturo Mediano Heredia

---

Titulación

**Ingeniería en Tecnologías y Servicios de  
Telecomunicación**

Escuela de Ingeniería y Arquitectura  
Curso 2024/2025



# **AGRADECIMIENTOS**

Quiero agradecer en primer lugar a Miguel por transmitirme sus ganas de aprender nuevos conceptos y por guiarme y ayudarme en todo momento durante el proceso. Gracias también a Arturo por su interés mostrado por el trabajo y por sus valiosos consejos.

Por último, quiero agradecer a mi familia y amigos por el apoyo tan grande que han supuesto para mí en el transcurso de mi paso por este grado.

# **“Geometric Algebra (GA)” aplicada a diagramas de radiación electromagnética**

## **RESUMEN**

Este trabajo trata acerca de la reconstrucción de diagramas de radiación mediante el uso de la expansión por Armónicos Esféricos, una herramienta matemática potente y utilizada de manera extendida en diferentes ámbitos de la ingeniería. La novedad que aporta el trabajo es la de expandir por Armónicos Esféricos funciones cuyas muestras vienen dadas por un método de medida de radiación electromagnética (EM) distinto al habitual.

El objetivo será aportar un criterio lo más ajustado posible al problema real a la hora de decidir cuáles son los parámetros importantes y críticos que conviene entender y conocer dentro de nuestro sistema. Todo ello de cara a conseguir una interpolación de datos de radiación exitosa.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>1</b>
1.1	Motivación y entorno .....	1
1.2	Estado del arte: medición clásica en cámaras anecoicas .....	1
1.3	Alternativa: antena fija + útil de inclinación .....	3
1.4	Problemática: interpolar .....	4
1.5	Naturaleza de los datos de radiación .....	6
1.5.1	Distribución espacial de las muestras .....	6
1.5.2	Armónicos Esféricos: naturaleza de los datos de entrada .....	6
1.6	Diagramas de bloques general .....	7
1.7	Objetivos .....	9
<b>2</b>	<b>Armónicos Esféricos .....</b>	<b>10</b>
2.1	Expresión analítica.....	10
2.2	Origen: Polinomios de Legendre .....	10
2.3	Analogía con serie de Fourier .....	12
2.4	Análisis cualitativo: lóbulos y nulos .....	13
<b>3</b>	<b>Diseño del software .....</b>	<b>16</b>
3.1	Diagrama de bloques.....	16
3.2	Planteamiento del sistema de ecuaciones .....	17
3.3	Solución del sistema: factorización QR, operador “backslash” .....	20
<b>4</b>	<b>Ejemplos con expresiones analíticas: Isotrópica, Dipolo y Pseudo-parabólica ...</b>	<b>21</b>
4.1	Isotrópica.....	21
4.2	Dipolo .....	25
4.3	Pseudo-parabólica .....	32
<b>5</b>	<b>Conclusiones.....</b>	<b>36</b>
<b>6</b>	<b>Líneas de futuro .....</b>	<b>37</b>
<b>7</b>	<b>Referencias .....</b>	<b>39</b>
	<b>Apéndice .....</b>	<b>40</b>



# 1 Introducción

## 1.1 Motivación y entorno

Este proyecto se enmarca en una serie de estudios realizados por investigadores del Grupo de Electrónica de Potencia y Microelectrónica (GEPM) del Instituto Universitario de Investigación de Ingeniería en Aragón (I3A), en concreto en la Tesis Doctoral (en fase de desarrollo) de uno de ellos, el director de este trabajo. Dichos estudios persiguen como mismo objetivo el aportar una solución lo más completa posible al problema que se plantea: aportar una norma que permita establecer una calidad de servicio en cuanto a la cobertura Wi-Fi de distintos equipos electrónicos dotados de comunicaciones inalámbricas.

El trabajo tratará de aportar un estudio con una componente novedosa y didáctica, a la vez que comprobar como propósito final que la aplicación de la herramienta software desarrollada sea de utilidad en el avance de esta línea de investigación (esto es testeando la herramienta con datos reales).

## 1.2 Estado del arte: medición clásica en cámaras anecoicas

En la figura 1.1 se muestra un esquema simplificado de lo que sería una medición clásica de un dispositivo radiante en una cámara anecoica. En este tipo de mediciones el dispositivo testeado o “Device Under Test (DUT)”, se coloca en el centro de la sala y comienza a radiar [1]. En frente se sitúa una antena receptora la cual para captar muestras de radiación en diferentes direcciones del espacio necesita colocarse con una elevación respecto al DUT tanto positiva como negativa (en la figura 1.1  $\theta_1$  y  $\theta_2$  respectivamente) mientras el dispositivo rota en azimut. De esta manera las muestras captadas por la antena receptora seguirán la distribución espacial cónica vista en la figura 1.2. Esto representa un problema práctico en cuanto a la dificultad de mover la antena en cada medición, ya que tiene que poder colocarse a alturas lo suficientemente altas y bajas respecto a la línea horizontal del DUT para realizar una captación de muestras lo suficientemente buena. Hay que recalcar que las medidas de cámara anecoica son siempre en campo lejano, pero aun así es necesario mantener siempre una distancia fija entre antena receptora y DUT (lo cual elevando la antena no es fácil).

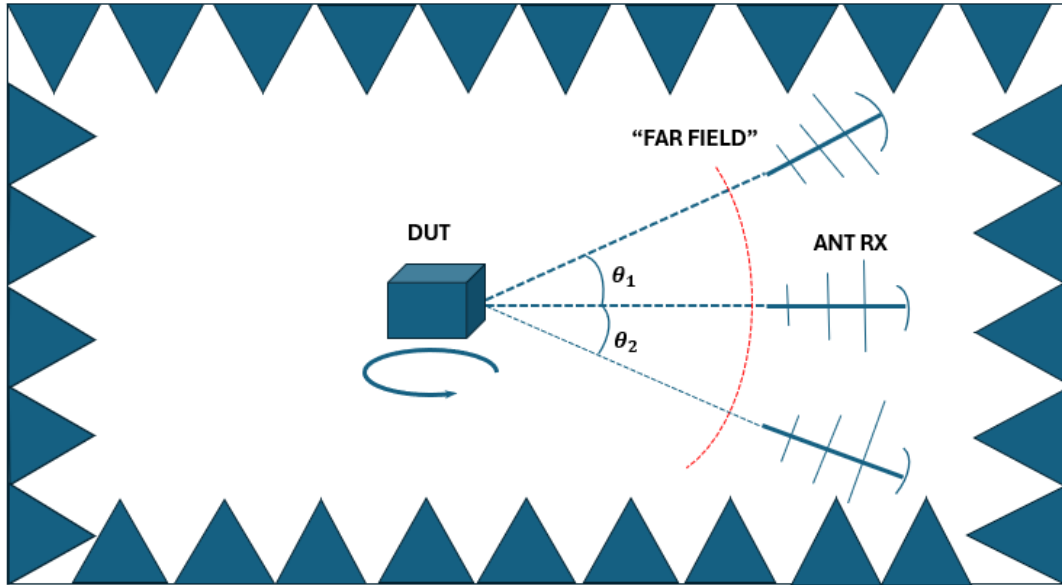


Figura 1.1: Medición clásica de radiación de DUT en cámara anecoica

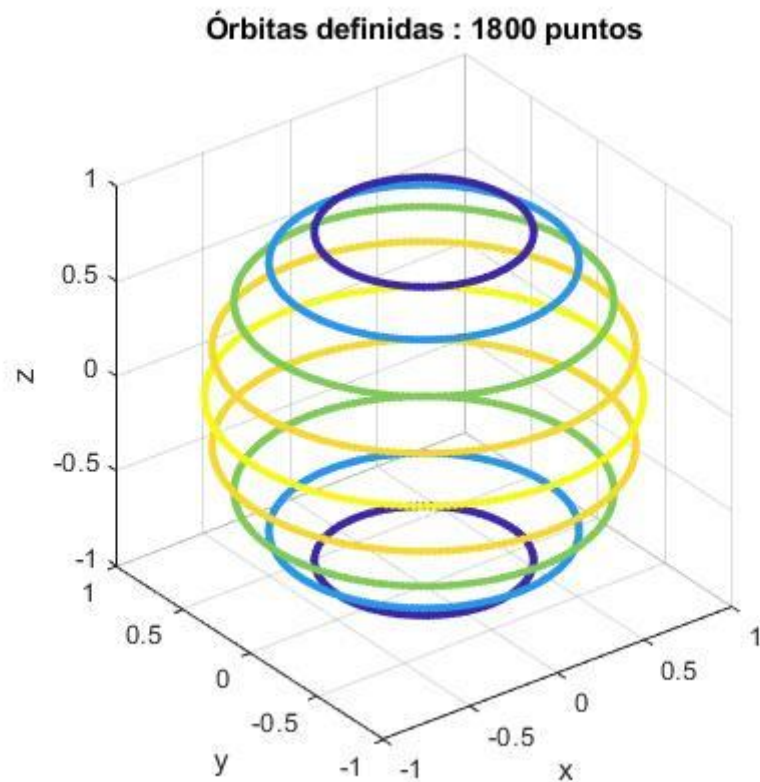


Figura 1.2: Ejemplo de distribución de las muestras captadas por el sistema en medición clásica de cámaras anecoicas

## 1.3 Alternativa: antena fija + útil de inclinación

Como alternativa al método clásico expuesto en el anterior apartado este trabajo introduce la novedad indicada en el título de este apartado. En la figura 1.3 se muestra el “set-up” del sistema de medición que se incluye como novedad en este proyecto.

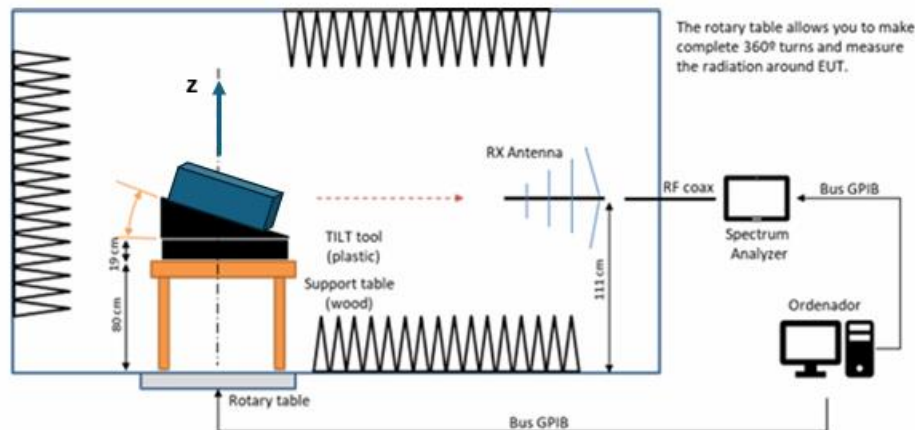


Figura 1.3: Medición de radiación de DUT inclinado con antena receptora fija [2]

Como se explicará más adelante esta forma de medir nos aporta la flexibilidad de no tener que mover la antena receptora. Para ello, habrá que colocar el dispositivo de diferentes formas siguiendo las siguientes pautas:

1. Se colocará primero el útil de inclinación sobre la mesa marrón que se observa en la figura 1.3. El útil de inclinación se colocará con una orientación concreta respecto a la antena receptora, a esta orientación la denotaremos como  $\varphi_u$  o “yaw”. La propia inclinación de la cuña también será variable y la denotaremos como  $\theta_u$  o “pitch”.
2. Una vez habiendo colocado la cuña con la orientación e inclinación deseada se colocará encima el DUT.
3. Con todo el set-up listo se accionará un motor que controla la mesa rotatoria (“Rotary Table” en la figura 1.3) para realizar sucesivas rotaciones alrededor del eje z con pasos  $\Delta\phi$ .

Siguiendo estas pautas para distintas inclinaciones  $\theta_u$  y orientaciones  $\varphi_u$  de la cuña se conseguirán cortes del diagrama de radiación para distintas direcciones dadas por pares inclinación-azimut ( $\theta, \varphi$ ) respecto al sistema de referencia solidario con el DUT, que es el que nos interesa (ver figura 1.4). Estos cortes recibirán el nombre de órbitas a lo largo del documento.

En el apéndice se incluye una explicación detallada de cómo se modelan las diferentes rotaciones aplicadas en el sistema basándose en los ángulos de Euler “yaw” y “pitch” hasta llegar a obtener órbitas.

Como ventajas de usar esta alternativa de medición cabe señalar la posibilidad de realizar las mediciones en una cámara anecoica con dimensiones reducidas respecto a las clásicas, así como el hecho de no tener que mover la antena receptora.

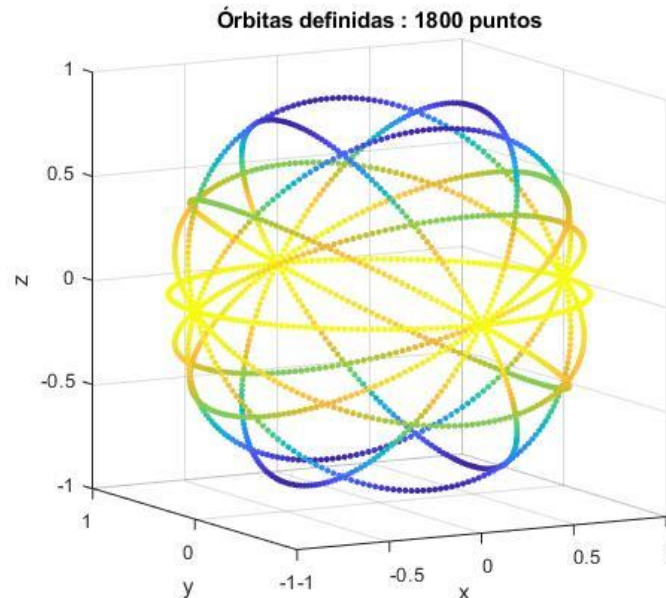


Figura 1.4: Ejemplo de distribución de las muestras orbitales captadas por el sistema con medición alternativa

## 1.4 Problemática: interpolar

Habiéndonos ya situado en el marco del proyecto, el principal objetivo de este trabajo surge a raíz de la necesidad de disponer de más datos de radiación para la completa caracterización del diagrama de radiación del DUT. Es por ello por lo que el problema que se plantea desde el inicio, desde un punto de vista matemático, es interpolar, dicho cualitativamente: tratar de predecir la radiación en cualquier dirección del espacio. La estrategia de interpolar datos toma innumerables variantes que se adaptan a los distintos problemas reales que se plantean,[3]. No obstante, es de interés contextualizar con un ejemplo simple a la vez que introducimos la herramienta software que se utilizará durante todo el trabajo. Para ello en la figura 1.5 representamos en Matlab<sup>1</sup> dos funciones sinusoidales. Si nos fijamos únicamente en la representación de arriba vemos claramente que hay una senoide cuyo aspecto es mucho más fiel a la idea que tenemos de un seno evaluado en un rango de valores continuo. En la representación de abajo se “desenmascara” por qué hay un seno que se representa de manera más suavizada que el otro, el motivo en este caso se encuentra en el número de muestras que se utilizan para

<sup>1</sup> <https://es.mathworks.com/products/matlab.html>

representar uno y otro. Profundizando más acerca del resultado, nos podemos preguntar: ¿en qué se basa en este caso Matlab para “completar huecos vacíos”? Y en un ejemplo sencillo la respuesta es, evidentemente, en la cantidad de muestras además de la proximidad entre ellas. La importancia de estos dos parámetros será extrapolable a nuestro problema en el espacio tridimensional y veremos con ejemplos cómo pueden llegar a ser factores limitantes en el funcionamiento del sistema.

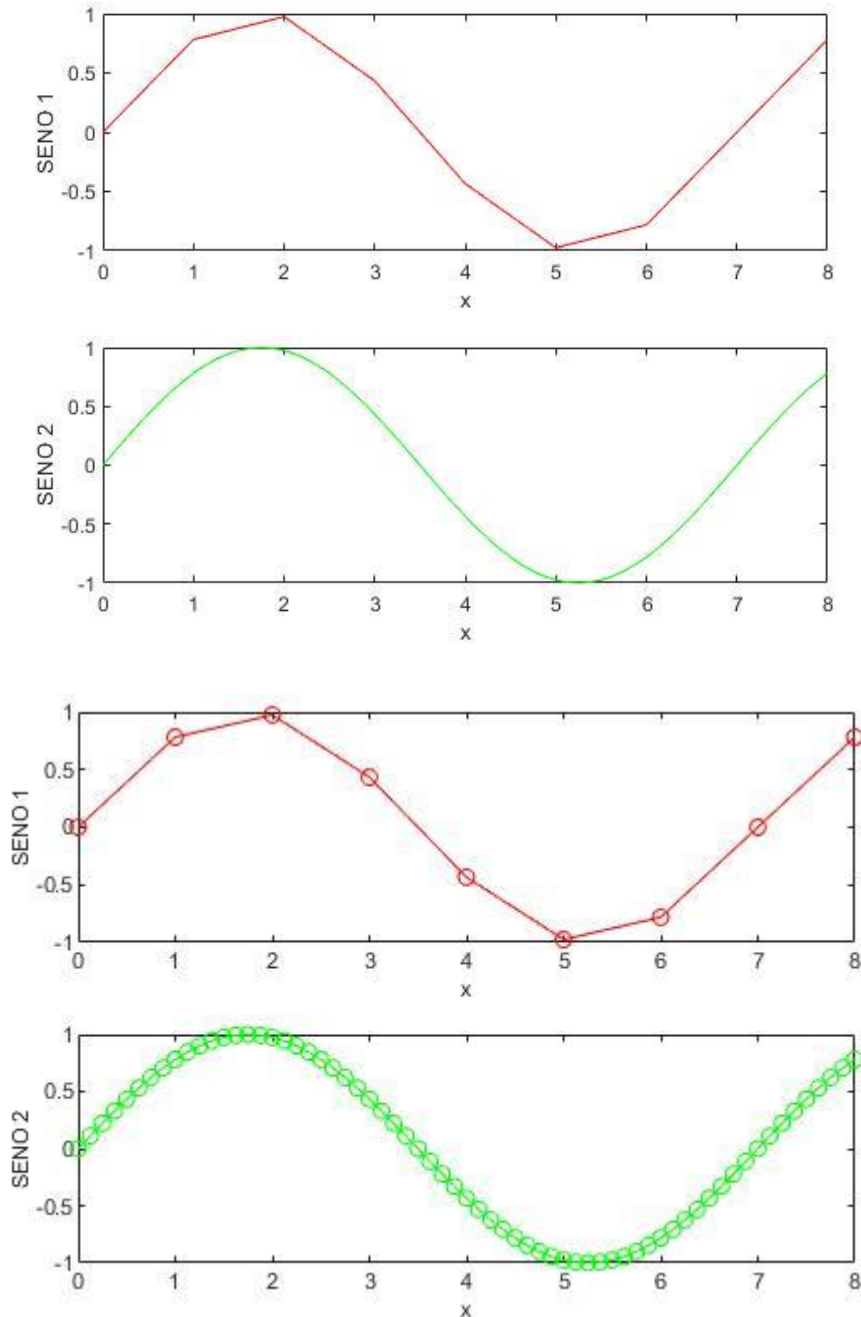


Figura 1.5: Dos funciones sinusoidales con distinto número de muestras

## 1.5 Naturaleza de los datos de radiación

Como primeras incógnitas a la hora de diseñar nuestro sistema se nos plantea:

1. Cuál va a ser la naturaleza de nuestros datos muestrales de radiación.
2. Cuál es un método apropiado para interpolar nuestros datos muestrales de radiación teniendo en cuenta su naturaleza

### 1.5.1 Distribución espacial de las muestras

Respecto a dónde se encuentran las muestras de radiación captadas tendremos que tener en cuenta que, según nuestro entorno de medidas, la antena receptora se encuentra siempre a la misma distancia del dispositivo radiante. Por ello, es necesario introducir desde el principio el hecho de considerar que las muestras captadas se distribuyen alrededor superficie de una esfera radio fijo 'r' (por la distancia fija a la antena receptora), en direcciones  $(\theta, \varphi)$  del espacio que de momento consideraremos arbitrarias.

### 1.5.2 Armónicos Esféricos: naturaleza de los datos de entrada

No es ninguna novedad el considerar que el campo eléctrico obtenido en la superficie de una esfera, a un radio fijo que obviaremos, se puede descomponer en términos de los conocidos como Armónicos Esféricos ("Spherical Harmonics" en inglés)[4].

$$E(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_l^m Y_l^m(\theta, \varphi)$$

*Ecuación 1.1. Expansión de la magnitud campo eléctrico en términos de armónicos esféricos*

Donde:

- $Y_l^m(\theta, \varphi)$  son los armónicos esféricos (base ortonormal).
- 'l' marcará los niveles de armónicos esféricos.
- 'm' depende de 'l' tal que  $-l \leq m \leq l$ .
- $q_l^m$  son los coeficientes complejos asociados a cada armónico esférico.
- $\theta$  es la dirección de inclinación de un punto en la superficie de la esfera.
- $\varphi$  es la dirección de azimut de un punto en la superficie de la esfera.

En resumen, el fundamento teórico en el que nos basamos es que los armónicos esféricos, basados en los polinomios de Legendre, forman una base ortonormal de funciones que son solución de la ecuación diferencial de Helmholtz para el caso particular de campo electromagnético lejano, lo que permite expandir la función de radiación de cualquier sistema radiante real

Veremos más adelante en la sección de “Desarrollo del software” cómo se puede aprovechar la descomposición de una función  $f(\theta, \varphi)$  mediante armónicos esféricos para interpolar la función en nuevas direcciones del espacio.

Como apunte adicional, cabe mencionar que las medidas reales tomadas en cámara anecoica para este experimento, después de ser procesadas, se corresponden con una magnitud de ganancia. Esta ganancia se puede expresar como:

$$g(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{\frac{P_{rad, TOT}}{4\pi}}$$

$$\text{con } U(\theta, \varphi) = \frac{P_{rad}(\theta, \varphi)}{4\pi} \left[ \frac{W}{sr} \right] \propto |E(\theta, \varphi)|^2$$

$sr \equiv$  esterorradián

*Ecuación 1.2. Expresión para la ganancia (magnitud medida en experimento real)*

Observando su directa relación con la magnitud del campo eléctrico, consideraremos que la ganancia también podrá ser expresada en términos de armónicos esféricos, visto en literatura especializada [5].

## 1.6 Diagramas de bloques general

En este trabajo se presentan dos diagramas de bloques:

- El primero enfocado a la calibración del sistema tomando como entrada una función analítica muestreada de la misma manera que los datos reales. De esta manera podremos calcular una tasa de error entre función analítica objetivo y función analítica reconstruida o interpolada, ofreciendo además una representación de ambas (figura 1.6).
- El segundo enfocado a tomar como entrada los datos reales captados en cámara anecoica, interpolar mediante la transformada de armónicos esféricos y representar (figura 1.7)

Notar que lo que consideramos el núcleo del sistema de calibración (recuadrado en naranja) se reutiliza para diseñar el diagrama de bloques del sistema diseñado para testear los datos reales. En la figura 1.6, en verde, se muestra un aspecto extra que se comentará en líneas futuras.

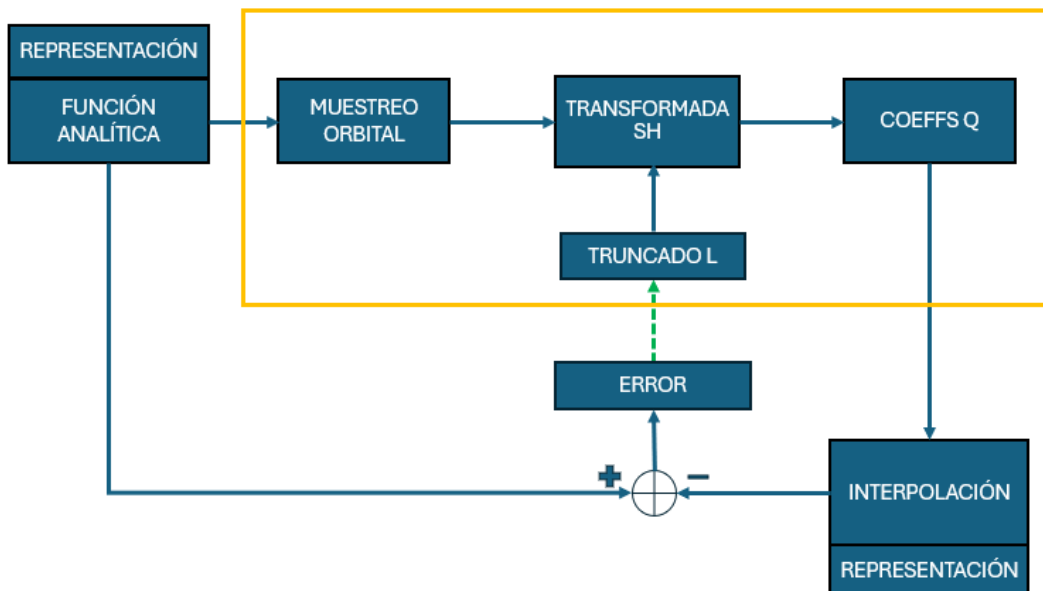


Figura 1.6: Diagrama de bloques del sistema para el proceso de calibración

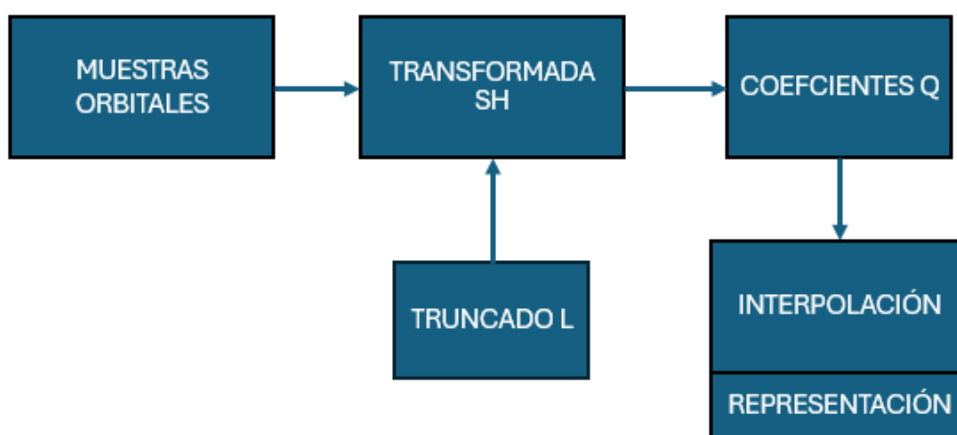


Figura 1.7: Diagrama de bloques del sistema para el proceso de "testeo"

## 1.7 Objetivos

Los objetivos fundamentales de este trabajo son:

- 1) Demostrar la validez del muestreo realizado en forma de órbitas para el posterior tratamiento del diagrama de radiación del DUT.
- 2) Aportar una solución al problema de interpolación que se ha planteado mediante el proceso de calibración mostrado en el diagrama de bloques.

Una vez se logren los objetivos fundamentales, se consideran otros objetivos para culminar el trabajo como...

- 3) Ser capaces de calcular potencia radiada parcial en zonas concretas del espacio, o la potencia radiada total.
- 4) Aplicar rotaciones al diagrama de radiación mediante Álgebra Geométrica[6].
- 5) Aportar resultados que se pueda usar en simuladores de diagramas de radiación.

En resumen, se tratará de realizar un estudio que contribuya al avance de la línea de investigación que engloba a este y otros proyectos.

## 2 Armónicos Esféricos

### 2.1 Expresión analítica

La expresión matemática de un armónico esférico o " $Y_l^m(\theta, \varphi)$ " es [6]:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \mathcal{N}(l, m) \cdot P_l^{|m|}(\cos(\theta)) \cdot e^{im\varphi}, \quad -l \leq m \leq l$$

$$\text{con } \mathcal{N}(l, m) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}$$

*Ecuación 2.1. Expresión analítica de los Armónicos Esféricos*

Donde  $\mathcal{N}(l, m)$  es un factor de normalización y  $e^{im\varphi}$  el factor que nos añade cierta dependencia en  $\varphi$ .

En conjunto, los armónicos esféricos constituyen una base ortonormal de funciones definidas en la superficie de una esfera con radio 'r' (el cual omitiremos) evaluada en las distintas direcciones determinadas por un par inclinación-azimut  $(\theta, \varphi)$ , para valores de  $\theta \in [0, \pi]$  y de  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

### 2.2 Origen: Polinomios de Legendre

En este apartado se trata de comentar brevemente cuál es el origen matemático de los armónicos esféricos.

Partimos de los polinomios de Legendre  $P_l(x)$ , los cuales son una familia de polinomios solución de la siguiente ecuación diferencial de 2º orden [8]:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0$$

$$\text{donde } y = P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2 - 1)^l$$

*Ecuación 2.2. ODE de Legendre, solución dada según fórmula de Rodrigues*

Una de las características fundamentales que más nos interesa de estos polinomios es que son ortogonales entre sí, lo cual es importante para constituir nuestra base de funciones.

Cómo se puede observar a continuación, la ecuación diferencial de Legendre proviene de la ecuación diferencial asociada de Legendre sustituyendo  $m=0$ :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l + 1) + \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

Ecuación 2.3. ODE asociada de Legendre

Partiendo de dicha ecuación diferencial se realiza un cambio de variable que deshace la problemática de  $(1 - x^2)$  en el denominador:

$$y = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \mathcal{P}$$

Ecuación 2.4

Y se resuelve la ecuación diferencial resultante, quedando como solución:

$$\mathcal{P}_l^m = (-1)^m \cdot \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

Ecuación 2.5

Solución en la que identificamos  $\mathcal{P}_l^m$  como la derivada ‘m-ésima’ del polinomio de Legendre de grado ‘l’ multiplicada por un factor  $(-1)^m$ . Es inmediato ver a raíz de esta igualdad cómo la solución  $\mathcal{P}_l^m$  corresponderá a un polinomio de grado  $(l - m)$ , lo cual fuerza a tener que  $m < l$  ( $l, m > 0$ ). Veremos después que esta condición es la que nos va a fijar el número de elementos que contendrá nuestra base de reconstrucción. Habiendo dado entonces una expresión para  $\mathcal{P}_l^m$  ya somos capaces de escribir las soluciones de la ODE asociada de Legendre como:

$$y = P_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \mathcal{P}_l^m = (-1)^m \cdot (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

$$\text{con } P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2 - 1)^l$$

Ecuación 2.6. Funciones asociadas de Legendre

El hecho además de que estas soluciones  $P_l^m(x)$  sean válidas para el intervalo  $[-1,1]$  nos permite reescribir estas funciones como  $P_l^m(\cos \theta)$  ( $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ ). Si aplicamos valor absoluto a ‘m’ obtendremos  $P_l^{|m|}(\cos \theta)$ , factor fundamental dentro de la expresión de los armónicos esféricos que aporta la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre. Si a ello le añadimos el factor de normalización  $\mathcal{N}(l, m)$ , ya se puede deducir la ortonormalidad de  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ .

## 2.3 Analogía con serie de Fourier

Las ideas expuestas en los dos últimos párrafos de la sección anterior nos invitan a pensar (y así se comprueba en la literatura especializada) que si partimos de una función  $f(\theta, \varphi)$  definida en la superficie de una esfera de radio fijo 'r' es posible descomponer dicha función en términos de una ponderación de todos los armónicos esféricos. Esto es expandir la función dada en una suma en series que depende de la ponderación asociada a cada elemento de la base ortonormal que acabamos de introducir. La expresión matemática a la que nos referimos es la siguiente [8]:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_l^m \cdot Y_l^m(\theta, \varphi)$$

*Ecuación 2.7. Función expandida en términos de Armónicos Esféricos*

A esta suma en series se le puede ver una analogía muy interesante con el clásico sumatorio en series de Fourier, el cual escrito directamente para una señal temporal periódica toma la siguiente expresión:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right)$$

*Ecuación 2.8. Función temporal expresada en términos de coeficientes de Fourier*

Dicha expresión nos dice cualitativamente que cualquier función periódica en su variable independiente, cumpliendo una serie de condiciones, se puede expresar como una suma de senos y cosenos de distintos armónicos. Por ejemplo, en el ámbito del estudio de las señales, esta manera de expresar una señal temporal es muy recurrente para comprobar cuál es el número de coeficientes  $(a_n, b_n)$  necesarios para expandir la señal de interés. Esto no es más que evaluar el **ancho de banda** de la señal  $f(t)$ . Un ejemplo muy simple y que sirve para ilustrar esta explicación es considerar que la señal  $f(t)$  es puramente continua. Para ese caso solo será necesario calcular el coeficiente  $a_0$  de manera que estaremos eliminando el sumatorio entero, esto es truncar desde  $n = 1$  hasta  $n = \infty$ . Si mi señal de entrada es un coseno de frecuencia  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  con una pequeña componente de continua, seré capaz de truncar el sumatorio sin error alguno desde  $n = 2$  hasta  $n = \infty$ , y así sucesivamente si vamos subiendo en frecuencia. Se verá más adelante que esta misma interpretación análogamente en nuestro problema, nos va a servir como soporte para razonar y justificar los resultados obtenidos a la hora de expandir una función espacial sobre la superficie de una esfera.

## 2.4 Análisis cualitativo: lóbulos y nulos

En esta sección vamos a justificar de manera intuitiva el aspecto que tienen los Armónicos Esféricos  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  a nivel de representación. Como se ha comentado anteriormente cuando se definían los polinomios asociados de Legendre con grado  $(l - m)$  siendo  $0 \leq m \leq l$ , para cada orden 'l' tendremos un número de "SH" distintos. Este orden 'l' de alguna manera nos determinará el ancho de banda que soporta nuestra base de reconstrucción.

En la figura 2.1 se muestra la representación de las partes reales de los armónicos esféricos de orden  $l=0,1,2$  y  $3$  con sus correspondientes valores positivos de  $m$ .

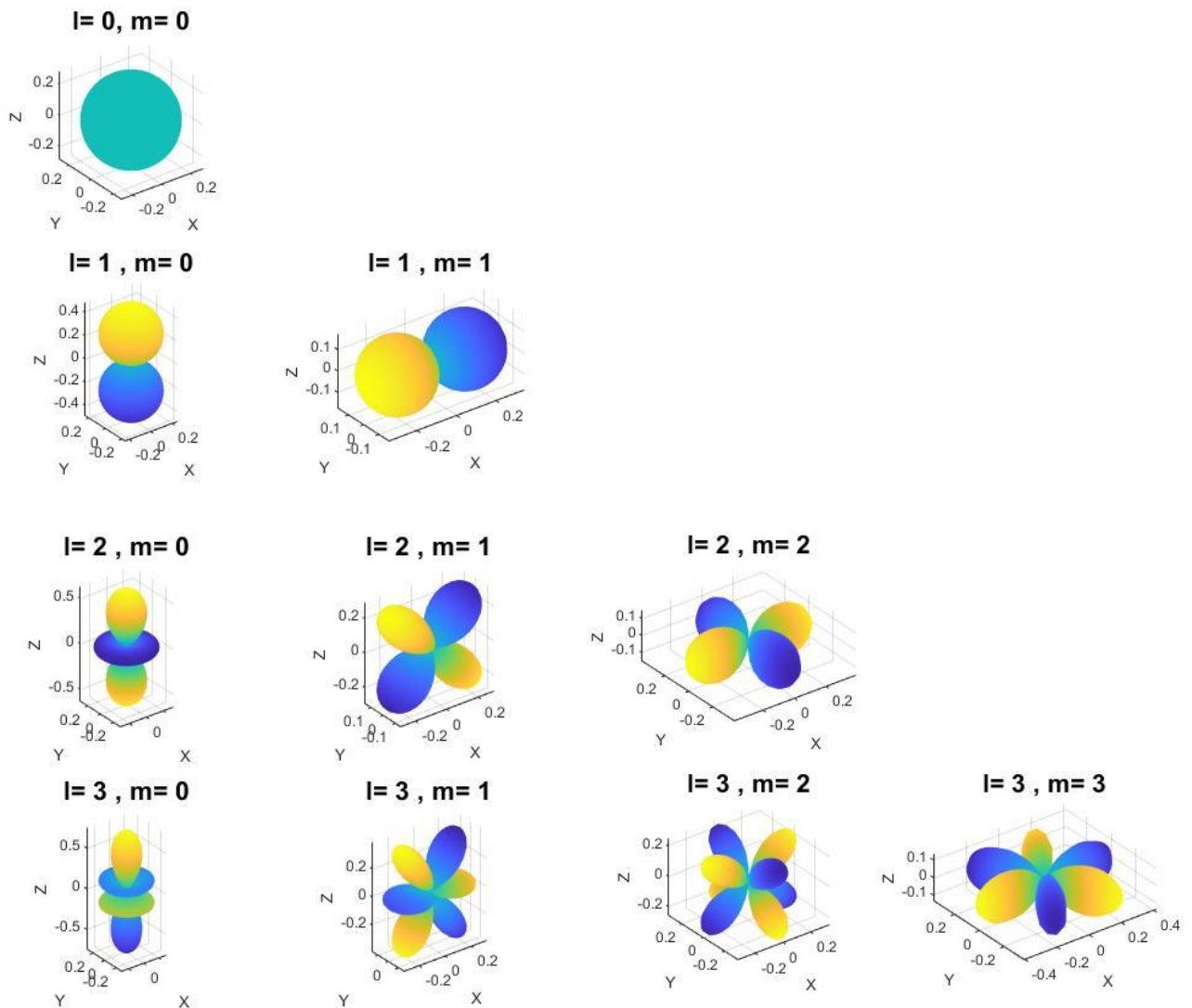


Figura 2.1: Representación de  $\text{Re}\{Y_l^m(\theta, \varphi)\}$  para  $l=0,1,2,3$  con  $0 \leq m \leq l$

Si nos fijamos en el caso de  $l = 0, m = 0$  la representación que se ofrece es la de una esfera sólida con el mismo valor en todas las direcciones del espacio. Volviendo al razonamiento que hemos hecho para Fourier, este armónico equivaldría a la componente continua de una señal temporal. En el resto de los casos para los distintos  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  se observa una tendencia de aumento en el número de máximos y nulos conforme aumenta el valor de 'l'. Vamos a escoger como referencia los armónicos del nivel  $l = 2$  para realizar una explicación más en detalle acerca de este comportamiento:

- Antes de nada, para interpretar los dibujos de la figura 2.2, consideremos como máximos los “lóbulos” que se encuentran coloreados en amarillo y en azul oscuro (la diferencia de color se debe a una diferencia de fase de  $180^\circ$  entre ellos).
- Consideraremos nulos entonces en las direcciones donde máximos desfasados  $180^\circ$  interseccionan. Por las condiciones de simetría que presentan los armónicos esféricos contaremos un nulo por cada dos flechas dibujadas que apunten hacia la misma dirección. En total existirán 'l' nulos.
- Partiendo de la regla anterior, la 'l' nos marcará los pares de máximos con misma fase (la mitad del número total de lóbulos) y la 'm' nos indicará el número total de nulos en el plano XY, es decir, en el plano  $\varphi$ .

Esta manera intuitiva de entender los armónicos esféricos sirve de ayuda para hacerse una idea del grado de correlación que pueda llegar a tener un elemento  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  con una función  $f(\theta, \varphi)$  la cual estemos viendo representada en la superficie esférica. En el caso concreto de la figura 2.2, el razonamiento para interpretar los armónicos esféricos según las reglas que hemos comentado sería el siguiente:

- Para  $Y_2^0(\theta, \varphi)$ , ningún nulo en el plano phi (XY)  $\Rightarrow$  Los 2 en plano theta (XZ o YZ)  $\Rightarrow$  Sin variaciones en plano phi + los 4 lóbulos vistos en plano theta.
- Para  $Y_2^1(\theta, \varphi)$ , un nulo en el plano phi  $\Rightarrow$  Nulo restante en el plano theta  $\Rightarrow$  Se ven los 4 lóbulos en el plano theta y en el plano phi.
- Para  $Y_2^2(\theta, \varphi)$ , los 2 nulos en el plano phi  $\Rightarrow$  Ninguno en plano theta  $\Rightarrow$  Se ven los 4 lóbulos en el plano phi.

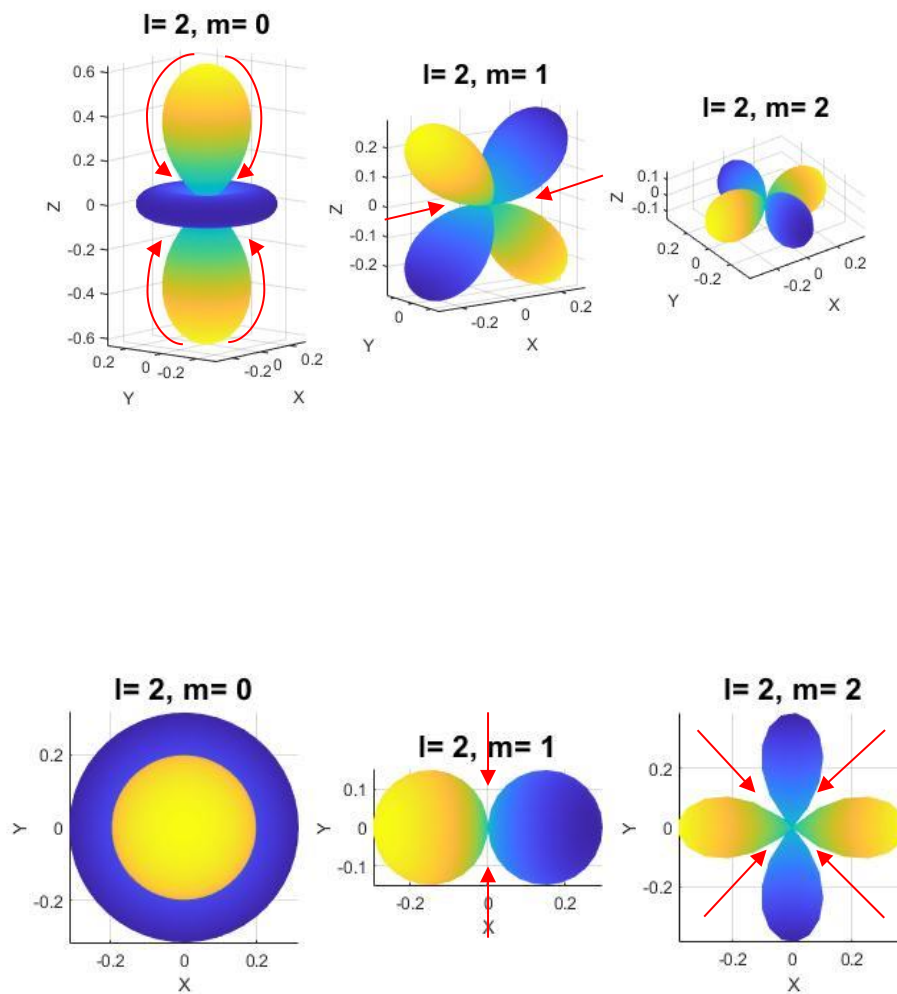


Figura 2.2: Representación de  $\text{Re}\{Y_2^m(\theta, \varphi)\}$  con  $0 \leq m \leq l$

# 3 Diseño del software

## 3.1 Diagrama de bloques

Antes que nada, es imprescindible entrar un poco en detalle acerca de los bloques que vamos a utilizar para la expansión de las funciones analíticas de entrada (calibración). En la figura 3.1 se vuelve mostrar el diagrama de bloques que tomaremos como referencia para el desarrollo del código.

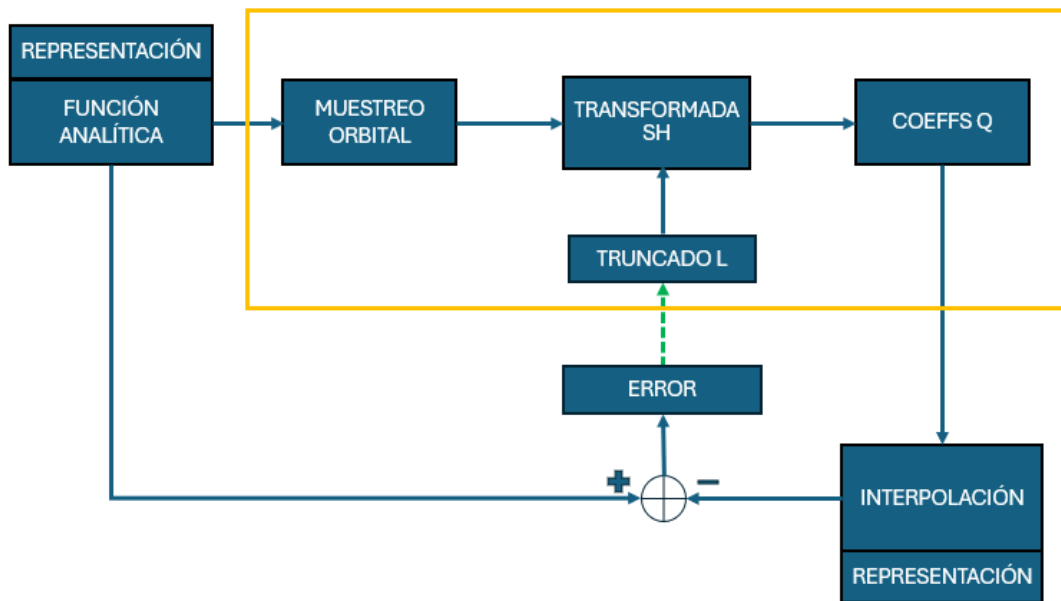


Figura 3.1: Diagrama de bloques del sistema a diseñar

- **MUESTREO ORBITAL:** Es el bloque encargado de muestrear los datos de entrada en las direcciones  $(\theta, \varphi)$  dónde se supone que tendríamos nuestros datos reales.

Es importante destacar que, en ambos casos, tanto en el de la función analítica “continua”<sup>2</sup> como en el caso de la muestreada por órbitas, existirán carencias de datos en las zonas cercanas a polo norte ( $\theta = 0^\circ$ ) y polo sur ( $\theta = 180^\circ$ ). Esto se hace así para ajustarse al caso de mediciones reales en los que no se capta radiación en esas direcciones. Esto supondrá que:

$$30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$$

- **TRANSFORMADA SH (“Spherical Harmonics”):** Realiza la expansión de la función de entrada muestreada en órbitas, extendiendo su dominio a las direcciones

<sup>2</sup> “continua” en el sentido de un mallado regular muy denso en Matlab para acercarnos lo más posible al caso ideal de función continua.

del espacio muestreadas regularmente. Este es el bloque “madre” del diagrama y el que realmente realiza la interpolación de datos.

- **TRUNCADO ‘L’:** Es un parámetro fundamental ya que le dirá al bloque de transformada hasta que coeficiente de orden ‘L’ se realizará la expansión. Para funciones más complejas se tenderá a obtener mejores resultados con un ‘L’ más alto, aunque veremos que esto es así hasta cierto punto.
- **COEFFS ‘L’:** Coeficientes  $q_l^m$  hallados por el bloque “TRANSFORMADA SH”.
- **INTERPOLACIÓN:** Bloque que aprovecha la información comprimida en los coeficientes  $q_l^m$  para calcular la función reconstruida.
- **ERROR:** Error calculado entre el muestreo ideal de la función analítica y el reconstruido por el bloque “INTERPOLACIÓN” a partir de las muestras orbitales
- **PLOT:** Además de la tasa de error se aportará una representación visual del resultado de la expansión comparándolo con la representación de la función ideal.

## 3.2 Planteamiento del sistema de ecuaciones

En este apartado, pasamos a darle forma a nuestros vectores y matrices de datos en Matlab partiendo de la expresión teórica que ya se ha introducido en la ecuación 2.7.

Consideremos desde ahora que podemos expandir nuestra función de entrada definida en la superficie de una esfera mediante una base de “Spherical Harmonics”,  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ .

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_l^m \cdot Y_l^m(\theta, \varphi); \quad q_l^m, Y_l^m(\theta, \varphi) \in \mathbb{C}$$

*Ecuación 3.1. Expansión de función en Armónicos Esféricos*

En la práctica hay una limitación obvia, y es que no es posible llegar a un orden  $l = \infty$  por lo que desde este momento el objetivo de nuestro trabajo será considerar la siguiente aproximación:

$$f(\theta, \varphi) \approx \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l q_l^m \cdot Y_l^m(\theta, \varphi)$$

*Ecuación 3.2. Expansión truncada de función en Armónicos Esféricos*

En la que ‘L’ marcará un orden máximo de reconstrucción para nuestro problema, y por lo tanto un número máximo de coeficientes  $q_l^m$  y de funciones  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ .

Partiendo de la aproximación descrita en la ecuación 3.2 podremos considerar una nueva aproximación teórica para calcular los coeficientes  $q_l^m$  [8]:

$$q_l^m \approx \iint_{0,0}^{2\pi,\pi} f(\theta, \varphi) \cdot (Y_l^m(\theta, \varphi))^* \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

*Ecuación 3.3. Cálculo de los coeficientes armónicos mediante integración*

Precisamente el cálculo de estos coeficientes  $q_l^m$  será crucial para lograr de alguna manera condensar la información necesaria para reconstruir nuestra función de entrada. Habiendo definido ya las expresiones teóricas de importancia que entran en juego, nos disponemos a reformular la ecuación 3.2 en forma matricial para introducir la manera en la que se van a tratar los datos inicialmente.

$$\bar{f}(\theta, \varphi) = \bar{Y}(\theta, \varphi) \cdot \bar{q}_l^m$$

En este caso denotamos  $\bar{Y}(\theta, \varphi)$  como una matriz y  $\bar{f}(\theta, \varphi)$  y  $\bar{q}_l^m$  como vectores columna [9] tal que:

$$\bar{Y}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} Y_0^0(\theta_1, \varphi_1) & Y_1^{-1}(\theta_1, \varphi_1) & Y_1^0(\theta_1, \varphi_1) & Y_1^1(\theta_1, \varphi_1) & \dots & Y_L^L(\theta_1, \varphi_1) \\ Y_0^0(\theta_2, \varphi_2) & Y_1^{-1}(\theta_2, \varphi_2) & Y_1^0(\theta_2, \varphi_2) & Y_1^1(\theta_2, \varphi_2) & \dots & Y_L^L(\theta_2, \varphi_2) \\ Y_0^0(\theta_3, \varphi_3) & \dots & \dots & \dots & \dots & Y_L^L(\theta_3, \varphi_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_0^0(\theta_N, \varphi_N) & Y_1^{-1}(\theta_N, \varphi_N) & \dots & \dots & \dots & Y_L^L(\theta_N, \varphi_N) \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}(\theta, \varphi) = [f(\theta_1, \varphi_1), f(\theta_2, \varphi_2), \dots, f(\theta_N, \varphi_N)]^T$$

$$\bar{q}_l^m = [q_0^0, q_1^{-1}, q_1^0, q_1^1, \dots, q_L^L]^T$$

*Ecuación 3.4. Ecuación matricial para expansión de función en términos de armónicos esféricos*

Notar que el número de filas de la matriz  $\bar{Y}(\theta, \varphi)$  es N. Este será el número de direcciones del espacio disponibles para nuestros datos de entrada, y en cada una de estas direcciones se evaluará cada armónico esférico.

Sin analizar mucho la expresión para la matriz  $\bar{Y}(\theta, \varphi)$  en la ecuación 3.4, podríamos pensar que el número de columnas será L, pero resulta ser  $(L + 1)^2$ . Esto es así debido a lo siguiente:

Si retomamos la ecuación 3.2 vemos que a cada nivel 'l' (segundo sumatorio) le corresponden  $(2l+1)$  armónicos esféricos  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  distintos (primer sumatorio). Si sumamos todos los  $(2l+1)$  hasta un orden 'L' obtendremos el número de armónicos esféricos totales que intervienen en la ecuación 3.4, o sea,  $(L + 1)^2$  que denotaremos a partir de este momento como P.

$$P = \sum_{l=0}^L (2l + 1) = (L + 1)^2$$

*Ecuación 3.5. Número total de coeficientes armónicos en el sistema*

Como el vector de coeficientes no es más que la ponderación asociada a cada armónico esférico, podremos escribir la ecuación 3.4 ya con sus dimensiones:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\theta, \varphi) &= \bar{Y}(\theta, \varphi) \cdot \bar{q}_l^m \\ [N \times 1] &= [N \times P] \cdot [P \times 1] \end{aligned}$$

*Ecuación 3.6. Dimensiones del sistema matricial planteado*

Resulta interesante hacerse a la idea que esas dimensiones ‘N’ y ‘P’, en un sentido matemático, van a representar el número de ecuaciones y el número de incógnitas respectivamente en nuestro sistema, por lo que su ajuste será uno de los requisitos fundamentales para que no mal condicionemos nuestro sistema.

Llegados a este punto, es hora de preguntare cuáles son nuestros datos de entrada al bloque “TRANSFORMADA SH”, o datos que podamos calcular directamente en el sistema matricial planteado:

- 1) Partiendo de que tenemos los disponibles las direcciones  $(\theta, \varphi)$  de interés, el evaluar la función analítica  $f$  en dichas direcciones será inmediato. De esta manera obtendremos  $\bar{f}(\theta, \varphi)$ .
- 2)  $\bar{Y}(\theta, \varphi)$  también se calcula sin dificultad alguna. Se puede hacer uso de la expresión teórica planteada en la ecuación 2.7 (o utilizar funciones ya creadas [5]) y evaluarla en un doble bucle ‘for’ que recorra las “l’s” y las “m’s” correspondientes mientras se va construyendo la matriz en cada iteración. Para ello sirve de ayuda la función ‘legendre(n,x)’ disponible en Matlab<sup>3</sup>.
- 3) Claramente la incógnita del sistema será el vector de coeficientes  $\bar{q}_l^m$ , el cual se puede resolver por distintos métodos de resolución de sistemas lineales. Un planteamiento típico del problema para despejar  $\bar{q}_l^m$  es la conocida como la solución de mínimos cuadrados o “Least Squares Solution (LSQS)” [9].

$$\bar{q}_l^m = (\bar{Y}^H(\theta, \varphi) \cdot \bar{Y}(\theta, \varphi))^{-1} \bar{Y}^H(\theta, \varphi) \bar{f}(\theta, \varphi)$$

$$\bar{Y}^H = (\bar{Y}^T)^*$$

*Ecuación 3.7 Ecuación de LSQ para resolución de  $\bar{c}_l^m$*

<sup>3</sup> <https://es.mathworks.com/help/matlab/ref/legendre.html>: Calcula las funciones asociadas de Legendre.

Existen varios métodos en Matlab para resolver el problema de mínimos cuadrados. Tras pruebas realizadas con métodos distintos, trabajaremos con el que menos error se ha obtenido, el cual se introduce en el siguiente apartado.

### 3.3 Solución del sistema: factorización QR, operador “backslash”

El método en el que Matlab se basa para calcular los valores  $\bar{q}_l^m$  con el operador “backslash” (“\”) es en este caso la descomposición QR [7]:

$$\bar{Y} = \bar{Q} \cdot \bar{R}$$

$\bar{Q}$ : Matriz ortogonal, dim (NxP)

$\bar{R}$ : Matriz triangular superior, dim(PxP)

*Ecuación 3.8. Descomposición QR de la matriz  $\bar{Y}$*

Esta igualdad se puede aplicar cuando las columnas de la matriz  $\bar{Y}$  sean linealmente independientes. Como  $\bar{Y}$  conforma en la dimensión de sus columnas una familia de funciones ortonormales, las ecuaciones dispuestas en columnas serán linealmente independientes.

Sustituyendo en la ecuación de mínimos cuadrados tendríamos:

$$\bar{q}_l^m = (\bar{R}^H \bar{Q}^H \cdot \bar{Q} \cdot \bar{R})^{-1} (\bar{Q} \cdot \bar{R})^H \bar{f}$$

$$\bar{Q}^H \cdot \bar{Q} = \bar{I}, \quad \bar{Q}^H = \bar{Q}^{-1}, \quad (\text{propiedad de matrices ortogonales})$$

$$\bar{q}_l^m = (\bar{R}^H \bar{R})^{-1} (\bar{R}^H \bar{Q}^H) \bar{f}$$

$$\bar{q}_l^m = \bar{R}^{-1} (\bar{R}^H)^{-1} (\bar{R}^H \bar{Q}^H) \bar{f}$$

$$\bar{q}_l^m = \bar{R}^{-1} (\bar{Q}^H) \bar{f}$$

En resumen, el “solver” de Matlab lo que hará internamente será calcular  $\bar{q}_l^m$  tal que:

$$\bar{R} \bar{q}_l^m = (\bar{Q}^H) \bar{f}$$

*Ecuación 3.9. Solución de la ecuación LSQ mediante descomposición QR*

A nivel de código en Matlab, como ya se ha mencionado, para resolver  $q_l^m$  lo único que habrá que hacer para imitar el proceso descrito será escribir:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Y} \backslash \mathbf{f}$$

En este punto habremos conseguido calcular el vector de coeficientes  $\overline{q_l^m}$ , que representa el peso de cada armónico esférico asociado a la función de entrada.

## 4 Ejemplos con expresiones analíticas: Isotrópica, Dipolo y Pseudo-parabólica

### 4.1 Isotrópica

Vamos a considerar que nuestra función de entrada es una función de ganancia constante en toda la superficie esférica ( $f(\theta, \varphi) = cte$ ), lo que sería equivalente a decir que tenemos una fuente de radiación isotrópica en el origen de coordenadas.

Vamos a ir introduciendo además el proceso de interpolación siguiendo el diagrama de bloques a la vez que analizamos los resultados que vamos obteniendo durante la simulación.

Lo que haremos primero será muestrear las direcciones de la superficie esférica  $(\theta_{in}, \varphi_{in})$  de interés (esto es donde se supone que tenemos los datos reales). Estas medidas vendrán dadas por cortes en la esfera de  $30^\circ$  y  $60^\circ$  además de otros dos cortes de  $150^\circ$  y  $120^\circ$  que en una medición real vendrían dados por mantener la cuña con la misma inclinación y girar el dispositivo  $180^\circ$  respecto a la orientación referencia. Tomando además como referencia de los cortes tanto el eje X como el eje Y, sumado a las muestras dispuestas alrededor del ecuador, obtendremos 9 cortes.

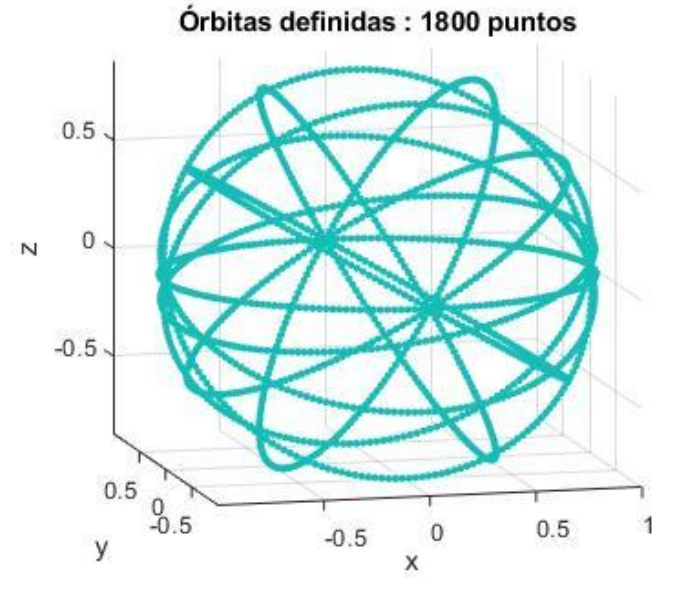


Figura 4.1: Función isotrópica muestreada en 9 órbitas

En la figura 4.1 se muestra ya la función evaluada en las direcciones de interés. Como la función vale lo mismo en todos los puntos por ese motivo el color asociado es el mismo.

El número total de puntos vendrá dado por la siguiente expresión:

$$N_{tot} = N \left( \frac{\text{puntos}}{\text{órbita}} \right) \cdot M \left( \frac{\text{órbitas}}{\text{ejes de inclinación}} \right) \cdot E(\text{ejes de inclinación}) + N_{ecuador}$$

$$= 200 \cdot 4 \cdot 2 + 200 = 1800$$

Es de interés detenernos a mitad del proceso antes de interpolar para representar los valores de los coeficientes asociados (estamos en el punto en el que acabamos de calcular  $\mathbf{q}^m = \mathbf{Y}(\mathbf{f})$ ). Para ello se ofrece una representación de los valores de los coeficientes  $q_l^m$  que se obtienen (para un orden  $L=20$ ), en la figura 4.2.

Notar que todos los coeficientes salvo el correspondiente al armónico  $Y_0^0(\theta, \varphi)$ , el  $q_0^0$ , son nulos.

Los siguientes pasos una vez hemos obtenido el vector de coeficientes  $\overline{q_l^m}$  serán:

1. Recalcular la matriz de armónicos esféricos  $\overline{Y}_{new}(\theta_{reg}, \varphi_{reg})$  para las direcciones  $(\theta, \varphi)$  de la malla regular en las que está evaluada la función ideal o “target”.
2. Consideramos ahora que el número de filas de  $\overline{Y}_{new}(\theta_{reg}, \varphi_{reg})$  es  $N_{reg}$  tal que  $N_{reg} \gg N$  (nº de muestras orbitales). Pues bien, como el número de

columnas de cualquier  $\bar{Y}$  viene marcado únicamente por el orden de reconstrucción ‘L’ impuesto, podemos reutilizar el vector de  $\bar{q}_l^m$  calculado hasta ahora para hallar la función reconstruida  $\hat{f}(\theta_{reg}, \varphi_{reg})$ , tal y como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\hat{f}(\theta_{reg}, \varphi_{reg}) = \bar{Y}_{new}(\theta_{reg}, \varphi_{reg}) \cdot \bar{q}_l^m$$

$$[N_{reg} \times 1] = [N_{reg} \times P] \cdot [P \times 1]$$

*Ecuación 4.1. Ecuación de reconstrucción de la función ‘f’*

Teniendo ya a nuestra disposición la función  $\hat{f}(\theta_{reg}, \varphi_{reg})$  a la salida del bloque “INTERPOLACIÓN”, así como la función ideal  $f(\theta_{reg}, \varphi_{reg})$ :

1. Calcularemos una tasa de error entre ambas con la siguiente fórmula (MSE):

$$error = \frac{1}{N_{reg}} \cdot \sum_{(\theta_{reg}, \varphi_{reg})} (f(\theta_{reg}, \varphi_{reg}) - \hat{f}(\theta_{reg}, \varphi_{reg}))^2$$

*Ecuación 4.2. Expresión para calcular el error de interpolación*

2. Se ofrecerá una representación gráfica del resultado (figura 4.3)

Además, puede ser útil el hecho de simplemente deshacer la igualdad  $\mathbf{qlm}=\mathbf{Y}\mathbf{f}$  calculando:

$$\hat{f}(\theta_{in}, \varphi_{in}) = \bar{Y}(\theta_{in}, \varphi_{in}) \cdot \bar{q}_l^m$$

$$[N \times 1] = [N \times P] \cdot [P \times 1]$$

*con  $(\theta_{in}, \varphi_{in})$ : muestras orbitales*

*Ecuación 4.3. Ecuación de reconstrucción de la función ‘f’*

De esta manera podremos evaluar el error que introduce nuestro bloque “TRANSFORMADA\_SH” condicionado por la operación  $\mathbf{qlm}=\mathbf{Y}\mathbf{f}$ , calculando el error punto a punto entre  $\hat{f}(\theta_{in}, \varphi_{in})$  y  $f(\theta_{in}, \varphi_{in})$ .

Volviendo al caso de la función isotrópica observamos que para todos los órdenes de reconstrucción “L” el error es nulo ( $\leq 10^{-32}$ ). De hecho, para el orden  $L=1$ , con  $(L+1)^2 = 4$  coeficientes, el error es del orden  $10^{-34}$ . Lógicamente en una escala de error tan baja nos es indiferente obtener un orden -32 frente a -34, consideraremos ambos 0 absolutos. El razonamiento que corresponde para este caso es darse cuenta de que no es ni mucho menos necesario subir hacia altos órdenes de reconstrucción para una función

sencilla que puede reconstruirse con pocos coeficientes (incluso se puede aplicar este apunte a diagramas de radiación reales [12] ). En concreto, la isotrópica puede reconstruirse perfectamente con el 1<sup>er</sup> coeficiente de todos (figura 4.2).

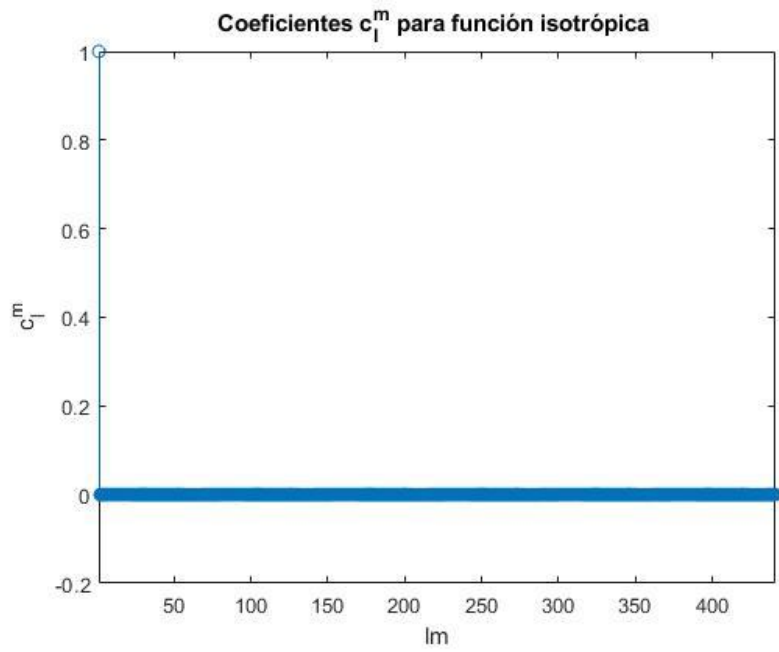


Figura 4.2: Coeficientes para función isotrópica con  $L=20$  ( $P=441$ )

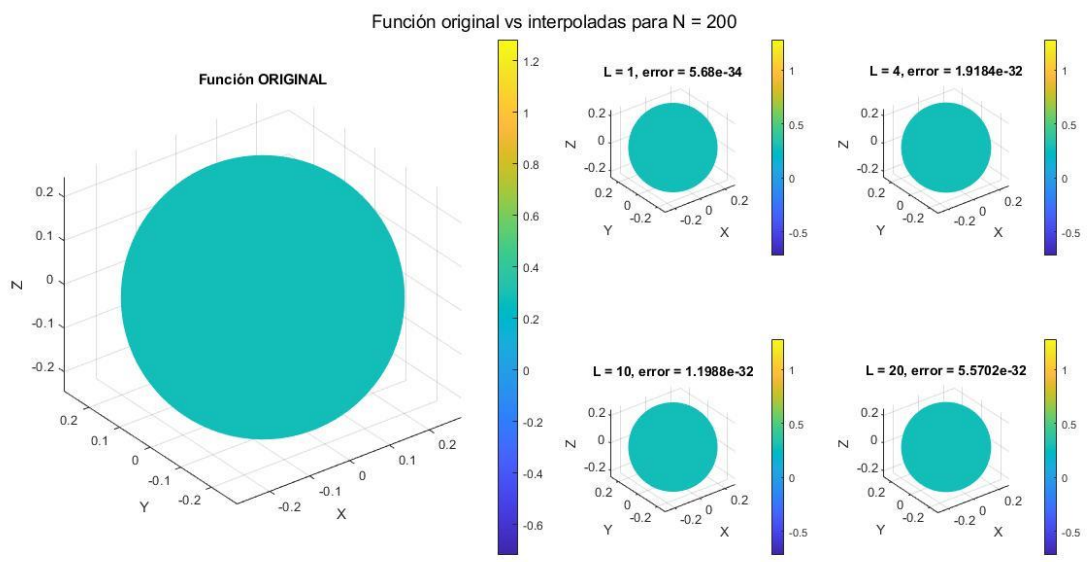


Figura 4.3: Reconstrucción de función isotrópica con 9 cortes de 200 muestras, para distintos  $L$ 's

Habiendo expuesto el ejemplo visto es importante remarcar que la metodología que se va a seguir para llegar a tasas de errores y representaciones va a ser exactamente la

misma para los dos siguientes ejemplos de diagramas de radiación basados también en expresiones analíticas.

## 4.2 Dipolo

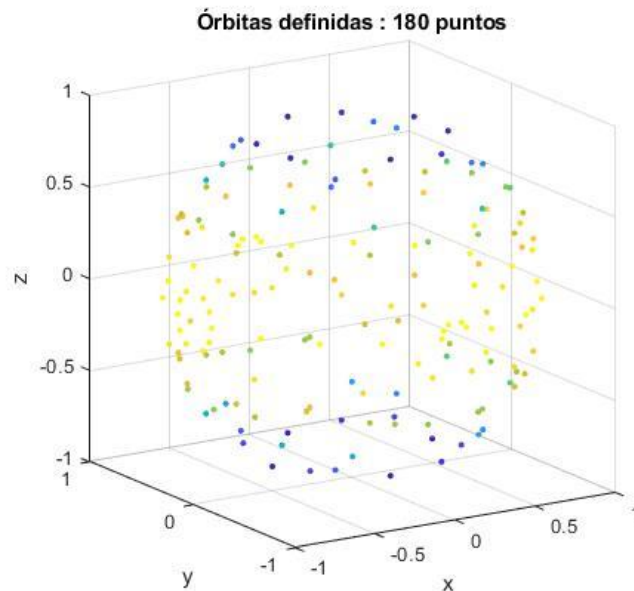
Para el dipolo consideraremos la siguiente expresión analítica:

$$f(\theta, \varphi) = (\sin \theta)^2$$

*Ecuación 4.4. Expresión analítica de un dipolo elemental*

Vamos a realizar la reconstrucción en distintas situaciones para observar una relación fundamental dentro de nuestro sistema: la relación entre ‘N’, el número de muestras de entrada al sistema, y el orden de reconstrucción ‘L’.

Veamos el caso en el que el número de muestras por órbita es bajo,  $N=20$  muestras. Esto es un espaciado  $\Delta\varphi = \frac{360^\circ}{N} = 18^\circ$  (baja resolución). En la figura 4.4 se observa el resultado de realizar los mismos 9 cortes que en el ejemplo de la antena isotrópica en esta situación.



*Figura 4.4: Función dipolo muestreada en 9 órbitas de 20 puntos*

Notar que debido a una resolución pobre de  $\Delta\varphi$ , se pierde la percepción visual tan clara que teníamos de las órbitas para el ejemplo de la isotrópica, en el que utilizábamos 200 muestras por órbita. Notar también que ya para este caso el color asociado a cada

muestra cambia, siendo los colores más cercanos al amarillo los valores más altos de la función y los colores más cercanos al azul oscuro los valores más bajos de la función.

Los resultados obtenidos de error y representación en este caso se muestran en la figura 4.5.

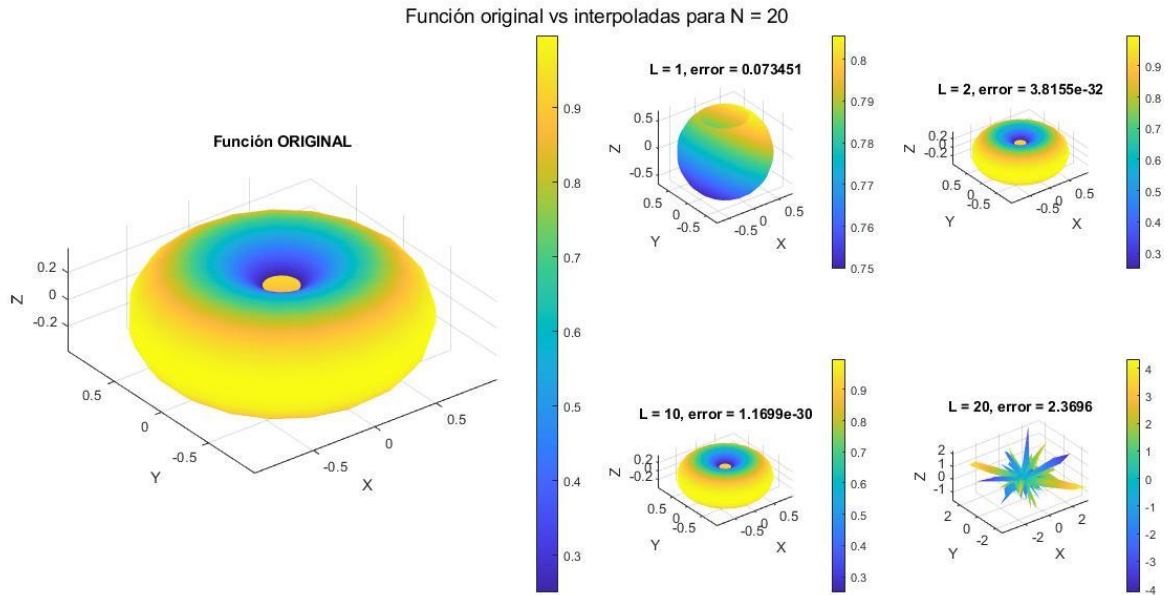


Figura 4.5: Reconstrucción de función dipolo con 9 cortes de 20 muestras, para distintos  $L$ 's

Para este caso se ve claramente que hay dos  $L$ 's con las que la reconstrucción es perfecta mientras que hay otras dos para las que la función interpolada no tiene nada que ver con la original (notar que un error  $\sim 10^{-1}$  ya es muy perceptible visualmente). Empecemos comentando el caso más fácil para  $L=1$ . Lo que ocurre sencillamente es que el sistema no tiene un orden suficiente para poder llegar a reconstruir la función de entrada. No obstante, vamos a interpretar lo que acabamos de decir con las formas de los armónicos esféricos:

Se reutiliza de la sección 2 la figura de los armónicos esféricos hasta un orden  $l=3$  para explicar este hecho (figura 4.6). Si nos fijamos, el orden de reconstrucción llega solo hasta al nivel 1. Y aunque esto no es exactamente así<sup>4</sup>, podríamos hacernos a la idea, para un caso sencillo como es este, de que las diferentes combinaciones entre las figuras disponibles en la **figura 4.6** hasta el **nivel 1** constituyen el **grado de libertad** que tiene el sistema para reconstruir la función de entrada. Claramente analizando la función analítica del dipolo elemental, vemos que tiene simetría de revolución en  $\varphi$  (solo hay dependencia en  $\theta$ ). En la figura 4.6 no observamos ningún armónico esférico con simetría de revolución en  $\varphi$  hasta el nivel 2, por lo que podemos tener una intuición de que no obtendremos la reconstrucción deseada. No obstante, al utilizar un  $L=2$  (**subir un nivel**) “tendremos disponibles” las partes reales de la figura 4.7. Notar que para este

<sup>4</sup> No lo es porque los armónicos esféricos son números complejos, es decir, tienen una parte imaginaria además de la parte real, sumado a que en la figura no se ven representados los  $m < 0$ .

“set” sí que tenemos una figura cuya zona ecuatorial tiene simetría de revolución en  $\varphi$ ,  $\text{Re}\{Y_2^0(\theta, \varphi)\} = Y_2^0(\theta, \varphi)$  (rodeado en verde).

Resulta que una combinación apropiada de  $Y_2^0(\theta, \varphi)$  con  $Y_0^0(\theta, \varphi)$  será la que nos aporte una reconstrucción con error nulo, esto se aprecia en la figura 4.8 en la que se representan los coeficientes  $q_l^m$  para este caso concreto.

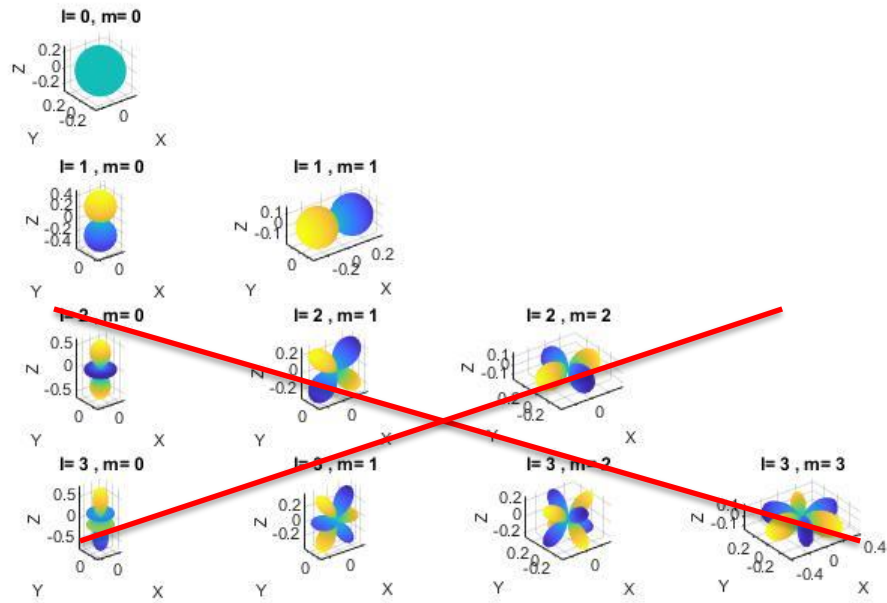


Figura 4.6: Representación de  $\text{Re}\{Y_l^m(\theta, \varphi)\}$  para  $l=0,1$  con  $0 \leq m \leq l$

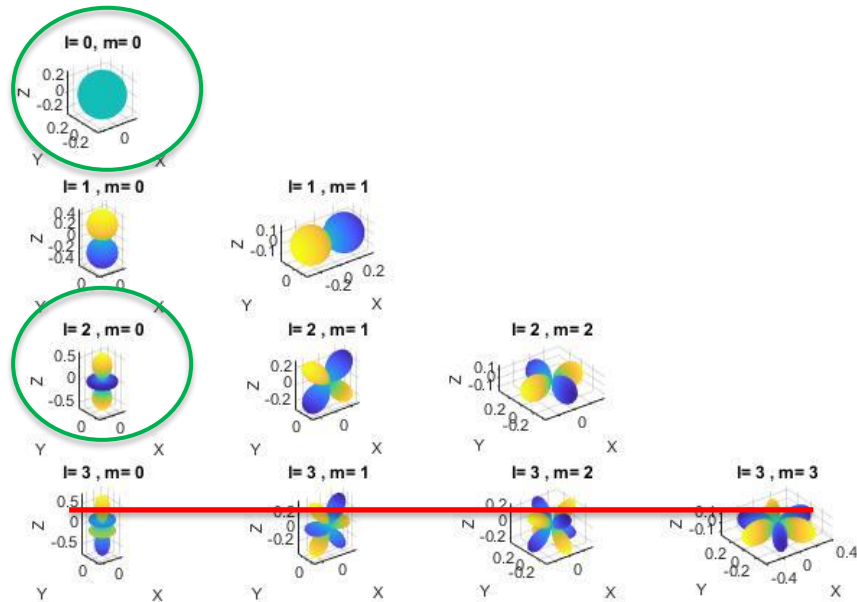


Figura 4.7: Representación de  $\text{Re}\{Y_l^m(\theta, \varphi)\}$  para  $l=0,1,2$  con  $0 \leq m \leq l$

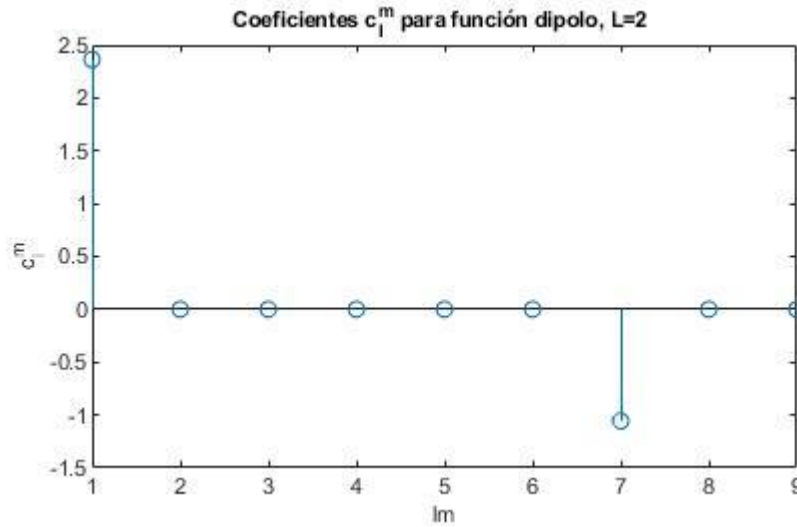


Figura 4.8: Coeficientes para función dipolo elemental con  $L=2$

Comprobamos rescatando la expresión del vector  $\overline{q_l^m}$  que el coeficiente  $q_2^0$  se corresponde con el índice 7 del vector.

$$\overline{q_l^m} = [q_0^0, q_1^{-1}, q_1^0, q_1^1, q_2^{-2}, q_2^{-1}, q_2^0, \dots, q_L^L]^T$$

Volviendo a poner el foco en la figura de representaciones con tasas de error, vemos que en la función reconstruida para  $L=20$  se dispara el error y así se hace notar visualmente. Esto se debe al número de ecuaciones respecto de incógnitas que introducimos en el sistema. Si disponemos de 180 puntos en total y queremos llegar a un orden 20, el número de **filas** de la matriz  $\overline{Y}$  será **180** y el de **columnas 441**  $(20+1)^2$ , o sea, tenemos **menos ecuaciones que incógnitas**. La relación entre el número de muestras 'N' y el orden de reconstrucción 'L' como hemos comprobado es un aspecto muy a tener en cuenta, algo que ya se discute en artículos de autores que se han enfrentado a este problema [4].

Pasamos a ver en la figura 4.10 cómo son los errores y las representaciones para el caso del número de muestras máximo por órbita,  $N=200$ . Notar que en la figura 4.9 se aprecian las órbitas perfectamente definidas.

En la figura 4.10 observamos de nuevo que, a pesar de haber incrementado en un factor 10 el número de puntos por órbita, el error para  $L=20$  se sigue disparando. En busca de algún tipo de explicación sobre lo ocurrido decidimos realizar una prueba con otros **2 cortes más (a 45 y 135 °)** en cada eje de inclinación (eje X y eje Y) por lo que se añadieron 4 órbitas más. En la figura 4.11 se puede ver el aspecto que toma el muestreo de las órbitas y en la figura 4.12 el resultado de la interpolación. Vemos que el error para  $L=20$  pasa a valer 0. Esta ganancia de información se debe evidentemente a los cortes añadidos, lo que nos viene a decir que el **muestreo** para estos órdenes muy altos **deberá ser poco redundante** (notar que siempre hay redundancia en el ecuador). Precisamente por esa alta dependencia con la calidad del muestreo, nos podemos hacer

a la idea que el tratar con órdenes muy altos no será en general recomendable salvo que la complejidad de la función a reconstruir así lo requiera.

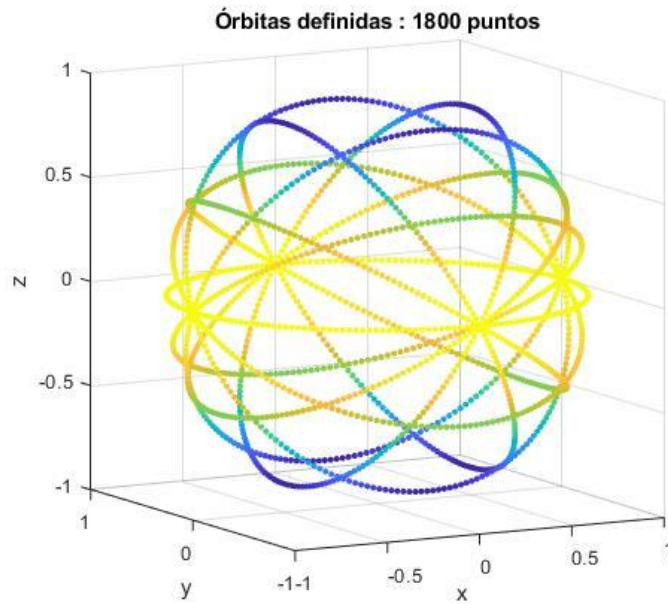


Figura 4.9: Función dipolo muestreada en 9 órbitas de 200 puntos

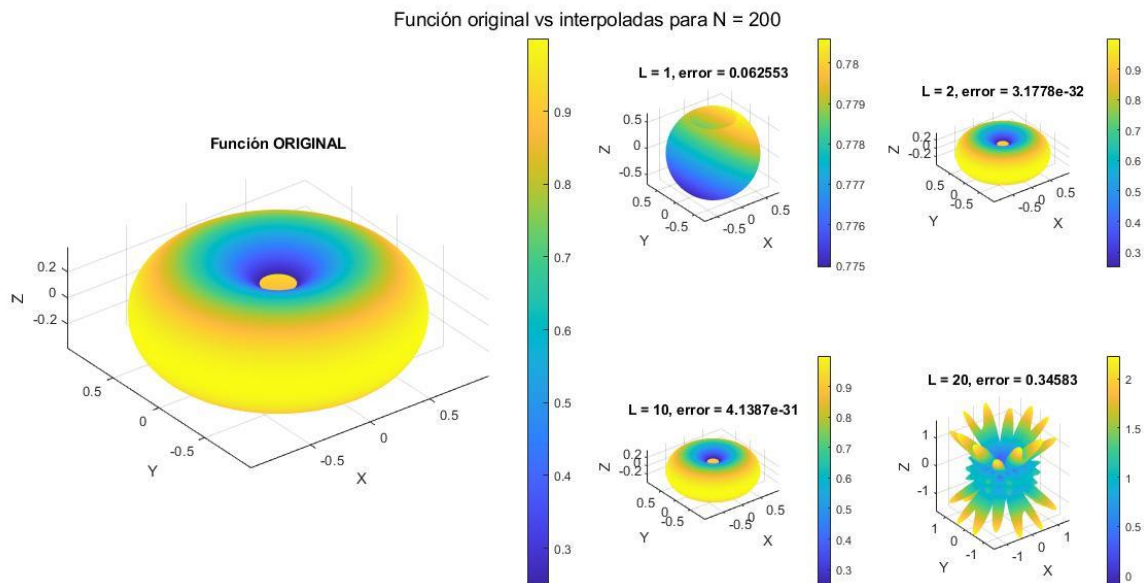


Figura 4.10: Reconstrucción de función dipolo con 9 cortes de 200 muestras, para distintos  $L$ 's

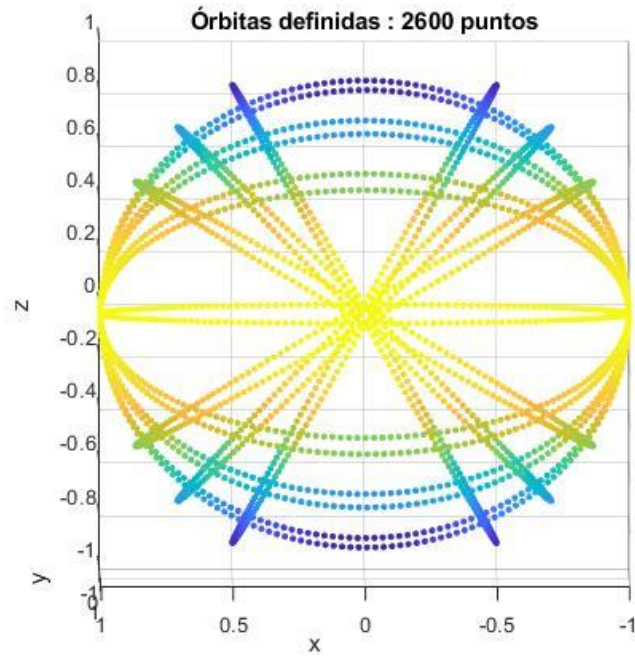


Figura 4.11: Función dipolo muestreada en 13 órbitas de 200 puntos

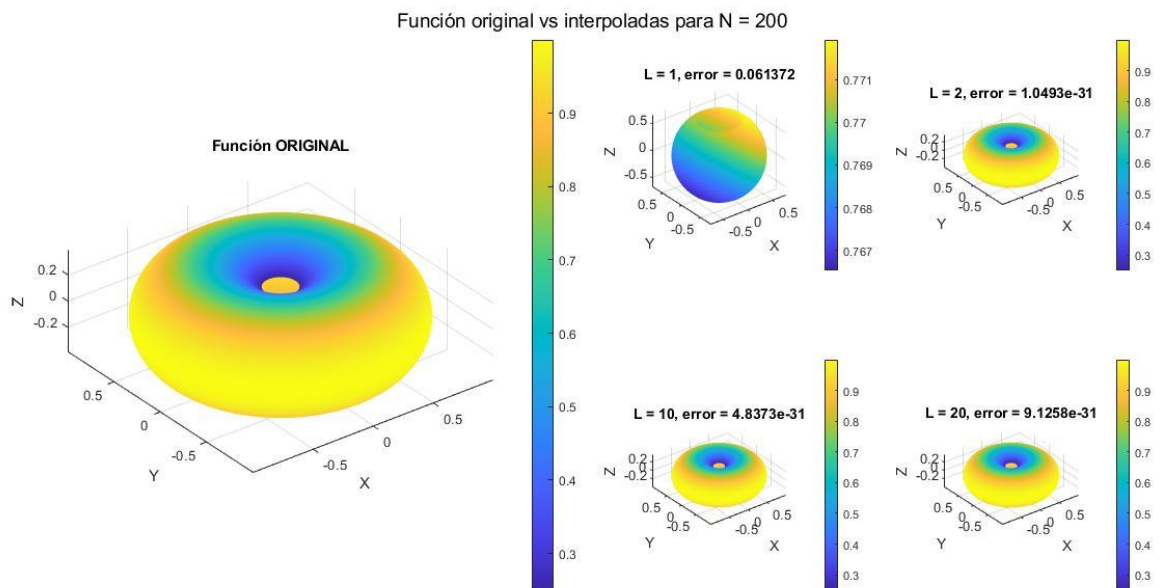


Figura 4.12: Reconstrucción de función dipolo con 13 cortes de 200 muestras, para distintos  $L$ 's

Para ver que realmente el muestreo con órbitas es efectivo, vamos a comparar con la estrategia de medición de radiación típica que consiste en muestrear regularmente cortes paralelos al ecuador con un paso determinado de  $\theta$  (figura 4.13). Este muestreo está relacionado con la técnica más común en cámaras anecoicas que consiste en variar la inclinación de la antena receptora para distintas rotaciones en de la AUT (“Antenna Under Test”)[13].

Se comprueba en la figura 4.14 que la reconstrucción vuelve a presentar un error alto en el caso de  $L=20$ . Este hecho nos confirma sumado a los experimentos del caso anterior, que tal y como está diseñado el sistema, el mismo sistema nos introduce una situación de inestabilidad al aportarle órdenes muy altos. Al final podemos de nuevo ver una analogía de carácter cualitativo con Fourier en cuanto a relación de “**frecuencia de muestreo**” o en este caso lo podríamos llamar de forma más genérica “**calidad de muestreo**” y ancho de banda del sistema., que sería en nuestro caso el orden ‘L’ de reconstrucción al que queremos llegar. Para este ejemplo y el correspondiente a los 9 cortes orbitales, el sistema nos está pidiendo más calidad de muestreo a su entrada ya que el ancho de banda con el que trabaja es muy alto. Situación similar al de un sistema de telecomunicaciones de captación de muestras en el tiempo, por ejemplo, en el que es necesario trabajar con una frecuencia de muestreo siempre mayor a dos veces el ancho de banda ( $T^{\text{ma}}$  de muestreo de Nyquist, [14]).

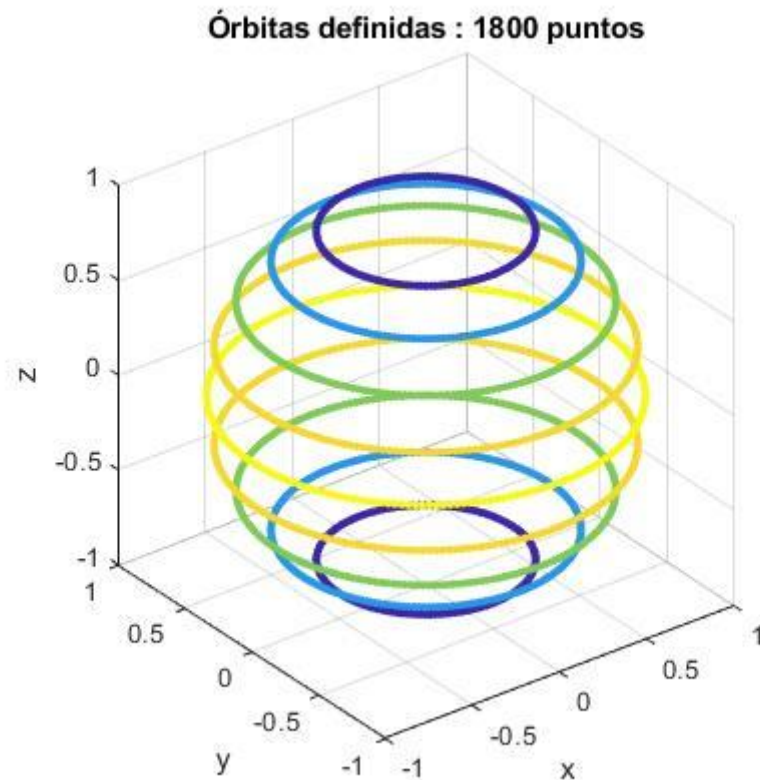


Figura 4.13: Función dipolo muestreada con  $\Delta\theta=15^\circ$

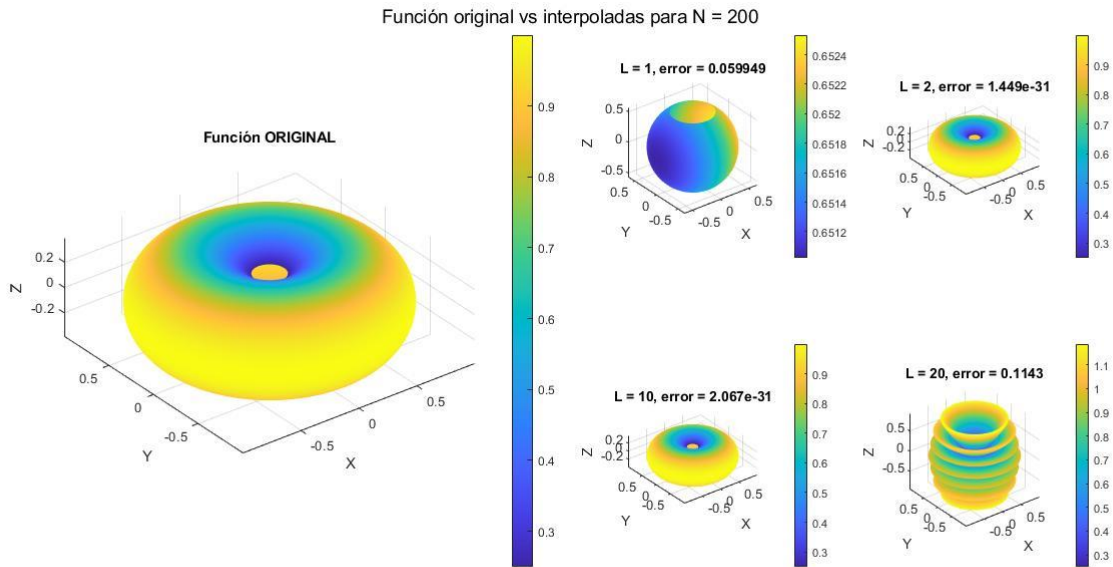


Figura 4.14: Reconstrucción de función dipolo con 9 cortes regulares de 200 muestras, para distintos  $L$ 's

### 4.3 Pseudo-parabólica

Para simular el comportamiento de una antena del tipo parabólica con su lóbulo principal en la dirección del eje x se ha hecho uso de la siguiente expresión analítica:

$$f(\theta, \varphi) = \mathcal{R}e\{Y_2^2(\theta, \varphi)\} \cdot t(\theta)$$

con  $t(\theta) = \frac{(1+\cos\varphi)}{2}$  : Función cardioide en plano XY

*Ecuación 4.5. Ecuación analítica para antena pseudo-parabólica*

Se ha hecho de la siguiente manera porque pensando en la representación de las dos funciones por separado (figura 4.15 y figura 4.16) se deduce que aparecerá un lóbulo principal y lóbulos secundarios con menor valor.

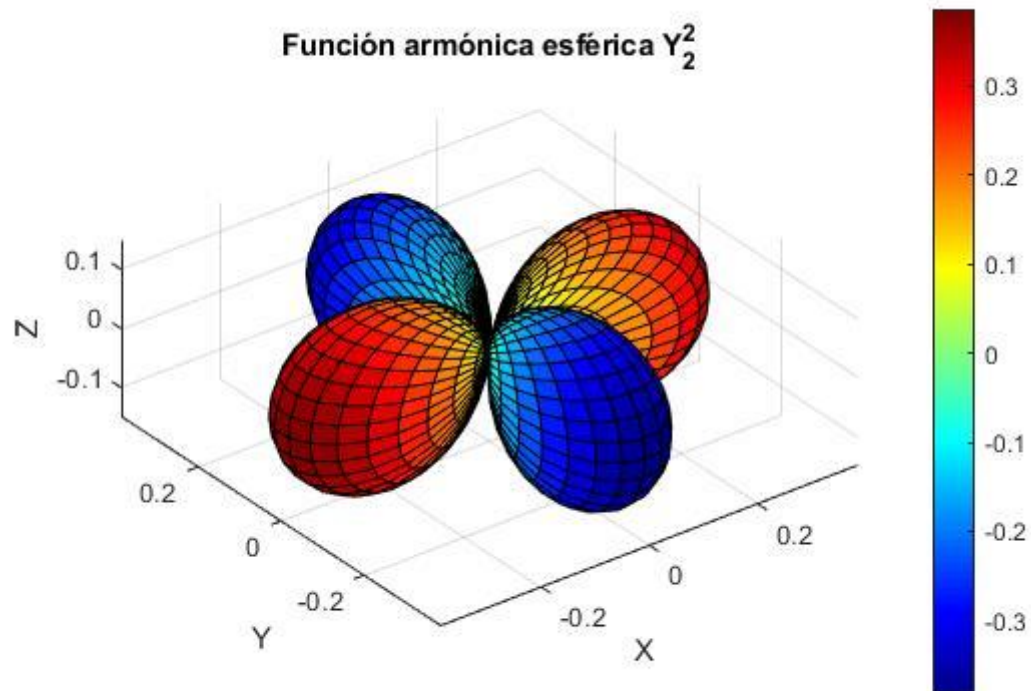


Figura 4.15: Función armónica esférica  $\Re\{Y_2^2(\theta, \phi)\}$

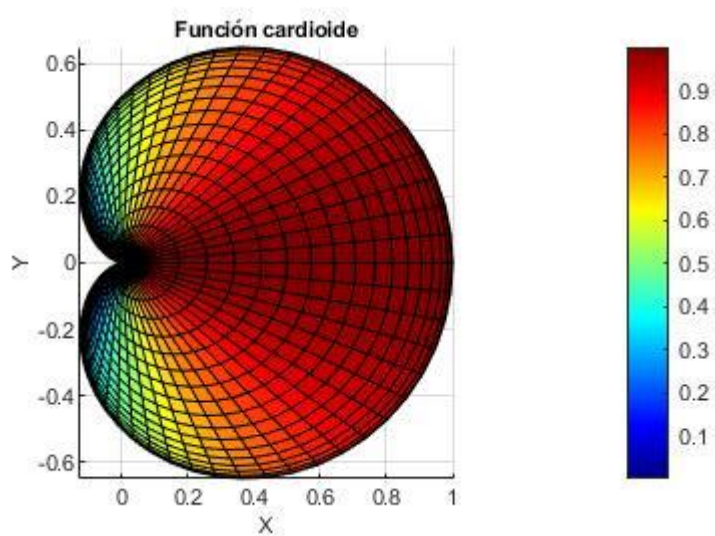


Figura 4.16: Función cardioide en el plano XY

El resultado de la interpolación es el que se muestra en la figura 4.17:

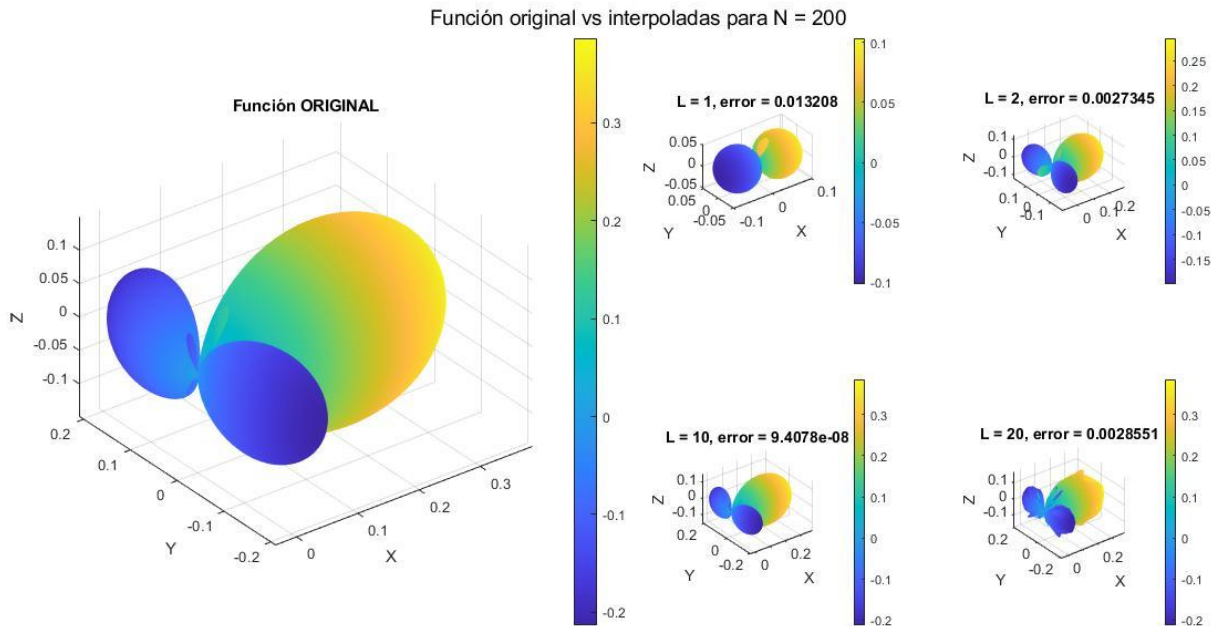


Figura 4.17: Reconstrucción de función pseudo-parabólica con 9 cortes de 200 muestras, para distintos  $L$ 's

Volvemos a observar en este caso un aumento del error para órdenes de reconstrucción muy altos ( $L=20$ ). Además, para  $L=10$  (error óptimo) el orden de magnitud del error está en torno a  $10^{-8}$ . Se considera una tasa de error igualmente válida, pero recordar que en el caso del dipolo el orden de magnitud del error era de  $10^{-31}$  (o sea, error nulo absoluto). Al haber diseñado nosotros mismos ambas funciones, es un resultado esperable. Esto es así por aquello que mostrábamos y deducíamos acerca de que el dipolo ideal se puede expresar únicamente como combinación lineal de los armónico esféricos ( $Y_2^0(\theta, \varphi)$ ,  $Y_2^2(\theta, \varphi)$ ). Para la pseudo-parabólica no será algo tan simple, así se muestra en la figura 4.18 en la que se representan los coeficientes  $q_i^m$  asociados a la reconstrucción.

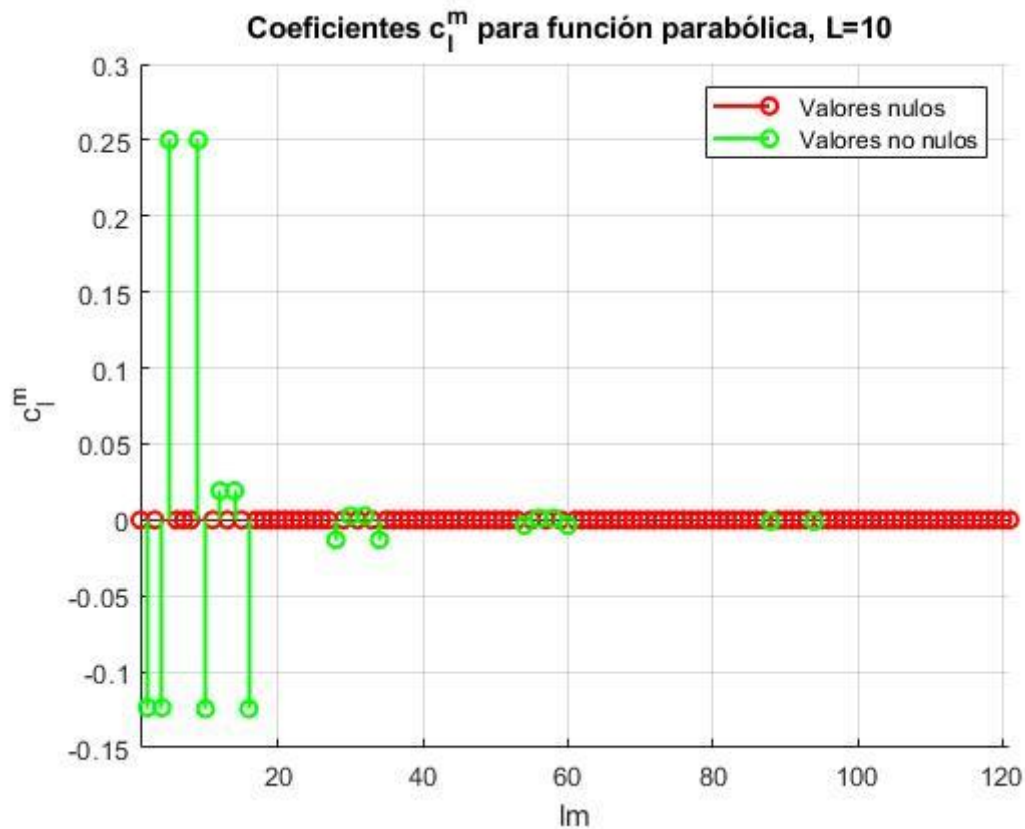


Figura 4.18: Coeficientes para función pseudo-parabólica con  $L=10$

Notar que para este caso se consideran coeficientes no nulos hasta un índice cercano a 100. Se ha comprobado que truncando la expansión en  $L=8$ ,  $(8+1)^2 = 81$  coeficientes (índices  $lm$ ), el error aumenta en un orden de magnitud. Podemos decir que, a pesar de haber usado un ejemplo analítico, el efecto de aplicar una máscara no lineal como la cardioide ha obligado al sistema a mirar hacia órdenes más altos de reconstrucción.

## 5 Conclusiones

Se ha logrado de forma positiva reconstruir patrones de radiación analíticos mediante la **expansión de armónicos esféricos** de datos muestreados parcialmente tomados sobre órbitas inclinadas.

La reconstrucción de los patrones da **errores muy bajos** para el caso del **dipolo** ( $\sim 10^{-30}$ ) y en el caso de la **pseudo-parabólica** también se considera de un orden muy cercano a 0 ( $\sim 10^{-8}$ ,  $L = 10$ ). Estos errores son alcanzables si controlamos el **orden máximo de reconstrucción 'L'**, ajustándolo de manera que no sea ni muy bajo para poder reconstruir funciones con cierta complejidad, ni muy alto para evitar que el sistema no interprete el muestreo proporcionado como un muestreo de baja calidad. El compromiso en este caso consiste en conseguir llegar al 'L' más alto posible sin que el error tienda a crecer respecto a 'L's' anteriores, para ello la información que aporte el muestreo realizado de los datos de entrada tiene que dar una información de calidad al sistema, es decir, las direcciones  $(\theta, \varphi)$  de entrada al sistema tendrán que ser lo menos redundantes posibles espacialmente hablando.

Se ha logrado además mostrar, mediante los errores de reconstrucción del dipolo, que el **muestreo orbital** iguala en **prestaciones** al muestreo regular típico realizado mediante elevación de antena en cámaras anecoicas. Esto puede suponer una alternativa para experimentos en los que se intente caracterizar el diagrama de radiación de un DUT de dimensiones considerables y las dimensiones de la cámara anecoica no permitan que la antena receptora cubra determinadas direcciones del dispositivo en las que existe radiación significativa. En definitiva, se demuestra que esta forma de analizar los diagramas de radiación por muestreo orbital abre vías muy interesantes para desarrollos futuros.

No se han llegado a dar esos siguientes pasos mencionados en la introducción (rotación de diagramas de radiación mediante Álgebra Geométrica, cálculos de potencia parcial radiada, ...) porque se quiso poner el foco de este trabajo en el proceso de interpolación de muestras orbitales de radiación, lo que supuso dedicar la mayor parte del tiempo a esta idea.

En resumen, se logran los objetivos fundamentales planteados para el proyecto y se abren nuevos frentes para la línea de investigación ligada al mismo.

## 6 Líneas de futuro

Para la primera línea de futuro a comentar, sirve de apoyo volver a la figura del diagrama de bloques de calibración que se ha incluido en la introducción.

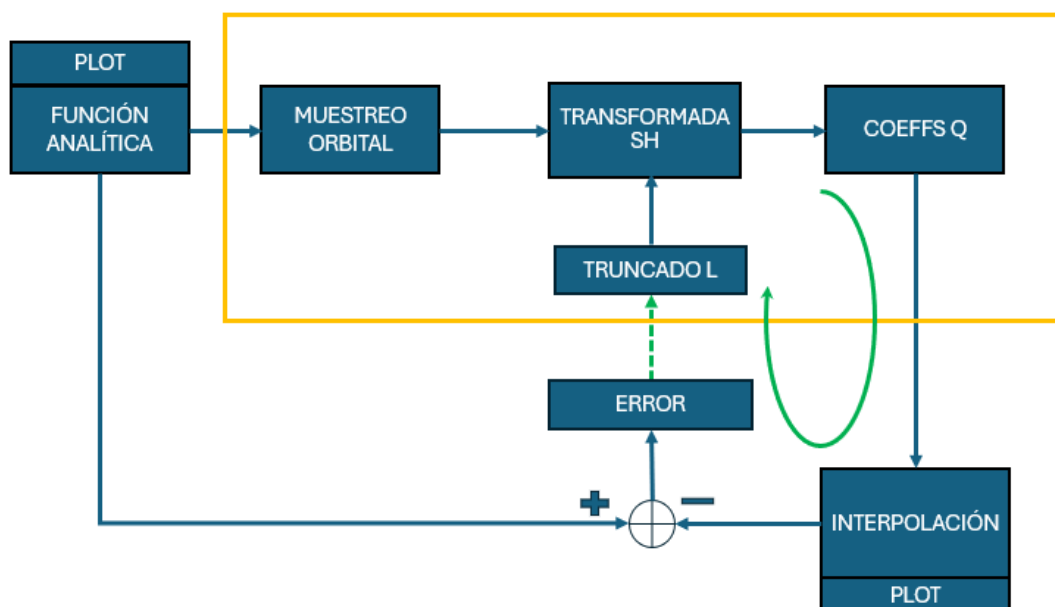


Figura 6.1: Diagrama de bloques del sistema de calibración (modificado)

En el diagrama de bloques se ha pensado incluir un lazo de realimentación (en verde) que conecta el error de la iteración 'i' con el bloque truncado 'L', el cual aplicaría un truncado de forma automatizada en la iteración 'i+1'. Sin el bucle de realimentación establecíamos un 'L' óptimo por inspección humana de errores y representaciones. Con esta modificación se esperaba que el sistema convergiera por sí mismo a un 'L' óptimo en cada caso.

Otras líneas de futuro muy prometedoras a partir de los resultados de este proyecto serían:

- Cálculo de la potencia radiada tanto parcial (en una zona de interés) como total
- Aplicar rotaciones al diagrama de radiación.
- Aplicación a simulaciones de propagación de radiación en espacios interiores.
- Estudiar más en profundidad cómo los coeficientes  $q_l^m$  pueden **comprimir la información de un diagrama de radiación** reduciendo costes para la caracterización de antenas.[15]

Por último, queda comentar el paso más inminente que será, una vez ha sido calibrado el sistema, testarlo con datos de radiación reales.

Se adelanta por pruebas realizadas que el hecho de modificar la resolución de los coeficientes  $qlm$ , es decir sustituir la operación  $qlm=Y\backslash clm$  en Matlab por otra equivalente, puede llegar a mejorar las prestaciones. En concreto en el ámbito de resolución de sistemas lineales de este tipo y aplicados a problemas relacionados con el de este proyecto, se proponen el uso de una herramienta matemática (“solver”) conocida como **regularizador**.

## 7 Referencias

- [1] V. R. Pereyra, “INTRODUCCIÓN A LAS CÁMARAS ANECOICAS PARA MEDICIONES DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO.”
- [2] M.Labodía, “Información interna Tesis Doctoral,” 2024.
- [3] I. Amidror, “Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems: a survey,” *J Electron Imaging*, vol. 11, no. 2, p. 157, Apr. 2002, doi: 10.1117/1.1455013.
- [4] B. Fuchs, L. Le Coq, S. Rondineau, and M. D. Migliore, “Fast Antenna Far-Field Characterization via Sparse Spherical Harmonic Expansion,” *IEEE Trans Antennas Propag*, vol. 65, no. 10, pp. 5503–5510, Oct. 2017, doi: 10.1109/TAP.2017.2738059.
- [5] A. Schmitz, T. Karolski, and L. Kobbelt, “Using Spherical Harmonics for Modeling Antenna Patterns.”
- [6] Arthur and John W, “Understanding Geometric Algebra for Electromagnetic Theory.”
- [7] D. S. Arsed Hussain, “Properties of Spherical Harmonics,” 2014.
- [8] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*. 2013. doi: 10.1016/C2009-0-30629-7.
- [9] F. R. Varela, M. S. Castañer, and B. Galocha Iragüen, “Multi-Level Spherical Wave Expansion for Fast Near-Field to Far-Field Transformation.”
- [10] Javier Montalt Tordera, “<https://github.com/jmontalt/harmonicY>.”
- [11] MATHWORKS, “<https://es.mathworks.com/help/dsp/ref/qrsolver.html>.”
- [12] J. Rahola, F. Belloni, and A. Richter, “Modelling of radiation patterns using scalar spherical harmonics with vector coefficients; Modelling of radiation patterns using scalar spherical harmonics with vector coefficients,” 2009.
- [13] H. Arai and N. Ishii, “Sampling Points Reduction in Spherical Scanned TRP Measurement.”
- [14] H. Nyquist, “Certain Topics in Telegraph Transmission Theory Classic Paper.”
- [15] M. Mhedhbi, S. Avrillon, and B. Uguen, “Comparison of vector and Scalar Spherical Harmonics expansions of UWB antenna patterns,” in *Proceedings of the 2013 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications, ICEAA 2013*, 2013, pp. 1040–1043. doi: 10.1109/ICEAA.2013.6632401.

# Apéndice

## Sistemas de referencia y distribución de las medidas

### Introducción al escenario de medidas

En primer lugar, se explicará cómo están distribuidas las muestras de radiación de test alrededor del espacio para imitar de la manera más fiel posible a la realidad esa distribución espacial en nuestro software. Para ello sirve de apoyo el mostrar cuáles son las condiciones en las que se realizaron la toma de muestras de radiación en una cámara anecoica algo distinta de las habituales.

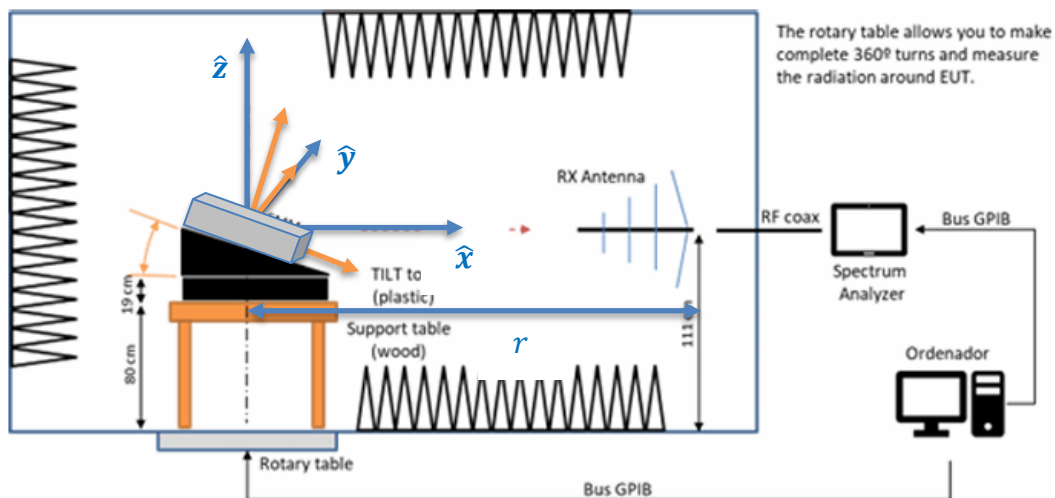


Figura Ap. 1: Set-up de medidas de radiación tomadas en cámara anecoica

En la figura Figura Ap. 1: Set-up de medidas de radiación tomadas en cámara anecoica se muestra el escenario de medida del trabajo. Acerca de este escenario cabe destacar una serie de ideas importantes:

1. La **antena receptora** encargada de captar la radiación emitida por el dispositivo bajo test está **completamente fija**. Esto quiere decir que el procedimiento de medida del campo radiado será diferente del método tradicional en el que para distancia fija 'r' se hace variar la elevación y azimut de la antena receptora con el dispositivo radiante fijo para obtener el campo radiado en direcciones genéricas del espacio ( $r, \theta, \varphi$ ).

2. Se dispone de una mesa rotatoria y una cuña sobre la que se apoya el dispositivo radiante. Estos dos elementos a la par nos dan diferentes cortes del diagrama de radiación del dispositivo para direcciones genéricas del espacio  $(\theta, \varphi)$ , obviando desde este momento que 'r' será un parámetro fijo del sistema que consideraremos igual a 1 por simplificar nuestro estudio.
3. El hecho de inclinar y rotar el dispositivo con la antena receptora fija equivale a decir lo siguiente matemáticamente hablando:
  - a. En la Figura Ap. 1 se distinguen 2 sistemas de referencia:
    1. En azul consideraremos un sistema de referencia **fijo**  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  del cual escogeremos como referencia el vector unitario  $\hat{x}$  ya que describe la dirección en la que sitúa nuestra antena receptora.
    2. En naranja consideraremos un sistema de referencia **móvil**  $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ . Sobre este sistema de referencia móvil se tratan de dar una coordenadas  $(\theta, \varphi)$  del vector  $\hat{x}$ . Estas coordenadas cambiarán para cada paso de la mesa rotatoria  $(\Delta\phi)$  y para cada inclinación de la cuña sobre la que se apoya el dispositivo  $\Delta\theta' = \Delta(90^\circ - \theta)$ . En el siguiente apartado se discutirán sus valores.
  - b. Debido al hecho de entender el sistema de captación cómo se ha explicado en el apartado (a.) se hará uso de una serie de **matrices de rotación** que modelaran los movimientos descritos en el escenario de medida.

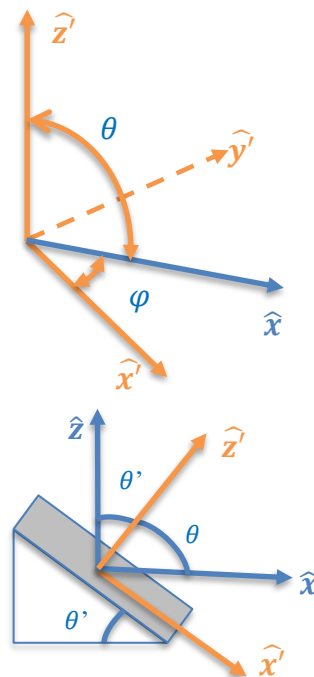


Figura Ap. 2: Diferentes vistas de los sistemas de referencia utilizados con  $\theta + \theta' = 90^\circ$

## Distribución de las medidas: posiciones del dispositivo

Como se ha descrito en el anterior apartado, las distintas inclinaciones y posiciones en azimut del dispositivo respecto a la posición de la antena receptora ( $\hat{x}$ ) nos darán las direcciones en el espacio de las muestras captadas por dicha antena. Vamos a establecer como referencia experimentos ya realizados en los que el procedimiento de obtención de las medidas ha seguido las siguientes normas:

1. Se elige la orientación referencia del dispositivo sobre la que se van a dar las coordenadas  $(\theta, \varphi)$  de cada muestra obtenida tras cada movimiento del dispositivo.

Si nos fijamos en la Figura Ap. 2 esto sería equivalente a alinear el vector  $\hat{z}'$  con  $\hat{z}$  (fijo). Esto es lo mismo que considerar una inclinación  $\theta'$  nula para el dispositivo dada una orientación en azimut elegida por nosotros. Esta orientación se ha elegido conforme a las vistas que se muestran en la siguiente figura.

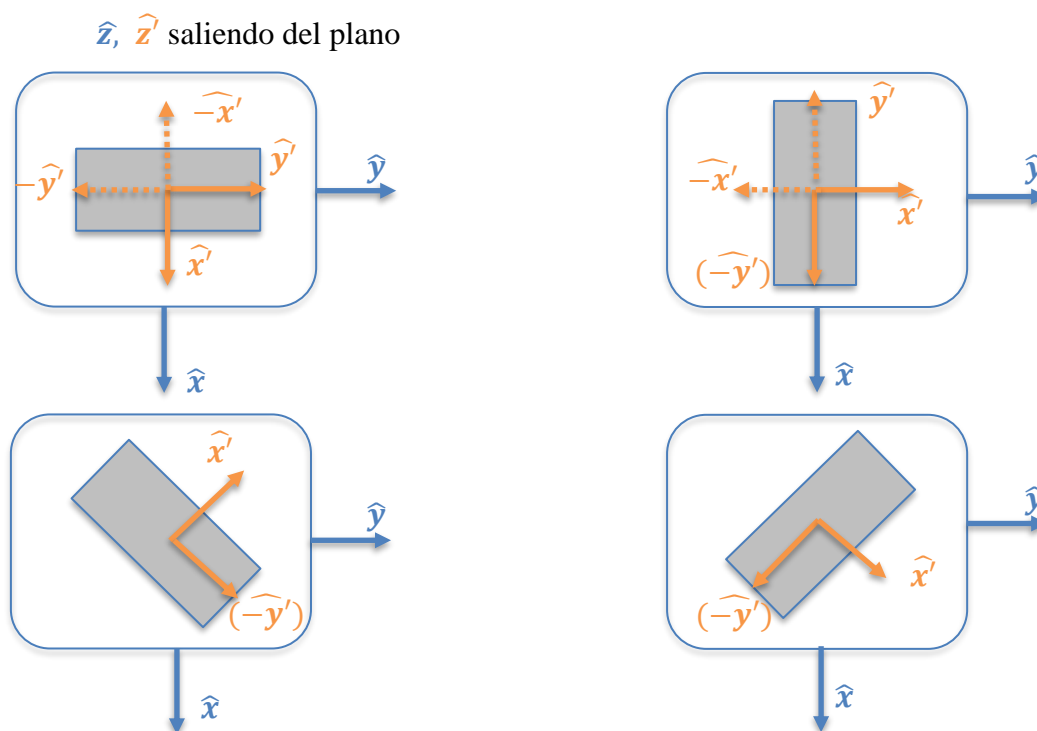


Figura Ap. 3: Posibles orientaciones del dispositivo en el plano XY con inclinación nula

2. El segundo paso es, una vez fijada la orientación del dispositivo con inclinación nula, inclinarlo siempre de atrás hacia delante, es decir, desde  $-\hat{x}$

hacia  $\hat{x}$ . Estas inclinaciones están fijadas por las condiciones reales en las que se realiza experimento las cuales dificultan inclinar el dispositivo con una resolución mayor a  $30^\circ$ . Además, resulta también complicado por condiciones de estabilidad ponerlo completamente vertical a la mesa rotatoria ( $\theta' = 90^\circ$ ). Todo esto supone el hecho de que no trabajaremos más que con inclinaciones de  $\theta' = 30^\circ, 60^\circ$ .

Es de interés volver a poner el foco en las vistas de la Figura Ap. 3 para aclarar que además de las orientaciones propuestas es realizable el conseguir las mismas orientaciones rotadas  $180^\circ$ , esto es en las dos primeras vistas cambiar  $\hat{x}$  por  $\hat{x}'$  y cambiar  $\hat{y}$  por  $\hat{y}'$ .

3. Finalmente, con el dispositivo ya inclinado, el último paso consistirá en ir girándolo en azimut controlando la mesa rotatoria de manera remota. Estas rotaciones pueden llegar a tener un paso con una resolución muy alta, (experimentalmente se consiguen  $\Delta\phi = 1^\circ$ ).

El objetivo de la siguiente sección trata de relacionar todo lo referente a lo explicado en este apartado con los datos que representarán la entrada a nuestro sistema diseñado en Matlab. Por ello es importante tener en mente las diferentes situaciones descritas acerca de las diferentes posiciones que puede tomar el dispositivo.

Cabe remarcar que la incertidumbre que causa en un primer momento esta forma alternativa de captar muestras de radiación es uno de los motivos por los que este trabajo cobra sentido.

## Ubicación de las muestras de radiación

El título de esta sección responde a la primera pregunta que nos debemos hacer para tratar de dar con modelos matemáticos que se ajusten a nuestro experimento: ¿Dónde se encuentran las muestras captadas por la antena receptora?, ¿Cuáles son las coordenadas  $(\theta, \varphi)$  del vector unitario  $\hat{x}$  (fijo) respecto al sistema móvil  $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$  en cada movimiento del dispositivo?

## Ángulos de Euler (“Yaw”, “Pitch” & “Roll”)

Los ángulos de Euler son una terna de ángulos  $\varphi, \theta, \psi$  los cuales pueden ser útiles para describir la posición de un sistema de referencia fijo respecto a un sistema de referencia móvil. Estos tres ángulos aplicados como secuencia de movimientos tienen gran importancia en campos como la robótica o la aeronáutica. Respecto a este segundo campo resulta interesante explicar brevemente lo que se conoce en inglés como “Yaw”, “Pitch” and “Roll” (“Guiño”, “Cabeceo” y “Balanceo”). Esta secuencia de tres movimientos ordenada modela la forma en la que los aviones despegan hacia la dirección deseada. El procedimiento es el siguiente (ver Figura Ap. 4):

Primero se realiza el “Yaw” o “Guiño”, que se trata de un giro que se hace alrededor del eje Z manteniendo fijo este eje (1<sup>er</sup> dibujo). A continuación, se realiza el “pitch” o “cabeceo”, que consiste en, una vez el avión está orientado en el plano XY, inclinarlo sobre el eje nuevo Y’ (2<sup>o</sup> dibujo). Finalmente se realiza un giro en el nuevo plano Z’Y’ con el eje X’’ fijo. Este movimiento es equivalente al balanceo de las alas del avión alrededor del morro.

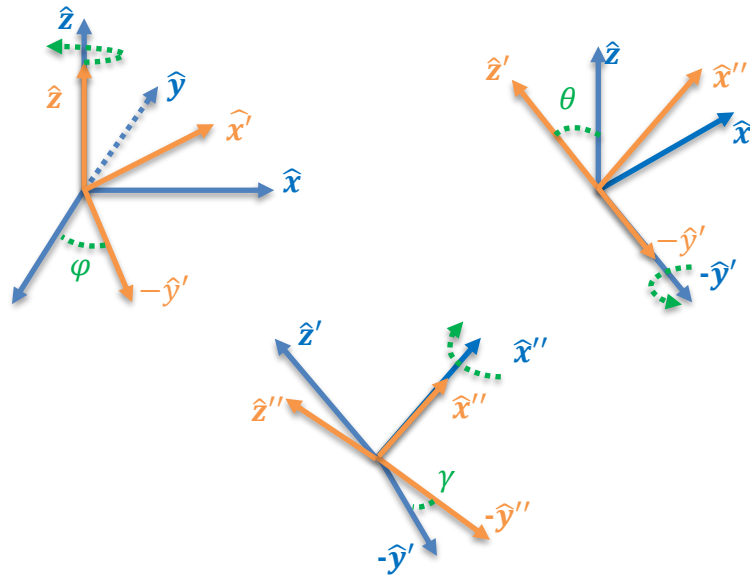


Figura Ap. 4: “Yaw”, “Pitch” and “Roll”. En azul: sistema de coordenadas anterior, en naranja: sistema de coordenadas tras aplicar rotación

## Ángulos de Euler: Aplicación al problema

Volviendo a la situación que nos ocupa en nuestro problema es de interés centrarnos únicamente en las rotaciones “yaw” y “pitch” que se han descrito en el anterior apartado, y en ese orden. Este hecho era de esperar ya que en el apartado en el que se habla de las diferentes posiciones del dispositivo (ver Figura Ap. 3), al orientar el dispositivo estamos aplicando una rotación en el plano XY original. La posterior inclinación del dispositivo tras tenerlo orientado es una rotación en el plano X’Z manteniendo el eje y’ fijo.

Una vez llegados a este punto cabe introducir un nuevo sistema de coordenadas que se suma al sistema de coordenadas fijo (que podríamos llamar el del sistema global) y al sistema de coordenadas móvil del dispositivo: el sistema de coordenadas referido a la mesa rotativa.

Pongámonos en la situación en la que ya hemos orientado nuestro dispositivo respecto al sistema de coordenadas global y que posteriormente lo hemos inclinado. El último paso es accionar la mesa rotatoria con el paso  $\Delta\varphi$  que ajustemos (hemos dicho anteriormente que a nivel experimental se ha conseguido  $\Delta\varphi = 1^\circ$ ). Por simplicidad vamos a ilustrar el caso (Figura Ap. 5) en el que orientamos el dispositivo de tal manera

que alineamos la terna de su sistema de coordenadas  $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$  con el sistema de coordenadas global  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ . Una vez lo tenemos orientado procedemos a inclinarlo un ángulo  $\theta'$  desde  $-\hat{x}'$  a  $\hat{x}'$ . Antes de imaginarnos que el dispositivo comience a rotar, es importante darnos cuenta de que este está sujeto a la rotación de la mesa. Este hecho se ilustra en la Figura Ap. 6 en la que se muestran los diferentes sistemas de coordenadas en el plano ZX y en el plano XY. Denotamos  $\hat{x}_m$  al vector unitario de nuestro nuevo sistema de coordenadas que se alinea con el vector unitario  $\hat{x}$  cuando  $\phi = 0^\circ$ .

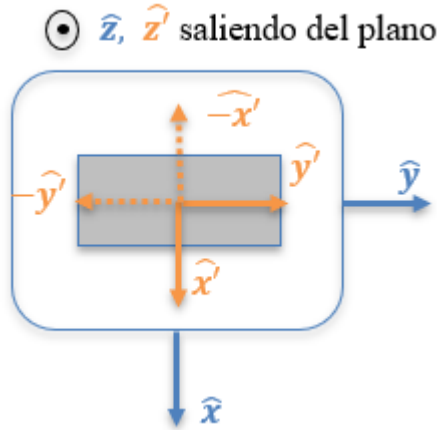


Figura Ap. 5: Orientación del dispositivo según los ejes del sistema de coordenadas global

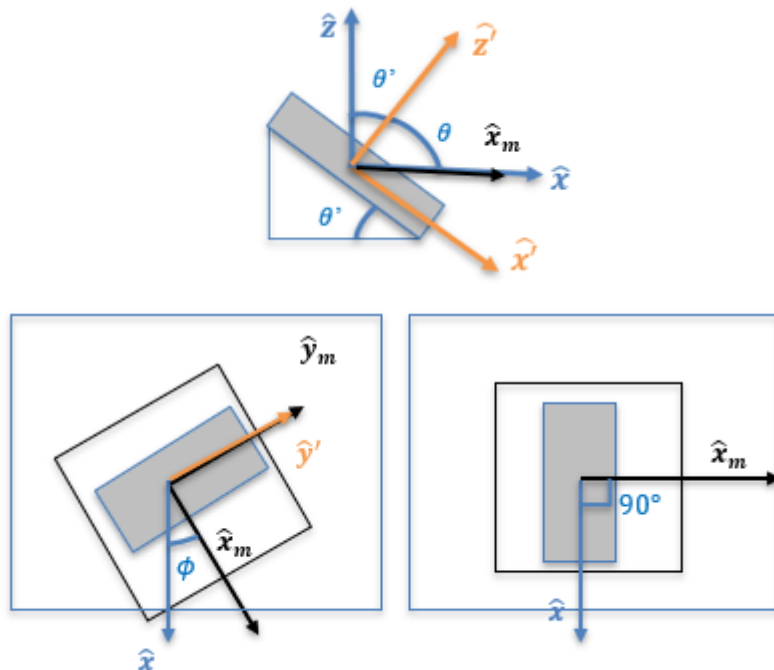


Figura Ap. 6: Orientación del dispositivo según los ejes del sistema de coordenadas global

No perder de vista que nuestro objetivo desde el principio es conocer la posición del vector unitario  $\hat{x}$  respecto al sistema de coordenadas dado por el dispositivo, ya que es en esa dirección donde ubicábamos nuestra antena receptora. Después de toda la descripción que se ha dado acerca de los movimientos aplicados al dispositivo y de conocer los sistemas de referencia que entran en juego, vamos a pasar a definir matemáticamente las transformaciones necesarias para lograr nuestro objetivo.

Partimos de la secuencia que queremos seguir en cuanto a sistemas de referencia:

$$\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_3$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x_m, y_m, z_m) \rightarrow (x', y', z')$$

Siendo  $\mathcal{S}_1$  el sistema de referencia global,  $\mathcal{S}_2$  el sistema de referencia asociado a la mesa rotativa y  $\mathcal{S}_3$  el sistema de referencia asociado al dispositivo radiante.

En primer lugar, para ir en el sentido  $\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  tendremos que aplicar la siguiente transformación:

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Con esta primera rotación podremos expresar el vector unitario  $\hat{x}$  en función del sistema de coordenadas asociado a la mesa rotatoria.

$$\begin{cases} x_m = \cos \phi \cdot x + \sin \phi \cdot y + 0 \cdot z \\ y_m = -\sin \phi \cdot x + \cos \phi \cdot y + 0 \cdot z \\ z_m = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z \end{cases}$$

$$\hat{x} = (1, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x_m = \cos \phi \cdot 1 + \sin \phi \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ y_m = -\sin \phi \cdot 1 + \cos \phi \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ z_m = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{cases}$$

$$\hat{x} = (\cos \phi, -\sin \phi, 0), \text{ tal que } \hat{x} \in \mathcal{S}_2$$

Nótese que lo que estamos haciendo no es más que una rotación en el plano XY manteniendo fijo el eje Z, es decir,  $z_m = z$ .

Llegados a este punto conviene recordar que para el caso descrito anteriormente decíamos que  $\phi = 0$  ya que los vectores unitarios  $\hat{y}_m, \hat{y}'$  coinciden (ver Figura Ap. 6). Para un caso genérico de orientación  $\phi \neq 0$  tendríamos algo como en la Figura Ap. 7 con  $\phi = 0$  y suponiendo que el dispositivo ha sido inclinado.

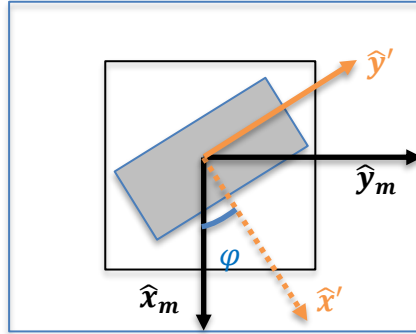


Figura Ap. 7: Orientación del dispositivo para  $\varphi \neq 0$  con  $\hat{x}'$  apuntando hacia abajo

Esta orientación  $\varphi \neq 0$  va a suponer el tener que realizar una rotación nuevamente en el plano XY para alinear  $\hat{y}_m$  con  $\hat{y}'$ , consecuentemente el vector  $\hat{x}_m$  se verá contenido en el plano que forman  $\hat{x}'$  y  $\hat{z}'$  tal y como sucede en el caso ilustrado en la Figura Ap. 6.

La rotación vendrá dada por la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix}$$

De manera equivalente al paso anterior sustituimos:

$$(x_m, y_m, z_m) = (\cos \phi, -\sin \phi, 0) = \hat{x} \quad \text{tal que } \hat{x} \in \mathcal{S}_2$$

Y al operar tendremos que:

$$(x'', y'', z'') = (\cos \varphi \cos \phi - \sin \varphi \sin \phi, -\sin \varphi \cos \phi - \cos \varphi \sin \phi, 0)$$

Una vez aplicada esta rotación en  $\varphi$  para modelar la orientación del dispositivo, solo nos quedará transformar las coordenadas resultantes según la inclinación  $\theta'$  que se haya aplicado. Esto es dejar el eje  $y''$  fijo y aplicar una rotación de  $\theta'$  en plano  $X'Z'$ :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta' & 0 & \sin \theta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta' & 0 & \cos \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

Sustituyendo y operando como en el paso anterior obtendremos la siguiente expresión para  $(x', y', z')$  :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \phi - \cos \theta' \cdot \sin \varphi \cdot \sin \phi \\ -\sin \varphi \cdot \cos \phi - \cos \varphi \cdot \sin \phi \\ \sin \theta' \cdot \cos \varphi \cdot \cos \phi + \sin \theta' \cdot \sin \varphi \cdot \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Esta será la expresión final teórica que manejaremos para calcular la posición del vector inicial  $\hat{x}$  respecto al sistema de referencia móvil del dispositivo. Estas coordenadas estarán bajo un sistema de coordenadas cartesiano. Como a nosotros nos interesa trabajar desde el principio en coordenadas esféricas ( $r = 1, \theta, \varphi$ ) o equivalentemente con un par inclinación-azimut  $(\theta, \varphi)$ , incluiremos un cambio de coordenadas típico de cartesianas a esféricas para  $(x', y', z')$ .

El diagrama de bloques que resume todo lo explicado en este apartado es el siguiente:

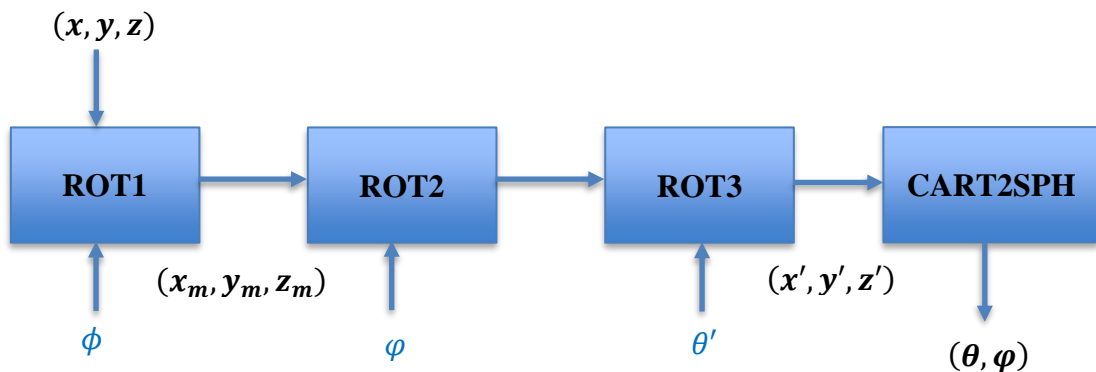


Figura Ap. 8: Diagrama de bloques de las transformaciones de coordenadas

Parámetros clave en este esquema serán el número de rotaciones  $\phi$  de la mesa que realicemos, así como las orientaciones  $\varphi$  del dispositivo y las inclinaciones  $\theta'$  que elijamos.

## Modelado de las muestras en Matlab

Para diseñar el algoritmo que nos permita simular el diagrama de bloques de la Figura Ap. 8 nos basaremos en otro diagrama de bloques adaptado a las características de Matlab, por ello la notación cambiará ligeramente.

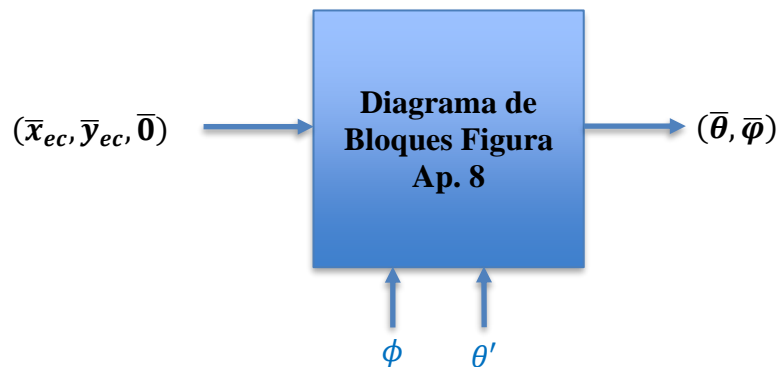


Figura Ap. 9: Diagrama de bloques de las transformaciones de coordenadas en Matlab

Nótese que como entrada al sistema tendremos una matriz N filas x 3 columnas  $(\bar{x}_{ec}, \bar{y}_{ec}, \bar{0})$  que indicará la posición de 'N' muestras dispuestas en el plano XY en coordenadas cartesianas (por eso  $\bar{z}_{ec} = \bar{0}$ ). Como además todas las coordenadas (x,y) estarán referidas a una esfera de radio fijo 'r' lo que veremos representado serán 'N' muestras equiespaciadas a lo largo del ecuador, tal y como se ve en la Figura Ap. 10.

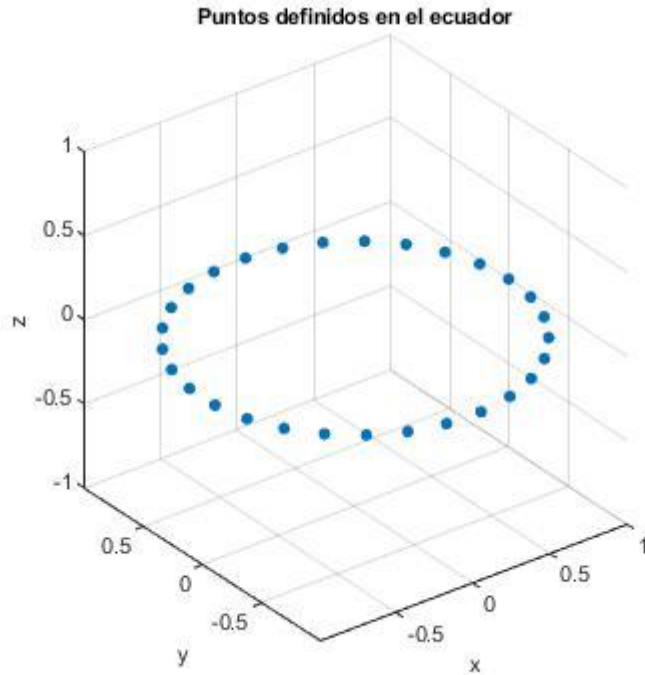


Figura Ap. 10: Muestras equiespaciadas en el ecuador

Es interesante comentar también que, como se ve en la Figura Ap. 9, no estamos alimentando al sistema con la rotación  $\varphi$ . Para ver por qué, recordemos la situación más sencilla en la que el dispositivo no se inclina y está orientado tal que los ejes de coordenadas de su sistema de referencia coinciden con los ejes globales de coordenadas que hemos establecido. La primera muestra que captará la antena receptora sería la correspondiente a  $(\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ)$ . La siguiente muestra que captará tras aplicar una rotación a la mesa de  $\Delta \varphi$  en el sentido contrario a las agujas del reloj será  $(\theta = 90^\circ, \varphi = -\Delta \varphi^\circ)$ , la tercera  $(\theta = 90^\circ, \varphi = -2 \cdot \Delta \varphi^\circ)$ , la cuarta  $(\theta = 90^\circ, \varphi = -3 \cdot \Delta \varphi^\circ)$ , y así sucesivamente hasta  $(\theta = 90^\circ, \varphi = -(N - 1) \cdot \Delta \varphi^\circ)$ , habiendo dado entonces una vuelta completa. Este comportamiento es posible modelarlo en Matlab sencillamente definiéndonos un vector  $\vec{\varphi}$  con 'N' muestras equiespaciadas un paso  $\Delta \varphi$ . Lo siguiente sería simplemente agrupar cada  $\varphi$  con  $\theta = 90^\circ$  y convertir a coordenadas cartesianas para obtener  $(\bar{x}_{ec}, \bar{y}_{ec}, \bar{0})$ .

Teniendo ya clara la idea de que los puntos en el ecuador serán nuestra referencia, el siguiente paso será elegir los ejes en el plano XY sobre los que se van a realizar las inclinaciones, así como el grado de cada inclinación que se vaya a aplicar. Esto es alimentar nuestro sistema con las rotaciones  $\phi, \theta'$ . En la Figura Ap. 11 se muestra un ejemplo de a lo que nos referimos a nivel gráfico.

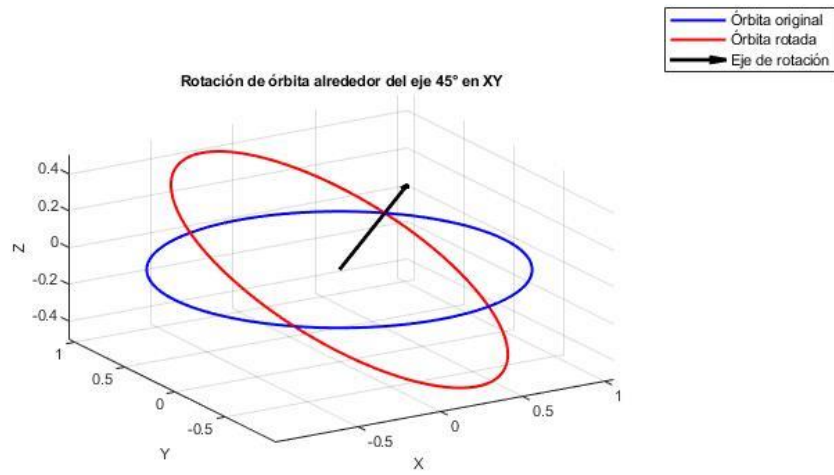


Figura Ap. 11: Órbita inclinada sobre un eje de inclinación  $\phi = 45^\circ$