



Universidad
Zaragoza

TRABAJO FIN DE GRADO

VACÍOS DE MATERIA OSCURA

Autor:

Marc Gras Sanz

Director:

Javier Redondo Martín

Curso 2023-2024

FACULTAD DE CIENCIAS

Grado en Física

Departamento de Física Teórica

Índice

1. Inestabilidad gravitacional en el régimen lineal	1
1.1. Teoría de Jeans	2
1.2. Universo en expansión	4
1.3. Colapso en Relatividad General	6
2. Caso no lineal en simetría esférica	8
2.1. Modelo esférico	8
3. Aplicación del modelo esférico a vacíos	12
3.1. Cálculo de la masa y desplazamiento en coordenadas comóviles	12
3.2. Evolución del sistema	13
3.3. Criterios de aparición de <i>shell-crossing</i>	14
3.3.1. Primer criterio	15
3.3.2. Segundo criterio	16
4. Simulación y resultados	17
4.1. Perfil de densidad exponencial	17
4.1.1. Criterios de formación en el perfil exponencial	18
4.1.2. Otro perfil exponencial	19
4.2. Perfil de densidad “Top-hat” invertido	19
4.2.1. Criterios de formación en el perfil escalón	21
5. Dependencia del <i>shell-crossing</i> con los parámetros del perfil	22
6. Conclusiones	24
7. Bibliografía	25
A. Anexo	26
A.1. Deducción de la ecuación de evolución de las fluctuaciones de densidad en Relatividad General (1.33) a partir de la ecuación en tiempo conforme	26
A.2. Evolución de las cáscaras	27
A.3. Evolución del desplazamiento comóvil	28

Códigos del TFG

En el transcurso de este trabajo se han desarrollado códigos en lenguaje de programación *Python* para la simulación del modelo propuesto. Los programas principales pueden ser consultados en el siguiente repositorio de GitHub: <https://github.com/MarcSanzPhys/Voids-of-Dark-Matter-TFG>

Introducción

La inestabilidad gravitatoria en el universo en expansión produce la formación de estructuras que, en el caso de la materia oscura, crea filamentos que forman halos donde se encuentran, lugar en el que se forman las galaxias. Esto deja vacíos en el espacio entre filamentos. En el caso de la materia oscura axiónica, prácticamente la totalidad de esta puede estar en forma de minicúmulos [1], dejando una pequeña cantidad de materia oscura entre ellos [2]. La probabilidad de que la tierra cruce un minicúmulo de axiones es muy pequeña, así que el conocimiento de los vacíos es imprescindible para poder entender los experimentos de búsqueda directa de materia oscura [1].

En la gran mayoría de los modelos en cosmología, las galaxias y el resto de grandes estructuras en el universo se desarrollan a partir de la inestabilidad gravitacional producida por fluctuaciones de densidad de pequeña amplitud. La evolución de cúmulos de materia es ampliamente conocida, es por ello que, partiendo de un modelo de simetría esférica conocido para estos [3], nuestro objetivo es aplicarlo a una situación de vacío (región de menor densidad respecto de la densidad de fondo) y describir su evolución y los fenómenos a los que da lugar para entender su comportamiento.

Inicialmente, en la sección 1 realizamos una descripción de las inhomogeneidades de materia, así como su evolución, en un universo en expansión en aproximación post-newtoniana basado en [4], tras lo que comentamos su descripción en Relatividad General [4],[5].

A continuación, en la sección 2 describimos un modelo esférico para distribuciones de materia oscura estudiado por Edward W. Kolb e Igor I. Tkachev en [3], donde se aplica a cúmulos de materia oscura. Este modelo es relevante en el estudio de minicúmulos de axiones, cuerdas cósmicas y lentes gravitacionales entre otros fenómenos.

Finalmente, en las secciones 3, 4 y 5, procedemos a aplicar este modelo al estudio de vacíos de materia oscura para diferentes condiciones y tratamos de predecir y caracterizar su comportamiento, así como la fenomenología a la que dan lugar a partir de sus perfiles de densidad iniciales. Un fenómeno al que dan lugar es el *shell-crossing* (cruce de cáscaras), que es el momento en el cual las trayectorias de materia oscura inicialmente distante se intersecan por primera vez. Este fenómeno será de especial interés y el tema central de este trabajo, ya que nos permitirá comprender cómo se comportan los vacíos y sus fronteras, y ayudar en el desarrollo de experimentos de detección directa presentes y futuros.

1. Inestabilidad gravitacional en el régimen lineal

La inestabilidad gravitacional es una propiedad natural de la gravedad y da lugar a la formación de estructuras en el universo. Para esto se requiere una fuerza de largo alcance y la gravedad es la única candidata (la fuerza electromagnética es también de largo alcance pero debido a la neutralidad de la carga no afecta a grandes escalas). Si imaginamos una distribución de materia con pequeñas irregularidades, las regiones de mayor densidad ejercen mayor fuerza gravitacional sobre las regiones vecinas tendiendo a reunir mayor cantidad de materia y creciendo su densidad y atracción, esto implica que las distribuciones irregulares de materia son inestables

bajo la influencia de la gravedad incrementándose estas irregularidades con el tiempo.

Al estudiar la inestabilidad gravitacional y la formación de estructuras en el universo trabajamos en aproximación post-newtoniana para describir la evolución de las distribuciones de materia a escalas inferiores al horizonte de Hubble para materia no relativista, como se propone en [4] y [6]. El estudio de la inestabilidad gravitacional en Relatividad General es necesario para escalas superiores al horizonte de Hubble y supone correcciones de un orden de magnitud a las soluciones de la teoría post-newtoniana.

A grandes escalas la materia se puede describir aproximadamente como un fluido perfecto, por lo que podemos caracterizarla para un tiempo dado por la distribución de densidad de masa $\rho(\vec{x}, t)$, la entropía por unidad de masa $S(\vec{x}, t)$ y el campo vectorial de velocidades $\vec{V}(\vec{x}, t)$. Estas cantidades satisfacen las ecuaciones de hidrodinámica:

- La ecuación de continuidad, debida a la conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 . \quad (1.1)$$

- La ecuación de Euler, debida a la conservación del momento

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V} + \frac{\nabla P}{\rho} + \nabla \phi = 0 , \quad (1.2)$$

donde P es la presión del fluido y ϕ el potencial gravitatorio.

- La conservación de la entropía, ya que la entropía de un elemento de materia se conserva

$$\frac{dS(\vec{x}, t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) S = 0 . \quad (1.3)$$

- La ecuación de Poisson que determina el potencial gravitatorio local

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho . \quad (1.4)$$

Estas ecuaciones, junto a la ecuación de estado $P = P(\rho, S)$, forman un sistema de siete ecuaciones que nos permiten deducir las siete funciones desconocidas ρ , \vec{V} , S , ϕ , P . Las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) contienen primeras derivadas temporales, lo que supone cinco constantes de integración en función de las coordenadas espaciales. Las ecuaciones de hidrodinámica son ecuaciones no lineales, pero para el estudio de perturbaciones pequeñas sobre un fondo homogéneo e isótropo, resulta apropiado linealizarlas.

1.1. Teoría de Jeans

Veamos primero la evolución de una perturbación en un universo estático sin expansión asumiendo homogeneidad e isotropía con una densidad de masa constante $\rho(\vec{x}, t) = cte$. Esto resulta inconsistente con las ecuaciones de hidrodinámica debido a que la densidad de masa permanece invariable solo si la masa se encuentra en reposo y la fuerza gravitacional desaparece,

implicando que la ecuación de Poisson no se cumple. Esto se debe a que el espacio-tiempo es dinámico y lo corregiremos añadiendo la expansión del universo en el siguiente apartado.

Perturbamos la distribución de materia de manera que

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}, t) &= \rho_0 + \delta\rho(\vec{x}, t), & \vec{V}(\vec{x}, t) &= \vec{V}_0 + \delta\vec{v} = \delta\vec{v}(\vec{x}, t), \\ \phi(\vec{x}, t) &= \phi_0 + \delta\phi(\vec{x}, t), & S(\vec{x}, t) &= S_0 + \delta S(\vec{x}, t),\end{aligned}\tag{1.5}$$

donde las perturbaciones son pequeñas, tal que $\delta\rho \ll \rho_0$, $\delta\vec{v} \ll \vec{V}$, $\delta\phi \ll \phi_0$ y $\delta S \ll S_0$. Así, la presión es

$$P(\rho, S) = P(\rho_0 + \delta\rho, S_0 + \delta S) = P_0 + \delta P(\vec{x}, t)\tag{1.6}$$

y en aproximación lineal su perturbación δP se puede expresar en términos de las perturbaciones de densidad y entropía tal que

$$\delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \delta\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho \delta S = c_s^2 \delta\rho + \sigma \delta S\tag{1.7}$$

donde $c_s^2 = (\partial P / \partial \rho)_S$ es el cuadrado de la velocidad del sonido y $\sigma = (\partial P / \partial S)_\rho$.

Sustituyendo las ecuaciones (1.5) y (1.7) en (1.1)-(1.4) y tomando solo los términos lineales en las perturbaciones, obtenemos

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla(\delta\vec{v}) = 0,\tag{1.8}$$

$$\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \delta\rho + \frac{\sigma}{\rho_0} \nabla \delta S + \nabla \delta\phi = 0,\tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \delta S}{\partial t} = 0,\tag{1.10}$$

$$\nabla^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\rho.\tag{1.11}$$

De la ecuación (1.10) obtenemos que la entropía es una función de las coordenadas espaciales independiente del tiempo, $\delta S(\vec{x}, t) = \delta S(\vec{x})$. Ahora, tomando la divergencia de (1.9) e introduciendo la ecuación de continuidad (1.8) y la ecuación de Poisson (1.11) para dejar todo en función de $\delta\rho$ obtenemos

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \delta\rho - 4\pi G \rho_0 \delta\rho = \sigma \nabla^2 \delta S(\vec{x}),\tag{1.12}$$

que es una ecuación lineal para $\delta\rho$ donde la entropía actúa como fuente.

Considerando un plasma no-relativista con $dS = 0$. La ecuación resultante es una ecuación de ondas con masa imaginaria con soluciones $\propto e^{i(\omega t - kx)}$ y $\omega = \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0}$. Si la presión (velocidad del sonido) es grande, ω es real y la solución oscilatoria (ondas acústicas), pero si $c_s^2 k^2 < 4\pi G \rho_0$ la inestabilidad gravitatoria crea una parte imaginaria, que produce crecimiento-decrecimiento exponencial de las ondas. Para unos valores fijos de c_s y ρ esto siempre sucede

para modos de longitud de onda superior a la longitud de onda de Jeans: $\lambda_J \sim c_s \sqrt{G\rho}$. Es decir, las perturbaciones grandes colapsarán, mientras que las pequeñas oscilarán [7].

1.2. Universo en expansión

En un universo en expansión, homogéneo e isótropo, la densidad de masa del fondo es una función del tiempo, $\rho = \rho_0(t)$, y las velocidades de fondo \vec{V} obedecen la ley de Hubble

$$\vec{V} = \vec{V}_0 = H(t) \cdot \vec{x}, \quad (1.13)$$

y sustituyendo esto en (1.1) obtenemos la ecuación

$$\dot{\rho}_0 + 3H\rho_0 = 0, \quad (1.14)$$

que nos dice que la masa total de materia no relativista se conserva. Tomando la divergencia de la ecuaciones de Euler (1.2) junto a la ecuación de Poisson (1.4) obtenemos la segunda ecuación de Friedmann

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0. \quad (1.15)$$

Si ahora retomamos las perturbaciones (1.5), ignorando la de entropía, ya que la entropía de un fluido no relativista es despreciable frente a la densidad de masa, y las introducimos en las ecuaciones de continuidad, Euler y Poisson respectivamente, obtenemos un sistema de ecuaciones linealizadas para pequeñas perturbaciones

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \delta \vec{v} + \nabla (\delta \rho \vec{V}_0) = 0, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + (\vec{V}_0 \cdot \nabla) \delta \vec{v} + (\delta \vec{v} \cdot \nabla) \vec{V}_0 + \frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \delta \rho + \nabla \delta \phi = 0, \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 \delta \phi = 4\pi G \delta \rho. \quad (1.18)$$

La velocidad de Hubble \vec{V}_0 depende explícitamente de las coordenadas espaciales \vec{x} , con lo que la transformada de Fourier respecto de las coordenadas euclídeas \vec{x} no reduce estas ecuaciones a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas [4]. Por esto, es conveniente usar las coordenadas lagrangianas \vec{q} (coordenadas comóviles con el flujo de Hubble), relacionadas con las coordenadas euclídeas mediante $\vec{x} = a(t)\vec{q}$, donde $a(t)$ es el factor de escala. Al introducir este cambio de coordenadas las derivadas parciales de las funciones van a cambiar, para una función genérica $f(\vec{x}, t) = f(a(t)\vec{q}, t)$, las derivadas temporales pasan a ser

$$\left(\frac{\partial f(\vec{x} = a\vec{q}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{q}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \dot{a} q^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_t \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\vec{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\vec{q}} - (\vec{V}_0 \cdot \nabla_{\vec{x}}), \quad (1.19)$$

mientras que las derivadas espaciales se relacionan tal que

$$\nabla_{\vec{x}} = \frac{1}{a} \nabla_{\vec{q}}. \quad (1.20)$$

Sustituyendo esto en las ecuaciones (1.16)-(1.18) obtenemos

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{a} \nabla \delta \vec{v} = 0, \quad (1.21)$$

$$\left(\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} \right) + H \delta \vec{v} + \frac{c_s^2}{a} \nabla \Phi + \frac{1}{a} \nabla \delta \phi = 0, \quad (1.22)$$

$$\nabla^2 \delta \phi = 4\pi G a^2 \rho_0 \Phi. \quad (1.23)$$

Notar que hemos reescrito $\Phi \equiv \delta \rho / \rho_0$ (no confundir con el potencial gravitatorio ϕ), y $\nabla \equiv \nabla_{\vec{q}}$ y ∇^2 contienen derivadas respecto de las coordenadas lagrangianas. Finalmente, tomando la divergencia de la expresión (1.22) y expresándolo todo en función del contraste Φ mediante las ecuaciones de continuidad y Poisson, se deduce

$$\boxed{\ddot{\Phi} + 2H\dot{\Phi} - \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \Phi - 4\pi G \rho_0 \Phi = 0} \quad (1.24)$$

Esta ecuación describe la evolución de las fluctuaciones de densidad en un universo en expansión. Observamos que si nos deshacemos de la gravedad tenemos una ecuación de ondas, cuya fuente es el término de presión que aparece con el laplaciano. Si la sustancia tiene presión, habrá ondas de presión (comúnmente ondas de sonido). La gravedad, en cambio, actúa como un agente desestabilizador, como una masa imaginaria para el oscilador, que hace que la amplitud de las oscilaciones crezca con el tiempo. Por último, es la expansión del universo la que produce el amortiguamiento de estas oscilaciones conforme se propagan.

Consideremos la evolución de una perturbación de materia oscura ($c_s = 0$) cuando esta domina la expansión del universo y cuando la radiación determina $H = \dot{a}/a$. En el primer caso, por la primera ecuación de Friedmann, tenemos que $4\pi G \rho = 3H^2/2$. Introduciendo el ansatz $\Phi \propto t^b$ y $a(t) \propto t^{2/3}$ obtenemos una solución creciente $\Phi \sim a$ que nos permite concluir que las fluctuaciones de materia oscura crecen tanto como el factor de escala en un universo dominado por esta (y no exponencialmente como en el universo estático mencionado antes). En el caso en que la expansión está dominada por radiación, esta se considera prácticamente homogénea, ya que dentro del horizonte las fluctuaciones de radiación oscilan y su efecto se promedia siendo nulo, así que no contribuye al potencial gravitatorio y la evolución de la materia oscura sigue la expresión (1.24) con $c_s = 0$ igualmente, pero con $a(t) \propto t^{1/2}$. Entonces la solución creciente (inestabilidad gravitatoria) está suprimida a $\Phi \sim \log t$. Las fluctuaciones de materia oscura casi no pueden crecer durante la dominación de radiación [8], [9].

1.3. Colapso en Relatividad General

El análisis de la inestabilidad gravitacional en la teoría newtoniana tiene sus limitaciones y falla para perturbaciones en escalas superiores al radio de Hubble [4],[5]. Es necesaria la implementación de la Relatividad General para obtener una descripción completa para cualquier distribución de materia a cualquier escala. La ausencia de un sistema de coordenadas fijo privilegiado en relatividad general nos lleva a la aparición de un grado de libertad gauge que provoca la aparición de modos de perturbación ficticios que no son una descripción de inhomogeneidades reales, sino una consecuencia de las propiedades del sistema de coordenadas utilizado.

Para estudiar modos de perturbación reales y ficticios en el marco de la Relatividad General se requiere de un conjunto completo de variables. Concretamente, necesitamos las perturbaciones de campo de materia y las perturbaciones de la métrica.

La métrica de un universo Friedmann con pequeñas perturbaciones se puede escribir como

$$ds^2 = [^{(0)}g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}(x^\gamma)] dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.25)$$

donde $|\delta g_{\alpha\beta}| \ll |^{(0)}g_{\alpha\beta}|$. En coordenadas de tiempo conforme la métrica del fondo se convierte en

$$^{(0)}g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (1.26)$$

Las perturbaciones de la métrica, $\delta g_{\alpha\beta}$, se pueden clasificar en tres tipos: perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales. Esta clasificación se basa en las propiedades de simetría del fondo homogéneo e isótropo, que para un tiempo dado es invariante respecto al grupo de traslaciones y rotaciones espaciales.

La componente δg_{00} se comporta como un escalar bajo estas rotaciones, por lo que

$$\delta g_{00} = 2a^2\phi, \quad (1.27)$$

donde ϕ es un 3-escalar.

Las componentes espacio-temporales δg_{0i} se pueden descomponer en la suma del gradiente espacial de un escalar B y un vector S_i con divergencia nula

$$\delta g_{0i} = a^2(B_{,i} + S_i). \quad (1.28)$$

La coma denota derivación respecto a la correspondiente coordenada espacial. El vector S_i cumple $S^i_{,i} = 0$, por lo que posee dos componentes independientes.

Las componentes δg_{ij} , que se comportan como un tensor bajo 3-rotaciones, se pueden escribir como la suma

$$\delta g_{ij} = a^2(2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}), \quad (1.29)$$

donde ψ y E son funciones escalares, el vector F_i tiene divergencia nula ($F^i_{,i} = 0$) y el 3-tensor h_{ij} cumple $h^i_i = 0$ y $h^i_{j,i} = 0$.

Contando el número de funciones independientes en $\delta g_{\alpha\beta}$, tenemos cuatro funciones para las perturbaciones escalares, otras cuatro para las vectoriales (dos 3-vectores con una ligadura cada uno) y dos funciones para las tensoriales (un 3-tensor simétrico tiene seis componentes independientes y hay cuatro ligaduras). Por lo que tenemos diez funciones en total, que coincide con el número de componentes independientes de $\delta g_{\alpha\beta}$.

Para obtener las ecuaciones de las perturbaciones tenemos que linealizar las ecuaciones de Einstein para pequeñas inhomogeneidades sobre un universo Friedmann,

$$G_{\beta}^{\alpha} \equiv R_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\beta}^{\alpha}R = 8\pi GT_{\beta}^{\alpha}. \quad (1.30)$$

Ahora, para una métrica con una pequeña perturbación el tensor de Einstein se puede escribir como $G_{\beta}^{\alpha} = {}^{(0)}G_{\beta}^{\alpha} + \delta G_{\beta}^{\alpha} + \dots$, donde $\delta G_{\beta}^{\alpha}$ es el término lineal en las perturbaciones. Análogamente podemos linealizar el tensor energía-momento, con lo que obtenemos las ecuaciones de Einstein para perturbaciones en el régimen lineal

$$\delta G_{\beta}^{\alpha} = 8\pi G \delta T_{\beta}^{\alpha}. \quad (1.31)$$

Notar que ni $\delta G_{\beta}^{\alpha}$ ni $\delta T_{\beta}^{\alpha}$ son invariantes gauge pero, en conjunto con las perturbaciones a la métrica, podemos construir cantidades invariantes gauge.

Así, vemos como en Relatividad General hay diferentes tipos de perturbaciones y no existe una descripción universal debido a las transformaciones gauge. Hay diversas cantidades invariantes gauge que se pueden construir a partir de las variables de la métrica y la materia, en concreto es útil definir

$$\bar{\rho}\Delta \equiv \delta\rho + \bar{\rho}'(v + B), \quad (1.32)$$

donde Δ se llama contraste de densidad comóvil ya que se reduce al contraste de densidad en gauges comóviles, donde $v = B = 0$ (perturbación de velocidad). A partir de esta definición se puede derivar la versión relativista de la ecuación (1.24) para describir las fluctuaciones de densidad a cualquier escala. Hemos realizado el cálculo para un Universo formado por materia no-relativista¹

$$\boxed{\ddot{\Delta} + 2H\dot{\Delta} - \frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2\Delta - 4\pi G\bar{\rho}\Delta = 0} \quad (1.33)$$

La principal diferencia es el cambio del contraste Φ al contraste comóvil Δ que es invariante gauge e incluye las perturbaciones de velocidad de la métrica. Por lo demás, la ecuación es equivalente por haber sido derivada para materia no-relativista.

¹Los detalles de la determinación de la expresión (1.33) se encuentran en la sección A.1 del anexo.

2. Caso no lineal en simetría esférica

El tratamiento post-newtoniano realizado en el apartado 1 es de aplicación para fluidos no relativistas, entre los que se encuentran los bariones tras su desacople y la materia oscura fría, siendo esta última nuestro fluido de interés.

Hasta el momento hemos tratado la evolución de las fluctuaciones de densidad en el régimen lineal, donde $|\Phi| \ll 1$. Pero, para entender la formación de estructuras donde $|\Phi| \gg 1$ hay que adentrarse en el régimen no lineal. Esto trae consigo complicaciones en el análisis y lleva al uso de simulaciones numéricas. En nuestro caso, vamos a limitar el análisis a un modelo simplificado con un alto grado de simetría que nos permite estudiar la evolución no lineal analíticamente, basado en el usado en [3].

La consideración de simetría esférica presenta una serie de ventajas que simplifican considerablemente el análisis. En primer lugar, el problema se reduce a simplemente dos coordenadas; radio y tiempo. En segundo lugar, la evolución del fondo no se verá afectada por la existencia de una perturbación y la propia perturbación evolucionará de forma independiente a este. Esto es consecuencia del teorema de Birkhoff [10] que nos dice que la gravedad a una distancia r únicamente depende de la masa encerrada en una esfera de radio r y no de cómo se encuentra distribuida ni del fondo. Y en tercer lugar, nos permite tratar a las perturbaciones como una serie de diferentes cáscaras esféricas de masa concéntricas.

De ahora en adelante pasamos a hablar de la densidad de materia oscura, ρ_{DM} , y parametrizamos sus fluctuaciones mediante

$$\Phi \equiv \frac{\delta\rho_{DM}}{\langle\rho_{DM}\rangle} = \frac{\rho_{DM} - \langle\rho_{DM}\rangle}{\langle\rho_{DM}\rangle} \quad (2.1)$$

donde $\langle\rho_{DM}\rangle$ es la densidad promedio de materia oscura. Cuando este parámetro toma valores $\Phi \geq 0$ tenemos una sobredensidad de materia oscura, mientras que cuando $\Phi \leq 0$ tenemos una situación de vacío (vacío perfecto ideal cuando $\Phi = -1$). Realmente lo que nos encontramos son regiones donde $\Phi < 0$ a las que llamamos vacíos, pero que no son más que regiones con una densidad por debajo del promedio del fondo. Notar la asimetría de la densidad promedio debido a que pueden existir situaciones en que $\Phi > 1$, pero no con $\Phi < -1$.

2.1. Modelo esférico

Procedemos a aplicar el modelo propuesto en [3], concebido para estudiar la formación y evolución de cúmulos, a los vacíos de materia oscura.

Consideremos una región del espacio de radio r que contiene un vacío de materia sin presión en un universo en expansión. La masa total contenida en esta región de radio r , M_t , es la integral del movimiento tanto como se expande la región. Como estamos considerando escalas inferiores al radio de Hubble, podemos considerar la radiación homogénea y su evolución temporal vendrá determinada por la expansión general del universo y no por las condiciones locales.

La ecuación del movimiento del radio de la región es

$$\ddot{r} = -\frac{8\pi G}{3}\rho_R - \frac{GM_t}{r^2}, \quad (2.2)$$

donde los subíndices R (y más adelante M) en la densidad hacen referencia a radiación y materia respectivamente. El primer término proviene de la segunda ecuación de Friedmann que involucra la segunda derivada del factor de escala y nos habla de la aceleración debida a la radiación, mientras que el segundo término es la ley de gravitación universal de Newton, siendo la aceleración debida a la materia. Es conveniente cambiar a coordenadas de tiempo conforme, $d\eta = dt/a(t)$, y reescribir esta ecuación en el sistema de referencia comóvil, $r = a(\eta)R_\xi(\eta)\xi$, donde ξ es un índice comóvil para una cáscara esférica y $R_\xi(\eta)$ mide la desviación del movimiento de la cáscara respecto del "flujo de Hubble", es decir la expansión homogénea e isótropa de un universo Friedmann. Si tenemos en cuenta que cada cáscara esférica presenta una evolución independiente, omitimos por comodidad el índice ξ .

Asumimos que el factor de escala $a(t)$ satisface las ecuaciones de Einstein para un universo con $\Omega_0 = 1$ compuesto por radiación y materia sin presión

$$a'^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_M + \rho_R)a^4 \quad , \quad a'' = \frac{4\pi G}{3}(\rho_M + \rho_R)a^3 \quad (2.3)$$

donde una prima significa $d/d\eta$. Parametrizamos las densidades de radiación y materia como $\rho_R = \rho_{eq}(a_{eq}/a)^4$ y $\rho_M = \rho_{eq}(a_{eq}/a)^3$ respecto al momento de igualdad materia-radiación tal que $a_{eq} = \Omega_r/\Omega_m = 2,9 \cdot 10^{-4}$ [6], momento en el que la densidad de energía de radiación (fotones y neutrinos) se igualó con la densidad de energía de la materia (protones, neutrones, electrones y materia oscura) dando lugar a la formación de estructuras a gran escala. Con esto la solución a las ecuaciones del fondo (2.3) es

$$a(\eta) = a_{eq} \left[2 \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right) + \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 \right], \quad (2.4)$$

donde $\eta_*^{-2} = 2\pi G\rho_{eq}a_{eq}^2/3$ es un tiempo conforme característico de la transición entre dominación de radiación y materia en el universo.

La ecuación del movimiento (2.2) se reescribe como una ecuación de la evolución de $R_\xi(x)$ (la desviación de cada cáscara respecto del flujo de Hubble) donde hemos cambiado el tiempo conforme por el factor de escala normalizado respecto al momento de igualdad materia-radiación, $x \equiv a/a_{eq}^2$, obteniendo

$$x(1+x)\frac{d^2R}{dx^2} + \left[1 + \frac{3}{2}x\right]\frac{dR}{dx} + \frac{1}{2}\left[\frac{1+\Phi}{R^2} - R\right] = 0, \quad (2.5)$$

donde parametrizamos también la masa encerrada en una cáscara en términos del exceso sobre el fondo homogéneo, $\Phi(\xi) \equiv \delta\rho_M/\rho_M$. Así, la masa total en una región es

$$M_t = \frac{4\pi}{3}\rho_{eq}a_{eq}^3[1 + \Phi(\xi)]\xi^3 \quad \implies \quad \bar{M}_t \equiv \frac{M_t}{\frac{4\pi}{3}\rho_{eq}a_{eq}^3\xi^3} = 1 + \Phi(\xi), \quad (2.6)$$

²Notar que esta va a ser nuestra variable tiempo de ahora en adelante y es adimensional.

y podemos entender el factor $1 + \Phi$ como una medida de la masa, en este caso respecto de la masa promedio encerrada en el volumen inicial $\frac{4\pi}{3}\rho_{eq}a_{eq}^3\xi^3$ que nombramos fracción de masa relativa, $\bar{M}_t(\xi, x)$, y notamos que puede variar con el tiempo.

Para entender el comportamiento de la ecuación (2.5) mostramos su solución para distintos valores de Φ (asumido constante) en la figura 2.1. Usamos condiciones iniciales $R = 1$ para $\eta = 0$ como corresponde a una inhomogeneidad en la materia oscura de un universo inicialmente dominado por radiación (homogénea). El resultado muestra que R decrece si $\Phi > 0$ y crece si $\Phi < 0$, es decir, las regiones sobredensas se expanden más lentamente que el factor de escala y acaban colapsando ($R = 0$) a un tiempo finito, mientras que los vacíos $\Phi < 0$ se expanden más rápido que el universo promedio haciéndose cada vez más vacíos. El colapso de las regiones sobredensas es anterior cuanto mayor es Φ , lo que tiene su explicación en que una región de densidad un número de veces el promedio entra en dominación de materia ese mismo número de veces antes (en factor de escala) que el promedio, y ya sabemos que las perturbaciones de la densidad solo crecen significativamente en el periodo de dominación de materia (no durante radiación, ver sección 1.2). Esta intuición se pone de manifiesto resolviendo la ecuación perturbativamente para valores bajos de x en serie de potencias, de lo que se obtiene la expresión (2.7).

$$R = 1 - \frac{\Phi x}{2} - \frac{\Phi^2 x^2}{8} - \frac{(8\Phi^3 - \Phi^2)x^3}{144} + \dots \approx \sqrt{1 - \Phi x} \quad (2.7)$$

Observamos cómo los dos primeros términos solo dependen de Φx , y no de Φ o x independientemente. A primer o segundo orden, el valor de x para el que se produce el colapso es $\Phi x \sim 1$ y escala perfectamente con Φ . A mayores órdenes, la solución involucra términos como $\Phi^2 x^3$ que no son invariantes de escala y que producen pequeñas diferencias de comportamiento. No obstante, el colapso a $x \sim 1/\Phi$ se mantiene. Al mismo tiempo, los vacíos son como mucho de $\Phi = -1$ así que no pueden comenzar a evolucionar hasta $x \sim 1$.

Como la solución perturbativa es válida independientemente de Φ , también encontramos que el tiempo característico para que un vacío reduzca su densidad en un factor de $\mathcal{O}(1)$ con respecto al promedio del universo será también $x \sim 1/\Phi$. Si el vacío está muy poco vacío ($\Phi \lesssim 0$), le costará mucho evolucionar, pero si $\Phi \sim -1$ (es decir, vacío casi perfecto), se vacía un factor $\mathcal{O}(1)$ en cuanto el universo transicione a dominación de materia.

La expresión (2.7) contiene una aproximación heurística satisfactoria que nos será de ayuda en el futuro y que denota que los vacíos crecen como $\sqrt{1 - \Phi x}$ para tiempos grandes y por lo tanto su densidad decrece como $1/x^{3/2}$ con respecto a la densidad promedio (que decrece como $1/x^3$). Los vacíos más vacíos del universo con $\Phi \sim -1$ han decrecido un factor $1/a_{eq}^{3/2} \sim 1,98 \cdot 10^5$ su densidad desde el momento de igualdad materia-radiación ($z_{eq} \approx 3400$) [6].

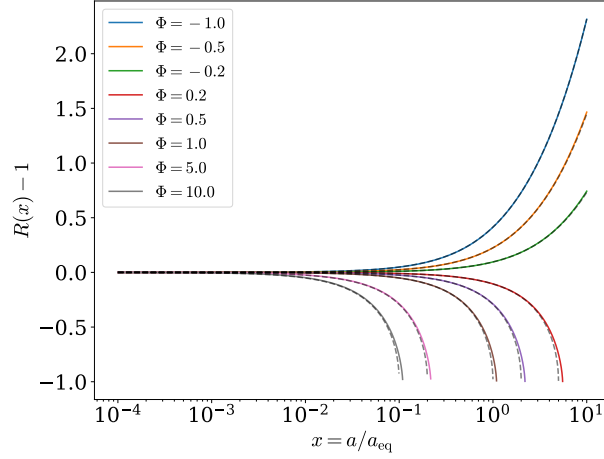


Figura 2.1: Solución a la ecuación 2.5 para diferentes valores de Φ . En línea discontinua se presenta la aproximación $R(x) = \sqrt{1 - \Phi x}$ para cada valor de Φ .

Nótese la diferencia entre la aproximación lineal (1.24) y la solución no lineal. Mientras la perturbación es pequeña, hemos visto que crece lentamente en dominación de radiación y cómo $\Phi \sim x$ en dominación de materia oscura. Esto es exactamente lo que obtenemos con el cálculo no lineal. Cuando el radio evoluciona como $a(1 - \Phi x/2)$ el contraste lo hace como $1/(1 - \Phi x/2)^3 \sim 1 + 3\Phi x/2$, es decir, linealmente a partir de igualdad materia-radiación. Naturalmente, la aproximación lineal no puede darnos información más allá del término lineal. Nuestra solución esférica nos indica que a largo plazo la evolución se suaviza a $\sqrt{1 - \Phi x}$.

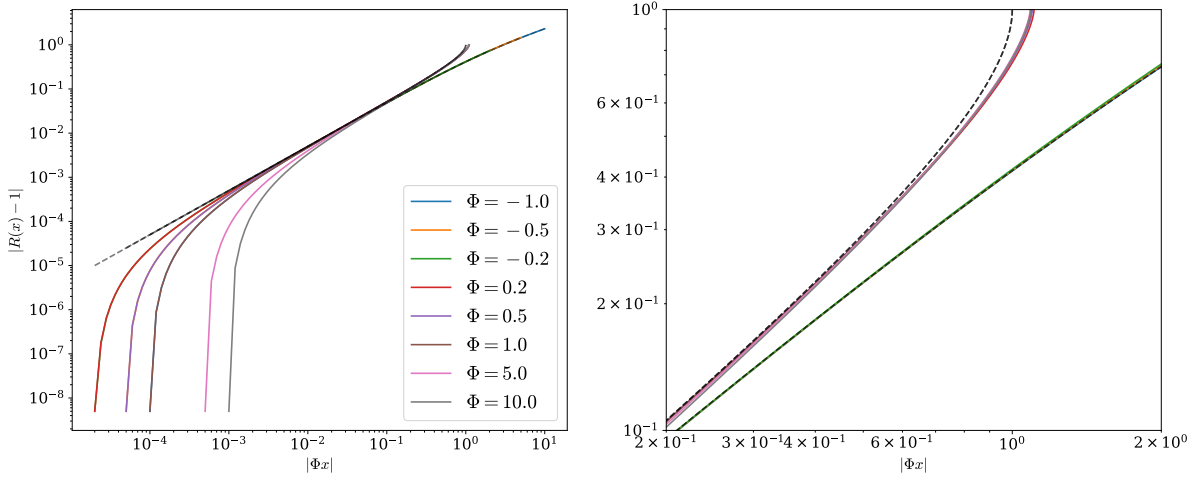


Figura 2.2: A la izquierda una representación de la solución a la ecuación 2.5 reescrita para visualizar la ley de potencias que rige la aproximación y el ajuste de la solución para diferentes Φ ; a la derecha una ampliación para tiempos grandes. Notar que la diferencia en las condiciones iniciales es debida a que numéricamente se ha utilizado $R = 1$ a un tiempo inicial finito para evitar divergencias.

En la figura 2.2 (derecha) podemos observar cómo la aproximación (2.7) es mucho mejor para regiones de vacío que para regiones sobredensas. Para $\Phi > 0$ las capas colapsan en un punto y si tenemos una región con el mismo valor de Φ (distribución *top-hat*) toda la región

colapsa al mismo tiempo. Naturalmente, la materia oscura comenzaría a oscilar alrededor del centro de la sobredensidad, lo que no se encuentra recogido en la evolución de la figura anterior. Físicamente, cuando la materia oscura comienza a orbitar en su propio campo gravitatorio, se produce la virialización (o termalización) dando lugar a lo que se conoce como un halo de materia oscura. La resolución numérica presenta complicaciones a $R = 0$, y como estamos interesados en los vacíos, y estos se expanden alejándose del origen, no hemos presentado este periodo.

3. Aplicación del modelo esférico a vacíos

Cuando tenemos una sobredensidad de materia, Φ es una función decreciente del radio, lo que significa que las capas más interiores colapsan más rápido que las exteriores. Así que las capas del halo van virializando de dentro a fuera y la evolución de las capas exteriores no se ve afectada por el núcleo colapsado hasta que alcanza el propio núcleo. Hasta que una capa no entra dentro de la órbita de la anterior, el valor de Φ es constante, lo que nos permite caracterizar el colapso asumiendo Φ constante. En cambio, para un vacío de materia, Φ crece con el radio, así que las capas interiores se expanden más rápido que las exteriores, pudiendo producirse un fenómeno que denominamos *shell-crossing* no relacionado con la virialización y que produce la no conservación de la masa de las capas tras el mismo. La expresión (1.24) es una solución exacta siempre y cuando Φ se mantiene constante, pero no podemos garantizar que esto ocurra cuando capas más interiores se expanden más rápido que sus capas exteriores. Considerando esto, nuestra intención es ver cómo se comportan las variables del sistema en los casos que puede ocurrir *shell-crossing* y tratar de predecir la aparición del mismo para un perfil de densidad determinado.

3.1. Cálculo de la masa y desplazamiento en coordenadas comóviles

Nuestro objetivo ahora es solucionar la ecuación (2.5) y estudiar la evolución de los vacíos para diferentes condiciones iniciales (perfiles de densidad). Para ello se ha diseñado un programa en el cual se definen una serie de cáscaras esféricas concéntricas, $\xi \in [0, 15]$, distribuidas de forma proporcional a ξ , para que cada cáscara tenga una masa similar. La masa de la cáscara unidad viene dada por

$$M_{\xi_i} = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{dM}{d\xi} d\xi = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} 4\pi\xi^2 \rho(\xi) d\xi . \quad (3.1)$$

Retomando la definición de la fracción de masa relativa, \bar{M}_t , realizada en la expresión (2.6) tal que

$$\bar{M}_t = \frac{M_t}{\frac{4\pi\rho_{eq}a_{eq}^3}{3}\xi^3} = \frac{\int_0^{r(\xi)} 4\pi r^2 \rho(r) dr}{\frac{4\pi\rho_{eq}a_{eq}^3}{3}\xi^3} = 1 + \Phi \quad (3.2)$$

entendemos \bar{M}_t como una sobredensidad o infradensidad que se mantiene constante siempre y cuando no se produzca *shell-crossing*.

Ahora introducimos el desplazamiento de las coordenadas comóviles con respecto a cada

cáscara, $R_\xi(x)$. Al inicio de la simulación la condición inicial para este desplazamiento es tal que $R_\xi(x=0) = 1$. Si no hubiera *shell-crossing* $R_\xi(x)$ evolucionaría siempre de acuerdo a la ecuación (2.5) y en este caso la masa sería constante al no haber cruce de cáscaras. Como no podemos asegurar que no vaya a ocurrir este cruce (de hecho lo esperamos) recalculamos la masa a cada paso en cada cáscara.

Calculamos la masa total encerrada por cada cáscara extendiendo la integral que aparece en (3.1) desde el origen de coordenadas hasta la cáscara correspondiente. El procedimiento para calcular la fracción de masa relativa a cada paso consiste en añadir la masa de cada cáscara realizando una interpolación tal que:

- Si las dos fronteras de una cáscara (entendidas como las posiciones de la cáscara anterior y ella misma) se encuentran dentro de la coordenada física, añadimos toda su masa.
- Si ambas fronteras se encuentran fuera de la coordenada física, no añadimos masa.
- Si una de las fronteras se encuentra dentro y la otra se encuentra fuera de la coordenada física, construimos la función de densidad e integramos.

Esta masa es la que introducimos en la ecuación (2.5) para simular la evolución de $R_\xi(x)$ y la calculamos discretizando la ecuación (3.2) de acuerdo al procedimiento descrito tal que

$$\bar{M}_t = \frac{1}{\frac{4\pi\rho_{eq}a_{eq}^3}{3}\xi^3} \sum_{j/r_j < r_i} M_{\xi_j} \cdot \frac{\bar{r}_+^3 - r_-^3}{r_+^3 - r_-^3}, \quad (3.3)$$

donde \bar{r}_+ es el mínimo entre el valor de la coordenada física y la frontera exterior de la cáscara y r_+ y r_- son las fronteras de cada cáscara³.

3.2. Evolución del sistema

A continuación, simulamos la evolución temporal del sistema con un método iterativo en el que reescribimos (2.5) discretizada en el tiempo y definiendo $P \equiv R'$, de manera que la evolución viene dada tal que

$$P_+ = P_- \frac{x(x+1) - (1+3x/2)\Delta x/2}{x(x+1) + (1+3x/2)\Delta x/2} - \frac{\Delta x}{x(x+1) + (1+3x/2)\Delta x/2} \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{M}_t(\xi, x)}{R^2} - R \right), \quad (3.4)$$

$$R_+ = R_- + P\Delta x.$$

Con esto, y estableciendo un paso temporal Δx variable, de manera que a cada paso $\Delta x_i = x_i/60$ y $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$, para asegurarnos de que es suficientemente pequeño, evolucionamos el sistema.

³Notar que en la expresión (3.3) se ha omitido el subíndice ξ_j para cada frontera r , pero estas cambian para cada cáscara.

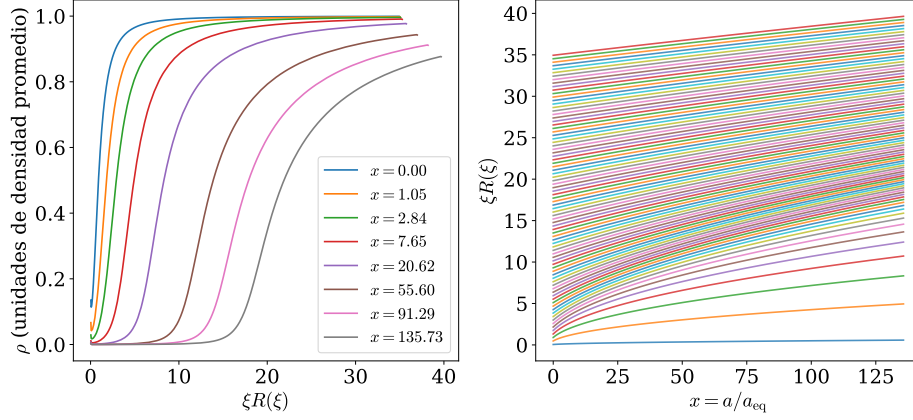


Figura 3.1: Ejemplo de evolución de la densidad (izquierda) y posición de las cáscaras (derecha) para un perfil $\rho(\xi) \propto 1 - (1 - \rho_0)/(1 + (\xi - \xi_v)^2)$ sin *shell-crossing*.

En el ejemplo de la figura 3.1 vemos cómo la densidad va disminuyendo conforme avanza el tiempo, es decir, vemos como se está expandiendo la región de vacío. En este caso, la expansión del vacío no provoca una acumulación de cáscaras entre el borde de este y el fondo, por lo que no presenta *shell-crossing*.

3.3. Criterios de aparición de *shell-crossing*

Tras evolucionar el sistema, para algunos perfiles de densidad observamos cómo las cáscaras interiores parecen adelantar a las exteriores, produciéndose el fenómeno que llamamos *shell-crossing*. La figura 3.2 muestra la evolución de la posición de las cáscaras en una distribución $\rho(r) \propto e^{-r^2}$. Observamos cómo estas comienzan a despegarse del flujo de Hubble ($R = 1$) alrededor de $x \sim 1$ como era de esperar, y cómo las cáscaras de la región se concentran y se cruzan a valores $x \sim 20$. Al ocurrir esto, esperamos que en la región donde un grupo de cáscaras se cruza, la densidad aumente mucho, de manera que estudiaremos cómo evoluciona esta.

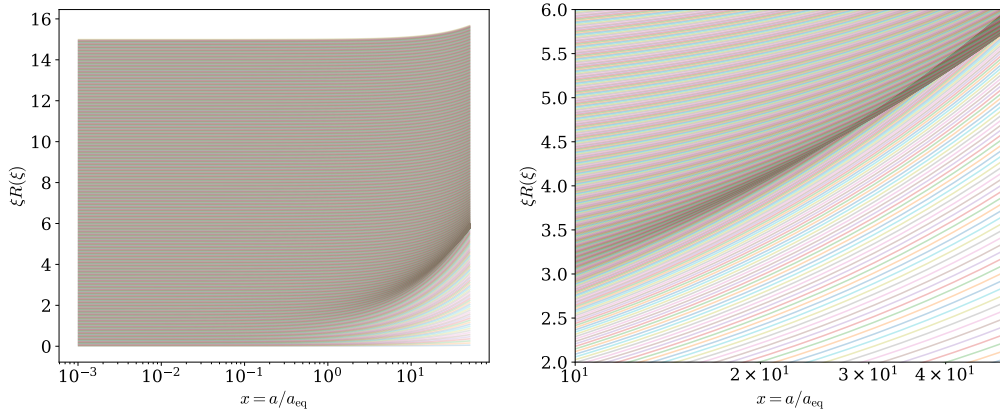


Figura 3.2: A la izquierda la evolución en el tiempo de 10^3 cáscaras distribuidas linealmente para un perfil $\rho \propto e^{-r^2}$, a la derecha una ampliación en la región de aparición de *shell-crossing*. $\xi R(\xi)$ es la coordenada física.

Cabe preguntarse si el *shell-crossing* es un fenómeno de la discretización en el espacio de

nuestro vacío o del tiempo de su evolución. Para comprobar que esto no es así hemos examinado la convergencia de la distribución decreciendo el paso temporal e incrementando el número de cáscaras. La figura 3.3 muestra la densidad reconstruida en dos tiempos para diferentes discretizaciones. Vemos que al incrementar el número de cáscaras, el pico de densidad que se produce debido a la acumulación de cáscaras y posterior *shell-crossing* se hace más evidente, preciso, y converge en su posición, síntoma de que estamos presenciando un fenómeno físico.

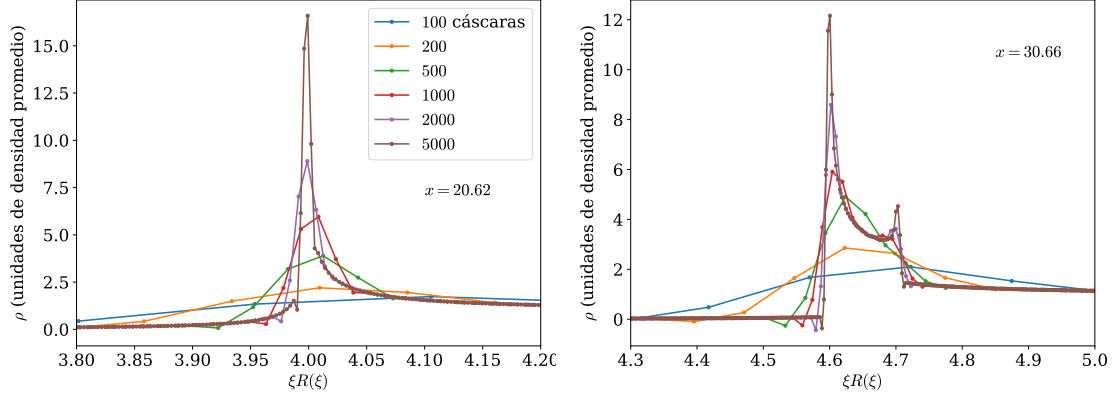


Figura 3.3: Densidad del perfil $\rho \propto e^{-r^2}$ para los momentos $x = 20,62$ y $x = 30,66$ tomando diferentes discretizaciones para el número de cáscaras.

Consideremos que estamos estudiando la evolución de los límites entre cáscaras, de manera que la masa en realidad se encuentra distribuida entre dos de los puntos cuya evolución hemos calculado. Naturalmente, cuando dos curvas se cruzan (es decir, coinciden), la masa entre ellas siendo originalmente finita, produce un pico de densidad infinita. Estos picos son los que vemos en la figura 3.3 donde la densidad ha sido reconstruida a partir de la fracción de masa relativa, \bar{M}_t , tal que

$$\frac{\rho(\xi_i R)}{\langle \rho_{DM} \rangle} = \frac{1}{4\pi(\xi_i R)^2} \frac{d\bar{M}_t}{d(\xi R)} = \frac{4\pi \int_0^{\xi_i R} (\xi R)^2 \rho(\xi R) d(\xi R)}{4\pi(\xi_i R)^2 d(\xi R)} \quad (3.5)$$

Además, notar que la figura 3.3 es una ampliación en la región de interés, pero la coordenada física se ha simulado en $\xi R(\xi) = [0, 15]$. A continuación, tratamos de predecir la aparición de *shell-crossing*.

3.3.1. Primer criterio

A la vista de 3.2, vemos que hay regiones en que las cáscaras se separan y regiones en que se comprimen, produciendo en última instancia el *shell-crossing*. Hasta que este se produzca, la aproximación (2.7) $R \sim \sqrt{1 - \Phi x}$ es una solución analítica de la evolución de cada cáscara que nos puede ayudar a determinar si dos cáscaras contiguas se acercan o no. Consideremos la pendiente de las curvas $d(\xi R)/dx$. Podemos estudiar cómo depende de ξ , para saber si las pendientes se acercan, se alejan, o se mantienen paralelas. Así, la función que utilizamos para describir la evolución de estos cruces se define a partir de la derivada de la coordenada comóvil en aproximación lineal según la expresión (2.7), tal que

$$F(\xi_i) \equiv 2 \frac{d(\xi_i R)}{dx} = -\xi_i \Phi(\xi_i) = \xi_i \left[1 - \frac{4\pi \int_0^{\xi_i} \xi^2 \rho(\xi) d\xi}{\frac{4\pi \rho_{eq} a_{eq}^3}{3} \xi_i^3} \right], \quad (3.6)$$

donde el signo de la derivada de esta función nos describe el comportamiento que exhibe el sistema

$$F'(\xi) = \frac{dF(\xi_i)}{d\xi_i} = 1 - \frac{3}{\rho_{eq} a_{eq}^3} \frac{d}{d\xi_i} \left[\frac{1}{\xi_i^2} \int_0^{\xi_i} \xi^2 \rho(\xi) d\xi \right] = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{Caso estacionario} \\ < 0 & \rightarrow \text{Colapso} \\ > 0 & \rightarrow \text{Expansión} \end{cases} \quad (3.7)$$

Cuando la función $F(\xi_i)$ es creciente el sistema se expande, mientras que en caso de decrecer, las cáscaras colapsan y cuando es constante tenemos el caso límite entre ambos comportamientos donde el sistema es estacionario, las cáscaras se mantienen paralelas, sin aproximarse ni alejarse entre sí. Notar que en este apartado $\Phi(\xi)$ es el calculado únicamente en el estado inicial.

3.3.2. Segundo criterio

El criterio anterior describe la evolución del sistema y su tendencia, pero no nos da un momento exacto para la aparición del *shell-crossing*. Es por esto que buscamos un segundo criterio del que podamos extraer más información. Para ello necesitamos escoger un parámetro cuyo valor sea extremal en el momento de aparición del *shell-crossing*, de manera que podamos obtener una predicción del momento en el tiempo en que va a ocurrir.

Como hemos visto, en el momento de *shell-crossing*, la densidad desarrolla un pico infinito. Podemos predecir su formación a partir de la expresión de la densidad utilizando la aproximación (2.7) para R de la siguiente manera

$$\rho(\xi, x) = \frac{1}{4\pi(\xi R)^2} \frac{dM(\xi, x)}{d(\xi R)} = \frac{1}{4\pi(\xi R)^2} \frac{dM}{d\xi} \frac{1}{d(\xi R)/d\xi} = \frac{dM}{d\xi} \frac{R}{4\pi(\xi R)^2 [R^2 - \xi \frac{(\partial_\xi \Phi)x}{2}]}, \quad (3.8)$$

donde denotamos $(\partial_\xi \Phi) = (\partial \Phi / \partial \xi)_x$, y hemos utilizado que $d(\xi R)/d\xi = [R^2 - \xi x (\partial_\xi \Phi)/2]/R$. Con todo esto, el *shell-crossing* ocurre a un valor del tiempo, x_{sc} , dado por

$$\rho(\xi, x) \rightarrow \infty \implies \frac{\partial_\xi(\xi^2 \Phi)}{2\xi} = \frac{1}{x_{sc}}, \quad (3.9)$$

y a partir de esta condición definimos $G(\xi_i) \equiv \xi_i^2 \Phi(\xi_i)$ y $G'(\xi_i) = dG(\xi_i)/d\xi_i$, de manera que cuando

$$\frac{d}{d\xi_i} \left[\frac{G'(\xi_i)}{2\xi_i} \right] = 0 \implies x_{sc} = \left[\frac{G'(\xi_i)}{2\xi_i} \right]_{max}^{-1}, \quad (3.10)$$

obtenemos x_{sc} , siendo el momento de aparición de *shell-crossing*. Es decir, para cada cáscara ξ hay un valor de tiempo x en el que va a haber *shell-crossing* solo si $G'/2\xi > 0$. Si esta función

es creciente siempre va a haber una solución x_{sc} y en caso de ser decreciente no se produce la acumulación de cáscaras y no hay cruces.

4. Simulación y resultados

Tras implementar todo el desarrollo realizado en el apartado 3, pasamos a exponer e interpretar los resultados obtenidos para diferentes perfiles propuestos.

4.1. Perfil de densidad exponencial

Para este primer caso definimos un perfil de densidad de la forma

$$\rho(\xi) = 1 - (1 - \rho_0)e^{-(\xi - \xi_v)^2} \implies \frac{dM}{d\xi_i} = 4\pi\xi^2 \left[1 - (1 - \rho_0)e^{-(\xi - \xi_v)^2} \right], \quad (4.1)$$

donde el parámetro ρ_0 es la densidad central y ξ_v el radio del vacío, que por el momento consideraremos $\rho_0 = 10^{-1}$ y $\xi_v = 0$.

Tras hacer evolucionar el sistema encontramos una acumulación, como se puede observar en la figura 4.1 donde cada línea representa la evolución de una cáscara, y podemos ver cómo las cáscaras interiores (correspondientes a las líneas inferiores en $\xi R(\xi)$ en la figura) se aproximan a las siguientes a partir de cierta cáscara llegando a producirse *shell-crossing*.

A continuación, vemos cómo han evolucionado la masa total encerrada y la densidad y nos encontramos con que para tiempos posteriores al cruce de cáscaras los resultados comienzan a presentar grandes saltos y ruido que no está relacionado completamente con el comportamiento del sistema, sino que se debe al programa utilizado presentando discontinuidades en los puntos debido a la discretización, junto a la existencia de numerosos cruces de ida y vuelta entre cáscaras tras el *shell-crossing*. Para tratar de solucionar esto, implementamos un filtro de Savitzky-Golay [11] que consiste en realizar una regresión polinomial local (en nuestro caso escogemos los cinco vecinos a cada lado de cada punto) para suavizar las curvas. Representamos las curvas tras aplicar el filtro en la figura 4.2.

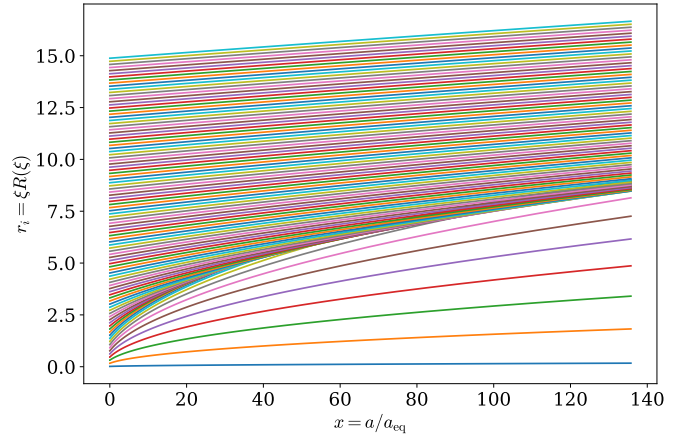


Figura 4.1: Evolución de las cáscaras para el perfil $\rho(\xi) \propto e^{-\xi^2}$.

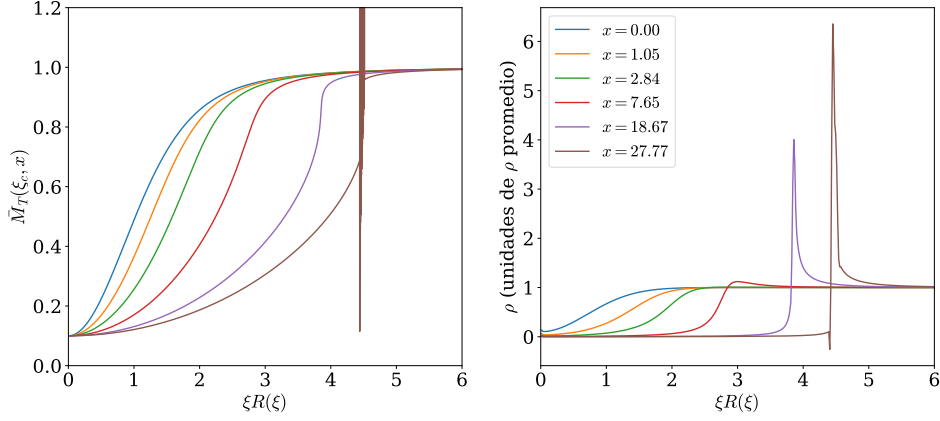


Figura 4.2: A la izquierda, la evolución de la masa total encerrada a lo largo de la coordenada física $\xi R(\xi)$. Se observa que para $x = 27,77$ el filtro no ha conseguido suavizar la curva. A la derecha, la evolución de las densidades.

En estas observamos cómo en el momento en que las curvas de masa tienden a hacia una pendiente infinita la densidad presenta un máximo que nos indica la aparición de *shell-crossing*. Utilizamos los criterios estudiados en el apartado 3.3 para predecir este fenómeno.

4.1.1. Criterios de formación en el perfil exponencial

En la figura 4.3 representamos la función $F(\xi_i)$, definida en la expresión (3.6), a tiempo $x = 0$ para el perfil escogido. A la vista de $F'(\xi_i)$ a tiempo $x = 0$, la región anterior al corte con el eje de abscisas se va a expandir, mientras que la exterior se comprime de manera que esperamos una acumulación de cáscaras y quizá *shell-crossing* en las cáscaras alrededor de $\xi R \sim 2$.

Para determinar x_{sc} utilizamos la función $G(\xi_i)$, junto con su derivada. La función $G'(\xi_i)/2\xi_i$ para el tiempo inicial presenta un máximo en $[G'(\xi_i)/2\xi_i]_{max} = 4,67 \cdot 10^{-2}$, con lo que de acuerdo con la expresión (3.10), obtenemos que el momento en que se produce el *shell-crossing* es

$$x_{sc} = 21,44 \quad (4.2)$$

el cual se corresponde bastante bien con lo que se puede observar en 4.2. Más adelante, calcularemos exactamente el momento de *shell-crossing* de la evolución numérica y comparando con la predicción de nuestro segundo criterio y veremos que es muy acertada.

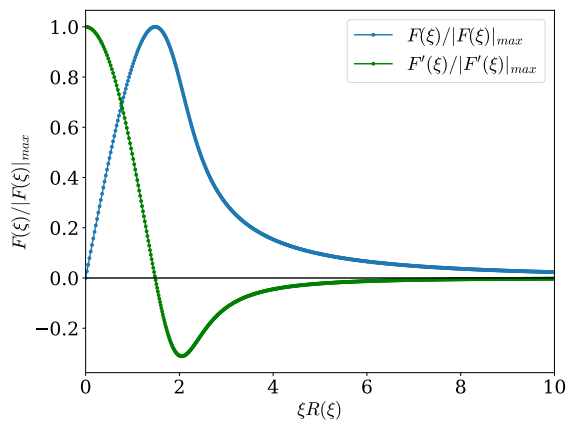


Figura 4.3: Función $F(\xi_i)$ junto a su derivada. Ambas normalizadas respecto a su valor máximo.

4.1.2. Otro perfil exponencial

Simulamos análogamente un perfil similar al anterior de la forma

$$\rho(\xi) = 1 - (1 - \rho_0)e^{-(\xi - \xi_v)} \implies \frac{dM}{d\xi_i} = 4\pi\xi^2 \left[1 - (1 - \rho_0)e^{-(\xi - \xi_v)} \right], \quad (4.3)$$

donde $\rho_0 = 10^{-1}$ y $\xi_v = 0$ de nuevo.

Tras evolucionar el sistema de nuevo, vemos la aparición de una acumulación conforme se aproximan entre si algunas cáscaras, en este caso se forma más adelante en la coordenada física y más tarde en el tiempo. Observando la evolución de la masa total encerrada y la densidad vemos cómo para este perfil el *shell-crossing* tarda más en aparecer respecto al caso anterior, no teniendo pendiente infinita la curva de masa hasta $x \in [91, 135]$, donde en la densidad se produce un salto con un pico de más de nueve veces la densidad promedio en el caso $x = 135,73$ como se puede ver en la figura 4.4.

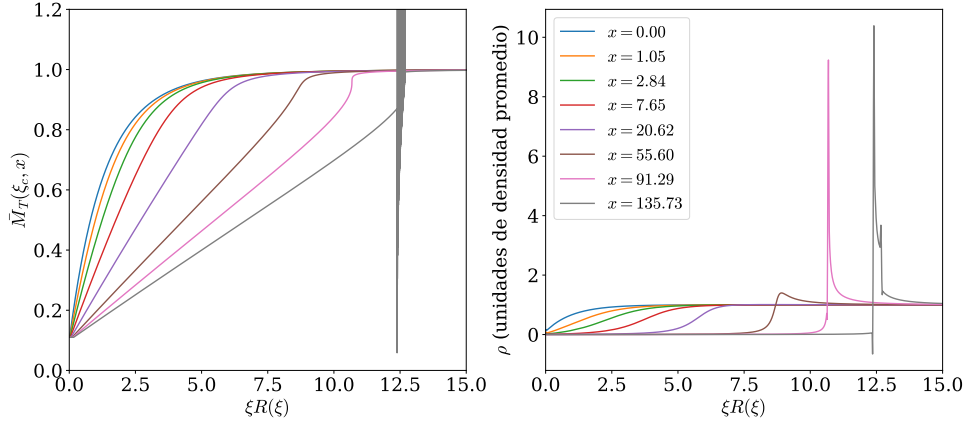


Figura 4.4: A la izquierda, la evolución de la masa total encerrada a lo largo de la coordenada física $\xi R(\xi)$. A la derecha, la evolución de las densidades.

En este caso, según los criterios estudiados anteriormente obtenemos que inicialmente la función $G'(\xi_i)/2\xi_i$ presenta su máximo en $[G'(\xi_i)/2\xi_i]_{max} = 9,83 \cdot 10^{-3}$, de manera que mediante la expresión (3.10) el cruce de cáscaras se produce en

$$x_{sc} = 101,65 \quad (4.4)$$

valor que concuerda con lo que observamos en la figura 4.4.

4.2. Perfil de densidad “Top-hat” invertido

En este caso definimos un perfil de densidad con forma de sombrero de copa invertido, que debido a la simetría radial del sistema, podemos definir simplemente como una función escalón. Decidimos usar una aproximación analítica de la función escalón de Heaviside [12] con dos parámetros libres, k , que da cuenta de la pendiente que presenta el escalón (mayores valores de este parámetro implican mayores pendientes) y ξ_v , que será el valor de ξ en el que centramos

el mismo.

$$\mathcal{H}(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(kx) = \frac{1}{1 + e^{-2kx}}. \quad (4.5)$$

Tomamos así un perfil de la forma

$$\rho(\xi) = 1 - \frac{1 - \rho_0}{1 + e^{k(\xi - \xi_v)}} \implies \frac{dM}{d\xi_i} = 4\pi\xi^2 \left[1 - \frac{1 - \rho_0}{1 + e^{k(\xi - \xi_v)}} \right] \quad (4.6)$$

donde elegimos los parámetros como $\rho_0 = 10^{-1}$, $k = 3$ y $\xi_v = 3$.

Representamos la masa de cada cáscara junto a la fracción de masa relativa en la figura 4.5. En la masa de cada cáscara vemos que esta es nula (situación de vacío) hasta el valor en el que hemos centrado el escalón. La fracción de masa relativa en este caso se puede comparar con la aproximación $\Phi \approx -(\xi_v/\xi_c)^3$.

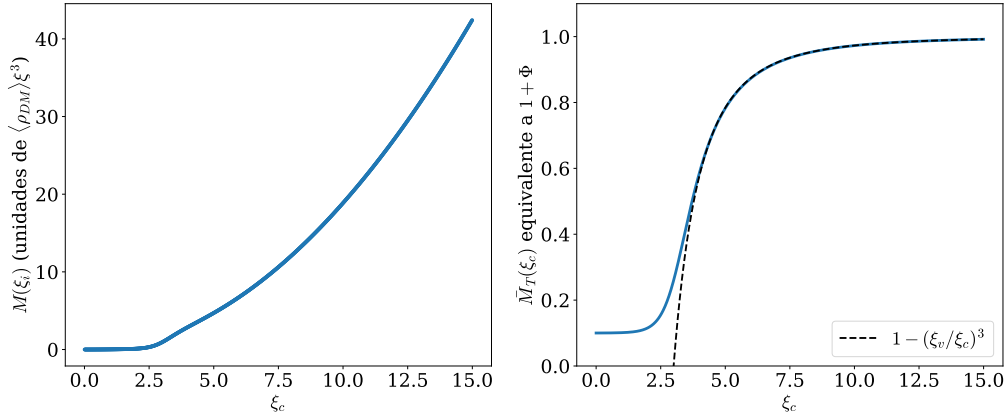


Figura 4.5: A la izquierda, la masa de cada cáscara para 10^3 cáscaras distribuidas linealmente hasta $\xi = 15$. A la derecha, la fracción de masa relativa inicial (masa total encerrada) en cada cáscara.

Tras evolucionar el sistema vemos claramente en la figura 4.6 que ocurre *shell-crossing*, y además parece ocurrir mucho más temprano frente al resto de casos estudiados. Esto es esperado ya que en el caso de un escalón el gradiente de masa en el borde es muy grande y aumenta cuanto mayor pendiente presente el escalón. Observando la evolución de la masa vemos que la fracción de masa relativa tiende a tener pendiente infinita conforme avanza el tiempo hasta un momento en el intervalo $x \in [2, 7]$ en el se produce el salto en masa. En el caso de la densidad, es en ese mismo intervalo en el que

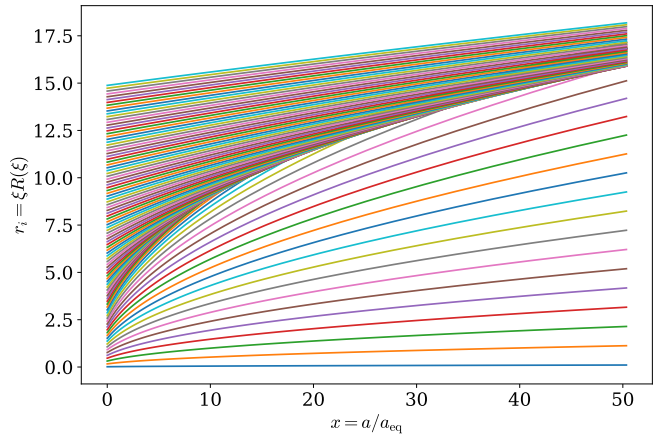


Figura 4.6: Evolución de las cáscaras para el perfil $\rho(\xi) \propto \mathcal{H}(\xi)$.

vemos el salto en densidad respecto a la curva anterior. Para valores posteriores a $x \approx 7$ las curvas presentan el ruido también presente en casos anteriores debido a las discontinuidades producidas en los múltiples cruces, así como la discretización utilizada.

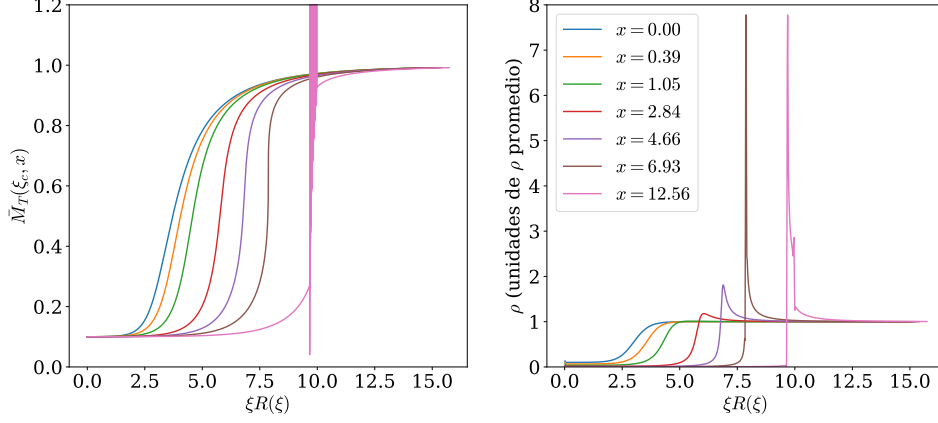


Figura 4.7: A la izquierda, la evolución de la masa total encerrada a lo largo de la coordenada física $\xi R(\xi)$. A la derecha, la evolución de las densidades.

4.2.1. Criterios de formación en el perfil escalón

Según el criterio de la función $F(\xi_i)$, en la figura 4.8 observamos cómo la curva de $F'(\xi_i)$ tiene una región de expansión en lo que en el estado inicial corresponde al vacío, desde el origen hasta $\xi R \sim 3$ y conforme se hace menos vacío hasta $\xi R \sim 5$, tras lo que hay una región de colapso, es decir, una acumulación de cáscaras.

Si comparamos la figura 4.8 con 4.3 vemos que el mínimo en la derivada es mayor en valor absoluto en el perfil escalón, lo que indica una velocidad de expansión y colapso superior al resto de casos, es decir, el vacío se va a vaciar mucho más rápido, tras lo cual, una vez más el comportamiento va atenuándose exponencialmente al estado estacionario.

Atendiendo al segundo criterio, inicialmente la función $G'(\xi_i)/2\xi_i$ presenta su máximo en $[G'(\xi_i)/2\xi_i]_{max} = 1,45 \cdot 10^{-1}$ de manera que según la expresión (3.10) el *shell-crossing* se produce en

$$x_{sc} = 6,88 \quad (4.7)$$

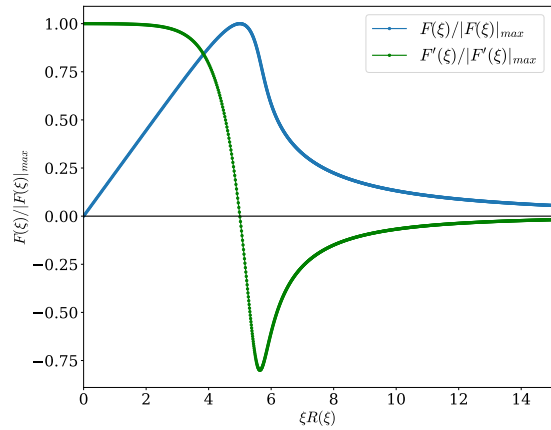


Figura 4.8: Función $F(\xi_i)$ junto a su derivada. Ambas normalizadas respecto a su valor máximo.

resultado que es compatible con la predicción obtenida a partir de la evolución de la masa y la densidad previamente.

5. Dependencia del *shell-crossing* con los parámetros del perfil

Hasta el momento hemos estudiado el momento de aparición de *shell-crossing* para cada perfil mediante un criterio analítico para una serie de condiciones iniciales. Queremos saber con cuánta exactitud los valores obtenidos (que recordamos son una predicción a partir de las condiciones iniciales) se ajustan al momento real de *shell-crossing* en nuestras simulaciones. Además queremos estudiar la dependencia de x_{sc} con parámetros como la densidad central del perfil ρ_0 , el radio ξ_v del vacío y la pendiente del escalón k en el caso del último perfil propuesto.

Para conocer el momento de cruce de cáscaras de manera experimental en nuestra simulación tomamos la derivada espacial de la fracción de masa relativa, $d\bar{M}_T/d(\xi R)$, y buscamos su valor máximo para cada momento del tiempo. Con esto, tan solo tenemos que encontrar el momento de máxima pendiente correspondiente al salto en masa cuando se produce el *shell-crossing*. Debido a que una vez se produce el *shell-crossing* este viene seguido de sucesivos cruces, tenemos que establecer un criterio que seleccione adecuadamente el momento asociado al primer cruce y no a cualquiera de los posteriores. Para ello, tomamos la diferencia entre dos valores sucesivos de $[d\bar{M}_T/d(\xi R)]_{max}$ respecto del tiempo debidamente normalizada y buscamos el primer momento en que se maximiza este valor. Determinados los valores teóricos de x_{sc} mediante el criterio expuesto en (3.10) y los experimentales según lo anterior, estudiamos cómo varían según diferentes valores de ρ_0 , ξ_v y k .

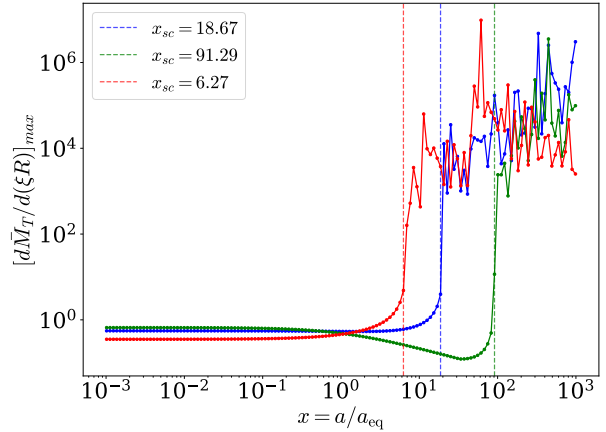


Figura 5.1: Determinación de x_{sc}^{exp} con $\rho_0 = 10^{-1}$, $\xi_v = 0$ y $k = 3$ para los perfiles $\rho(\xi) \propto e^{-\xi^2}$ (azul), $\rho(\xi) \propto e^{-\xi}$ (verde) y $\rho(\xi) \propto \mathcal{H}(\xi)$ (rojo).

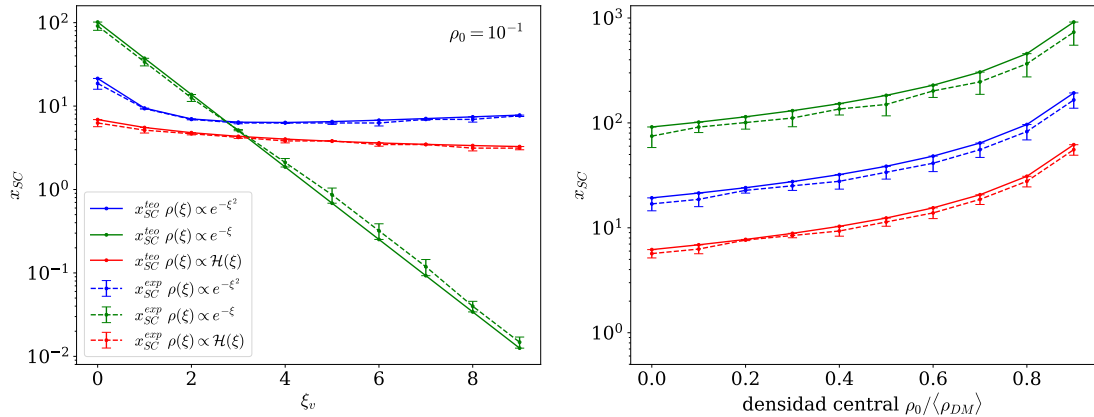


Figura 5.2: Comparativa de los valores teóricos y experimentales de x_{sc} en función de los parámetros ξ_v (izquierda con $\rho_0 = 10^{-1}$) y ρ_0 (derecha con $\xi_v = 0$) para cada perfil.

En la figura 5.2 observamos cómo aumentar el radio del vacío ξ_v , produce que el *shell-crossing* ocurra antes, mientras que conforme aumentamos la densidad central ρ_0 , es decir, hacemos el vacío menos vacío, el *shell-crossing* se retrasa hasta el punto en que para $\rho_0 = 1$ ya no existe vacío y no se produce cruce alguno ($x_{sc} \rightarrow \infty$). En el caso de la pendiente del escalón, conforme esta aumenta, el *shell-crossing* se adelanta al ser el cambio en masa entre cáscaras más abrupto y la velocidad de expansión mayor como consecuencia. En el límite $k \rightarrow \infty$ (escalón perfecto) observamos que $x_{sc} \approx 2,5$, valor que depende de las condiciones iniciales para el resto de parámetros. Los errores representados en las figuras 5.2 y 5.3 son el error sistemático tomado como la diferencia de criterios utilizados en la determinación de x_{sc} .

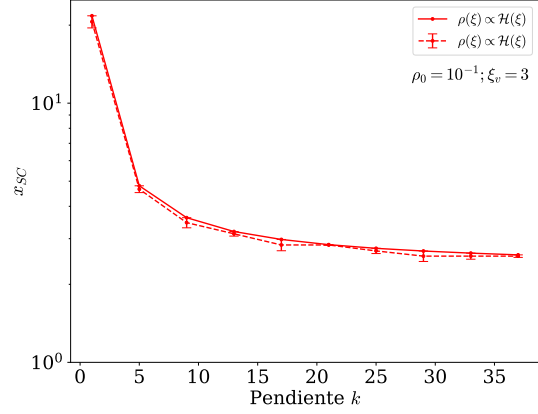


Figura 5.3: Comparativa de los valores teóricos y experimentales de x_{sc} en función de k para el perfil escalón.

De acuerdo con los valores de los parámetros propuestos en la sección 4 obtenemos los resultados expuestos en la tabla 5.1.

Perfil de densidad	x_{sc}^{teo}	x_{sc}^{exp}	Dif. relativa (%)
$\rho(\xi) \propto e^{-\xi^2}$	21,44	18,67	12,9
$\rho(\xi) \propto e^{-\xi}$	101,65	91,29	10,2
$\rho(\xi) \propto \mathcal{H}(\xi)$	6,89	6,27	8,9

Tabla 5.1: Predicción teórica y resultado experimental para x_{sc} en el caso $\rho_0 = 0,1$ y $\xi_v = 0$ para cada perfil.

Podemos observar cómo la diferencia relativa entre predicción y simulación en ningún caso es superior al 12,9% lo que nos da una medida del error cometido en el criterio escogido para la determinación experimental de x_{sc} . La compatibilidad de los resultados obtenidos confirma que el fenómeno de *shell-crossing* en nuestras simulaciones es un fenómeno físico cuya naturaleza está descrita en la dinámica de la ecuación (2.5).

6. Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos realizado un estudio del marco teórico en el que se enmarca la formación de estructuras en el universo, orientado a caracterizar la evolución de diferentes vacíos de materia oscura a partir de simulaciones.

En la sección 1 hemos caracterizado las fluctuaciones de densidad de materia en el universo en aproximación post-newtoniana, partiendo de una descripción de fluido perfecto que satisface las ecuaciones de hidrodinámica, a la que hemos incorporado la expansión del universo, obteniendo (1.24). Tras lo cual hemos introducido el análisis en Relatividad General como generalización a cualquier escala para dar una descripción completa de la inestabilidad gravitacional.

A continuación, en la sección 2 hemos estudiado la inestabilidad más allá del régimen lineal, introduciendo el modelo propuesto en [3] para el estudio de sobredensidades de materia y hemos planteado y comparado el comportamiento de este entre cúmulos y vacíos de materia.

Acto seguido, en la sección 3 aplicamos este modelo a vacíos y desarrollamos el programa que utilizamos para simular la evolución de los mismos, caracterizando el fenómeno de *shell-crossing* y planteando criterios para su estudio, con especial interés en el criterio planteado en (3.10) que nos da una determinación teórica del momento de aparición de *shell-crossing* en función de las condiciones iniciales. Después, en la sección 4, exponemos los resultados obtenidos en las simulaciones para diferentes perfiles de densidad inicial de vacíos.

Finalmente, en la sección 5 hemos entrado en mayor profundidad en la dependencia del *shell-crossing* con la forma del perfil de densidad inicial, además de determinar experimentalmente en las simulaciones el momento de aparición del mismo, pudiendo así compararlo con la determinación teórica realizada previamente. Esta comparación ha mostrado la compatibilidad entre predicción teórica y experimento y nos ha dado una estimación satisfactoria del error sistemático entre determinaciones.

Con todo esto, podemos concluir que nuestro programa ofrece una herramienta para conocer si un perfil de densidad de vacío, bajo condiciones de simetría esférica, presentará *shell-crossing* al evolucionar. Además, en caso de hacerlo, ofrece una determinación satisfactoria del momento de aparición de *shell-crossing*, respaldada por la compatibilidad entre predicción y simulación.

La finalidad y utilidad de lo estudiado es mejorar el entendimiento de la fenomenología y física que se encuentra detrás de experimentos de detección directa de materia oscura, presentes y futuros. Y, como en este trabajo nos limitamos a una serie de casos predefinidos y una simulación programada específicamente para este, la evolución natural de este estudio sería apoyar los resultados con simulaciones de N-cuerpos.

7. Bibliografía

- [1] C. J. Hogan and M. J. Rees. AXION MINICLUSTERS. *Phys. Lett. B*, 205:228–230, 1988.
- [2] Benedikt Eggemeier, Javier Redondo, Klaus Dolag, Jens C. Niemeyer, and Alejandro Vaqueiro. First Simulations of Axion Minicluster Halos. *Phys. Rev. Lett.*, 125(4):041301, 2020.
- [3] Edward W. Kolb and Igor I. Tkachev. Large-amplitude isothermal fluctuations and high-density dark-matter clumps. *Physical Review D*, 50(2):R1219–R1223, July 1994. (Received 9 March 1994).
- [4] Viatcheslav Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [5] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of GR*. John Wiley and Sons, Inc., first edition edition, 1972.
- [6] Daniel Baumann. *Cosmology*. 2021.
- [7] James Hopwood Jeans. I. the stability of a spherical nebula. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 199:1–53, 1902.
- [8] T. Padmanabhan. *Structure formation in the universe*. Cambridge University Press, 1993.
- [9] Michael S. Turner Edward W. Kolb. *The early universe*. Frontiers in Physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [10] A.N. Lasenby M.P. Hobson, G.P. Efstathiou. *General relativity an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [11] Marcel J. E. Golay Abraham Savitzky. Smoothing and differentiation of data by simplified least square procedures. *Analytical Chemistry*, 36(8):1627–1639, 1964.
- [12] Wikipedia contributors. Función escalón de Heaviside — Wikipedia, La enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Funcion_escalon_de_Heaviside, 2024.

A. Anexo

A.1. Deducción de la ecuación de evolución de las fluctuaciones de densidad en Relatividad General (1.33) a partir de la ecuación en tiempo conforme

En la sección 1.3 se ha deducido la expresión (1.33) en tiempo normal a partir de la ecuación en tiempo conforme para la evolución de Φ planteada en [6] (página 231, expresión (6.114)). Partiendo de

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 \delta P, \quad (\text{A.1})$$

donde $\delta P = c_s^2 \delta \rho$ y $\mathcal{H} = a'/a$. Notar que denotamos con una prima las derivadas respecto del tiempo conforme ($d/d\eta$). Utilizando la definición invariante gauge del contraste de densidad comóvil, $(\bar{\rho}\Delta)$, realizada en (1.32), tomamos el laplaciano de esta expresión y sustituimos utilizando la ecuación de Poisson válida a cualquier escala, $\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \Delta$, obteniendo

$$\begin{aligned} (a^2 \bar{\rho} \Delta)'' + 3\mathcal{H} (a^2 \bar{\rho} \Delta)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) a^2 (\bar{\rho} \Delta) - a^2 c_s^2 \nabla^2 \delta \rho &= 0, \\ (a^2 \bar{\rho} \Delta)'' + 3aH (a^2 \bar{\rho} \Delta)' + (2\dot{H} + H^2) 2a^4 (\bar{\rho} \Delta) - a^2 c_s^2 \nabla^2 \delta \rho &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde hemos utilizado que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = \frac{da}{dt} = aH \implies \frac{d\mathcal{H}}{d\eta} = a^2 \left(H^2 + \frac{dH}{dt} \right). \quad (\text{A.3})$$

A continuación, planteamos las transformaciones de tiempo conforme a tiempo normal ($dt = a d\eta$) que necesitamos introducir en la expresión (A.2)

$$(a^2 \bar{\rho} \Delta)' = a^3 \bar{\rho} \left[\dot{\Delta} - H \Delta \right] \quad ; \quad (a^2 \bar{\rho} \Delta)'' = a^4 \left[\ddot{\Delta} - H \dot{\Delta} - \dot{H} \Delta \right]. \quad (\text{A.4})$$

Introduciendo las expresiones de (A.4) en (A.2) obtenemos el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} a^4 \bar{\rho} \left[\ddot{\Delta} - H \dot{\Delta} - \dot{H} \Delta \right] + 3a^4 H \bar{\rho} \Delta \left[\frac{\dot{\Delta}}{\Delta} - H \right] + 2a^4 \bar{\rho} \Delta \left[2H^2 + \dot{H} \right] &= a^2 c_s^2 \nabla^2 \delta \rho, \\ \ddot{\Delta} + 2H \dot{\Delta} + \left(\dot{H} - H^2 \right) \Delta &= \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \left(\frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde recordamos que $\delta \rho / \bar{\rho} = \Delta$ y utilizamos la combinación de las ecuaciones de Friedmann⁴, $\dot{H} - H^2 = -4\pi G \bar{\rho}$ (con $P=0$), obteniendo la versión relativista en tiempo normal de la ecuación (1.24)

$$\boxed{\ddot{\Delta} + 2H \dot{\Delta} - \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \Delta - 4\pi G \bar{\rho} \Delta = 0} \quad (\text{A.6})$$

⁴ $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$ y $\dot{H} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P)$.

A.2. Evolución de las cáscaras

Otra forma de visualizar la aparición del *shell-crossing* es ver la evolución de la masa encerrada en diferentes cáscaras conforme avanza el tiempo. Observamos cómo las determinaciones teóricas de x_{sc} realizadas para cada perfil en la sección 4 coinciden con el primer salto de masa en las figuras A.1-A.3 (izquierda). A la derecha, observamos la evolución de $R(x)$ y como se ajusta a la aproximación (2.7).

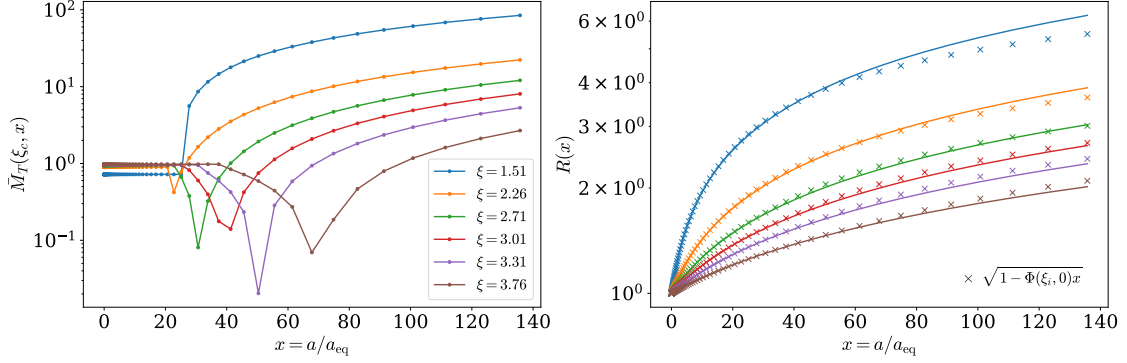


Figura A.1: Evolución de la masa y el desplazamiento comóvil para diferentes cáscaras en el caso $\rho \propto \exp\{-\xi^2\}$.

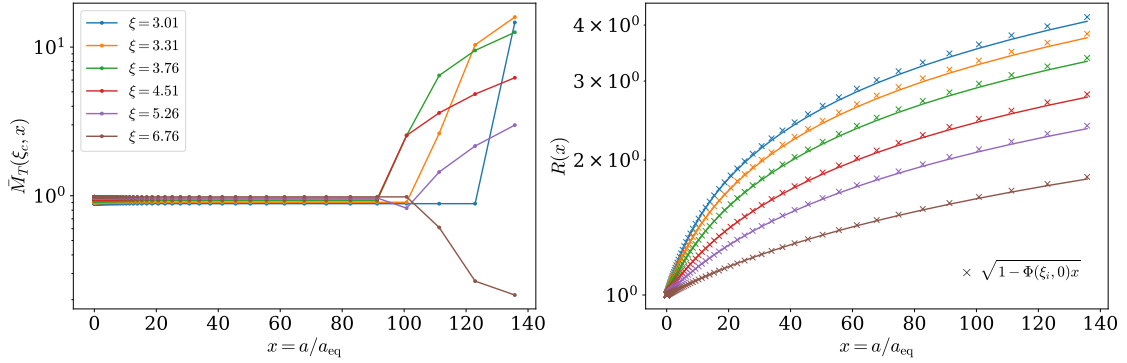


Figura A.2: Evolución de la masa y el desplazamiento comóvil para diferentes cáscaras en el caso $\rho \propto \exp\{-\xi\}$.

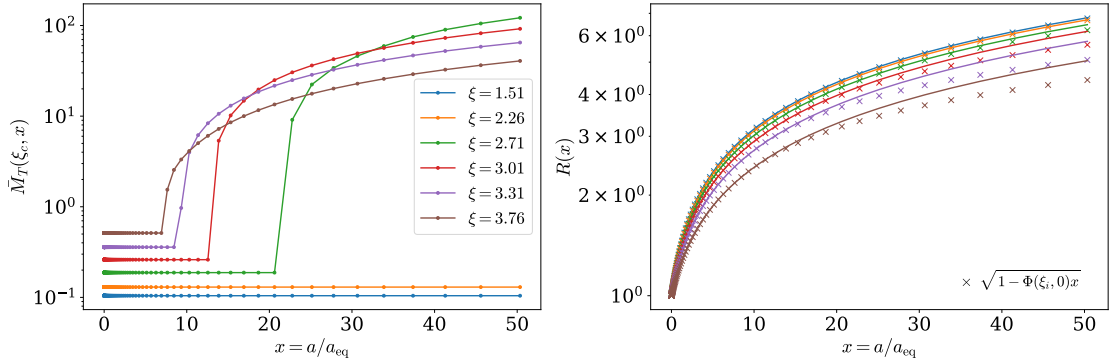


Figura A.3: Evolución de la masa y el desplazamiento comóvil para diferentes cáscaras en el caso $\rho \propto \mathcal{H}(\xi)$.

A.3. Evolución del desplazamiento comóvil

La resolución numérica de la ecuación diferencial 2.5 nos muestra la evolución del desplazamiento comóvil $R(x, \xi)$ para cada uno de los perfiles estudiados.

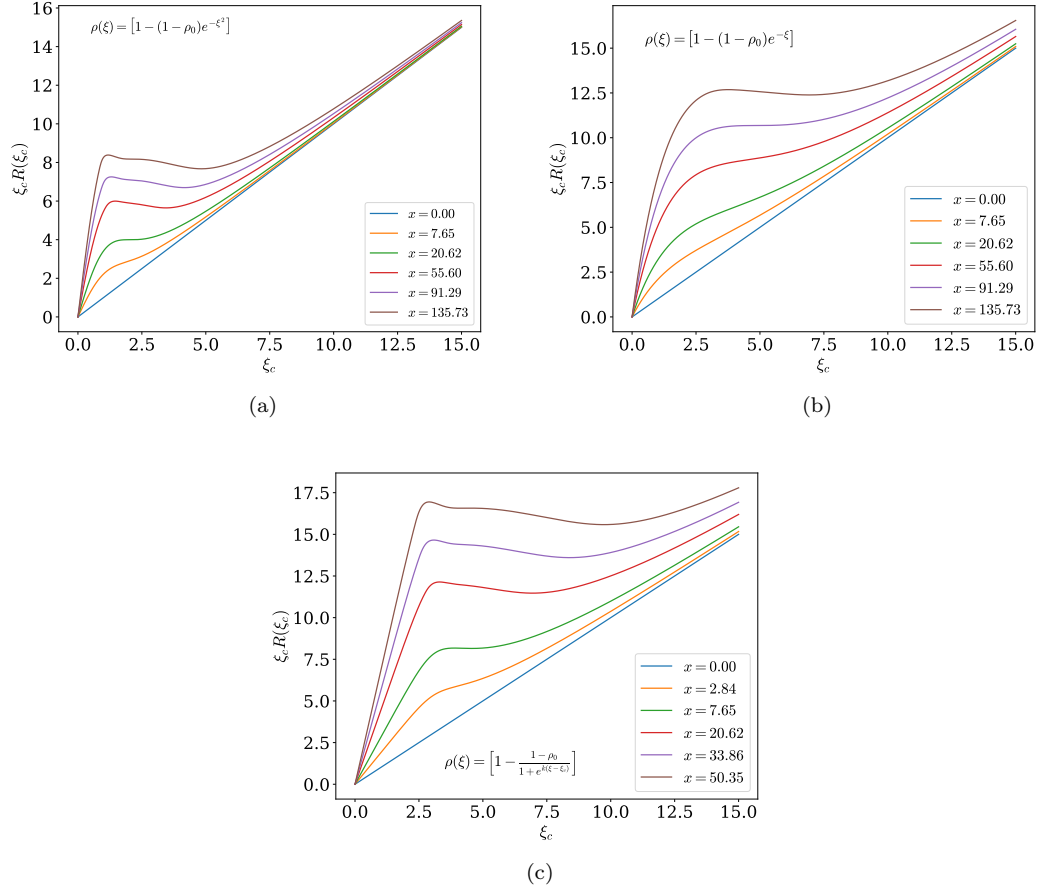


Figura A.4: Evolución del desplazamiento comóvil para los diferentes perfiles estudiados.